CAPITOLO

6

La parabola

Una sola proprietà di distanza, e la curva sa già dove mandare la luce.

OBIETTIVI

1. Ricavare l'equazione della parabola come luogo dei punti equidistanti dal fuoco e dalla direttrice, con asse verticale o orizzontale.
2. Determinare fuoco, direttrice, vertice e asse di una parabola data e, viceversa, l'equazione di una parabola da condizioni assegnate.
3. Stabilire la posizione di una retta rispetto a una parabola e scrivere le tangenti da un punto e in un punto della curva.
4. Interpretare la tangente come posizione limite delle secanti e la sua pendenza come velocità istantanea di variazione.
5. Dimostrare e applicare la proprietà focale e il teorema di Archimede sull'area del segmento parabolico.
6. Usare la parabola come modello: antenne, archi, traiettorie.

INDICE DEL CAPITOLO

6.1 La parabola come luogo geometrico 2
6.2 Determinare l'equazione di una parabola 7
6.3 Retta e parabola: le tangenti 9
6.4 Velocità di variazione e velocità istantanea 13
6.5 La proprietà focale della parabola 14
6.6 Segmento parabolico, fasci e traiettorie 16

Matematica 3 · Parte II · Retta, parabola e circonferenza · versione 1.0
Capitolo 6: La parabola · pagine 145–170 del volume completo · estratto per lo studio

Una parabola si può guardare in due modi. Nel volume dello scorso anno era il grafico di una funzione, $y = ax^2 + bx + c$: una curva che si disegna a partire dal vertice e che serve a risolvere disequazioni e problemi di massimo. In questo capitolo la guardiamo come la guardavano i geometri greci: una figura del piano definita da una proprietà di distanza, che esiste prima e indipendentemente da qualunque sistema di assi. Il capitolo 5 ci ha dato lo strumento per passare da una proprietà a un'equazione, il *luogo geometrico*; ora lo applichiamo alla prima delle coniche.

Dalla definizione come luogo ricaveremo il fuoco e la direttrice di ogni parabola, scopriremo le parabole con l'asse orizzontale, impareremo a scrivere l'equazione di una parabola che soddisfa condizioni assegnate e a condurre le tangenti. La tangente ci porterà a una delle idee più importanti della matematica, la *velocità istantanea* di un fenomeno che cambia nel tempo. Concluderemo con due risultati che hanno più di duemila anni, la proprietà di riflessione che fa funzionare le antenne paraboliche e il calcolo dell'area del segmento parabolico dovuto ad Archimede, e con la traiettoria di un proiettile.

6.1 La parabola come luogo geometrico

6.1.1 Che cosa sappiamo già

Ricordiamo in breve i risultati di *Matematica 2* (cap. 9). Il grafico della funzione quadratica $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, è una parabola con l'asse parallelo all'asse y: volge la concavità verso l'alto se $a > 0$ e verso il basso se $a < 0$; il suo vertice è $V\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$, con $\Delta = b^2 - 4ac$, e il suo asse di simmetria è la retta $x = -\dfrac{b}{2a}$. La forma $y = a(x - x_V)^2 + y_V$ mostra che la curva è la parabola $y = ax^2$ traslata con il vettore $(x_V; y_V)$. Nello stesso volume, in un riquadro, avevi incontrato anche il fuoco e la direttrice di $y = ax^2$. Ora ripartiamo proprio da lì.

6.1.2 Fuoco e direttrice

Dati nel piano un punto F e una retta d che non passa per F, si chiama **parabola** di fuoco F e direttrice d il luogo geometrico dei punti P del piano equidistanti da F e da d:

$$PF = d(P, d)$$

La retta per F perpendicolare a d è l'**asse** della parabola; il punto dell'asse equidistante da F e dalla direttrice è il **vertice**.

Il vertice appartiene davvero alla curva: è equidistante dal fuoco e dalla direttrice per costruzione. Ed è facile convincersi che la curva è simmetrica rispetto all'asse: se un punto P ha la

stessa distanza da F e da d, anche il suo simmetrico rispetto all'asse ce l'ha, perché la simmetria assiale conserva le distanze e lascia fermi F e d. Un esempio è nella Figura 6.1: i punti P e Q della curva hanno la stessa distanza dal fuoco e dalla direttrice.

Per trovare l'equazione scegliamo gli assi nel modo più comodo: il vertice nell'origine e l'asse della parabola sull'asse y. Allora il fuoco è $F(0;\, p)$ e la direttrice è la retta $y = -p$, con $p \neq 0$. Un punto generico $P(x;\, y)$ appartiene al luogo se e solo se

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y + p|$$

Entrambi i membri sono non negativi, quindi elevarli al quadrato dà un'equazione *equivalente* (capitolo 2: il quadrato è un'equivalenza proprio quando i due membri hanno lo stesso segno):

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2 = 4py \quad\Longleftrightarrow\quad y = \frac{1}{4p}\,x^2$$

Abbiamo trovato una funzione del tipo $y = ax^2$ con $a = \dfrac{1}{4p}$. I passaggi sono tutti equivalenze, quindi l'equazione descrive *tutti e soli* i punti del luogo, come richiede la definizione del capitolo 5. Viceversa, ogni parabola $y = ax^2$ con $a \neq 0$ è il luogo dei punti equidistanti da

$$F\left(0;\, \frac{1}{4a}\right) \quad \text{e} \quad d\colon y = -\frac{1}{4a}$$

Se $a > 0$ il fuoco sta sopra il vertice e la curva si apre verso l'alto; se $a < 0$ il fuoco sta sotto. Per $y = \dfrac{1}{4}x^2$ si ha $4a = 1$: fuoco $(0;\, 1)$, direttrice $y = -1$. Il punto $P(4;\, 4)$ della Figura 6.1 dista $\sqrt{16 + 9} = 5$ dal fuoco e $4 - (-1) = 5$ dalla direttrice.

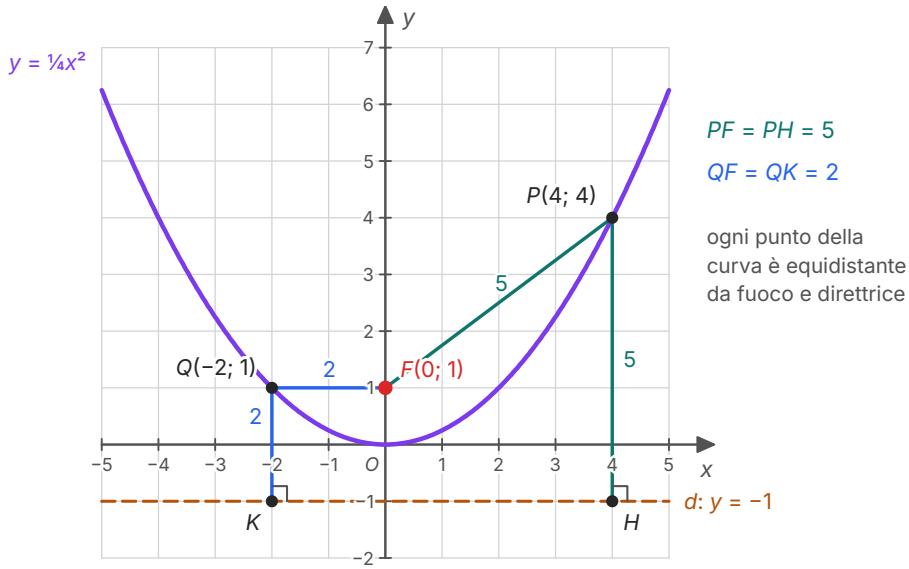


Figura 6.1 La parabola $y = \frac{1}{4}x^2$, calcolata dall'equazione, con il fuoco $F(0; 1)$ e la direttrice d: $y = -1$ (tratteggiata). Il punto $P(4; 4)$ ha distanza 5 sia da F sia dalla direttrice (H è il piede della perpendicolare); il punto $Q(-2; 1)$ ha distanza 2 da entrambi.

6.1.3 La parabola con asse verticale in generale

Ogni parabola $y = ax^2 + bx + c$ è la traslazione di $y = ax^2$ con il vettore $(x_V; y_V)$. Una traslazione conserva le distanze (capitolo 3 e *Matematica 2*, cap. 11): se P è equidistante da F e da d, il traslato di P è equidistante dal traslato di F e dal traslato di d. Basta allora spostare fuoco e direttrice di $y = ax^2$ insieme alla curva: il fuoco sale (o scende) di $\frac{1}{4a}$ rispetto al vertice, la direttrice scende (o sale) della stessa quantità. Poiché $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$, si ottiene

$$y_F = -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a} = \frac{1-\Delta}{4a} \qquad y_d = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a} = -\frac{1+\Delta}{4a}$$

IN SINTESI

La parabola $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$) ha:

- vertice $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ e asse $x = -\frac{b}{2a}$;
- fuoco $F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$;
- direttrice $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$;
- distanza tra fuoco e vertice uguale a $\frac{1}{4|a|}$, la stessa che c'è tra vertice e direttrice.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Determina vertice, fuoco e direttrice della parabola $y = x^2 - 4x + 3$ e verifica la definizione su un suo punto.

Soluzione. Qui $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$ e $\Delta = 16 - 12 = 4$. Il vertice ha ascissa $\frac{4}{2} = 2$ e ordinata $-\frac{4}{4} = -1$: $V(2; -1)$. Il fuoco ha la stessa ascissa e ordinata $\frac{1-4}{4} = -\frac{3}{4}$; la direttrice è $y = -\frac{1+4}{4} = -\frac{5}{4}$. Controllo: fuoco e direttrice distano entrambi $\frac{1}{4}$ dal vertice, come deve essere con $a = 1$.

Verifica. Il punto $P(0; 3)$ appartiene alla parabola. La sua distanza dal fuoco è $\sqrt{(0-2)^2 + (3+\frac{3}{4})^2} = \sqrt{4 + \frac{225}{16}} = \frac{17}{4}$; la sua distanza dalla direttrice è $3 + \frac{5}{4} = \frac{17}{4}$. ✓

Si può anche percorrere la strada inversa: dati fuoco e direttrice, l'equazione si ricava direttamente dalla definizione. Con $F(1; 3)$ e d: $y = 1$ si scrive $\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = |y-1|$; elevando al quadrato, $(x-1)^2 + y^2 - 6y + 9 = y^2 - 2y + 1$, cioè $4y = (x-1)^2 + 8$:

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$$

Le formule confermano il risultato: con $a = \frac{1}{4}$ e $b = -\frac{1}{2}$ si trova $\Delta = -2$, il vertice $(1; 2)$, il fuoco $(1; 3)$ e la direttrice $y = 1$. Notiamo che il vertice è proprio il punto medio tra $F(1; 3)$ e il punto $(1; 1)$ della direttrice.

DA RICORDARE

Più $|a|$ è grande, più la parabola è stretta e più il fuoco è vicino al vertice. La corda che passa per il fuoco ed è perpendicolare all'asse si chiama **corda focale**: per $x^2 = 4py$ i suoi estremi sono $(\pm 2p;\ p)$, quindi la sua lunghezza è $4|p| = \dfrac{1}{|a|}$, quattro volte la distanza tra vertice e fuoco. Il segmento che unisce un punto P della parabola al fuoco si chiama **raggio focale** di P: la sua lunghezza è la distanza di P dalla direttrice.

6.1.4 La parabola con asse orizzontale

Se nella definizione la direttrice è verticale, l'asse della parabola è orizzontale. Non serve rifare i conti: basta *scambiare i ruoli di x e di y*. Lo scambio $(x;\ y) \mapsto (y;\ x)$ è la simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$ (capitolo 3, grafico della funzione inversa), e una simmetria conserva le distanze. Si ottiene così la **parabola con asse orizzontale**

$$x = ay^2 + by + c \quad \text{con } a \neq 0$$

che volge la concavità verso destra se $a > 0$ e verso sinistra se $a < 0$. Tutte le formule si ottengono da quelle già note scambiando x e y:

$$V\left(-\frac{\Delta}{4a};\ -\frac{b}{2a}\right) \quad F\left(\frac{1-\Delta}{4a};\ -\frac{b}{2a}\right) \quad \text{asse } y = -\frac{b}{2a} \quad \text{direttrice } x = -\frac{1+\Delta}{4a}$$

Attenzione: una parabola con asse orizzontale *non* è il grafico di una funzione $y = f(x)$, perché le rette verticali $x = k$ a destra del vertice (se $a > 0$) la incontrano in due punti. È invece il grafico di x in funzione di y. Ciascuna delle due metà separate dall'asse è però il grafico di una funzione: per esempio $y = \sqrt{(x + 2)}$, che hai studiato nel capitolo 2, è la metà superiore della parabola $x = y^2 - 2$.

Studiamo per esempio la parabola $x = \dfrac{1}{2}y^2 - 2y + 1$. Qui $a = \dfrac{1}{2} > 0$: la concavità è verso destra. $\Delta = 4 - 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 = 2$. Il vertice ha ordinata $-\dfrac{-2}{1} = 2$ e ascissa $-\dfrac{2}{2} = -1$: $V(-1;\ 2)$. L'asse è la retta $y = 2$. Il fuoco ha ascissa $\dfrac{1-2}{2} = -\dfrac{1}{2}$: $F\left(-\dfrac{1}{2};\ 2\right)$. La direttrice è $x = -\dfrac{1+2}{2} = -\dfrac{3}{2}$. Per $y = 0$ si ha $x = 1$: la curva taglia l'asse x in $(1;\ 0)$; per $x = 0$ si ha $y^2 - 4y + 2 = 0$, cioè $y = 2 \pm \sqrt{2}$. La corda focale, sulla retta $x = -\dfrac{1}{2}$, ha estremi $(-½;\ 1)$ e $(-½;\ 3)$: è lunga $2 = \dfrac{1}{a}$, come previsto. Il disegno è nella Figura 6.2; si può controllare tutto con la forma $x = \dfrac{1}{2}(y - 2)^2 - 1$, che mostra la traslazione della parabola $x = \dfrac{1}{2}y^2$ con il vettore $(-1;\ 2)$.

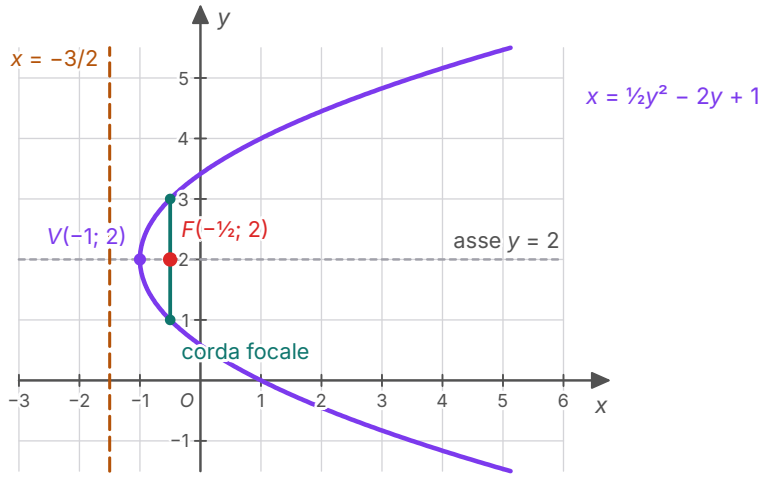


Figura 6.2 La parabola con asse orizzontale $x = \frac{1}{2}y^2 - 2y + 1$, calcolata dall'equazione: vertice $V(-1;\,2)$, fuoco $F(-\frac{1}{2};\,2)$, asse $y = 2$ e direttrice $x = -\frac{3}{2}$ (tratteggiate). Il segmento verde è la corda focale, lunga 2.

6.2 Determinare l'equazione di una parabola

L'equazione $y = ax^2 + bx + c$ contiene tre coefficienti; per individuare una parabola con asse verticale servono quindi, in generale, *tre condizioni indipendenti*, ciascuna delle quali si traduce in un'equazione nelle incognite a, b, c. Alcune condizioni valgono una sola equazione, altre due, come riassume la Tabella 6.1. Lo stesso vale, scambiando x e y, per le parabole con asse orizzontale.

Tabella 6.1 Le condizioni più comuni per una parabola $y = ax^2 + bx + c$ e le equazioni che forniscono.

Condizione	Equazione in a, b, c	Equazioni
passa per $P(x_0; y_0)$	$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$	1
ha asse $x = k$	$-\frac{b}{2a} = k$, cioè $b = -2ak$	1
ha direttrice $y = k$	$-\frac{1 + \Delta}{4a} = k$	1
è tangente a una retta data	$\Delta = 0$ nell'equazione risolvente del sistema	1
ha vertice $V(x_V; y_V)$	asse noto e passaggio per il vertice	2
ha fuoco $F(x_F; y_F)$	asse noto e $\frac{1 - \Delta}{4a} = y_F$	2

Le condizioni di passaggio per un punto e di asse assegnato danno equazioni di primo grado; per questo il caso più semplice, e il più frequente, è quello dei tre punti, che porta a un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite (*Matematica 2*, cap. 7). Le altre condizioni possono dare equazioni di grado superiore, e allora il sistema può avere più soluzioni oppure nessuna.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Scrivi l'equazione della parabola con asse verticale che passa per $A(-1; 0)$, $B(0; -3)$ e $C(2; 3)$.

Soluzione. Sostituiamo le coordinate dei tre punti in $y = ax^2 + bx + c$:

$$A\colon 0 = a - b + c \quad B\colon -3 = c \quad C\colon 3 = 4a + 2b + c$$

Da B si ha $c = -3$. Le altre due diventano $a - b = 3$ e $4a + 2b = 6$, cioè $2a + b = 3$; sommando membro a membro, $3a = 6$: $a = 2$ e $b = -1$. La parabola è

$$y = 2x^2 - x - 3$$

Controllo. In A: $2 + 1 - 3 = 0$ ✓; in C: $8 - 2 - 3 = 3$ ✓. Il risultato ha $a \neq 0$: se il sistema avesse dato $a = 0$, i tre punti sarebbero stati allineati e nessuna parabola con asse verticale li avrebbe contenuti.

Quando è noto il vertice conviene partire dalla forma $y = a(x - x_V)^2 + y_V$, che contiene già due condizioni: resta una sola incognita. Per esempio la parabola con vertice $V(1; 4)$ che passa per $(3; 0)$ è $y = a(x - 1)^2 + 4$ con $0 = 4a + 4$, cioè $a = -1$: $y = -x^2 + 2x + 3$. Con vertice $V(2; -1)$ e fuoco

$F(2;\,0)$, invece, la distanza tra vertice e fuoco è $1 = \dfrac{1}{4|a|}$ e il fuoco sta sopra il vertice, quindi $a = \dfrac{1}{4}$: la parabola è $y = \dfrac{1}{4}(x-2)^2 - 1 = \dfrac{1}{4}x^2 - x$.

La condizione di tangenza è la più delicata, perché coinvolge un'equazione di secondo grado nei parametri. Ne vediamo un esempio.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Tra le parabole con asse $x = 1$ che passano per l'origine, trova quella tangente alla retta $y = 2x - 4$.

Soluzione. Passaggio per O: $c = 0$. Asse $x = 1$: $b = -2a$. Le parabole sono $y = ax^2 - 2ax$, con $a \neq 0$: una famiglia con un solo parametro. Mettiamo a sistema con la retta:

$$ax^2 - 2ax = 2x - 4 \quad\Longleftrightarrow\quad ax^2 - (2a+2)x + 4 = 0$$

La retta è tangente quando questa equazione ha due soluzioni coincidenti, cioè quando il suo discriminante è nullo:

$$\Delta = (2a+2)^2 - 16a = 4a^2 - 8a + 4 = 4(a-1)^2 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad a = 1$$

La parabola cercata è $y = x^2 - 2x$. L'equazione risolvente diventa $x^2 - 4x + 4 = 0$, con la soluzione doppia $x = 2$: il punto di tangenza è $(2;\,0)$. Per ogni altro valore di a si ha $\Delta > 0$: la retta è secante.

6.3 Retta e parabola: le tangenti

6.3.1 Secante, tangente, esterna

Per trovare i punti comuni a una retta e a una parabola si risolve il sistema delle loro equazioni; per sostituzione si arriva a un'equazione risolvente di secondo grado. Come sai da *Matematica 2* (cap. 10), se il suo discriminante è positivo la retta è secante (due punti comuni), se è nullo la retta è tangente (un punto, contato due volte), se è negativo la retta è esterna. Esprimiamo la condizione di tangenza in modo generale: una retta non parallela all'asse è tangente a una parabola se e solo se l'equazione risolvente del sistema ha discriminante nullo. È la **condizione di tangenza** $\Delta = 0$, che useremo in tutte le coniche.

ERRORE FREQUENTE

«La retta $x = 3$ ha un solo punto in comune con la parabola $y = x^2 - 4x + 5$, quindi è tangente». Non è così. Sostituendo $x = 3$ si trova subito $y = 2$: il sistema ha una soluzione, ma l'equazione risolvente non è di secondo grado e la retta, parallela all'asse, *attraversa* la curva. Le rette parallele all'asse di una parabola (verticali per $y = ax^2 + bx + c$, orizzontali per $x = ay^2 + by + c$) la incontrano sempre in un solo punto e non sono mai tangenti. Per questo, quando si usa il fascio $y - y_0 = m(x - x_0)$, la retta verticale $x = x_0$, che il fascio non contiene, va esaminata a parte, ma non dà mai una tangente.

6.3.2 Le tangenti condotte da un punto

Da un punto $P(x_0; y_0)$ quante tangenti si possono condurre a una parabola? Si scrive il fascio di rette per P, $y - y_0 = m(x - x_0)$, lo si mette a sistema con la parabola e si impone $\Delta = 0$: si ottiene un'equazione di secondo grado in m. Le sue soluzioni sono i coefficienti angolari delle tangenti. La parabola divide il piano in due regioni: quella che contiene il fuoco, «dentro la concavità», e l'altra. Un punto della prima si chiama **punto interno a una parabola**, un punto della seconda **punto esterno a una parabola**. Per una parabola $y = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$, i punti interni sono quelli con $y_0 > ax_0^2 + bx_0 + c$; con $a < 0$ quelli con $y_0 < ax_0^2 + bx_0 + c$.

- Da un punto **esterno** si conducono **due** tangenti;
- da un punto **della parabola** se ne conduce **una**;
- da un punto **interno** non se ne conduce **nessuna**: ogni retta per quel punto, non parallela all'asse, è secante.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla parabola $y = x^2$ condotte dal punto $P(1; -3)$ e trova i punti di tangenza.

Soluzione. Il punto è esterno: $-3 < 1^2$. Le rette per P non verticali sono $y + 3 = m(x - 1)$, cioè $y = mx - m - 3$. Mettendole a sistema con la parabola:

$$x^2 - mx + m + 3 = 0$$

Imponiamo che il discriminante sia nullo: $\Delta = m^2 - 4(m + 3) = m^2 - 4m - 12 = 0$, che ha le soluzioni $m = 6$ e $m = -2$. Le tangenti sono

$$y = 6x - 9 \quad \text{e} \quad y = -2x - 1$$

Quando $\Delta = 0$ la soluzione doppia dell'equazione risolvente è $x = \frac{m}{2}$: per $m = 6$ è $x = 3$, punto di tangenza $T_1(3; 9)$; per $m = -2$ è $x = -1$, punto di tangenza $T_2(-1; 1)$. Controllo: $6 \cdot 3 - 9 = 9$ ✓ e $-2 \cdot (-1) - 1 = 1$ ✓ (vedi la Figura 6.3).

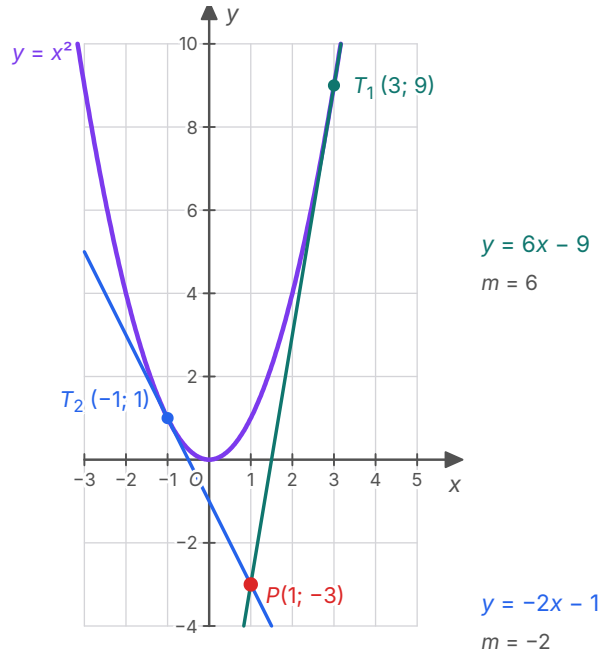


Figura 6.3 Le due tangenti alla parabola $y = x^2$ condotte dal punto esterno $P(1; -3)$, calcolate come nell'esempio svolto: $y = 6x - 9$ tocca la curva in $T_1(3; 9)$, $y = -2x - 1$ in $T_2(-1; 1)$.

6.3.3 La tangente in un punto della parabola

Se il punto $P(x_0; y_0)$ sta sulla parabola $y = ax^2 + bx + c$, la tangente in P si trova senza calcolare discriminanti. La retta per P con coefficiente angolare m incontra la parabola nei punti in cui $ax^2 + bx + c = y_0 + m(x - x_0)$. Poiché $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$, sottraendo si ottiene

$$a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0) - m(x - x_0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x - x_0)[a(x + x_0) + b - m] = 0$$

Una soluzione è $x = x_0$, cioè il punto P stesso; l'altra annulla la parentesi quadra. La retta è tangente quando anche questa seconda soluzione è x_0, cioè quando $a \cdot 2x_0 + b - m = 0$:

$$m = 2ax_0 + b$$

Questa formula ha un significato geometrico che vale la pena di guardare da vicino. Prendiamo sulla parabola $y = x^2$ il punto $P(1; 1)$ e un secondo punto Q di ascissa $1 + h$. Il coefficiente angolare della secante PQ è

$$\frac{(1 + h)^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h$$

(per $h \neq 0$). Con $h = 2$, 1, 0,5 si ottengono le secanti di pendenza 4, 3 e 2,5 della Figura 6.4: quando Q si avvicina a P, cioè quando h si avvicina a 0, la secante ruota attorno a P e la sua pendenza si avvicina a 2, il valore dato dalla formula $m = 2 \cdot 1 + 0$. La tangente in P è la **posizione limite delle secanti** PQ quando Q tende a P. È questa l'idea di tangente che si estende a ogni curva, mentre «la retta con un solo punto comune» funziona solo per le coniche e, come abbiamo visto, nemmeno sempre.

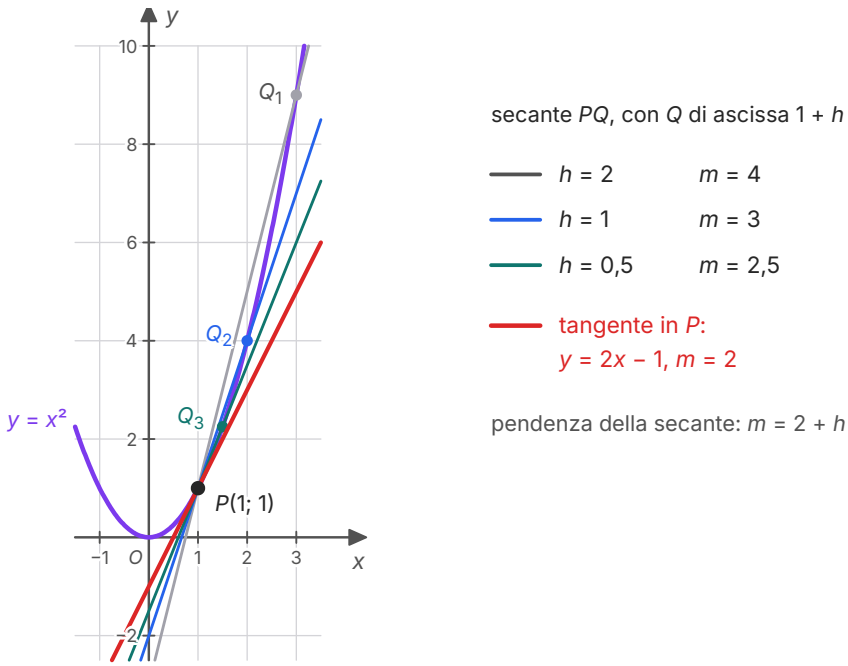


Figura 6.4 Tre secanti PQ alla parabola $y = x^2$, con $P(1; 1)$ e Q di ascissa $1 + h$, per $h = 2$, 1 e 0,5 (calcolate). Le pendenze $2 + h$ si avvicinano a 2 e le secanti alla tangente $y = 2x - 1$, in rosso.

Un altro modo di scrivere la tangente in un punto della curva è la **formula di sdoppiamento**: nell'equazione della parabola si sostituisce x^2 con x_0x, x con $\frac{x + x_0}{2}$ e y con $\frac{y + y_0}{2}$:

$$\frac{y + y_0}{2} = ax_0x + b \cdot \frac{x + x_0}{2} + c$$

Ricavando y e usando $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ si ottiene $y = (2ax_0 + b)x - ax_0^2 + c$, che è proprio la retta per P di coefficiente angolare $2ax_0 + b$. Per esempio, per $y = x^2 - 4x + 3$ nel punto $(3; 0)$: $m = 2 \cdot 3 - 4 = 2$ e la tangente è $y = 2(x - 3)$, cioè $y = 2x - 6$; lo sdoppiamento dà $\frac{y}{2} = 3x - 2(x + 3) + 3$, cioè di nuovo $y = 2x - 6$. Per la parabola con asse orizzontale si sdoppia allo stesso modo y^2 in y_0y. Lo sdoppiamento vale *solo* se P appartiene alla parabola: applicato a un punto esterno dà una retta che non è tangente (lo vedrai in un esercizio).

6.4 Velocità di variazione e velocità istantanea

Nel capitolo 3 abbiamo definito il tasso medio di variazione di una funzione f su un intervallo $[x_1; x_2]$: il rapporto $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, che sul grafico è il coefficiente angolare della secante. Quando f è la posizione di un corpo in funzione del tempo, il tasso medio è la sua velocità media. Le Indicazioni nazionali chiedono di riflettere sulla *velocità di variazione di un processo*; la parabola è il primo caso in cui possiamo farlo fino in fondo.

Un sasso lasciato cadere da fermo percorre, se si trascura la resistenza dell'aria, lo spazio $s = \frac{1}{2}gt^2$, dove $g \approx 9{,}8$ m/s² è l'accelerazione di gravità: $s(t) = 4{,}9t^2$, con s in metri e t in secondi. Con quale velocità si muove il sasso all'istante $t = 2$ s? Il tachimetro di un'automobile risponde a una domanda di questo tipo, ma con la sola formula sappiamo calcolare soltanto velocità *medie*. Calcoliamo allora la velocità media sull'intervallo $[2; 2 + h]$:

$$\frac{4{,}9(2+h)^2 - 4{,}9 \cdot 4}{h} = \frac{4{,}9(4h + h^2)}{h} = 19{,}6 + 4{,}9h$$

e osserviamo che cosa succede rendendo l'intervallo sempre più breve (Tabella 6.2).

Tabella 6.2 Velocità media del sasso in caduta libera, $s(t) = 4{,}9t^2$, su intervalli di tempo che iniziano all'istante $t = 2$ s e sono sempre più brevi.

h (s)	Intervallo (s)	Velocità media (m/s)
1	[2; 3]	24,5
0,1	[2; 2,1]	20,09
0,01	[2; 2,01]	19,649
0,001	[2; 2,001]	19,604 9

Le velocità medie si avvicinano a 19,6 m/s, e dalla formula $19{,}6 + 4{,}9h$ vediamo che possono avvicinarsi a 19,6 quanto vogliamo, purché h sia abbastanza piccolo. Questo valore si chiama **velocità istantanea** del sasso all'istante $t = 2$ s. Non possiamo semplicemente porre $h = 0$ nel rapporto iniziale, che diventerebbe $\frac{0}{0}$, privo di significato: la velocità istantanea è il valore a cui tendono le velocità medie, non una velocità media calcolata su un intervallo di durata nulla.

Lo stesso calcolo, ripetuto per una funzione quadratica qualsiasi $f(x) = ax^2 + bx + c$ sull'intervallo $[x_0; x_0 + h]$, dà

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 2ax_0 + b + ah$$

Quando h si avvicina a 0, il tasso medio si avvicina a $2ax_0 + b$: il coefficiente angolare della tangente nel punto di ascissa x_0. Il tasso istantaneo di variazione di una funzione quadratica è dunque la pendenza della sua tangente. Per il sasso, con $a = 4{,}9$ e $b = 0$, la velocità all'istante t è $9{,}8t$, cioè $v = gt$: la legge della velocità nel moto uniformemente accelerato, che conosci dal corso di fisica. Nel vertice della parabola la tangente è orizzontale e il tasso istantaneo è zero: un sasso lanciato verso l'alto, nel punto più alto, è fermo per un istante.

Il passaggio da «velocità media» a «velocità istantanea» richiede l'idea di *limite*, che qui abbiamo usato in modo intuitivo. La sua definizione precisa e la generalizzazione a ogni funzione, la *derivata*, sono il cuore del calcolo differenziale che studierai al quinto anno.

6.5 La proprietà focale della parabola

Perché un'antenna parabolica raccoglie i segnali nel suo fuoco? La risposta è un teorema di geometria. Un raggio di luce (o un'onda radio) che colpisce uno specchio si riflette in modo che il raggio incidente e il raggio riflesso formino angoli uguali con lo specchio; se lo specchio è curvo, l'angolo si misura rispetto alla retta tangente nel punto colpito.

IN SINTESI

Teorema (proprietà focale della parabola). La tangente in un punto P di una parabola forma angoli congruenti con il raggio focale PF e con la retta per P parallela all'asse.

Ipotesi: P appartiene alla parabola di fuoco F; t è la tangente in P; r è la parallela all'asse per P.

Tesi: l'angolo tra t e r è congruente all'angolo tra t e PF.

Dimostrazione. Scegliamo gli assi in modo che la parabola sia $y = ax^2$ con $a > 0$; il fuoco è $F(0; p)$ con $p = \dfrac{1}{4a}$. Se P è il vertice la tangente è l'asse x, perpendicolare sia a r sia a PF, e la tesi è evidente. Sia allora $P(x_0; ax_0^2)$ con $x_0 \neq 0$. La tangente in P ha coefficiente angolare $2ax_0$, quindi equazione $y = 2ax_0x - ax_0^2$, e incontra l'asse della parabola nel punto $T(0; -ax_0^2)$. Ora confrontiamo due lunghezze:

- $FT = p + ax_0^2$, differenza delle ordinate di F e di T;
- FP è uguale alla distanza di P dalla direttrice $y = -p$, cioè $ax_0^2 + p$, per la definizione di parabola.

Quindi $FP = FT$ e il triangolo FPT è isoscele sulla base PT: gli angoli FPT e FTP sono congruenti. Ma l'angolo FTP, tra la tangente e l'asse della parabola, è congruente all'angolo tra la tangente e la retta r, perché r e l'asse sono parallele tagliate dalla trasversale t (angoli corrispondenti). Dunque l'angolo tra t e PF è congruente all'angolo tra t e r. c.v.d.

Nella Figura 6.5 il punto è $P(3;\ \frac{9}{4})$ sulla parabola $y = \frac{1}{4}x^2$: la tangente $y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$ incontra l'asse in $T(0;\ -\frac{9}{4})$ e infatti $FT = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}$, mentre $FP = \sqrt{9 + \frac{25}{16}} = \frac{13}{4}$.

Tradotto in termini fisici, il teorema dice che un raggio che arriva parallelo all'asse, dopo la riflessione sulla parabola, passa per il fuoco: è la **proprietà focale** della parabola. Percorrendo il cammino al contrario, un raggio che parte dal fuoco si riflette parallelo all'asse. Uno specchio reale è una superficie, non una curva: è il **paraboloide di rotazione** che si ottiene facendo ruotare una parabola attorno al suo asse. Ogni sezione del paraboloide con un piano che contiene l'asse è una parabola con lo stesso fuoco, e il teorema vale su ciascuna.

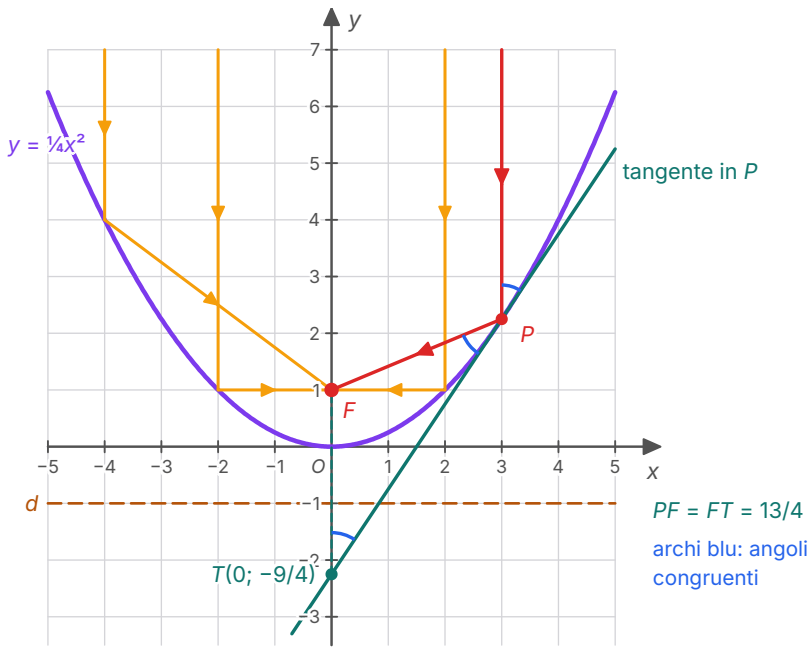


Figura 6.5 La proprietà focale per $y = \frac{1}{4}x^2$, fuoco $F(0;\ 1)$: i raggi paralleli all'asse si riflettono sulla curva e passano tutti per F. Nel punto $P(3;\ \frac{9}{4})$ sono disegnati la tangente, il punto T in cui essa incontra l'asse e i tre angoli congruenti (archi blu) usati nella dimostrazione: il triangolo FPT è isoscele.

COLLEGAMENTI

Tecnologia e fisica. La proprietà focale è sfruttata nei due versi. Un'antenna parabolica per la televisione satellitare raccoglie le onde che arrivano dal satellite, così lontano che i loro «raggi» sono praticamente paralleli, e le concentra nel ricevitore posto nel fuoco. I fari delle automobili e le torce fanno il contrario: la lampadina sta nel fuoco di uno specchio parabolico e la luce esce in un fascio quasi parallelo. Nei forni solari uno specchio parabolico rivolto al Sole concentra la luce, e quindi il calore, nel fuoco, dove si mette la pentola. Molti telescopi astronomici, detti telescopi riflettori, hanno uno specchio principale parabolico. Il nome stesso di *fuoco*, che in latino significa «focolare», ricorda il punto in cui la luce del Sole raccolta da uno specchio può accendere il fuoco.

6.6 Segmento parabolico, fasci e traiettorie

6.6.1 L'area del segmento parabolico

Una retta secante taglia la parabola in due punti A e B; la parte di piano compresa tra la corda AB e l'arco di parabola si chiama **segmento parabolico**. Nella Figura 6.6 è il segmento della parabola $y = 4 - x^2$ tagliato dall'asse x, con $A(-2; 0)$ e $B(2; 0)$. Il teorema che ne dà l'area è dovuto ad Archimede: l'area del segmento parabolico è i $\frac{2}{3}$ dell'area del parallelogramma che ha per base la corda, due lati paralleli all'asse della parabola e il quarto lato sulla tangente parallela alla corda. Se la corda è perpendicolare all'asse, il parallelogramma è un rettangolo: nel nostro esempio è il rettangolo di base 4 e altezza 4, e il segmento ha area $\frac{2}{3} \cdot 16 = \frac{32}{3}$.

Archimede lo enunciò in un modo equivalente. Il punto C dell'arco in cui la tangente è parallela alla corda forma con A e B un triangolo, detto **triangolo di Archimede**, la cui area è metà di quella del parallelogramma; il segmento parabolico vale allora i $\frac{4}{3}$ del triangolo di Archimede. Nella Figura 6.6 il triangolo ABC, con $C(0; 4)$, ha area 8, e $\frac{4}{3} \cdot 8 = \frac{32}{3}$.

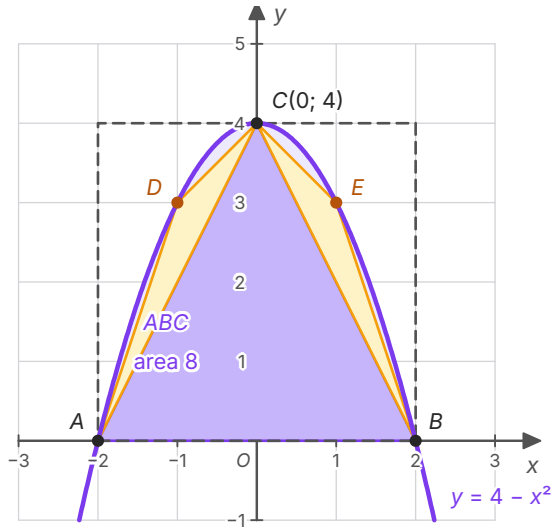


Figura 6.6 Il segmento parabolico di $y = 4 - x^2$ tagliato dall'asse x (viola chiaro), il rettangolo circoscritto (tratteggiato, area 16), il triangolo di Archimede ABC (area 8) e i due triangoli ADC e CEB costruiti allo stesso modo sulle corde AC e CB, con $D(-1; 3)$ e $E(1; 3)$: insieme hanno area 2, un quarto di quella di ABC.

Il teorema fornisce una formula comoda. Se una retta taglia $y = ax^2 + bx + c$ nei punti di ascissa $x_1 < x_2$, la tangente parallela alla corda tocca la parabola nel punto di ascissa $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$ (perché $2ax + b$ deve uguagliare la pendenza $a(x_1 + x_2) + b$ della corda) e il parallelogramma ha lati verticali di lunghezza $\dfrac{|a|(x_2 - x_1)^2}{4}$ e larghezza orizzontale $x_2 - x_1$. Prendendone i due terzi:

$$\text{area del segmento parabolico} = \frac{|a|\,(x_2 - x_1)^3}{6}$$

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola l'area del segmento parabolico delimitato dalla parabola $y = x^2$ e dalla retta $y = x + 2$.

Soluzione. I punti comuni hanno ascisse che risolvono $x^2 - x - 2 = 0$: $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$, quindi $A(-1; 1)$ e $B(2; 4)$. Con $|a| = 1$ e $x_2 - x_1 = 3$:

$$\text{area} = \frac{1 \cdot 3^3}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

Controllo con il parallelogramma. La tangente parallela alla corda ha pendenza 1 e tocca la curva nel punto di ascissa $\frac{1}{2}$, cioè $(\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$. Lì la corda ha ordinata $\frac{5}{2}$: il lato verticale del parallelogramma misura $\frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ e la sua larghezza è 3, quindi l'area è $\frac{27}{4}$. I suoi due terzi sono $\frac{9}{2}$ ✓.

APPROFONDIMENTO · ARCHIMEDE E LA QUADRATURA DELLA PARABOLA

Archimede di Siracusa (III secolo a.C.) dimostrò il teorema del segmento parabolico nell'opera nota come *Quadratura della parabola*, una lettera indirizzata al matematico Dositeo. Ne diede due dimostrazioni: una «meccanica», che immagina di mettere in equilibrio su una leva pezzi della figura, e una puramente geometrica, che qui riassumiamo con il linguaggio di oggi.

Si parte dal triangolo di Archimede ABC. Sui due lati AC e CB, che sono corde della parabola, si costruiscono allo stesso modo due nuovi triangoli (ADC e CEB nella Figura 6.6); Archimede dimostra che insieme hanno area uguale a $\frac{1}{4}$ di quella di ABC. Ripetendo la costruzione sulle quattro nuove corde si ottengono quattro triangoli di area totale $\frac{1}{16}$ di ABC, e così via: i triangoli riempiono il segmento sempre meglio. Se T è l'area di ABC, l'area del segmento è la somma

$$T\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots\right) = T \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}T$$

cioè la somma della progressione geometrica di ragione $\frac{1}{4}$ del capitolo 4. Archimede non usava somme infinite: dimostrava con una doppia riduzione all'assurdo che l'area non può essere né maggiore né minore di $\frac{4}{3}T$, è il cosiddetto *metodo di esaustione*. È uno dei primi calcoli esatti dell'area di una figura delimitata da una curva.

6.6.2 Fasci di parabole

Come le rette per un punto formano un fascio (capitolo 5), le parabole con asse verticale che passano per due punti A e B con ascisse diverse formano un **fascio di parabole**. Se $y = mx + q$ è la retta AB, il fascio si scrive

$$y = mx + q + k(x - x_A)(x - x_B)$$

Infatti per $x = x_A$ e per $x = x_B$ il termine con k si annulla e restano i punti della retta: ogni curva del fascio passa per A e per B. Per $k \neq 0$ si ottiene una parabola; per $k = 0$ si ottiene la retta AB stessa, che si considera un elemento «degenere» del fascio. Per esempio, con $A(0; 1)$ e $B(2; 3)$ la retta è $y = x + 1$ e il fascio è $y = x + 1 + kx(x - 2)$. La parabola del fascio che passa anche per $(1; 0)$ si trova imponendo $0 = 2 - k$: $k = 2$, cioè $y = 2x^2 - 3x + 1$.

6.6.3 Parabole e disequazioni in due variabili

Nel volume dello scorso anno una retta divideva il piano in due semipiani, descritti da disequazioni come $y > mx + q$. Allo stesso modo una parabola $y = ax^2 + bx + c$ divide il piano in due regioni: i punti $P(x_0; y_0)$ con $y_0 > ax_0^2 + bx_0 + c$ stanno *sopra* la curva, quelli con $y_0 < ax_0^2 + bx_0 + c$ stanno *sotto*. Se $a > 0$ la regione sopra è quella dei punti interni, che contiene il fuoco; se $a < 0$ è quella sotto. Per decidere in quale regione sta un punto basta sostituirne le coordinate, come si faceva con le rette.

Un sistema di disequazioni descrive l'intersezione di più regioni. Per esempio il sistema

$$y \geq x^2 - 2x \qquad y \leq x$$

descrive i punti che stanno sopra la parabola $y = x^2 - 2x$ (o su di essa) e sotto la retta $y = x$ (o su di essa). Le due linee si incontrano dove $x^2 - 2x = x$, cioè in $(0; 0)$ e $(3; 3)$: la regione è proprio il segmento parabolico, contorno compreso. Il punto $(1; 0)$ vi appartiene ($0 \geq -1$ e $0 \leq 1$); il punto $(1; 2)$ no, perché sta sopra la retta. La formula del segmento parabolico ci dà anche l'area della regione: $\frac{1 \cdot 3^3}{6} = \frac{9}{2}$. Regioni di questo tipo torneranno nel capitolo 11, per tutte le coniche.

6.6.4 La traiettoria di un proiettile

Se si trascura la resistenza dell'aria, un corpo lanciato in direzione obliqua si muove di moto uniforme in orizzontale e di moto uniformemente accelerato in verticale; come mostrò Galileo, la sua traiettoria è un arco di parabola. Nel corso di fisica si ricava che, per un lancio da terra con velocità v_0 e angolo α sull'orizzontale, la traiettoria ha equazione

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Nel caso particolare $\alpha = 45°$ si ha $\operatorname{tg} 45° = 1$ e $\cos^2 45° = \frac{1}{2}$, e l'equazione diventa semplicemente $y = x - \frac{g x^2}{v_0^{\,2}}$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Un pallone viene calciato da terra con velocità 14 m/s e un angolo di 45° sull'orizzontale. Trascurando la resistenza dell'aria e assumendo $g = 9{,}8$ m/s², trova la gittata e la quota massima.

Soluzione. $\frac{g}{v_0^{\,2}} = \frac{9{,}8}{196} = 0{,}05 = \frac{1}{20}$ (in m^{-1}), quindi la traiettoria è, con x e y in metri,

$$y = x - \frac{x^2}{20}$$

Il pallone torna a terra quando $y = 0$: $x\left(1 - \frac{x}{20}\right) = 0$, cioè $x = 0$ (il punto di lancio) oppure $x = 20$. La distanza orizzontale tra il punto di lancio e il punto di caduta, la **gittata**, è 20 m. Il vertice della parabola ha ascissa 10, il punto medio fra le due radici, e ordinata $10 - 5 = 5$: la quota massima è 5 m (Figura 6.7).

Controllo dimensionale. Il coefficiente $\frac{1}{20}$ ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza, così che $\frac{x^2}{20}$ è una lunghezza come x. ✓

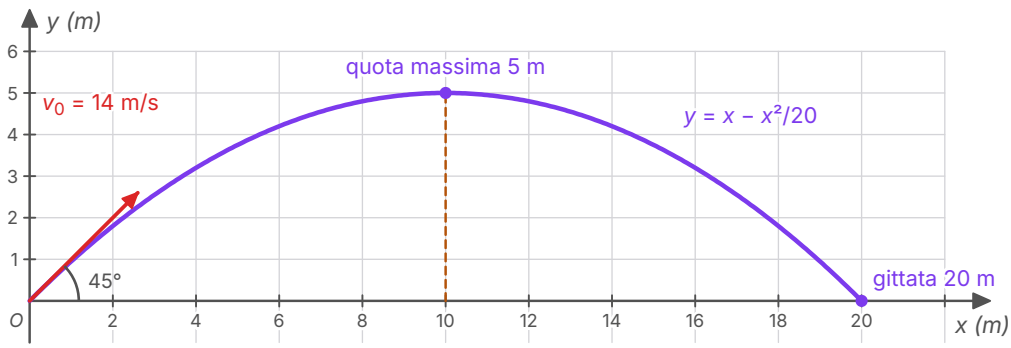


Figura 6.7 La traiettoria parabolica $y = x - \frac{x^2}{20}$ del pallone dell'esempio svolto ($v_0 = 14$ m/s, 45°, $g = 9{,}8$ m/s²), disegnata con la stessa scala sui due assi (in metri): gittata 20 m, quota massima 5 m.

Attenzione a non confondere questa curva con il grafico della quota in funzione del tempo che avevi studiato l'anno scorso: qui sull'asse orizzontale c'è una distanza, e la parabola è davvero la

forma del percorso. Il modello è valido solo se l'aria non frena sensibilmente il corpo: per un pallone a velocità moderate è una buona approssimazione, per un proiettile veloce no. Archi parabolici si incontrano anche in architettura e in ingegneria: molti ponti hanno un arco di forma parabolica, e un cavo che sostiene un carico distribuito uniformemente in orizzontale, come la strada di un ponte sospeso, assume con buona approssimazione la forma di una parabola. Un esercizio ti chiederà di studiare uno di questi archi.

SINTESI

- La parabola è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto, il fuoco, e da una retta, la direttrice; l'asse è la perpendicolare alla direttrice per il fuoco, il vertice è il punto medio tra fuoco e direttrice lungo l'asse.
- Con fuoco $(0; p)$ e direttrice $y = -p$ il luogo ha equazione $y = \frac{1}{4p}x^2$; per $y = ax^2 + bx + c$: fuoco $F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$, direttrice $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$.
- La distanza tra vertice e fuoco è $\frac{1}{4|a|}$; la corda focale è lunga $\frac{1}{|a|}$.
- La parabola con asse orizzontale $x = ay^2 + by + c$ si studia scambiando i ruoli di x e y; non è il grafico di una funzione di x.
- Una parabola con asse verticale è individuata da tre condizioni indipendenti; passaggio per tre punti e asse noto danno equazioni lineari in a, b, c.
- Una retta non parallela all'asse è tangente se e solo se l'equazione risolvente ha $\Delta = 0$; le rette parallele all'asse incontrano la parabola in un punto senza essere tangenti.
- Da un punto esterno si conducono due tangenti, da un punto della parabola una, da un punto interno nessuna.
- La tangente a $y = ax^2 + bx + c$ nel punto di ascissa x_0 ha coefficiente angolare $2ax_0 + b$: è la posizione limite delle secanti; la formula di sdoppiamento la scrive direttamente.
- Il tasso medio di variazione di una funzione quadratica su $[x_0; x_0 + h]$ vale $2ax_0 + b + ah$; per h che tende a 0 si ottiene la velocità istantanea, pendenza della tangente.
- Proprietà focale: i raggi paralleli all'asse si riflettono passando per il fuoco (antenne, fari, forni solari).
- Il segmento parabolico ha area uguale ai $\frac{2}{3}$ del parallelogramma circoscritto e ai $\frac{4}{3}$ del triangolo di Archimede (Archimede, *Quadratura della parabola*).
- Senza resistenza dell'aria la traiettoria di un proiettile è una parabola; a 45° è $y = x - \frac{gx^2}{v_0^2}$.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Il fuoco della parabola $y = 2x^2$ è il punto:
   - **A.** (0; 2)
   - **B.** $(0; \frac{1}{8})$
   - **C.** $(0; \frac{1}{2})$
   - **D.** $(\frac{1}{8}; 0)$

2. ● La direttrice della parabola $y = -\frac{x^2}{8}$ è la retta:
   - **A.** $y = -2$
   - **B.** $x = 2$
   - **C.** $y = 2$
   - **D.** $y = \frac{1}{32}$

3. ● Quale equazione rappresenta una parabola con asse orizzontale e concavità rivolta verso sinistra?
   - **A.** $y = -x^2 + 3x$
   - **B.** $x = y^2 - 3$
   - **C.** $y = x^2 - 3$
   - **D.** $x = -y^2 + 3y$

4. ● La retta $x = 2$ e la parabola $y = x^2 - 3x$:
   - **A.** sono tangenti, perché hanno un solo punto in comune
   - **B.** hanno un solo punto in comune, ma non sono tangenti
   - **C.** non hanno punti in comune
   - **D.** hanno due punti in comune

5. ● Il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola $y = 3x^2 - x + 1$ nel suo punto di ascissa 1 è:
   - **A.** 5
   - **B.** 6
   - **C.** 3
   - **D.** 2

6. ●● L'area del segmento parabolico delimitato dalla parabola $y = x^2$ e dalla retta $y = 4$ è:

   A. 16

   B. 8

   C. $\frac{32}{3}$

   D. $\frac{16}{3}$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Ogni punto di una parabola è equidistante dal fuoco e dal vertice. b) Il vertice è il punto medio tra il fuoco e il piede della perpendicolare condotta dal fuoco alla direttrice. c) Se $|a|$ aumenta, il fuoco di $y = ax^2 + bx + c$ si avvicina al vertice. d) Da un punto interno a una parabola si possono condurre due tangenti. e) La formula di sdoppiamento dà la tangente condotta da qualunque punto del piano.

8. ● Completa. La parabola è il luogo dei punti del piano _____ da un punto fisso, detto _____, e da una retta fissa, detta _____. Per $y = ax^2$ la corda focale è lunga _____ e la distanza tra fuoco e vertice è _____.

9. ● Completa. Il tasso medio di variazione di $f(x) = ax^2 + bx + c$ sull'intervallo $[x_0; x_0 + h]$ è _____; quando h si avvicina a 0 esso si avvicina a _____, che è il _____ della retta tangente nel punto di ascissa x_0.

Calcolare

10. ● Determina vertice, fuoco, asse e direttrice delle parabole: a) $y = x^2 - 6x + 5$; b) $y = -2x^2 + 4x$; c) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$.

11. ● Determina vertice, fuoco, asse e direttrice delle parabole con asse orizzontale: a) $x = y^2 - 2y$; b) $x = -\frac{1}{2}y^2 + 4y - 6$.

12. ●● Scrivi l'equazione della parabola, ricavandola dalla definizione di luogo geometrico, che ha: a) fuoco $F(0; -3)$ e direttrice $y = 3$; b) fuoco $F(2; 1)$ e direttrice $y = -3$; c) fuoco $F(3; 0)$ e direttrice $x = -1$.

13. ●● Scrivi l'equazione della parabola con asse verticale che passa per i punti $A(0; -2)$, $B(1; 0)$ e $C(-1; -6)$.

14. ●● Scrivi l'equazione della parabola con asse verticale che ha vertice $V(-1; 3)$ e passa per $P(1; -5)$.

15. ●● Scrivi l'equazione della parabola con asse orizzontale che passa per l'origine e per i punti $A(3; 1)$ e $B(0; -2)$.

16. ●● Stabilisci la posizione della parabola $y = x^2 - 4x + 5$ rispetto a ciascuna retta e trova gli eventuali punti comuni: a) $y = 2x - 4$; b) $y = x + 1$; c) $y = -x$; d) $x = 3$.

17. ●● Scrivi l'equazione della retta tangente: a) a $y = x^2 - 3x + 2$ nel punto di ascissa 3; b) a $y = -2x^2 + x$ nel punto di ascissa -1; c) a $x = y^2 - 1$ nel punto $P(3; 2)$, con la formula di sdoppiamento.

18. ●● Scrivi le equazioni delle tangenti alla parabola $y = x^2 + 3$ condotte dal punto $P(0; -1)$ e trova i punti di tangenza.

19. ●● Data la parabola $y = -x^2 + 4x$, stabilisci quante tangenti si possono condurre dai punti $A(2; 1)$ e $B(2; 6)$ e, quando esistono, scrivine le equazioni.

20. ●● Calcola l'area del segmento parabolico delimitato: a) dalla parabola $y = x^2 - 2x - 3$ e dall'asse x; b) dalla parabola $y = x^2$ e dalla retta $y = x + 2$.

21. ●●● Considera il fascio delle parabole con asse verticale che passano per $A(0; 2)$ e $B(1; 0)$. a) Scrivi l'equazione del fascio. b) Trova la parabola del fascio che passa per $C(2; 4)$. c) Trova la parabola del fascio che ha il vertice sull'asse y. d) Per quale valore del parametro si ottiene una retta?

Dimostrare e argomentare

22. ●● Dimostra che la corda focale della parabola $y = ax^2$ è lunga $\frac{1}{|a|}$, cioè quattro volte la distanza tra il vertice e il fuoco. Perché il risultato vale per ogni parabola $y = ax^2 + bx + c$?

23. ●●● Dimostra che le tangenti alla parabola $y = ax^2$ nei due estremi della corda focale sono perpendicolari e si incontrano in un punto della direttrice.

24. ●● Trova l'errore. «Per scrivere la tangente alla parabola $y = x^2$ condotta dal punto $P(1; -3)$ uso lo sdoppiamento: $\frac{y - 3}{2} = x$, cioè $y = 2x + 3$.» Verifica che la retta ottenuta non è tangente e spiega dove sta l'errore.

25. ●●● Dimostra che il vertice è, tra tutti i punti di una parabola, quello più vicino al fuoco.

26. ●● Spiega perché, per una funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$, la velocità istantanea di variazione è nulla nel punto di ascissa $-\frac{b}{2a}$. Interpreta il risultato per un oggetto lanciato verso l'alto, la cui quota è una funzione quadratica del tempo.

Problemi

27. ● La sezione di un'antenna parabolica, passante per l'asse, è un arco di parabola largo 60 cm e profondo 9 cm. A quale distanza dal vertice va posto il ricevitore? (Suggerimento: metti il vertice nell'origine e l'asse sull'asse y.)

28. ●● Lo specchio di un faro ha una sezione parabolica con un'apertura di 16 cm e una profondità di 4 cm. Dove va posta la lampadina perché il fascio di luce esca parallelo all'asse? Che cosa ha di particolare la corda che chiude l'apertura?

29. ●● Un ponte ha un arco parabolico con una luce (distanza tra i piedi dell'arco) di 40 m e un'altezza massima di 10 m. a) Scrivi l'equazione dell'arco in un riferimento con l'origine sotto il punto più alto. b) Quanto è alto l'arco a 5 m da uno dei piedi? c) Quanto è larga la fascia, simmetrica rispetto all'asse, in cui l'arco è alto almeno 8 m?

30. ●● Un sasso cade da fermo e percorre lo spazio $s(t) = 4{,}9t^2$ (metri, secondi). a) Calcola la velocità media tra $t = 1$ s e $t = 3$ s. b) Calcola la velocità media nell'intervallo $[3; 3 + h]$. c) Deduci la velocità istantanea all'istante $t = 3$ s. d) In quale istante la velocità istantanea è 49 m/s?

31. ●● Un pallone è calciato da terra con un angolo di 45°. Trascura la resistenza dell'aria e usa $g = 9{,}8$ m/s^2. a) Con velocità iniziale 14 m/s, il pallone supera una barriera alta 1,5 m posta a 18 m dal punto di lancio? b) Con velocità iniziale 7 m/s, quali sono la gittata e la quota massima?

32. ● Una finestra ha la forma di un segmento parabolico: la base è larga 1,2 m e l'altezza massima è 0,9 m. Calcola l'area del vetro.

Verso la verifica

33. ●● Data la parabola $y = -x^2 + 2x + 3$: a) trova vertice, fuoco e direttrice; b) scrivi le tangenti nei suoi punti di intersezione con l'asse x e trova il loro punto di intersezione; c) calcola l'area del segmento parabolico tagliato dall'asse x; d) verifica che questa area è $\frac{4}{3}$ di quella del triangolo che ha per vertici i due punti sull'asse x e il vertice della parabola.

34. ●●● Trova le parabole di equazione $y = x^2 + bx + 1$ tangenti alla retta $y = x$ e i rispettivi punti di tangenza.

35. ●●● Sfida. Dimostra che i punti del piano dai quali si possono condurre alla parabola $y = \frac{x^2}{4}$ due tangenti perpendicolari sono tutti e soli i punti della direttrice.

PER APPROFONDIRE

- [ARC] Archimede, *Opere*: la *Quadratura della parabola*, con le due dimostrazioni, meccanica e geometrica, dell'area del segmento parabolico.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Apollonio e le *Coniche*, Archimede e il metodo di esaustione.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le coniche come luoghi e la proprietà di riflessione.

Glossario del capitolo

Condizione di tangenza
Una retta non parallela all'asse è tangente a una parabola se e solo se l'equazione risolvente del loro sistema ha discriminante nullo.

Corda focale
La corda di una parabola che passa per il fuoco ed è perpendicolare all'asse; è lunga $\frac{1}{|a|}$.

Fascio di parabole
L'insieme delle parabole con asse verticale che passano per due punti dati; si scrive $y = mx + q + k(x - x_A)(x - x_B)$.

Formula di sdoppiamento
Regola che scrive la tangente in un punto $(x_0; y_0)$ di una parabola sostituendo x^2 con x_0x, x con $(x + x_0)/2$ e y con $(y + y_0)/2$.

Gittata
La distanza orizzontale tra il punto di lancio e il punto in cui un proiettile torna alla quota di partenza.

Parabola con asse orizzontale
La curva di equazione $x = ay^2 + by + c$ ($a \neq 0$), con asse parallelo all'asse x; non è il grafico di una funzione di x.

Paraboloide di rotazione
La superficie che si ottiene facendo ruotare una parabola attorno al suo asse: è la forma degli specchi delle antenne paraboliche e dei fari.

Posizione limite delle secanti
La retta a cui si avvicinano le secanti PQ quando il punto Q si avvicina a P lungo la curva: è la tangente in P.

Proprietà focale
Proprietà della parabola: un raggio parallelo all'asse, riflesso dalla curva, passa per il fuoco, e un raggio uscente dal fuoco si riflette parallelo all'asse.

Punto esterno a una parabola
Un punto che non appartiene alla parabola né alla regione dalla parte della concavità; da esso si conducono due tangenti.

Punto interno a una parabola
Un punto della regione del piano che la parabola delimita dalla parte della concavità, la stessa che contiene il fuoco; da esso non si conducono tangenti.

Raggio focale
Il segmento che unisce un punto della parabola al fuoco; è lungo quanto la distanza del punto dalla direttrice.

Segmento parabolico
La parte di piano compresa tra un arco di parabola e la corda che ne unisce gli estremi.

Triangolo di Archimede
Il triangolo che ha per base la corda di un segmento parabolico e per terzo vertice il punto dell'arco in cui la tangente è parallela alla corda; il segmento ne vale i $\frac{4}{3}$.

Velocità istantanea
Il valore a cui si avvicinano le velocità medie su intervalli di tempo sempre più brevi che iniziano (o finiscono) in un istante dato; è la pendenza della tangente al grafico della legge oraria.

Soluzioni

1. B. $4a = 8$, quindi il fuoco è $(0; \frac{1}{8})$.

2. C. $a = -\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4a} = -2$: fuoco $(0; -2)$, direttrice $y = 2$.

3. D. Asse orizzontale: equazione $x = ay^2 + by + c$; concavità verso sinistra: $a < 0$.

4. B. Il punto comune è $(2; -2)$; la retta è parallela all'asse della parabola e la attraversa.

5. A. $m = 2 \cdot 3 \cdot 1 - 1 = 5$.

6. C. La retta taglia la parabola in $(\pm 2; 4)$: il rettangolo ha base 4 e altezza 4, e $\frac{2}{3} \cdot 16 = \frac{32}{3}$ (oppure $\frac{1 \cdot 4^3}{6} = \frac{32}{3}$).

7. a) Falso: dal fuoco e dalla *direttrice*. b) Vero. c) Vero: la distanza è $\frac{1}{4|a|}$. d) Falso: da un punto interno non si conduce nessuna tangente. e) Falso: vale solo per i punti della parabola.

8. equidistanti; fuoco; direttrice (che non passa per il fuoco); $\frac{1}{|a|}$; $\frac{1}{4|a|}$.

9. $2ax_0 + b + ah$; $2ax_0 + b$; coefficiente angolare (la pendenza).

10. a) $\Delta = 16$: $V(3; -4)$, $F(3; -\frac{15}{4})$, asse $x = 3$, direttrice $y = -\frac{17}{4}$. b) $\Delta = 16$: $V(1; 2)$, $F(1; \frac{15}{8})$, asse $x = 1$, direttrice $y = \frac{17}{8}$. c) $\Delta = -1$: $V(-2; 1)$, $F(-2; 2)$, asse $x = -2$, direttrice $y = 0$.

11. a) $\Delta = 4$: $V(-1; 1)$, $F(-\frac{3}{4}; 1)$, asse $y = 1$, direttrice $x = -\frac{5}{4}$. b) $\Delta = 16 - 12 = 4$: $V(2; 4)$, $F(\frac{3}{2}; 4)$, asse $y = 4$, direttrice $x = \frac{5}{2}$.

12. a) $x^2 + (y+3)^2 = (y-3)^2 \Rightarrow y = -\frac{x^2}{12}$. b) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = (y+3)^2 \Rightarrow 8y = x^2 - 4x - 4$, $y = \frac{x^2}{8} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$. c) $(x-3)^2 + y^2 = (x+1)^2 \Rightarrow 8x = y^2 + 8$, $x = \frac{y^2}{8} + 1$.

13. $c = -2$; $a + b = 2$; $a - b = -4$: $a = -1$, $b = 3$. $y = -x^2 + 3x - 2$.

14. $y = a(x+1)^2 + 3$; $-5 = 4a + 3$, $a = -2$: $y = -2x^2 - 4x + 1$.

15. $x = ay^2 + by + c$: $c = 0$; $a + b = 3$; $4a - 2b = 0$: $a = 1$, $b = 2$. $x = y^2 + 2y$.

16. a) $x^2 - 6x + 9 = 0$, $\Delta = 0$: tangente in $(3; 2)$. b) $x^2 - 5x + 4 = 0$: secante in $(1; 2)$ e $(4; 5)$. c) $x^2 - 3x + 5 = 0$, $\Delta = -11 < 0$: esterna. d) un solo punto, $(3; 2)$, ma la retta è parallela all'asse: non è tangente.

17. a) $y_0 = 2$, $m = 2 \cdot 3 - 3 = 3$: $y = 3x - 7$. b) $y_0 = -3$, $m = -4 \cdot (-1) + 1 = 5$: $y = 5x + 2$. c) $\frac{x+3}{2} = 2y - 1$, cioè $x = 4y - 5$ (oppure $y = \frac{x+5}{4}$); controllo: $y^2 - 4y + 4 = 0$ ha la soluzione doppia $y = 2$.

18. $y = mx - 1$; $x^2 - mx + 4 = 0$; $\Delta = m^2 - 16 = 0$: $m = \pm 4$. Tangenti $y = 4x - 1$ e $y = -4x - 1$, punti di tangenza $(2; 7)$ e $(-2; 7)$.

19. Rette $y = m(x-2) + k$ con $k = 1$ o 6; risolvente $x^2 + (m-4)x - 2m + k = 0$. Per A: $\Delta = m^2 + 12 > 0$ per ogni m: A è interno ($1 < 4$), nessuna tangente. Per B: $\Delta = m^2 - 8 = 0$, $m = \pm 2\sqrt{2}$: tangenti $y = 2\sqrt{2}(x-2) + 6$ e $y = -2\sqrt{2}(x-2) + 6$, con punti di tangenza $(2 - \sqrt{2}; 2)$ e $(2 + \sqrt{2}; 2)$.

20. a) Radici -1 e 3: $\frac{1 \cdot 4^3}{6} = \frac{32}{3}$. b) Ascisse -1 e 2: $\frac{3^3}{6} = \frac{9}{2}$.

21. a) Retta AB: $y = -2x + 2$; fascio $y = -2x + 2 + kx(x-1)$. b) $4 = -2 + 2k$, $k = 3$:

$y = 3x^2 - 5x + 2$. c) Il coefficiente di x è $-2 - k$: deve essere nullo, $k = -2$: $y = -2x^2 + 2$. d) $k = 0$: la retta AB.

22. Fuoco $F(0; \frac{1}{4a})$; i punti della parabola con $y = \frac{1}{4a}$ hanno $x^2 = \frac{1}{4a^2}$, cioè $x = \pm\frac{1}{2|a|}$: la corda è lunga $\frac{1}{|a|}$, e $\frac{1}{|a|} = 4 \cdot \frac{1}{4|a|}$. Ogni parabola $y = ax^2 + bx + c$ è una traslazione di $y = ax^2$, e le traslazioni conservano le lunghezze.

23. Estremi $(\pm\frac{1}{2a}; \frac{1}{4a})$. Coefficienti angolari delle tangenti: $2a \cdot (\pm\frac{1}{2a}) = \pm 1$, con prodotto -1: perpendicolari. Le tangenti sono $y = \pm x - \frac{1}{4a}$; si incontrano per $x = 0$, nel punto $(0; -\frac{1}{4a})$, che sta sulla direttrice.

24. Lo sdoppiamento vale solo per un punto della parabola, e P non lo è. Mettendo a sistema $y = 2x + 3$ con $y = x^2$: $x^2 - 2x - 3 = 0$, $\Delta = 16 > 0$: la retta è secante, nei punti $(-1; 1)$ e $(3; 9)$. (Curiosità: sono proprio i due punti di tangenza delle tangenti condotte da P, trovati nell'esempio svolto.) Le tangenti corrette sono $y = 6x - 9$ e $y = -2x - 1$.

25. Traccia: sia $a > 0$ (l'altro caso è simmetrico). Per la definizione, la distanza di un punto P della parabola dal fuoco è uguale alla distanza dalla direttrice, cioè $y_P - y_d$. Tutti i punti della parabola hanno $y_P \geq y_V$, con l'uguaglianza solo nel vertice. Quindi $PF = y_P - y_d \geq y_V - y_d = VF$, con l'uguaglianza solo per $P = V$.

26. La velocità istantanea nel punto di ascissa x_0 è $2ax_0 + b$, che si annulla per $x_0 = -\frac{b}{2a}$, l'ascissa del vertice: lì la tangente è orizzontale. Se la quota è $h(t) = -4{,}9t^2 + v_0 t$, nel vertice la quota è massima e la velocità è zero: l'oggetto smette di salire e comincia a scendere.

27. Vertice in O, bordo in $(\pm 30; 9)$: $9 = a \cdot 900$, $a = \frac{1}{100}$. Il fuoco è a $\frac{1}{4a} = 25$ cm dal vertice.

28. Bordo in $(\pm 8; 4)$: $a = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$; il fuoco è a $\frac{1}{4a} = 4$ cm dal vertice. La lampadina va posta sull'asse, a 4 cm dal vertice: proprio all'altezza del bordo. La corda di apertura passa per il fuoco ed è perpendicolare all'asse: è la corda focale, lunga $\frac{1}{a} = 16$ cm.

29. a) $y = -\frac{x^2}{40} + 10$ (piedi in $(\pm 20; 0)$). b) A 5 m da un piede, $x = \pm 15$: $y = 10 - \frac{225}{40} = 4{,}375$ m. c) $10 - \frac{x^2}{40} \geq 8 \iff x^2 \leq 80 \iff |x| \leq 4\sqrt{5}$: larghezza $8\sqrt{5} \approx 17{,}9$ m.

30. a) $\frac{44{,}1 - 4{,}9}{2} = 19{,}6$ m/s. b) $\frac{4{,}9(3+h)^2 - 44{,}1}{h} = 29{,}4 + 4{,}9h$ m/s. c) 29,4 m/s. d) In generale la velocità è $9{,}8t$: $9{,}8t = 49$ per $t = 5$ s.

31. a) $y = x - \frac{x^2}{20}$; per $x = 18$, $y = 18 - \frac{324}{20} = 1{,}8$ m: il pallone passa, 30 cm sopra la barriera. b) $\frac{9{,}8}{49} = 0{,}2$: $y = x - 0{,}2x^2$; gittata 5 m, quota massima $2{,}5 - 1{,}25 = 1{,}25$ m.

32. $\frac{2}{3} \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$ m^2.

33. a) $\Delta = 16$: $V(1; 4)$, $F(1; \frac{15}{4})$, direttrice $y = \frac{17}{4}$. b) Intersezioni $(-1; 0)$ e $(3; 0)$; $m = -2x_0 + 2$: in $(-1; 0)$ $m = 4$, tangente $y = 4x + 4$; in $(3; 0)$ $m = -4$, tangente $y = -4x + 12$; si incontrano in $(1; 8)$. c) $\frac{1 \cdot 4^3}{6} = \frac{32}{3}$. d) Il triangolo ha base 4 e altezza 4, area 8; $\frac{4}{3} \cdot 8 = \frac{32}{3}$ ✓ (il vertice è il punto in cui la tangente è parallela alla corda).

34. $x^2 + (b-1)x + 1 = 0$; $\Delta = (b-1)^2 - 4 = 0$: $b = 3$ oppure $b = -1$. Per $b = 3$: $y = x^2 + 3x + 1$, tangente in $(-1; -1)$. Per $b = -1$: $y = x^2 - x + 1$, tangente in $(1; 1)$.

35. Da $P(x_0; y_0)$: $\frac{x^2}{4} = m(x - x_0) + y_0$ ha $\Delta = m^2 - x_0 m + y_0$ (dopo aver moltiplicato per 4). Le tangenti hanno pendenze m_1, m_2 soluzioni di $m^2 - x_0 m + y_0 = 0$, con prodotto $m_1 m_2 = y_0$. Sono per-

pendicolari se e solo se $y_0 = -1$; in quel caso il discriminante $x_0^2 + 4$ è positivo, quindi le due tangenti esistono davvero. Il luogo è la retta $y = -1$, la direttrice.