CAPITOLO

5

La retta e i luoghi geometrici

«Tutti i problemi di geometria si possono facilmente ridurre a termini tali che, in seguito, per costruirli basta conoscere la lunghezza di alcune linee rette.»
— René Descartes, La Géométrie (1637), libro I (traduzione della redazione)

OBIETTIVI

1. Dimostrare la formula della distanza di un punto da una retta e calcolare l'area di un triangolo dati i vertici.
2. Riconoscere un fascio di rette generato da due rette e scegliere la retta con una proprietà data, senza dimenticare la retta esclusa.
3. Trovare l'equazione di un luogo geometrico, anche descritto da un parametro, controllando «tutti e soli».
4. Scrivere le equazioni dell'asse di un segmento e delle bisettrici degli angoli di due rette.
5. Dimostrare lo stesso teorema con il metodo sintetico e con il metodo analitico, confrontandoli.
6. Risolvere problemi su triangoli, simmetrie e percorsi minimi nel piano cartesiano.

INDICE DEL CAPITOLO

5.1 Distanze e aree nel piano cartesiano 2
5.2 I fasci di rette generati da due rette 7
5.3 I luoghi geometrici nel piano cartesiano 10
5.4 Sintetico e analitico: due modi di dimostrare 14
5.5 Problemi nel piano: triangoli, simmetrie, percorsi minimi 17

Matematica 3 · Parte II · Retta, parabola e circonferenza · versione 1.0
Capitolo 5: La retta e i luoghi geometrici · pagine 119–144 del volume completo · estratto per lo studio

Un navigatore satellitare deve decidere se un'auto è ancora sulla strada o se ne è allontanata, e di quanto; un programma di disegno deve trovare il punto in cui due linee si incrociano; un ingegnere vuole collocare un ripetitore alla stessa distanza da tre paesi. Sono domande geometriche, ma il computer le affronta con le coordinate: le trasforma in equazioni e le risolve. Lo scorso anno, in *Matematica 2*, hai imparato a scrivere l'equazione di una retta, a riconoscere rette parallele e perpendicolari e a calcolare distanze e punti medi. In questo capitolo quegli strumenti diventano un metodo.

Prima completiamo il quadro sulla retta: **dimostriamo** la formula della distanza di un punto da una retta, che nel volume dello scorso anno era stata solo enunciata, e ricaviamo una formula per l'area di un triangolo di cui si conoscono i vertici. Poi studiamo i fasci di rette generati da due rette, un modo efficiente per cercare una retta con una proprietà data. Il cuore del capitolo è il concetto di **luogo geometrico** tradotto in coordinate: è la chiave con cui, nei capitoli successivi, scopriremo le equazioni della parabola, della circonferenza, dell'ellisse e dell'iperbole. Infine confrontiamo due modi di fare geometria, quello **sintetico** di Euclide e quello **analitico** di Cartesio, dimostrando lo stesso teorema in entrambi.

5.1 Distanze e aree nel piano cartesiano

5.1.1 Che cosa sappiamo già

La Tabella 5.1 riassume i risultati sul piano cartesiano e sulla retta studiati in *Matematica 2* (capitolo 6). Non li dimostriamo di nuovo: li useremo come strumenti. Due dettagli torneranno spesso. Una retta in **forma implicita** r: $ax + by + c = 0$ ha coefficiente angolare $m = -a/b$ se $b \neq 0$, mentre è verticale se $b = 0$. Perciò due rette $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ sono parallele quando $ab' - a'b = 0$ e perpendicolari quando $aa' + bb' = 0$: queste condizioni valgono anche per le rette verticali e orizzontali, per le quali il coefficiente angolare non esiste o è nullo.

Tabella 5.1 Punti e rette nel piano cartesiano: il richiamo da *Matematica 2*. $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ sono punti; $r: ax + by + c = 0$ e $r': a'x + b'y + c' = 0$ sono rette.

Grandezza o condizione	Formula
Distanza tra due punti	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Punto medio di AB	$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$
Baricentro del triangolo ABC	$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$
Forma esplicita e implicita	$y = mx + q, \quad ax + by + c = 0$
Coefficiente angolare da due punti	$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ $(x_A \neq x_B)$
Retta per un punto con coefficiente angolare m	$y - y_A = m(x - x_A)$
Retta per due punti	$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$ (denominatori non nulli)
Rette parallele	$m = m'$, cioè $ab' - a'b = 0$
Rette perpendicolari	$m \cdot m' = -1$, cioè $aa' + bb' = 0$
Fascio proprio di centro A	$y - y_A = m(x - x_A)$ e $x = x_A$
Fascio improprio	$y = mx + k$ (m fisso), oppure $x = k$

5.1.2 La distanza di un punto da una retta

Ricordiamo che la distanza di un punto P da una retta r è la lunghezza del segmento PH, dove H è il piede della perpendicolare condotta da P a r: è la minima tra le distanze di P dai punti della retta. Per dimostrare la formula che la calcola ci serve un'osservazione semplice ma utilissima sui coefficienti della forma implicita.

Siano $Q_1(x_1; y_1)$ e $Q_2(x_2; y_2)$ due punti distinti di $r: ax + by + c = 0$. Sottraendo membro a membro le uguaglianze $ax_1 + by_1 + c = 0$ e $ax_2 + by_2 + c = 0$ otteniamo

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

Il primo membro è il prodotto scalare (vol. 2, cap. 13) del vettore $n(a; b)$ per il vettore Q_1Q_2, che ha la direzione della retta. Un prodotto scalare nullo tra vettori non nulli significa perpendicolarità: il vettore $n(a; b)$ è perpendicolare alla retta. Lo chiamiamo **vettore normale** alla retta $r: ax + by + c = 0$. Per esempio la retta $3x + 4y - 7 = 0$ ha vettore normale $n(3; 4)$: ogni retta perpendicolare a essa ha la direzione di n.

IN SINTESI

Teorema (distanza di un punto da una retta). Ipotesi: $P_0(x_0; y_0)$ è un punto e r: $ax + by + c = 0$ è una retta, con a e b non entrambi nulli. **Tesi:** la distanza di P_0 da r è

$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

La retta va scritta in forma implicita. Il numeratore è nullo se e solo se P_0 sta su r.

Dimostrazione. La perpendicolare a r condotta da P_0 ha la direzione del vettore normale $n(a; b)$, quindi i suoi punti si ottengono spostandosi da P_0 di un multiplo di n: sono i punti $(x_0 + ta; y_0 + tb)$, con t numero reale. Il piede H della perpendicolare è il punto di questa forma che sta su r; sostituendo nell'equazione della retta

$$a(x_0 + ta) + b(y_0 + tb) + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$$

Il denominatore $a^2 + b^2$ non è nullo perché a e b non sono entrambi nulli. Il vettore P_0H è $tn = (ta; tb)$, quindi la sua lunghezza è

$$P_0H = \sqrt{t^2a^2 + t^2b^2} = |t| \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

c.v.d.

La dimostrazione dà più della distanza: dà anche le coordinate del piede H. Proviamo con il punto $P(4; 5)$ e la retta r: $3x + 4y - 7 = 0$ (Figura 5.1). La formula dà subito $d = |12 + 20 - 7| : 5 = 25 : 5 = 5$. Seguendo la dimostrazione, i punti della perpendicolare sono $(4 + 3t; 5 + 4t)$; sostituendo nella retta si ha $12 + 9t + 20 + 16t - 7 = 0$, cioè $25 + 25t = 0$ e $t = -1$: il piede è $H(1; 1)$, e infatti $3 + 4 - 7 = 0$. Come controllo, $PH = \sqrt{9 + 16} = 5$.

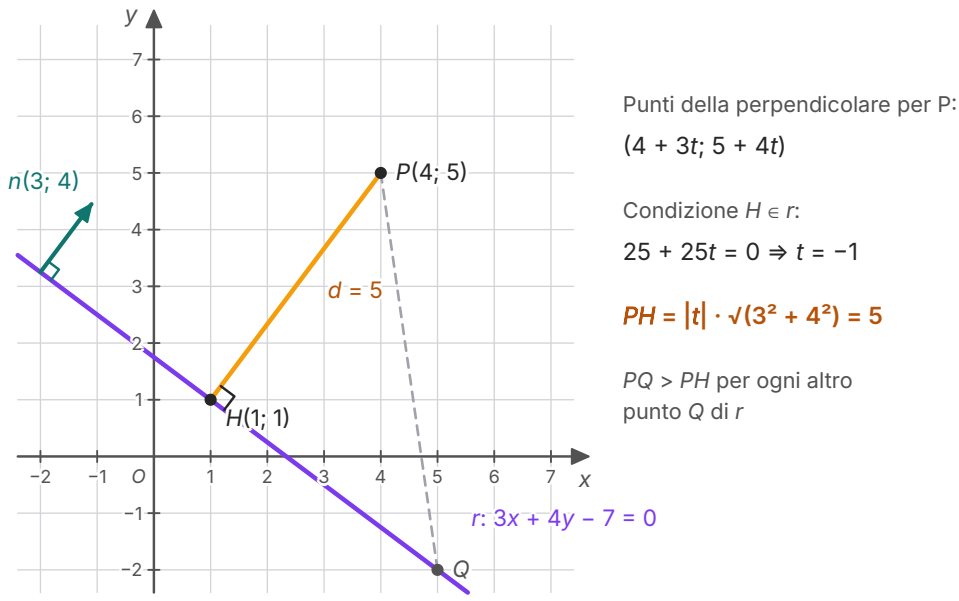


Figura 5.1 La distanza di $P(4; 5)$ dalla retta r: $3x + 4y - 7 = 0$. Il vettore normale $n(3; 4)$ è perpendicolare a r; la perpendicolare da P ha la sua direzione e incontra r nel piede $H(1; 1)$. Il segmento PQ che congiunge P con un altro punto di r è più lungo di PH.

Due conseguenze immediate. La **distanza tra due rette parallele** si calcola come distanza di un punto qualsiasi dell'una dall'altra; se le rette sono scritte con gli stessi coefficienti di x e di y, $ax + by + c = 0$ e $ax + by + c' = 0$, si ottiene $d = |c - c'| : \sqrt{a^2 + b^2}$. Inoltre il segno di $ax_0 + by_0 + c$ dice **da che parte** della retta sta il punto: i punti per cui l'espressione è positiva stanno in uno dei due semipiani, quelli per cui è negativa nell'altro, come hai visto nella programmazione lineare (vol. 2, cap. 7).

5.1.3 L'area di un triangolo dati i vertici

Con la distanza punto-retta possiamo calcolare l'area di un triangolo come semiprodotto di base e altezza senza disegnarlo. Facciamolo una volta per tutte con le lettere. Dati $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$, poniamo

$$u_1 = x_B - x_A, \quad u_2 = y_B - y_A, \quad v_1 = x_C - x_A, \quad v_2 = y_C - y_A$$

cioè $u(u_1; u_2)$ è il vettore AB e $v(v_1; v_2)$ è il vettore AC. La retta AB ha direzione u, quindi vettore normale $(u_2; -u_1)$, ed equazione $u_2(x - x_A) - u_1(y - y_A) = 0$ (passa per A e per B: verificalo). L'altezza relativa ad AB è la distanza di C da questa retta:

$$h = \frac{|u_2 v_1 - u_1 v_2|}{\sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2}}} \qquad AB = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2}} \quad \Rightarrow \quad \text{Area} = \frac{1}{2}\,|u_1 v_2 - u_2 v_1|$$

IN SINTESI

Area di un triangolo dati i vertici. Se AB ha componenti $(u_1; u_2)$ e AC ha componenti $(v_1; v_2)$, l'area del triangolo ABC è la metà del valore assoluto di un determinante:

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \cdot |u_1 v_2 - u_2 v_1| = \frac{1}{2} \cdot |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)|$$

Sviluppando i prodotti si ottiene la forma equivalente del Formulario:

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \cdot |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

Il determinante è nullo se e solo se A, B, C sono **allineati**.

Il risultato ha un significato che conosci dal volume dello scorso anno: $|u_1 v_2 - u_2 v_1|$ è il modulo del prodotto vettoriale di u e v pensati nello spazio con terza componente nulla, cioè l'area del parallelogramma costruito su AB e AC; il triangolo ne è la metà (Figura 5.2). Senza il valore assoluto il determinante ha un segno: è positivo quando, andando da A a B e poi a C, si gira in senso antiorario, negativo nel senso orario.

Esempio. Per $A(1; -1)$, $B(6; 2)$, $C(2; 4)$ si ha $u(5; 3)$, $v(1; 5)$ e $u_1 v_2 - u_2 v_1 = 25 - 3 = 22$: l'area è 11. Controlliamo con base e altezza: la retta AB è $3x - 5y - 8 = 0$, $AB = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$ e la distanza di C da AB è $|6 - 20 - 8| : \sqrt{34} = 22 : \sqrt{34}$, quindi l'area è $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{34} \cdot 22 : \sqrt{34} = 11$. Per un poligono qualsiasi basta dividerlo in triangoli con le diagonali da un vertice e sommare le aree.

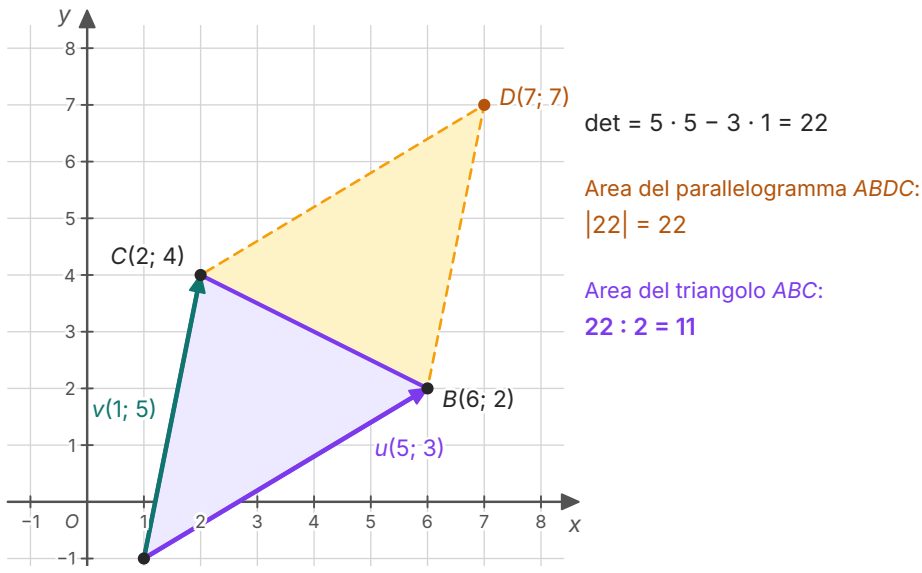


Figura 5.2 Il triangolo $A(1; -1)$, $B(6; 2)$, $C(2; 4)$ è metà del parallelogramma $ABDC$ costruito sui vettori $u = AB$ e $v = AC$, con $D(7; 7)$. L'area del parallelogramma è il valore assoluto del determinante $u_1v_2 - u_2v_1 = 22$.

5.2 I fasci di rette generati da due rette

In *Matematica 2* hai conosciuto il fascio proprio, cioè tutte le rette per un punto, e il fascio improprio, cioè tutte le rette parallele a una direzione, e hai visto un primo esempio di fascio scritto a partire da due sue rette. Riprendiamo quest'ultima idea e la rendiamo uno strumento generale: spesso un problema ci consegna due rette, oppure un'equazione in cui compare un parametro, e ci chiede di scegliere tra infinite rette quella con una certa proprietà.

5.2.1 L'equazione del fascio

Siano r: $ax + by + c = 0$ e s: $a'x + b'y + c' = 0$ due rette **incidenti** nel punto C. Per ogni coppia di numeri λ, μ non entrambi nulli consideriamo l'equazione

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$$

È una retta. L'equazione è di primo grado: i coefficienti di x e di y sono $\lambda a + \mu a'$ e $\lambda b + \mu b'$, e se fossero entrambi nulli i vettori normali $(a; b)$ e $(a'; b')$ sarebbero proporzionali, cioè r e s sarebbero parallele. **Passa per C.** Nel punto C le due parentesi sono nulle, quindi l'equazione è soddisfatta qualunque siano λ e μ. **Le dà tutte.** Sia t una retta qualsiasi per C e $Q(x_Q; y_Q)$ un suo punto diverso da C. Scegliamo $\lambda = a'x_Q + b'y_Q + c'$ e $\mu = -(ax_Q + by_Q + c)$: non sono entrambi nulli, perché Q non sta su entrambe le rette, e con questa scelta l'equazione è soddisfatta anche da Q. È quindi la retta per C e Q, cioè t.

L'insieme di queste rette si chiama **fascio generato da due rette**, e r e s sono le sue **rette generatrici**. Di solito si divide per λ e si usa un solo parametro $k = \mu/\lambda$:

IN SINTESI

Fascio generato da due rette. Se r: $ax + by + c = 0$ e s: $a'x + b'y + c' = 0$ sono incidenti nel punto C, l'equazione

$$(ax + by + c) + k(a'x + b'y + c') = 0 \quad (k \in \mathbb{R})$$

rappresenta tutte le rette per C tranne s, la **retta esclusa**: s corrisponde a $\lambda = 0$, che nella forma con un solo parametro non si può scegliere (si dice, in modo intuitivo, che si ottiene «per k che tende all'infinito»). La retta r si ottiene per $k = 0$. Il centro C si trova risolvendo il sistema delle due generatrici.

Se invece le generatrici sono **parallele** e distinte, scritte con gli stessi coefficienti $ax + by + c = 0$ e $ax + by + c' = 0$, l'equazione $(ax + by + c) + k(ax + by + c') = 0$ diventa $(1 + k)(ax + by) + c + kc' = 0$: per $k \neq -1$ è una retta parallela alle generatrici, per $k = -1$ si riduce a $c - c' = 0$, che è falso, e non rappresenta alcuna retta. Si ottiene un fascio improprio.

Spesso il fascio arriva «mescolato», come un'unica equazione in cui il parametro compare in più punti. Per riconoscerlo si **raccoglie il parametro**. Per esempio

$$(2 + k)x + (k - 1)y + 1 - 4k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x - y + 1) + k(x + y - 4) = 0$$

Le generatrici sono r: $2x - y + 1 = 0$ e s: $x + y - 4 = 0$; sommando le due equazioni si ha $3x - 3 = 0$, quindi $x = 1$, $y = 3$: il fascio è proprio, con centro $C(1; 3)$, e la retta esclusa è s (Figura 5.3).

5.2.2 Scegliere una retta del fascio

Ogni condizione imposta a una retta del fascio diventa un'equazione nel parametro k. Se la condizione è «passare per un punto», l'equazione è di primo grado; se è «avere una certa distanza da un punto», compare un valore assoluto e, elevando al quadrato, un'equazione di secondo grado, che può avere due soluzioni, una o nessuna.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Nel fascio $(2x - y + 1) + k(x + y - 4) = 0$ trova la retta: a) che passa per $P(3; 0)$; b) parallela alla retta $y = -2x + 5$; c) parallela all'asse y; d) che ha distanza 1 dall'origine.

Soluzione. Scriviamo il fascio nella forma $(2 + k)x + (k - 1)y + 1 - 4k = 0$.

a) Sostituiamo $x = 3$, $y = 0$: $7 + k(-1) = 0$, $k = 7$. La retta è $9x + 6y - 27 = 0$, cioè $3x + 2y - 9 = 0$. Controllo: passa per $C(1; 3)$ perché $3 + 6 - 9 = 0$.

b) Per $k \neq 1$ il coefficiente angolare è $-(2 + k)/(k - 1)$. Imponiamo che valga -2: $2 + k = 2k - 2$, $k = 4$. La retta è $6x + 3y - 15 = 0$, cioè $2x + y - 5 = 0$.

c) Una retta è parallela all'asse y se manca il termine in y: $k - 1 = 0$, $k = 1$, e si ottiene $3x - 3 = 0$, cioè $x = 1$.

d) La distanza di $O(0; 0)$ dalla retta del fascio è $|1 - 4k| : \sqrt{(2 + k)^2 + (k - 1)^2}$. Uguagliandola a 1 ed elevando al quadrato (i due membri sono non negativi, quindi l'equazione ottenuta è equivalente):

$$(1 - 4k)^2 = (2 + k)^2 + (k - 1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 14k^2 - 10k - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 7k^2 - 5k - 2 = 0$$

Le soluzioni sono $k = 1$ e $k = -2/7$. Per $k = 1$ ritroviamo $x = 1$; per $k = -2/7$, moltiplicando per 7, $12x - 9y + 15 = 0$, cioè $4x - 3y + 5 = 0$, che dista $|5| : \sqrt{16 + 9} = 1$ dall'origine. Resta da controllare la retta esclusa $x + y - 4 = 0$: dista $4 : \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ dall'origine, quindi non è una soluzione. Le rette cercate sono due.

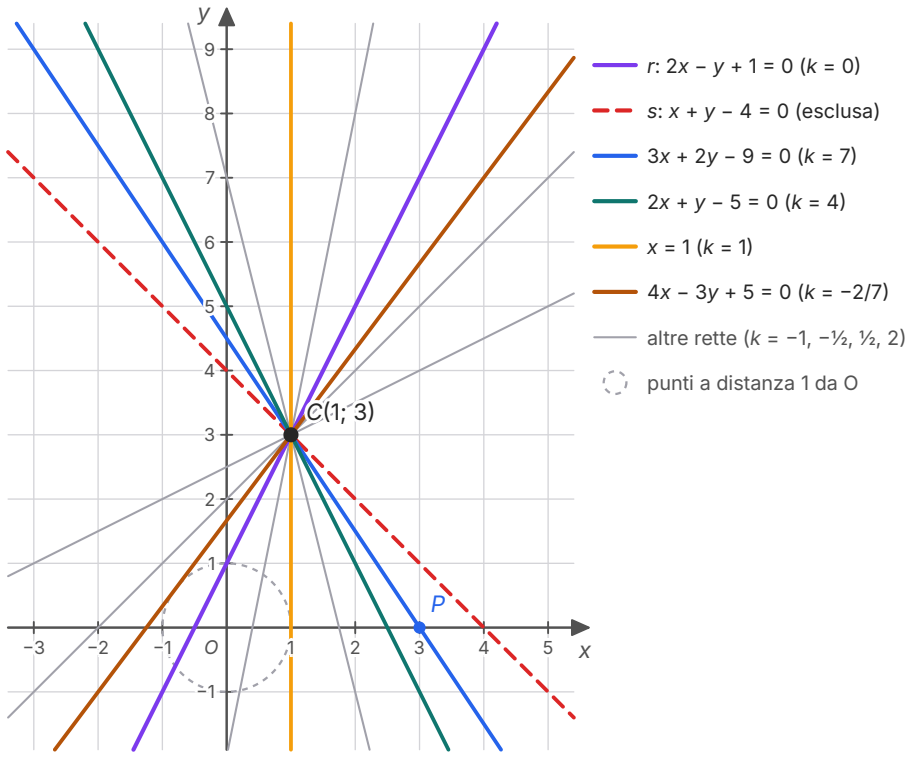


Figura 5.3 Il fascio $(2x - y + 1) + k(x + y - 4) = 0$, di centro $C(1; 3)$. Sono evidenziate la generatrice r ($k = 0$), la retta esclusa s e le quattro rette dell'esempio svolto. Le rette $x = 1$ e $4x - 3y + 5 = 0$ hanno distanza 1 da O: toccano la circonferenza tratteggiata di centro O e raggio 1.

ERRORE FREQUENTE

Dimenticare la retta esclusa. Cerchiamo nel fascio $(2x - y + 1) + k(x + y - 4) = 0$ la retta parallela a $y = -x$. Imponendo $-(2 + k)/(k - 1) = -1$ si ottiene $2 + k = k - 1$, cioè $2 = -1$: nessun valore di k. Concludere «la retta non esiste» è sbagliato: la retta cercata è proprio la generatrice esclusa $x + y - 4 = 0$, che ha coefficiente angolare -1 e passa per C. Quando l'equazione in k non ha soluzioni, o ne ha meno del previsto, controlla **sempre** la retta esclusa a parte.

5.3 I luoghi geometrici nel piano cartesiano

Nel primo anno hai incontrato i **luoghi geometrici**: un luogo è l'insieme di **tutti e soli** i punti del piano che godono di una proprietà, detta **proprietà caratteristica** del luogo. L'asse di un segmento è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi; la bisettrice di un angolo è il luogo dei punti dell'angolo equidistanti dai lati; la circonferenza è il luogo dei punti che hanno distanza

fissata da un centro. «Tutti e soli» significa due cose: ogni punto con la proprietà appartiene al luogo, e ogni punto del luogo ha la proprietà.

Nel piano cartesiano un luogo si descrive con un'equazione in x e y: l'equazione del luogo è soddisfatta da tutte e sole le coppie di coordinate dei suoi punti. Per trovarla si procede sempre in quattro passi.

1. Si indica con $P(x; y)$ il **punto generico**: un punto qualsiasi del piano, di cui non sappiamo ancora nulla.
2. Si traduce la proprietà caratteristica in un'uguaglianza tra espressioni in x e y, usando distanze, punti medi, coefficienti angolari.
3. Si semplifica fino a un'equazione riconoscibile (una retta, una coppia di rette, una circonferenza...).
4. Si controlla «tutti e soli»: se ogni passaggio è un'equivalenza l'equazione descrive esattamente il luogo; se qualche passaggio non lo è (un'elevazione al quadrato, una divisione per un'espressione che può annullarsi, un parametro con valori limitati) si individuano i punti da togliere o da aggiungere.

5.3.1 L'asse di un segmento e le parallele a distanza data

Troviamo l'asse del segmento di estremi $A(-2; 1)$ e $B(4; -3)$. Il punto $P(x; y)$ appartiene all'asse se e solo se $PA = PB$, cioè, poiché le distanze sono non negative, se e solo se $PA^2 = PB^2$:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = (x-4)^2 + (y+3)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 12x - 8y - 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2y - 5 = 0$$

I termini x^2 e y^2 si cancellano sempre, ed è questo il motivo per cui l'asse è una retta. Ripetendo il calcolo con le lettere si trova $2(x_B - x_A)x + 2(y_B - y_A)y + {x_A}^2 + {y_A}^2 - {x_B}^2 - {y_B}^2 = 0$: il vettore normale è proporzionale ad AB, quindi l'asse è perpendicolare ad AB, e si verifica subito che passa per il punto medio. Nel nostro esempio il vettore normale $(3; -2)$ è proporzionale ad $AB(6; -4)$, e il punto medio $M(1; -1)$ soddisfa l'equazione: $3 + 2 - 5 = 0$.

Allo stesso modo, il luogo dei punti che hanno distanza 2 dalla retta $3x - 4y + 1 = 0$ è descritto da $|3x - 4y + 1| : 5 = 2$, cioè $3x - 4y + 1 = \pm 10$: è formato da **due** rette parallele, $3x - 4y - 9 = 0$ e $3x - 4y + 11 = 0$, una per ciascun semipiano. Il luogo dei punti a distanza ρ da un punto $C(x_0; y_0)$ è invece descritto da $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$: è la circonferenza, che studieremo nel capitolo 7.

5.3.2 Le bisettrici degli angoli formati da due rette

Due rette incidenti r: $ax + by + c = 0$ e s: $a'x + b'y + c' = 0$ formano quattro angoli, a coppie opposti al vertice. Il luogo dei punti equidistanti da r e da s è

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

Due numeri hanno lo stesso valore assoluto se e solo se sono uguali oppure opposti, quindi l'equazione equivale a due equazioni di primo grado, con il segno + e con il segno −. Il luogo è formato da due rette, le **bisettrici di due rette incidenti**: ciascuna biseca due angoli opposti al vertice, e le due bisettrici sono perpendicolari tra loro (lo dimostrerai negli esercizi).

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Trova le bisettrici degli angoli formati dalle rette r: $3x - 4y + 5 = 0$ e s: $y - 2 = 0$, e stabilisci quale biseca l'angolo acuto.

Soluzione. Le rette si incontrano in $C(1; 2)$: con $y = 2$ si ha $3x - 3 = 0$. I denominatori sono $\sqrt{9 + 16} = 5$ e $\sqrt{0 + 1} = 1$, quindi il luogo è $|3x - 4y + 5| = 5|y - 2|$:

$$3x - 4y + 5 = 5(y - 2) \quad \Leftrightarrow \quad b_1\colon x - 3y + 5 = 0$$

$$3x - 4y + 5 = -5(y - 2) \quad \Leftrightarrow \quad b_2\colon 3x + y - 5 = 0$$

Entrambe passano per C, e sono perpendicolari: $1 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 = 0$. La retta r ha coefficiente angolare $3/4$ e forma con s, che è orizzontale, un angolo acuto di circa 36,9°; la bisettrice di quest'angolo deve salire più lentamente di r: è b_1, con coefficiente angolare $1/3$. Controllo su un punto di b_1, $Q(7; 4)$: $d(Q, r) = |21 - 16 + 5| : 5 = 2$ e $d(Q, s) = |4 - 2| = 2$ (Figura 5.4).

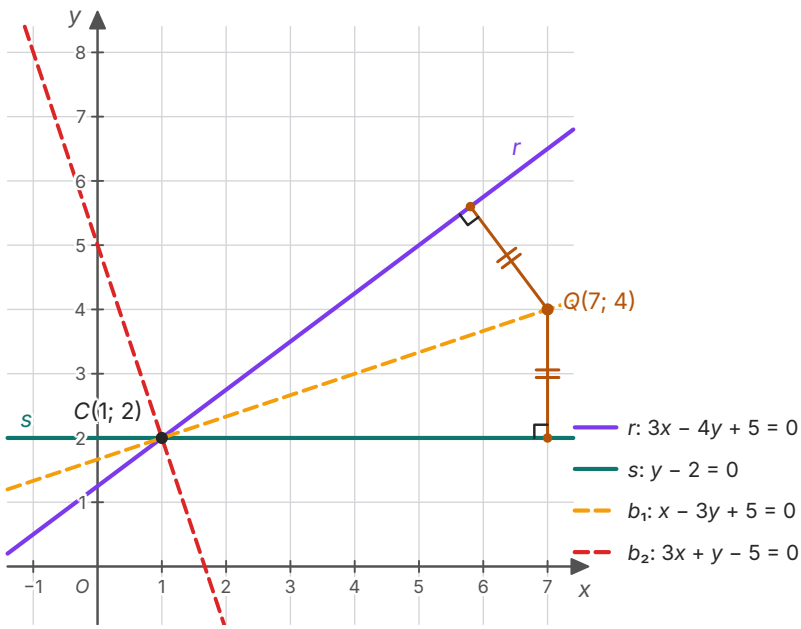


Figura 5.4 Le bisettrici b_1 e b_2 degli angoli formati da r: $3x - 4y + 5 = 0$ e s: $y = 2$, incidenti in $C(1; 2)$. Il punto $Q(7; 4)$ di b_1 ha distanza 2 da entrambe le rette.

5.3.3 Luoghi descritti da un parametro

A volte il luogo è la traccia di un punto che si muove: le sue coordinate dipendono da un **parametro** t, che può essere un tempo, una posizione, un angolo. Si dice allora che il luogo è dato in **forma parametrica**. Per trovarne l'equazione cartesiana si esegue l'**eliminazione del parametro**: si ricava t da una delle due coordinate e lo si sostituisce nell'altra. Se $P(2t - 1;\ 3t + 2)$, da $x = 2t - 1$ si ha $t = (x + 1)/2$, e quindi $y = 3(x + 1)/2 + 2$, cioè $3x - 2y + 7 = 0$: il punto si muove su una retta.

Esempio. Il punto A percorre la retta $y = 2x$ e $B(4;\ 0)$ è fisso: che cosa descrive il punto medio M di AB? Con $A(t;\ 2t)$ si ha $M((t + 4)/2;\ t)$. Da $y = t$ segue $x = (y + 4)/2$, cioè $2x - y - 4 = 0$: una retta parallela a quella percorsa da A, e passante per $(2;\ 0)$, punto medio tra O e B. Tutti i punti della retta si ottengono, perché t può assumere qualunque valore reale.

La scala che scivola. Una scala lunga 4 m è appoggiata a un muro e scivola: il piede A si allontana sul pavimento, la cima B scende lungo il muro. Prendiamo il pavimento come asse x e il muro come asse y, con $A(a;\ 0)$, $B(0;\ b)$, $a \geq 0$, $b \geq 0$. Per il teorema di Pitagora $a^2 + b^2 = 16$. Il punto medio della scala è $M(a/2;\ b/2)$: con $x = a/2$, $y = b/2$ si ha $a = 2x$, $b = 2y$ e quindi $4x^2 + 4y^2 = 16$, cioè

$$x^2 + y^2 = 4 \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

Il punto medio della scala resta sempre a 2 m dall'angolo tra muro e pavimento e descrive un quarto di circonferenza (Figura 5.5). Il controllo «tutti e soli» funziona: ogni punto $(x;\ y)$ dell'arco, con $x, y \geq 0$, è il punto medio della scala con $a = 2x$ e $b = 2y$, perché $a^2 + b^2 = 4(x^2 + y^2) = 16$.

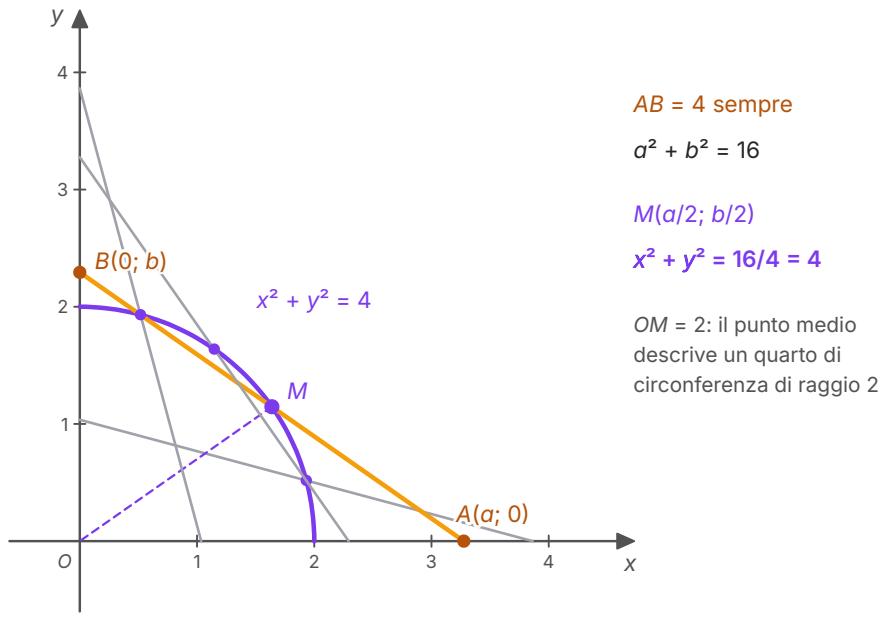


Figura 5.5 Una scala *AB* lunga 4 scivola con gli estremi sugli assi: sono disegnate quattro posizioni. Il punto medio *M* descrive l'arco di circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ nel primo quadrante, perché *OM*, mediana relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo *AOB*, è metà di *AB*.

ERRORE FREQUENTE

Il parametro non sempre percorre tutto $\mathbb{R}$. Se $P(t^2; 2t^2 + 1)$, eliminando t^2 si ottiene $y = 2x + 1$; ma $x = t^2$ non può essere negativo, quindi il luogo è solo la **semiretta** di equazione $y = 2x + 1$ con $x \geq 0$. Allo stesso modo, nella scala servono $x \geq 0$ e $y \geq 0$: l'equazione $x^2 + y^2 = 4$ da sola descriverebbe la circonferenza intera. L'equazione ottenuta eliminando il parametro contiene il luogo, ma può contenere anche punti in più: il controllo «tutti e soli» serve a toglierli.

5.4 Sintetico e analitico: due modi di dimostrare

Fino al secondo anno hai dimostrato i teoremi di geometria nel modo di Euclide: a partire da postulati e teoremi precedenti, ragionando sulle figure, con congruenze, parallele, similitudini. È il **metodo sintetico**. Con le coordinate si può procedere in un altro modo: si traduce l'ipotesi in equazioni, si calcola, si interpreta il risultato. È il **metodo analitico**, su cui si fonda la **geometria analitica**. Le *Indicazioni nazionali* chiedono di conoscere la «specificità dei due approcci»: confrontiamoli sullo stesso teorema.

IN SINTESI

Teorema (teorema delle mediane). Ipotesi: ABC è un triangolo; L, M, N sono i punti medi dei lati BC, CA, AB. **Tesi:** le tre mediane AL, BM, CN passano per uno stesso punto G, il baricentro, che divide ciascuna di esse in due parti, delle quali quella che contiene il vertice è doppia dell'altra: $AG = 2GL$, $BG = 2GM$, $CG = 2GN$.

Dimostrazione sintetica. Siano G il punto in cui si incontrano le mediane BM e CN, e P, Q i punti medi di GB e di GC. Nel triangolo ABC il segmento NM che congiunge i punti medi di due lati è parallelo a BC e ne è la metà (è una conseguenza del teorema di Talete); per lo stesso motivo, nel triangolo GBC, anche PQ è parallelo a BC e ne è la metà. Quindi NM e PQ sono paralleli e congruenti, e il quadrilatero $NMQP$ è un parallelogramma. Le diagonali di un parallelogramma si dividono a metà, quindi $GM = GP$ e $GN = GQ$. Ma $GP = PB$ e $GQ = QC$, dunque $BG = 2GM$ e $CG = 2GN$. Ripetendo il ragionamento con le mediane AL e BM si trova che AL taglia BM nel punto che la divide nel rapporto 2 : 1 a partire da B, cioè ancora in G: le tre mediane passano per G. c.v.d.

Dimostrazione analitica. Fissiamo un riferimento cartesiano qualsiasi, con $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Il punto medio di BC è $L((x_B + x_C)/2; (y_B + y_C)/2)$. Il punto G_A della mediana AL tale che $AG_A = 2G_AL$ si ottiene partendo da A e percorrendo i due terzi del vettore AL:

$$\text{ascissa di } G_A\text{: } x_A + \frac{2}{3}\left(\frac{x_B + x_C}{2} - x_A\right) = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

e allo stesso modo la sua ordinata è $(y_A + y_B + y_C)/3$. Il risultato è **simmetrico** nelle tre lettere A, B, C: ripetendo il calcolo sulla mediana BM o sulla mediana CN si ottiene lo stesso punto. Quindi le tre mediane passano per il punto G di coordinate uguali alle medie delle coordinate dei vertici, che lo divide nel rapporto 2 : 1. c.v.d. Per il triangolo $A(-3; -1)$, $B(5; -2)$, $C(1; 6)$ si trova $G(1; 1)$ (Figura 5.6).

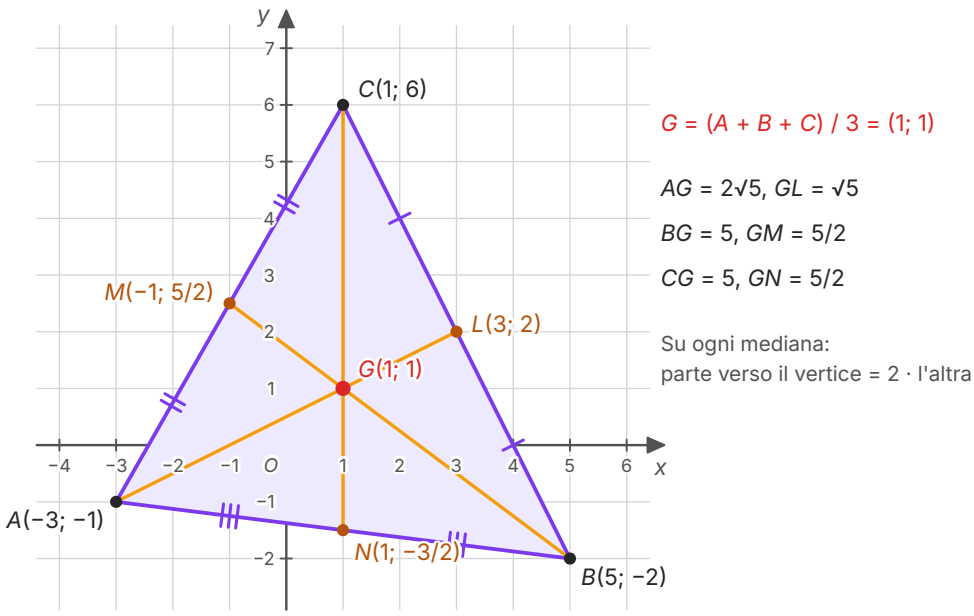


Figura 5.6 Le mediane del triangolo $A(-3;\,-1)$, $B(5;\,-2)$, $C(1;\,6)$ si incontrano nel baricentro $G(1;\,1)$. I trattini segnano i punti medi dei lati. Le distanze calcolate confermano il rapporto $2:1$ su ciascuna mediana.

Che cosa mostra ciascun metodo. La dimostrazione sintetica è breve ma richiede un'idea, il parallelogramma $NMQP$, che non è affatto ovvia; in compenso spiega *perché* il teorema è vero, legandolo al teorema di Talete, e non dipende da alcun sistema di riferimento. La dimostrazione analitica non richiede idee: è un calcolo che si poteva prevedere fin dall'inizio, e in più fornisce le coordinate del baricentro. Il suo limite è che il significato geometrico rischia di perdersi nei conti, e che con figure più complicate i calcoli possono diventare lunghissimi. Un buon consiglio: nel metodo analitico **scegli il riferimento** in modo da semplificare i conti, per esempio con un vertice nell'origine e un lato sull'asse x; non si perde generalità, perché distanze, rapporti e allineamenti non dipendono dalla posizione degli assi.

APPROFONDIMENTO · CARTESIO, FERMAT E I LUOGHI

Nel volume dello scorso anno hai visto che la geometria analitica nasce nel Seicento con René Descartes (Cartesio) e Pierre de Fermat. *La Géométrie* di Cartesio, uscita nel 1637 come appendice del *Discorso sul metodo*, si apre così: «Tutti i problemi di geometria si possono facilmente ridurre a termini tali che, in seguito, per costruirli basta conoscere la lunghezza di alcune linee rette» (traduzione della redazione). La prova di forza dell'opera è un problema sui luoghi che, come racconta Pappo di Alessandria, né Euclide né Apollonio avevano saputo risolvere completamente: trovare il luogo dei punti le cui distanze da tre o quattro rette date soddisfano una certa relazione. Cartesio lo affronta introducendo due lunghezze incognite e scrivendo un'equazione tra di esse.

Nel secondo libro distingue i luoghi in base alla linea che li descrive: se la linea è «retta o circolare, la si chiama un **luogo piano**; ma se è una parabola, o un'iperbole, o un'ellisse, la si chiama un luogo solido» (traduzione della redazione), e in ogni caso il luogo è descritto da un'equazione con due quantità incognite. Fermat aveva raggiunto idee simili in un breve trattato in latino sui luoghi piani e solidi, che circolò manoscritto negli stessi anni e fu stampato solo nel 1679, dopo la sua morte. I luoghi piani sono l'argomento di questo capitolo e del capitolo 7; i luoghi solidi, le coniche, occuperanno gran parte del volume.

5.5 Problemi nel piano: triangoli, simmetrie, percorsi minimi

Con distanze, fasci e luoghi siamo in grado di risolvere in coordinate i problemi classici della geometria del triangolo, e un problema antico che lega la geometria alla fisica della luce.

5.5.1 I punti notevoli di un triangolo

Nel volume dello scorso anno hai conosciuto i punti notevoli di un triangolo. In coordinate ciascuno si trova come intersezione di due rette: il **circocentro** come intersezione di due assi dei lati (è equidistante dai tre vertici, perché ogni asse è il luogo dei punti equidistanti da due vertici); l'**ortocentro** come intersezione di due altezze; il **baricentro** con la formula della media delle coordinate. La terza retta, asse o altezza, serve come controllo.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Dato il triangolo $A(-2;\,0)$, $B(6;\,0)$, $C(0;\,4)$, trova l'area, il circocentro O', l'ortocentro H e il baricentro G.

Area. AB ha componenti $(8;\,0)$ e AC ha componenti $(2;\,4)$: l'area è $|8 \cdot 4 - 0 \cdot 2| : 2 = 16$. Qui si poteva anche notare che AB sta sull'asse x, con base 8 e altezza 4.

Circocentro. L'asse di AB è la retta verticale per il punto medio $(2;\,0)$: $x = 2$. L'asse di AC passa per il punto medio $(-1;\,2)$ ed è perpendicolare ad AC, che ha coefficiente angolare 2: $y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 1)$. Per $x = 2$ si ha $y = 2 - 3/2 = 1/2$: $O'(2;\,1/2)$. Controllo: $O'A^2 = 16 + 1/4 = 65/4$ e $O'C^2 = 4 + 49/4 = 65/4$.

Ortocentro. L'altezza relativa ad AB è la perpendicolare all'asse x per C, cioè l'asse y: $x = 0$. Il lato BC ha coefficiente angolare $(4 - 0) : (0 - 6) = -2/3$, quindi l'altezza da A ha coefficiente angolare $3/2$: $y = 3/2 \cdot (x + 2)$. Per $x = 0$ si ottiene $H(0;\,3)$. Controllo con la terza altezza: il vettore $BH(-6;\,3)$ e il vettore $AC(2;\,4)$ hanno prodotto scalare $-12 + 12 = 0$.

Baricentro. $G((-2 + 6 + 0)/3;\,(0 + 0 + 4)/3) = G(4/3;\,4/3)$.

Un'osservazione. I tre punti $H(0;\,3)$, $G(4/3;\,4/3)$, $O'(2;\,1/2)$ sono allineati: i vettori $HG(4/3;\,-5/3)$ e $GO'(2/3;\,-5/6)$ sono proporzionali, e il primo è il doppio del secondo. Non è una coincidenza: vale in ogni triangolo, e lo dimostrerai nell'ultimo esercizio del capitolo.

5.5.2 Il simmetrico di un punto rispetto a una retta

Il **simmetrico di un punto rispetto a una retta** r è il punto P' tale che r sia l'asse del segmento PP': PP' è perpendicolare a r e il suo punto medio è il piede H della perpendicolare da P. Quindi $P' = 2H - P$ (coordinata per coordinata). Nell'esempio della distanza, il simmetrico di $P(4;\,5)$ rispetto a r: $3x + 4y - 7 = 0$ ha coordinate $(2 \cdot 1 - 4;\; 2 \cdot 1 - 5) = (-2;\,-3)$. Controllo: $3 \cdot (-2) + 4 \cdot (-3) - 7 = -25$, quindi anche P' dista $25 : 5 = 5$ da r, ma dall'altra parte, perché l'espressione ha segno opposto a quello che ha in P.

Ricordando la dimostrazione della formula della distanza si ottiene anche una formula diretta: se $t = -(ax_0 + by_0 + c)/(a^2 + b^2)$, il piede è $H(x_0 + ta;\, y_0 + tb)$ e il simmetrico è $P'(x_0 + 2ta;\, y_0 + 2tb)$. Le rette di equazione $y = x$ e $y = -x$ hanno simmetrie più semplici, che conosci: $(x;\,y) \mapsto (y;\,x)$ e $(x;\,y) \mapsto (-y;\,-x)$.

5.5.3 Il percorso minimo

Un problema antico: due punti A e B stanno dalla stessa parte di una retta r; qual è il punto Q di r per cui il percorso $AQ + QB$ è il più breve possibile? È il **problema di Erone**, dal nome del matematico Erone di Alessandria, vissuto probabilmente nel I secolo d.C., che lo usò per spiegare la riflessione della luce sugli specchi. La soluzione è un'idea sintetica, che le coordinate rendono un calcolo.

Sia B' il simmetrico di B rispetto a r. Per ogni punto Q di r si ha $QB = QB'$, perché r è l'asse di BB'. Quindi $AQ + QB = AQ + QB'$, e per la disuguaglianza triangolare $AQ + QB' \geq AB'$, con l'uguaglianza solo quando Q sta sul segmento AB'. Il percorso minimo passa per il punto in cui il segmento AB' attraversa r, e la sua lunghezza è AB'. In quel punto i segmenti AQ e QB formano angoli uguali con la retta.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Due cascine sono nei punti $A(1; 3)$ e $B(7; 5)$ di un riferimento in cui l'unità vale 100 m; un canale rettilineo corre lungo l'asse x. Si vuole costruire sulla riva una pompa Q e collegarla con due tubi rettilinei alle cascine, usando meno tubo possibile. Dove va la pompa? Quanto tubo serve?

Soluzione. Il simmetrico di B rispetto all'asse x è $B'(7; -5)$. La retta AB' ha coefficiente angolare $(-5 - 3) : (7 - 1) = -4/3$ ed equazione $y - 3 = -4/3 \cdot (x - 1)$. Ponendo $y = 0$: $x - 1 = 9/4$, $x = 13/4$. La pompa va in $Q(13/4; 0)$, cioè a 325 m dall'origine lungo il canale.

La lunghezza minima è $AB' = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ unità, cioè 1000 m. Per confronto, con la pompa in $Q'(11/2; 0)$ servirebbero circa $5{,}41 + 5{,}22 = 10{,}63$ unità, cioè 63 m di tubo in più (Figura 5.7).

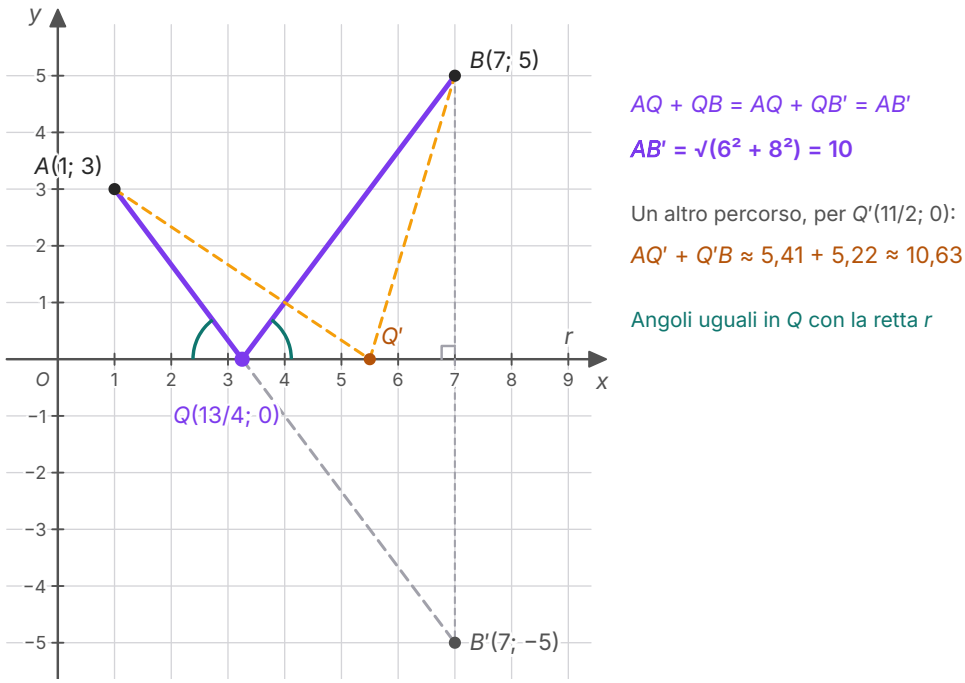


Figura 5.7 Il percorso minimo da $A(1; 3)$ a $B(7; 5)$ toccando la retta r (l'asse x) passa per $Q(13/4; 0)$, dove il segmento AB' incontra r; B' è il simmetrico di B. I due tratti formano angoli uguali con r. Il percorso tratteggiato per Q' è più lungo.

COLLEGAMENTI

Fisica: la legge della riflessione. Un raggio di luce che si riflette su uno specchio piano forma con la normale allo specchio un angolo di riflessione uguale all'angolo di incidenza. È esattamente la proprietà del percorso minimo: tra tutti i cammini che vanno da A a B toccando lo specchio, la luce segue quello più breve, cioè, nello stesso mezzo, quello che richiede il tempo minimo. Nel Seicento Fermat estese questa idea a un principio generale, il **principio del tempo minimo**, da cui si ricava anche la legge della rifrazione. La stessa geometria guida il giocatore di biliardo che vuole colpire una palla di sponda: mira al simmetrico della palla rispetto alla sponda.

SINTESI

- La retta $ax + by + c = 0$ ha **vettore normale** $n(a; b)$: è perpendicolare alla retta. Due rette sono parallele se $ab' - a'b = 0$, perpendicolari se $aa' + bb' = 0$.
- La distanza di $P_0(x_0; y_0)$ da $ax + by + c = 0$ è $|ax_0 + by_0 + c| : \sqrt{a^2 + b^2}$; si dimostra cercando il piede della perpendicolare tra i punti $(x_0 + ta; y_0 + tb)$.
- L'area del triangolo ABC è $\frac{1}{2}|u_1v_2 - u_2v_1|$, dove $(u_1; u_2)$ e $(v_1; v_2)$ sono le componenti di AB e AC; il determinante è nullo se e solo se i punti sono allineati.
- Il fascio $(ax + by + c) + k(a'x + b'y + c') = 0$ contiene tutte le rette per il punto comune alle generatrici, tranne la seconda generatrice (retta esclusa), che va sempre controllata a parte. Con generatrici parallele il fascio è improprio.
- Per riconoscere un fascio scritto con il parametro sparso si raccoglie il parametro; il centro è la soluzione del sistema delle generatrici.
- Un luogo geometrico è l'insieme di tutti e soli i punti con una proprietà. Metodo: punto generico, traduzione della proprietà, semplificazione, controllo «tutti e soli».
- L'asse di un segmento è una retta perpendicolare al segmento; i punti a distanza d da una retta formano due rette parallele; le bisettrici degli angoli di due rette incidenti sono due rette perpendicolari, che si ottengono uguagliando le distanze con il segno + e con il segno −.
- Un luogo dato in forma parametrica si studia eliminando il parametro; i valori ammessi per il parametro possono ridurre il luogo a un segmento, una semiretta, un arco.
- Il metodo sintetico ragiona sulle figure ed è indipendente dal riferimento; il metodo analitico traduce tutto in calcoli, prevedibili ma talvolta lunghi. Il teorema delle mediane si dimostra in entrambi i modi.
- Circocentro: intersezione degli assi; ortocentro: intersezione delle altezze; baricentro: media delle coordinate dei vertici. Il simmetrico di P rispetto a r è $2H - P$, con H piede della perpendicolare.
- Percorso minimo da A a B toccando una retta: si riflette B in B' e si congiunge A con B'; nel punto di contatto gli angoli con la retta sono uguali, come nella riflessione della luce.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● La distanza del punto $P(1; -2)$ dalla retta $4x + 3y + 7 = 0$ è:

   A. 5

   B. 1

   C. 9/5

   D. 3/5

2. ● Il luogo dei punti equidistanti da $O(0;0)$ e da $A(4;2)$ è la retta:

   A. $x + 2y - 5 = 0$

   B. $2x - y - 3 = 0$

   C. $x - 2y = 0$

   D. $2x + y - 5 = 0$

3. ● Nel fascio $(x - y) + k(x + y - 2) = 0$ la retta esclusa è:

   A. $x + y - 2 = 0$

   B. $x - y = 0$

   C. $x = 1$

   D. nessuna: il fascio contiene tutte le rette per $(1;1)$

4. ●● L'area del triangolo di vertici $O(0;0)$, $A(4;1)$, $B(1;3)$ è:

   A. 11

   B. 13/2

   C. 11/2

   D. 7/2

5. ●● Le bisettrici degli angoli formati dalle rette $3x - 4y = 0$ e $4x - 3y = 0$ sono:

   A. solo $y = x$

   B. $y = x$ e $y = -x$

   C. $x = 0$ e $y = 0$

   D. $y = -x$ e $7x + y = 0$

6. ●● Al variare di t in $\mathbb{R}$, il punto $P(2t;\, t - 1)$ descrive:

   A. la retta $2x - y - 1 = 0$

   B. la retta $x + 2y + 2 = 0$

   C. la retta $x - 2y - 2 = 0$

   D. una semiretta

7. ●● Il baricentro di un triangolo:

   A. divide ogni mediana in due parti uguali

   B. è equidistante dai tre vertici

   C. è il punto d'incontro delle altezze

   D. divide ogni mediana in due parti, di cui quella che contiene il vertice è doppia dell'altra

8. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.

   a) Se le generatrici sono incidenti, nel fascio $(ax + by + c) + k(a'x + b'y + c') = 0$ ogni valore di k dà una retta che passa per il centro.

   b) Il luogo dei punti che hanno distanza 3 da una retta data è una retta.

   c) Se il determinante $(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)$ è nullo, i punti A, B, C sono allineati.

   d) Le due bisettrici degli angoli formati da due rette incidenti sono parallele.

   e) Per trovare l'equazione di un luogo basta trovare un'equazione soddisfatta da tutti i suoi punti.

9. ● Completa.
   a) Il vettore $(a; b)$ è _____ alla retta $ax + by + c = 0$.
   b) Il simmetrico di P rispetto a r è il punto P' tale che r sia _____ del segmento PP'.
   c) Le coordinate del baricentro di un triangolo sono le _____ delle coordinate dei vertici.
   d) Nel problema del percorso minimo che tocca una retta, uno dei due punti si sostituisce con il suo _____ rispetto alla retta.

Calcolare

10. ● Calcola la distanza: a) di $P(-1; 3)$ dalla retta $5x - 12y + 2 = 0$; b) di $P(2; -1)$ dalla retta $y = 2x + 1$; c) tra le rette parallele $3x + 4y - 2 = 0$ e $6x + 8y + 11 = 0$.

11. ● a) Calcola l'area del triangolo di vertici $A(-3; 1)$, $B(2; -2)$, $C(4; 3)$. b) Stabilisci con il determinante se i punti $P(-1; 5)$, $Q(2; -1)$, $R(4; -5)$ sono allineati.

12. ●● Calcola l'area del quadrilatero di vertici $A(0; 0)$, $B(6; -1)$, $C(7; 4)$, $D(1; 5)$, dividendolo con la diagonale AC.

13. ●● Nel fascio $(x + 2y - 5) + k(3x - y + 6) = 0$: a) trova il centro; b) trova la retta che passa per l'origine; c) trova la retta parallela all'asse x; d) trova la retta perpendicolare a $y = x$.

14. ●● È dato il fascio $(1 + k)x + (2k - 1)y - 3 = 0$. a) Raccogli il parametro, trova le generatrici e il centro. b) Trova la retta del fascio che passa per $(0; 3)$. c) Trova le rette del fascio che distano $\sqrt{5}$ dall'origine e spiega perché sono così poche. d) Quale retta per il centro non appartiene al fascio?

15. ●● a) Scrivi l'equazione dell'asse del segmento di estremi $A(-3; 2)$ e $B(1; -4)$ come luogo geometrico, e verifica che passa per il punto medio. b) Trova il luogo dei punti che hanno distanza 2 dalla retta $5x + 12y - 1 = 0$.

16. ●● Trova le bisettrici degli angoli formati dalle rette r: $x + 2y - 4 = 0$ e s: $2x + y - 5 = 0$. Quale delle due biseca l'angolo acuto?

17. ●● Trova l'equazione cartesiana del luogo descritto dal punto: a) $P(3 - t; 2t + 1)$, con $t \in \mathbb{R}$; b) lo stesso punto, con $0 \le t \le 2$; c) $R(1 + t^2; 3 - t^2)$, con $t \in \mathbb{R}$.

18. ●● Trova il simmetrico del punto $P(-1; 6)$ rispetto alla retta $x - 2y + 3 = 0$, e il piede della perpendicolare.

19. ●● Nel triangolo $A(-1; -1)$, $B(5; 1)$, $C(1; 5)$ trova l'area, il circocentro, l'ortocentro e il baricentro. Che cosa noti?

20. ●● Trova le rette parallele a $4x - 3y = 0$ che formano con gli assi cartesiani un triangolo di area 6.

Dimostrare e argomentare

21. ●● Dimostra la formula della distanza punto-retta con le aree, nel caso in cui a, b, c siano diversi da zero. (Suggerimento: la retta incontra gli assi in $A(-c/a;\,0)$ e $B(0;\,-c/b)$; calcola l'area del triangolo P_0AB con il determinante e poi come semiprodotto di AB per la distanza cercata.)

22. ●● Dimostra in due modi, sintetico e analitico, che le diagonali di un parallelogramma si dividono scambievolmente a metà. Per il metodo analitico usa i vertici $A(0;\,0)$, $B(p;\,0)$, $D(q;\,s)$, $C(p+q;\,s)$ e spiega perché questa scelta non fa perdere generalità.

23. ●● Dimostra che le due bisettrici degli angoli formati da due rette incidenti sono perpendicolari. (Suggerimento: scrivi le rette in modo che $a^2+b^2=a'^2+b'^2=1$ e calcola il prodotto scalare dei vettori normali delle bisettrici.)

24. ●● Trova l'errore. «Nel fascio $(x-2y)+k(x+y-3)=0$ cerco la retta parallela a $y=-x$. Il coefficiente angolare è $-(1+k)/(k-2)$; imponendo che valga -1 ottengo $1+k=k-2$, che è impossibile. Quindi nel fascio non c'è nessuna retta parallela a $y=-x$.»

25. ●● Spiega perché, usando l'equazione dell'asse di un segmento AB ricavata come luogo, l'asse è sempre una retta (e non un'altra curva) ed è perpendicolare ad AB.

26. ●●● Un segmento di lunghezza 2ℓ si muove con un estremo sull'asse x e l'altro sull'asse y. Dimostra che il luogo dei suoi punti medi è la circonferenza $x^2+y^2=\ell^2$, verificando «tutti e soli» (gli estremi possono stare anche sui semiassi negativi).

27. ●●● Dimostra con il metodo analitico che in un triangolo rettangolo il punto medio dell'ipotenusa è equidistante dai tre vertici. Scegli un riferimento comodo e giustifica la scelta; poi ritrova il risultato con un argomento sintetico.

Problemi

28. ●● Due fattorie sono in $A(2;\,5)$ e $B(10;\,1)$ (unità: 1 km) e un canale corre lungo l'asse x. Dove conviene mettere sul canale una stazione di pompaggio da collegare alle due fattorie con tubi rettilinei di lunghezza totale minima? Quanto è lunga la tubazione?

29. ●● Un raggio di luce parte da $A(0;\,4)$, si riflette su uno specchio piano che giace sulla retta $y=x$ e raggiunge il punto $B(5;\,7)$. Trova il punto in cui il raggio colpisce lo specchio e la lunghezza del cammino.

30. ●● Tre paesi sono nei punti $A(0;\,0)$, $B(8;\,0)$, $C(2;\,6)$ (unità: 1 km). Dove va collocato un ripetitore equidistante dai tre paesi? A quale distanza da ciascuno si trova (al decimo di km)?

31. ●● Un robot si muove in linea retta e al tempo t (in secondi) è nel punto $P(1+2t;\,3+t)$ (in metri). Trova l'equazione cartesiana della traiettoria. Un ostacolo si trova in $Q(6;\,2)$: a quale distanza minima passa il robot dall'ostacolo, e in quale istante?

32. ●● Un terreno triangolare ha, in una mappa con unità 1 m, i vertici $A(0; 0)$, $B(40; 10)$, $C(15; 35)$. Calcolane l'area. Trova poi l'equazione della recinzione rettilinea che parte da A e divide il terreno in due parti di uguale area, giustificando la scelta.

Verso la verifica

33. ●● Dati $A(-2; 1)$ e $B(4; 3)$, trova i punti P della retta $y = x + 1$ tali che il triangolo ABP abbia area 10.

34. ●●● Nel fascio $(x + y - 2) + k(x - y) = 0$ trova le rette che formano con gli assi cartesiani un triangolo di area 2. (Suggerimento: calcola le intercette in funzione di k.)

35. ●●● Sfida. Dimostra che in ogni triangolo il circocentro O', il baricentro G e l'ortocentro H sono allineati e che $HG = 2GO'$ (la retta che li contiene si chiama retta di Eulero). Usa il riferimento con $A(-a; 0)$, $B(b; 0)$, $C(0; c)$, con $a, b, c > 0$, e spiega perché ogni triangolo con gli angoli in A e in B acuti si può disporre così.

PER APPROFONDIRE

- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: i capitoli su Cartesio e Fermat e sulla nascita della geometria analitica.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: il metodo per trovare un luogo è un esempio della strategia «trascura una delle condizioni e guarda che cosa varia».
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: problemi di minimo e riflessione, a partire dal problema di Erone.

Glossario del capitolo

Bisettrici di due rette incidenti
Le due rette, perpendicolari tra loro, formate dai punti equidistanti da due rette incidenti; ciascuna biseca due angoli opposti al vertice.

Eliminazione del parametro
Procedimento che ricava il parametro da una coordinata e lo sostituisce nell'altra, per ottenere l'equazione cartesiana del luogo.

Fascio generato da due rette
Insieme delle rette
$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$, con λ, μ non entrambi nulli: tutte le rette per il punto comune alle due rette, o tutte le parallele se le rette sono parallele.

Forma parametrica
Descrizione di un luogo con le coordinate dei suoi punti espresse in funzione di un parametro, per esempio $P(2t - 1; 3t + 2)$.

Geometria analitica
Studio delle figure geometriche mediante le coordinate e le equazioni, nato nel Seicento con Cartesio e Fermat.

Luogo piano
Nella terminologia di Cartesio, un luogo descritto da una retta o da una circonferenza; i luoghi descritti da una parabola, un'ellisse o un'iperbole sono luoghi solidi.

Metodo analitico
Metodo che traduce ipotesi e tesi in equazioni tra le coordinate e le dimostra con il calcolo algebrico.

Metodo sintetico
Metodo della geometria che ragiona direttamente sulle figure, a partire da postulati e teoremi, senza coordinate.

Problema di Erone
Trovare su una retta il punto che rende minimo il percorso tra due punti dati dalla stessa parte della retta; si risolve con il simmetrico di uno dei due punti.

Proprietà caratteristica
La proprietà che hanno tutti e soli i punti di un luogo geometrico.

Punto generico
Punto $P(x; y)$ qualsiasi del piano, usato per tradurre in equazione la proprietà caratteristica di un luogo.

Retta esclusa
Nella forma $(ax + by + c) + k(a'x + b'y + c') = 0$ di un fascio, la seconda generatrice: appartiene al fascio ma non corrisponde ad alcun valore di k.

Rette generatrici
Le due rette a partire dalle quali si scrive l'equazione di un fascio.

Simmetrico di un punto rispetto a una retta
Punto P' tale che la retta sia l'asse del segmento PP'; se H è il piede della perpendicolare da P, $P' = 2H - P$.

Teorema delle mediane
Le tre mediane di un triangolo passano per il baricentro, che divide ciascuna in due parti, delle quali quella che contiene il vertice è doppia dell'altra.

Vettore normale
Vettore perpendicolare a una retta; per la retta $ax + by + c = 0$ è $n(a; b)$.

Soluzioni

1. B. $|4 - 6 + 7| : 5 = 1$.

2. D. $x^2 + y^2 = (x - 4)^2 + (y - 2)^2 \Leftrightarrow 8x + 4y - 20 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0$.

3. A. La retta esclusa è la seconda generatrice; il centro è (1; 1).

4. C. $|4 \cdot 3 - 1 \cdot 1| : 2 = 11/2$.

5. B. $3x - 4y = \pm(4x - 3y)$: con + si ha $x + y = 0$, con − si ha $7x - 7y = 0$, cioè $y = x$.

6. C. $t = x/2$, $y = x/2 - 1$, cioè $x - 2y - 2 = 0$; t varia in tutto $\mathbb{R}$, quindi è l'intera retta.

7. D. È il teorema delle mediane; l'equidistanza dai vertici è del circocentro, l'incontro delle altezze è l'ortocentro.

8. a) V. b) F: sono due rette parallele alla retta data, una per parte. c) V. d) F: sono perpendicolari. e) F: l'equazione deve essere soddisfatta da tutti e **soli** i punti del luogo.

9. a) perpendicolare (normale); b) l'asse; c) medie aritmetiche; d) simmetrico.

10. a) $|-5 - 36 + 2| : 13 = 39 : 13 = 3$. b) $2x - y + 1 = 0$: $|4 + 1 + 1| : \sqrt{5} = 6/\sqrt{5} = 6\sqrt{5}/5 \approx 2{,}68$. c) La seconda retta è $3x + 4y + 11/2 = 0$: $d = |11/2 + 2| : 5 = 3/2$.

11. a) $AB(5; -3)$, $AC(7; 2)$: $|10 + 21| : 2 = 31/2$. b) $PQ(3; -6)$, $PR(5; -10)$: $3 \cdot (-10) - (-6) \cdot 5 = 0$: sono allineati.

12. Triangolo ABC: $AB(6; -1)$, $AC(7; 4)$, $|24 + 7| : 2 = 31/2$. Triangolo ACD: $AC(7; 4)$, $AD(1; 5)$, $|35 - 4| : 2 = 31/2$. Area 31.

13. a) $x + 2y = 5$ e $3x - y = -6$: $C(-1; 3)$. b) $-5 + 6k = 0$, $k = 5/6$: $21x + 7y = 0$, cioè $y = -3x$. c) Coefficiente di x nullo: $1 + 3k = 0$, $k = -1/3$: $y = 3$. d) Coefficiente angolare $-(1 + 3k)/(2 - k) = -1$: $k = 1/4$, $x + y - 2 = 0$.

14. a) $(x - y - 3) + k(x + 2y) = 0$; generatrici $x - y - 3 = 0$ e $x + 2y = 0$, centro $C(2; -1)$. b) $-6 + 6k = 0$, $k = 1$: $2x + y - 3 = 0$. c) $9 : ((1 + k)^2 + (2k - 1)^2) = 5 \Leftrightarrow 25k^2 - 10k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1/5$: una sola retta, $2x - y - 5 = 0$. La retta esclusa passa per l'origine. Una retta per C dista da O al più $OC = \sqrt{5}$, e la distanza $\sqrt{5}$ si ha solo per la perpendicolare a OC in C. d) $x + 2y = 0$.

15. a) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = (x - 1)^2 + (y + 4)^2 \Leftrightarrow 8x - 12y - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - 1 = 0$; il punto medio $(-1; -1)$ la soddisfa: $-2 + 3 - 1 = 0$. b) $|5x + 12y - 1| = 26$: $5x + 12y - 27 = 0$ e $5x + 12y + 25 = 0$.

16. I denominatori sono entrambi $\sqrt{5}$: $x + 2y - 4 = \pm(2x + y - 5)$, cioè $x - y - 1 = 0$ e $x + y - 3 = 0$, incidenti in (2; 1). Le rette r e s hanno inclinazioni di circa 153,4° e 116,6° sull'asse x: l'angolo acuto tra di esse (circa 36,9°) ha bisettrice inclinata di 135°, cioè con coefficiente angolare −1: è $x + y - 3 = 0$.

17. a) $t = 3 - x$, $y = 7 - 2x$: la retta $2x + y - 7 = 0$. b) Il segmento di quella retta con estremi (3; 1) ($t = 0$) e (1; 5) ($t = 2$). c) $t^2 = x - 1$, $y = 3 - (x - 1)$: la semiretta $x + y - 4 = 0$ con $x \geq 1$.

18. $t = -(-1 - 12 + 3)/5 = 2$; piede $H(-1 + 2; 6 - 4) = H(1; 2)$; simmetrico $P' = 2H - P = (3; -2)$. Controllo: $1 - 4 + 3 = 0$.

19. Area: $AB(6; 2)$, $AC(2; 6)$, $|36 - 4| : 2 = 16$. Assi di AB e AC: $3x + y - 6 = 0$ e $x + 3y - 6 = 0$, circocentro $O'(3/2; 3/2)$ (raggio $\sqrt{(25/2)}$). Altezze da A e da B: $y = x$ e $x + 3y - 8 = 0$, ortocentro $H(2; 2)$. Baricentro $G(5/3; 5/3)$. I tre punti stanno sulla retta $y = x$: il triangolo è isoscele ($AB = AC = \sqrt{40}$) e $y = x$ è il suo asse di simmetria.

20. $4x - 3y + c = 0$ incontra gli assi in $(-c/4; 0)$ e $(0; c/3)$; area $c^2/24 = 6$, $c = \pm 12$: $4x - 3y + 12 = 0$ e $4x - 3y - 12 = 0$.

21. Traccia. AP_0 ha componenti $(x_0 + c/a; y_0)$ e AB ha componenti $(c/a; -c/b)$; il determinante vale $-(c/b)(x_0 + c/a) - (c/a)y_0 = -c(ax_0 + by_0 + c)/(ab)$, quindi l'area è $|c| \cdot \underline{|ax_0 + by_0 + c|} : (2|ab|)$. Inoltre $AB = |c| \cdot \sqrt{a^2 + b^2} : |ab|$. Da $Area = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d$ segue $d = |ax_0 + by_0 + c| : \sqrt{a^2 + b^2}$.

22. Analitico: il punto medio di AC e quello di BD sono entrambi $((p+q)/2; s/2)$, quindi coincidono. Si può mettere A nell'origine e AB sull'asse x con un'isometria, che non cambia lunghezze né punti medi; $C = B + D - A$ perché $ABCD$ è un parallelogramma. Sintetico: detto O il punto d'incontro delle diagonali, i triangoli AOB e COD sono congruenti per il secondo criterio ($AB = CD$, angoli alterni interni uguali), quindi $AO = OC$ e $BO = OD$.

23. Con $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 = 1$ le bisettrici sono $(a - a')x + (b - b')y + c - c' = 0$ e $(a + a')x + (b + b')y + c + c' = 0$. Il prodotto scalare dei vettori normali è $(a - a')(a + a') + (b - b')(b + b') = a^2 + b^2 - a'^2 - b'^2 = 1 - 1 = 0$: le bisettrici sono perpendicolari (i vettori normali non sono nulli perché le rette non sono parallele).

24. L'errore è non controllare la retta esclusa $x + y - 3 = 0$: ha coefficiente angolare -1 e passa per il centro $(2; 1)$, quindi è proprio la retta cercata.

25. Nell'equazione $PA^2 = PB^2$ i termini $x^2 + y^2$ compaiono in entrambi i membri e si cancellano: resta un'equazione di primo grado, cioè una retta (i coefficienti di x e y non sono entrambi nulli perché $A \neq B$). Il suo vettore normale è $2(x_B - x_A; y_B - y_A)$, parallelo ad AB: quindi l'asse è perpendicolare ad AB.

26. Con $A(a; 0)$, $B(0; b)$ si ha $a^2 + b^2 = 4\ell^2$ e $M(a/2; b/2)$, quindi $x^2 + y^2 = \ell^2$. Viceversa, ogni punto $(x; y)$ con $x^2 + y^2 = \ell^2$ è il punto medio del segmento con estremi $(2x; 0)$ e $(0; 2y)$, di lunghezza $2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\ell$. Il luogo è l'intera circonferenza.

27. Con il vertice dell'angolo retto in $C(0; 0)$ e i cateti sugli assi, $A(a; 0)$, $B(0; b)$: il punto medio dell'ipotenusa è $M(a/2; b/2)$ e $MA = MB = MC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. Il riferimento si può sempre scegliere così, perché le isometrie conservano le distanze. Sintetico: M è il centro del rettangolo che ha CA e CB come lati, e le diagonali di un rettangolo sono congruenti e si dividono a metà.

28. $B'(10; -1)$; retta AB': $y - 5 = -3/4 \cdot (x - 2)$; con $y = 0$: $x = 26/3$. Stazione in $(26/3; 0)$, a circa 8,67 km dall'origine; tubazione $AB' = \sqrt{64 + 36} = 10$ km.

29. A e B stanno dalla stessa parte di $y = x$. Simmetrico di B: $B'(7; 5)$. Retta AB': $y = 4 + x/7$; con $y = x$: $x = 14/3$. Punto $(14/3; 14/3)$; cammino $AB' = \sqrt{49 + 1} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$.

30. Circocentro: asse di AB: $x = 4$; asse di AC: $y - 3 = -1/3 \cdot (x - 1)$; si ottiene $(4; 2)$. Distanza $\sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}5$ km da ciascun paese.

31. $t = (x - 1)/2$, $y = 3 + (x - 1)/2$: $x - 2y + 5 = 0$. Distanza minima $|6 - 4 + 5| : \sqrt{5} = 7\sqrt{5}/5 \approx 3{,}13$ m, nel piede $H(23/5; 24/5)$, raggiunto per $t = (23/5 - 1)/2 = 9/5 = 1{,}8$ s.

32. $|40 \cdot 35 - 10 \cdot 15| : 2 = 625$ m^2. Una mediana divide un triangolo in due triangoli con basi uguali e la stessa altezza, quindi di uguale area: la recinzione va da A al punto medio di BC, $(55/2; 45/2)$, ed è la retta $y = 9x/11$, cioè $9x - 11y = 0$.

33. $P(t; t + 1)$: $AB(6; 2)$, $AP(t + 2; t)$, area $\frac{1}{2}|6t - 2(t + 2)| = |2t - 2| = 10$: $t = 6$ o $t = -4$. $P(6; 7)$ oppure $P(-4; -3)$.

34. Il fascio è $(1 + k)x + (1 - k)y - 2 = 0$, di centro $(1; 1)$. Per $k \neq \pm 1$ le intercette sono $2/(1 + k)$ e $2/(1 - k)$, e l'area è $2 : |1 - k^2| = 2 : |1 - k^2| = 1$, quindi $k = 0$ oppure $k = \pm\sqrt{2}$. Le rette sono $x + y - 2 = 0$, $(1 + \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2})y - 2 = 0$ e $(1 - \sqrt{2})x + (1 + \sqrt{2})y - 2 = 0$. Per $k = \pm 1$ la retta è parallela a un asse e non forma un triangolo; la retta esclusa $x - y = 0$ passa per l'origine.

35. Asse di AB: $x = (b - a)/2$; imponendo $O'A = O'C$ si trova $O'((b - a)/2; (c^2 - ab)/(2c))$. L'altezza da C è $x = 0$, quella da A è perpendicolare a BC: $y = (b/c)(x + a)$, quindi $H(0; ab/c)$. $G((b - a)/3; c/3)$. Si verifica che $G = (H + 2O')/3$: ascissa $(0 + b - a)/3$, ordinata $(ab/c + (c^2 - ab)/c)/3 = c/3$. Quindi G sta sul segmento HO' e $HG = 2GO'$. Ogni triangolo ha almeno due angoli acuti: messo il lato tra questi due vertici sull'asse x e il piede dell'altezza nell'origine, il piede cade all'interno del lato e il terzo vertice sull'asse y; un'isometria non cambia allineamenti e rapporti.