CAPITOLO

4

Successioni, progressioni e principio di induzione

Per salire una scala infinita bastano due cose: saper mettere il piede sul primo gradino e saper passare da un gradino al successivo. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Definire una successione con il termine generale o per ricorrenza, calcolarne i termini, rappresentarla per punti e studiarne monotonia e limitatezza.
2. Enunciare il principio di induzione e usarlo per dimostrare formule di somma, disuguaglianze e proprietà di divisibilità.
3. Distinguere l'induzione matematica dall'induzione fisica e riconoscere che molte verifiche non sono una dimostrazione.
4. Riconoscere le progressioni aritmetiche e geometriche, calcolarne termini e somme e risolvere problemi con esse.
5. Confrontare crescita lineare ed esponenziale discreta, anche nella capitalizzazione semplice e composta.
6. Calcolare la somma di una serie geometrica con $|q| < 1$ e costruire semplici modelli discreti per ricorrenza.

INDICE DEL CAPITOLO

4.1 Le successioni numeriche 2
4.2 Il principio di induzione 6
4.3 Dimostrare per induzione 9
4.4 Le progressioni aritmetiche 12
4.5 Le progressioni geometriche 14
4.6 Somme infinite e modelli per ricorrenza 17

Matematica 3 · Parte I · Equazioni, funzioni e successioni · versione 1.0
Capitolo 4: Successioni, progressioni e principio di induzione · pagine 89–114 del volume completo · estratto per lo studio

Un capitale lasciato in banca, una colonia di batteri, le file di posti di un teatro, i quadratini di una scacchiera: in tutti questi casi abbiamo un elenco ordinato di numeri, un primo, un secondo, un terzo e così via, senza una fine prevista. Chiedersi quanto varrà il centesimo termine, o quanto fa la somma dei primi cento, significa ragionare su *infiniti* casi alla volta.

In questo capitolo diamo un nome a questi elenchi, le *successioni*, e impariamo a descriverli con una formula o con una regola che costruisce ogni termine dal precedente. Studieremo poi il *principio di induzione*, il metodo di dimostrazione con cui la matematica controlla una proprietà per tutti i numeri naturali senza doverli esaminare uno per uno, e lo distingueremo dall'induzione delle scienze sperimentali. Le due famiglie di successioni più importanti, le progressioni aritmetiche e geometriche, ci daranno i modelli di crescita lineare ed esponenziale «a scatti», che nel capitolo 12 diventeranno continui; infine sommeremo infiniti termini e useremo le successioni per descrivere un prestito che si estingue mese dopo mese.

4.1 Le successioni numeriche

4.1.1 Che cos'è una successione

Elenchiamo i quadrati dei numeri naturali positivi: 1, 4, 9, 16, 25, … Al posto 1 c'è 1, al posto 2 c'è 4, al posto 3 c'è 9: a ogni numero naturale corrisponde un numero reale, ed è proprio la definizione di funzione che hai incontrato nel capitolo 3.

IN SINTESI

Una **successione numerica** è una funzione che associa a ogni numero naturale n (di solito a partire da $n = 1$, talvolta da $n = 0$) un numero reale, indicato con a_n. I numeri a_1, a_2, a_3, … sono i *termini* della successione e n è l'*indice* del termine a_n. La successione si indica con (a_n).

Il **termine generale** è l'espressione che dà a_n in funzione di n, come $a_n = n^2$.

Conoscere il termine generale permette di calcolare qualsiasi termine senza conoscere i precedenti. Per esempio:

- $a_n = \dfrac{1}{n}$ dà $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$: i termini si avvicinano a 0 senza mai raggiungerlo;
- $b_n = (-1)^n$ dà $-1, 1, -1, 1, \ldots$: i termini si alternano tra due soli valori;
- $c_n = \dfrac{n}{n+1}$ dà $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots$; il centesimo termine è $c_{100} = \dfrac{100}{101}$.

Non ogni successione ha un termine generale semplice. La successione dei numeri primi 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... è definita senza ambiguità (sappiamo dire, con un po' di pazienza, quale sia il millesimo primo), ma nessuna formula elementare la produce. Una successione è definita quando è chiaro *come* si ottiene ogni termine, non necessariamente con una formula.

Poiché una successione è una funzione, possiamo disegnarne il **grafico** nel piano cartesiano: è l'insieme dei punti $(n; a_n)$. Il dominio è fatto di numeri naturali, quindi il grafico è formato da *punti isolati*, uno sopra ogni intero; non ha senso unirli con una linea continua, perché tra $n = 2$ e $n = 3$ la successione non è definita. Ne vedrai diversi esempi in questo capitolo, a partire dalla Figura 4.1.

4.1.2 Successioni definite per ricorrenza

Una successione si può definire anche dando il primo termine e una regola che, a partire da un termine, costruisce il successivo. Si parla allora di **definizione per ricorrenza** (o ricorsiva). Per esempio

$$a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$$

significa: il primo termine è 3, e ogni termine si ottiene raddoppiando il precedente e togliendo 1. Calcoliamo: $a_2 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$, $a_3 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$, $a_4 = 17$, $a_5 = 33$. Per calcolare a_{50} dovremmo però calcolare prima tutti i 49 termini precedenti. Guardando i numeri ottenuti, 3, 5, 9, 17, 33, si nota che ciascuno supera di 1 una potenza di 2: $3 = 2 + 1$, $5 = 4 + 1$, $9 = 8 + 1$... Viene il sospetto che sia $a_n = 2^n + 1$. Per ora è solo una *congettura*: la dimostreremo nel paragrafo dedicato alle dimostrazioni per induzione.

Hai già usato una definizione per ricorrenza senza chiamarla così: il metodo di Erone per approssimare $\sqrt{2}$, in *Matematica 2*, parte da un valore x_1 e calcola ogni nuova approssimazione dalla precedente con $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$.

4.1.3 La successione di Fibonacci

Nel *Liber abaci* di Leonardo Pisano, detto Fibonacci, il trattato di aritmetica di cui hai letto in *Matematica 1*, compare un celebre problema: una coppia di conigli genera ogni mese, a partire dal secondo mese di vita, una nuova coppia; quante coppie ci saranno dopo un certo numero di mesi, se nessun coniglio muore? Il numero di coppie mese per mese è la **successione di Fibonacci**, in cui ogni termine, dal terzo in poi, è la somma dei due precedenti:

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Qui la ricorrenza usa *due* termini precedenti, e per questo vanno assegnati i primi due. I termini sono 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... Nella Tabella 4.1 abbiamo calcolato anche il rapporto F_{n+1}/F_n tra ogni termine e il precedente.

Tabella 4.1 I primi termini della successione di Fibonacci e il rapporto tra due termini consecutivi (arrotondato alla quarta cifra decimale).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
F_{n+1}/F_n	1	2	1,5	1,6667	1,6	1,625	1,6154	1,6190	1,6176	1,6182	1,6180	1,6181

I rapporti oscillano, una volta sopra e una volta sotto, attorno a un valore sempre più preciso: 1,618... È il **numero aureo** $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ che hai incontrato in *Matematica 2* studiando la sezione aurea e le equazioni di secondo grado (Figura 4.1). Per ora si tratta di un'osservazione numerica: dimostrare che i rapporti «tendono» a φ richiede il concetto di limite, che studierai al quinto anno. Possiamo però capire perché compare proprio φ. Dividendo $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ per F_{n+1} si ottiene

$$\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}}$$

Se i rapporti si stabilizzassero su un valore r, a sinistra avremmo circa r e a destra circa $1 + 1/r$; quindi $r = 1 + 1/r$, cioè $r^2 = r + 1$, che è proprio l'equazione $\varphi^2 = \varphi + 1$ del numero aureo. È un ragionamento euristico, non una dimostrazione: suppone che il valore limite esista.

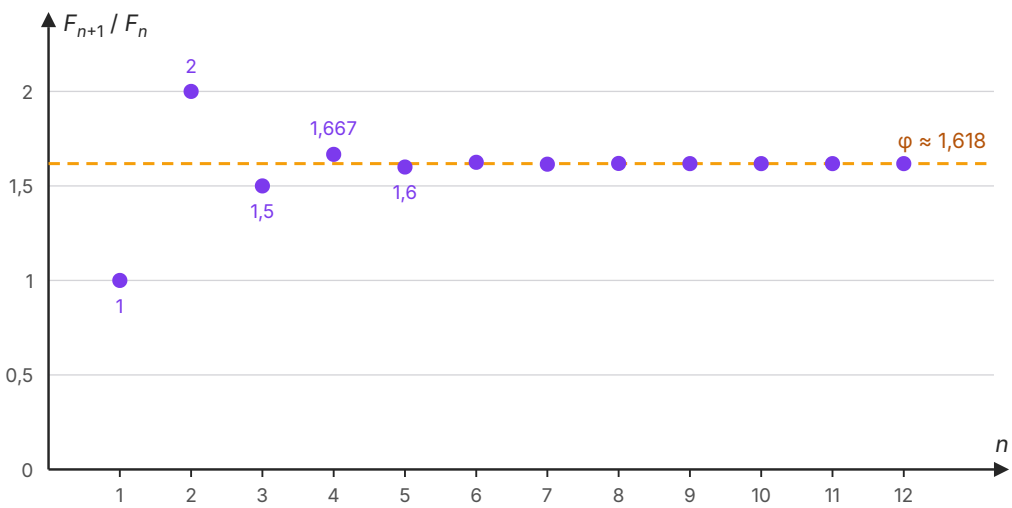


Figura 4.1 Grafico per punti della successione F_{n+1}/F_n dei rapporti tra termini consecutivi di Fibonacci. I punti si alternano sopra e sotto la retta tratteggiata $y = \varphi$ e se ne avvicinano sempre di più. I punti sono isolati: la successione è definita solo per n naturale.

4.1.4 Successioni monotone e limitate

Come per le funzioni del capitolo 3, ci interessa sapere se i termini di una successione aumentano o diminuiscono, e se restano entro certi valori.

IN SINTESI

Una successione (a_n) è

- **crescente** se $a_{n+1} > a_n$ per ogni n; **decrescente** se $a_{n+1} < a_n$ per ogni n (crescente o decrescente *in senso lato* se vale $\geq$ o $\leq$);
- **successione monotona** se è crescente o decrescente, anche in senso lato; **costante** se tutti i termini sono uguali;
- **limitata superiormente** se esiste un numero M tale che $a_n \leq M$ per ogni n; **limitata inferiormente** se esiste m tale che $a_n \geq m$ per ogni n; **successione limitata** se è limitata sia superiormente sia inferiormente.

Per stabilire se una successione è monotona si studia di solito il segno della differenza $a_{n+1} - a_n$; se i termini sono tutti positivi si può anche confrontare il rapporto a_{n+1}/a_n con 1. Qualche esempio: $a_n = 1/n$ è decrescente e limitata $(0 < a_n \leq 1)$; $b_n = (-1)^n$ è limitata $(-1 \leq b_n \leq 1)$ ma non è monotona; $a_n = n^2$ è crescente e non è limitata superiormente, perché supera qualsiasi numero M fissato. Una successione crescente è sempre limitata inferiormente dal suo primo termine.

ESEMPIO SVOLTO

Studia la monotonia e la limitatezza della successione $c_n = \dfrac{n}{n+1}$, con $n \geq 1$.

Monotonia. Calcoliamo la differenza tra due termini consecutivi: $c_{n+1} - c_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$. Il numeratore vale 1 e il denominatore è positivo per ogni $n \geq 1$, quindi $c_{n+1} - c_n > 0$: la successione è **crescente**.

Limitatezza. Essendo crescente, il termine più piccolo è il primo, $c_1 = \dfrac{1}{2}$. Inoltre $n < n + 1$, quindi $c_n < 1$ per ogni n. Allora $\dfrac{1}{2} \leq c_n < 1$: la successione è **limitata**. Il valore 1 non è mai raggiunto, ma i termini gli si avvicinano quanto vogliamo: $c_{999} = 0{,}999$.

4.2 Il principio di induzione

4.2.1 Infiniti casi con un numero finito di passi

Prova a sommare i primi numeri dispari: $1 = 1$, $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16$. Escono i quadrati perfetti, e viene da pensare che la somma dei primi n dispari sia sempre n^2. Possiamo controllarlo per $n = 5$, per $n = 100$, per un milione di valori con il computer: ma i numeri naturali sono infiniti, e nessun numero di verifiche esaurisce tutti i casi. Serve un modo di ragionare che, con un numero finito di passaggi, raggiunga ogni numero naturale.

Immagina una fila infinita di tessere del domino, una per ogni numero naturale. Per essere sicuri che cadano *tutte* bastano due cose: che cada la prima, e che le tessere siano disposte in modo che ciascuna, cadendo, faccia cadere la successiva. Non serve guardarle una per una. Questa è l'idea del principio di induzione.

IN SINTESI

Principio di induzione. Sia $P(n)$ una proposizione che dipende dal numero naturale n, con $n \geq n_0$. Se

- $P(n_0)$ è vera (**passo base**), e
- per ogni $n \geq n_0$, supponendo vera $P(n)$ si può dimostrare che è vera anche $P(n + 1)$ (**passo induttivo**),

allora $P(n)$ è vera per ogni numero naturale $n \geq n_0$.

Nel passo induttivo la proposizione $P(n)$ non viene dimostrata: viene *assunta* come vera, e si chiama **ipotesi induttiva**. Quello che si dimostra è l'implicazione «se $P(n)$, allora $P(n + 1)$», cioè che la verità si trasmette da ogni numero al successivo. Il passo base fa partire la catena: da $P(n_0)$ si ottiene $P(n_0 + 1)$, da questa $P(n_0 + 2)$, e così via, fino a raggiungere qualsiasi numero naturale.

Perché possiamo fidarci di questo principio? Esso esprime la struttura stessa dei numeri naturali: ogni numero naturale si raggiunge partendo da 0 e aggiungendo 1 un numero finito di volte. Il matematico Giuseppe Peano lo ha posto tra gli *assiomi* con cui ha descritto i numeri naturali. Possiamo anche ricavarlo da un'altra proprietà di $\mathbb{N}$, il fatto che ogni insieme non vuoto di numeri naturali abbia un elemento minimo. Supponiamo che base e passo siano veri ma che $P(n)$ sia falsa per qualche n; tra i numeri per cui è falsa ce n'è uno minimo, m. Non può essere $m = n_0$, perché $P(n_0)$ è vera; allora $m - 1 \geq n_0$ e $P(m - 1)$ è vera, perché m è il primo caso falso. Ma per il passo induttivo da $P(m - 1)$ segue $P(m)$: assurdo.

4.2.2 La prima dimostrazione per induzione

Dimostriamo che, per ogni $n \geq 1$,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Prima di tutto un argomento diretto, che mostra da dove nasce la formula. Scriviamo la somma due volte, una in ordine crescente e una in ordine decrescente, e sommiamo in colonna: ogni colonna dà $n + 1$, e le colonne sono n. Quindi il doppio della somma è $n(n + 1)$ e la somma è la sua metà. La Figura 4.2 mostra lo stesso ragionamento con i punti di un rettangolo.

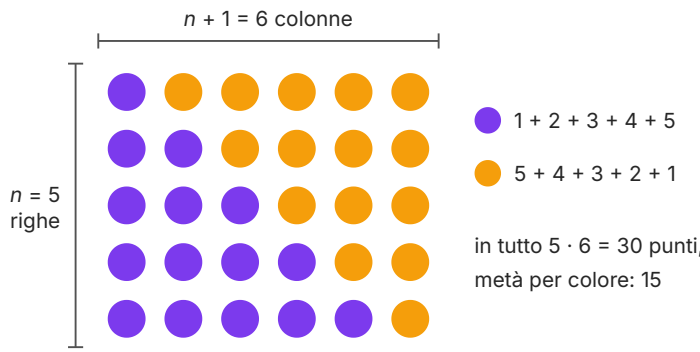


Figura 4.2 La somma $1 + 2 + \ldots + n$ per $n = 5$. I punti viola (1, 2, 3, 4, 5 per riga) e quelli arancioni (5, 4, 3, 2, 1) formano un rettangolo di n righe e $n + 1$ colonne: ciascuna delle due «scale» contiene metà dei $n(n + 1)$ punti.

Ora la dimostrazione per induzione. Indichiamo con $P(n)$ l'uguaglianza da dimostrare.

Passo base. Per $n = 1$ il primo membro vale 1 e il secondo vale $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$: $P(1)$ è vera.

Passo induttivo. Supponiamo vera $P(n)$, cioè $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, e dimostriamo $P(n + 1)$, cioè $1 + 2 + \ldots + n + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Nel primo membro di $P(n + 1)$ i primi n addendi sono la somma di $P(n)$, che per l'ipotesi induttiva vale $\frac{n(n+1)}{2}$. Quindi

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

che è il secondo membro di $P(n + 1)$. Per il principio di induzione la formula vale per ogni $n \geq 1$. c.v.d.

Osserva lo schema, che ritroverai in tutte le dimostrazioni di questo tipo: si scrive esplicitamente che cosa si deve dimostrare, $P(n+1)$; si individua dentro di essa la parte che coincide con $P(n)$; si sostituisce usando l'ipotesi induttiva e si arriva, con il calcolo, alla tesi.

APPROFONDIMENTO · IL PICCOLO GAUSS

Secondo la tradizione, il giovanissimo Carl Friedrich Gauss, a cui il maestro aveva assegnato di sommare tutti i numeri da 1 a 100 per tenere occupata la classe, consegnò il risultato dopo pochi istanti: aveva notato che $1 + 100$, $2 + 99$, $3 + 98$, ... danno sempre 101, e che le coppie sono 50, quindi la somma è $50 \cdot 101 = 5050$. Le versioni dell'aneddoto non concordano sui dettagli e non è possibile verificarle; il ragionamento, invece, è esattamente quello della Figura 4.2.

4.2.3 Induzione matematica e induzione fisica

Il polinomio $n^2 + n + 41$, studiato da Eulero, ha una proprietà sorprendente: per $n = 0, 1, 2, \ldots, 39$ dà sempre un numero primo (41, 43, 47, 53, ..., 1601). Quaranta casi favorevoli consecutivi sembrano un'ottima prova. Eppure per $n = 40$ si ottiene

$$40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 41 \cdot 40 + 41 = 41^2 = 1681$$

che non è primo. Anche per $n = 41$ il numero $41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot 43$ è composto. Una regolarità osservata in molti casi, anche moltissimi, non è una dimostrazione.

La parola «induzione» ha infatti due significati diversi. Nelle scienze sperimentali l'**induzione fisica** è il procedimento con cui, dall'osservazione di molti casi particolari, si ricava una legge generale: se ogni volta che un gas viene scaldato a volume costante la sua pressione aumenta, si formula la legge che lo prevede per tutti i casi. Le *Indicazioni nazionali* descrivono questa induzione come fondata sull'«invarianza delle leggi dei fenomeni»: confidiamo che la natura si comporti domani come oggi. Una legge così ottenuta resta sempre esposta a un nuovo esperimento che la smentisca.

L'induzione *matematica*, invece, è una dimostrazione vera e propria: non si limita a raccogliere casi, ma prova che la proprietà si trasmette da ogni numero al successivo. Le *Indicazioni* la legano all'«invarianza delle leggi del pensiero»: il ragionamento che porta da $P(n)$ a $P(n+1)$ è lo stesso per ogni n, e per questo vale per tutti. Le due induzioni però collaborano. La formula $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ l'abbiamo *scoperta* osservando qualche caso, come fa uno scienziato; solo dopo l'abbiamo potuta *dimostrare*. La matematica non procede soltanto per deduzioni: si osserva, si congettura, e poi si dimostra, e il principio di induzione stesso è un assioma che accettiamo, non una conseguenza della sola logica.

COLLEGAMENTI · FILOSOFIA

Il problema della validità dell'induzione fisica è uno dei grandi temi della filosofia moderna. Il filosofo scozzese David Hume, nel Settecento, osservò che nessun numero di osservazioni passate garantisce logicamente che il futuro sarà simile al passato: ci aspettiamo che il sole sorga domani per abitudine, non per una dimostrazione. Lo studierai nel corso di filosofia. La matematica sfugge a questa obiezione proprio perché il principio di induzione non si basa sull'osservazione dei casi, ma sulla definizione dei numeri naturali.

4.3 Dimostrare per induzione

4.3.1 Somme

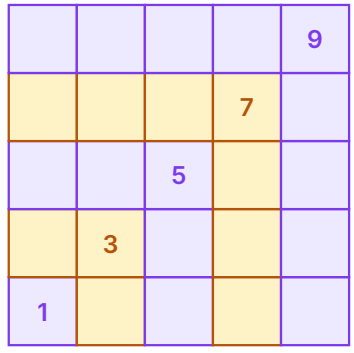
Torniamo alla somma dei primi n numeri dispari. L'n-esimo dispari è $2n - 1$, quindi la proprietà da dimostrare è, per $n \geq 1$,

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Passo base. Per $n = 1$: $1 = 1^2$, vero.

Passo induttivo. Supponiamo $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$. Il dispari successivo è $2(n + 1) - 1 = 2n + 1$, quindi $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, che è $P(n + 1)$. c.v.d.

Il passaggio chiave, $n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$, ha un significato geometrico: un quadrato di lato $n + 1$ si ottiene da uno di lato n aggiungendo una «squadra» di $2n + 1$ quadretti (Figura 4.3).



Ogni «squadra» aggiunge il dispari successivo:

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2 = 25$

Dal quadrato di lato n si passa a quello di lato $n + 1$ aggiungendo $2n + 1$ quadretti.

Figura 4.3 Il quadrato di lato 5 scomposto in «squadre» (gnomoni) di 1, 3, 5, 7 e 9 quadretti: la somma dei primi cinque dispari è 5^2.

Con lo stesso schema si dimostra una formula che non si «vede» altrettanto facilmente:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Passo base. Per $n = 1$: il primo membro è 1, il secondo $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$.

Passo induttivo. Supponiamo vera la formula per n e aggiungiamo $(n+1)^2$ a entrambi i membri. Raccogliendo $(n+1)$:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

Poiché $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$ (lo verifichi moltiplicando), la somma vale $\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, che è proprio il secondo membro con $n+1$ al posto di n: infatti $2(n+1) + 1 = 2n + 3$. c.v.d.

ESEMPIO SVOLTO

Dimostra la congettura del primo paragrafo: se $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = 2a_n - 1$, allora $a_n = 2^n + 1$ per ogni $n \geq 1$.

Passo base. $a_1 = 3$ e $2^1 + 1 = 3$: vero.

Passo induttivo. Ipotesi induttiva: $a_n = 2^n + 1$. Tesi: $a_{n+1} = 2^{n+1} + 1$. Per la definizione della successione e per l'ipotesi, $a_{n+1} = 2a_n - 1 = 2(2^n + 1) - 1 = 2^{n+1} + 2 - 1 = 2^{n+1} + 1$. c.v.d.

Ora possiamo calcolare $a_{50} = 2^{50} + 1$ direttamente. Le successioni definite per ricorrenza e l'induzione vanno d'accordo: la ricorrenza dice come passare da n a $n+1$, e l'induzione usa esattamente questo passaggio.

4.3.2 Disuguaglianze

L'induzione dimostra anche disuguaglianze. Proviamo che $2^n > n$ per ogni $n \geq 1$. **Passo base:** $2^1 = 2 > 1$. **Passo induttivo:** se $2^n > n$, allora $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n = n + n \geq n + 1$, perché $n \geq 1$. Quindi $2^{n+1} > n + 1$. c.v.d. Osserva che nel passo abbiamo usato l'ipotesi $n \geq 1$: in una disuguaglianza la catena di passaggi spesso funziona solo da un certo n in poi, e il passo base va scelto di conseguenza.

IN SINTESI

Teorema (disuguaglianza di Bernoulli). Ipotesi: x è un numero reale con $x > -1$, n un numero naturale con $n \geq 1$. **Tesi:** $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Dimostrazione. Passo base. Per $n = 1$ i due membri sono uguali: $1 + x = 1 + x$. **Passo induttivo.** Supponiamo $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Poiché $x > -1$, il numero $1 + x$ è positivo, e moltiplicando entrambi

i membri per $1 + x$ il verso della disuguaglianza si conserva:

$$(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$$

dove l'ultimo passaggio vale perché $nx^2 \geq 0$. c.v.d.

L'ipotesi $x > -1$ è servita in un punto preciso: moltiplicare per un numero negativo avrebbe invertito il verso. La disuguaglianza dà stime rapide: per esempio $1{,}01^{100} \geq 1 + 100 \cdot 0{,}01 = 2$ (il valore vero è circa 2,70). Vedremo nel paragrafo sulle progressioni geometriche che dice qualcosa di concreto sul denaro in banca.

4.3.3 Divisibilità

Dimostriamo che, per ogni $n \geq 1$, il numero $n^3 - n$ è divisibile per 6. **Passo base.** $1^3 - 1 = 0$, divisibile per 6. **Passo induttivo.** Supponiamo che $n^3 - n$ sia divisibile per 6 e sviluppiamo il caso successivo:

$$(n + 1)^3 - (n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3n(n + 1)$$

Il primo addendo è divisibile per 6 per l'ipotesi induttiva. Nel secondo, $n(n + 1)$ è il prodotto di due numeri consecutivi, uno dei quali è pari: quindi $n(n + 1)$ è pari e $3n(n + 1)$ è divisibile per 6. La somma di due multipli di 6 è un multiplo di 6. c.v.d. Il risultato si vede anche senza induzione, scrivendo $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$: tra tre interi consecutivi ce n'è sempre uno pari e uno multiplo di 3. Spesso un enunciato ammette più dimostrazioni, e confrontarle aiuta a capirlo.

ERRORE FREQUENTE

Dimenticare il passo base. Consideriamo $P(n)$: «$n^2 + n$ è dispari». Il passo induttivo funziona: se $n^2 + n$ è dispari, allora $(n + 1)^2 + (n + 1) = (n^2 + n) + 2(n + 1)$ è un dispari più un pari, quindi dispari. Ma $P(1)$ dice che 2 è dispari, il che è falso; anzi $n^2 + n = n(n + 1)$ è *sempre* pari. Senza base, la catena non parte: un passo induttivo corretto da solo non dimostra nulla.

Un passo che non vale per ogni *n*. Una famosa «dimostrazione» afferma che tutti i cavalli hanno lo stesso colore. Base: in un gruppo di 1 cavallo, i cavalli hanno tutti lo stesso colore. Passo: in un gruppo di $n + 1$ cavalli, togliendo il primo ne restano n, dello stesso colore per ipotesi; togliendo l'ultimo ne restano altri n, anch'essi dello stesso colore; i due gruppi hanno cavalli in comune, quindi tutti gli $n + 1$ hanno lo stesso colore. L'errore è nel passaggio da $n = 1$ a $n = 2$: con due cavalli i due gruppi da uno *non* hanno cavalli in comune, e la catena si spezza al primo anello. Il passo induttivo deve valere per *ogni* $n \geq n_0$, compreso il primo.

4.4 Le progressioni aritmetiche

4.4.1 Definizione e termine generale

Le file di una tribuna hanno 20 posti nella prima, 23 nella seconda, 26 nella terza, e così via: ogni fila ha 3 posti più della precedente. La successione 20, 23, 26, 29, … è un esempio di progressione aritmetica.

IN SINTESI

Una **progressione aritmetica** è una successione in cui la differenza tra ogni termine e il precedente è costante: $a_{n+1} - a_n = d$ per ogni n. Il numero d si chiama **ragione** della progressione.

Termine generale: $a_n = a_1 + (n-1)d$; più in generale $a_n = a_k + (n-k)d$.

Somma dei primi n termini: $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2} = \dfrac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$.

La definizione è per ricorrenza: $a_{n+1} = a_n + d$. Per arrivare da a_1 ad a_n si aggiunge la ragione $n - 1$ volte, da cui il termine generale (che potresti dimostrare per induzione). Se $d > 0$ la progressione è crescente, se $d < 0$ è decrescente, se $d = 0$ è costante. Esempi: 2, 4, 6, 8, … ($d = 2$); 10, 7, 4, 1, −2, … ($d = -3$); 5, 5, 5, … ($d = 0$).

Poiché $a_n = dn + (a_1 - d)$ è un'espressione di primo grado in n, i punti $(n; a_n)$ del grafico stanno tutti su una retta di coefficiente angolare d (Figura 4.4). Una progressione aritmetica descrive dunque una **crescita lineare** a passi discreti: in ogni intervallo di tempo la grandezza aumenta (o diminuisce) della stessa *quantità*. È il caso dell'interesse semplice studiato in *Matematica 1*: un capitale C_0 al tasso annuo i diventa, dopo n anni, $C_0(1 + in)$, e gli interessi di ogni anno sono sempre $C_0\, i$.

Tre numeri a, b, c sono termini consecutivi di una progressione aritmetica se e solo se $b - a = c - b$, cioè

$$b = \frac{a + c}{2}$$

Il termine centrale è la media aritmetica degli altri due e si chiama **medio aritmetico** tra a e c. Più in generale, «inserire k medi aritmetici» tra due numeri significa costruire una progressione aritmetica che parte dal primo e arriva al secondo in $k + 1$ passi uguali.

4.4.2 La somma dei termini

Il ragionamento della Figura 4.2 funziona per qualsiasi progressione aritmetica. Scriviamo S_n in due ordini:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n,\ S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$$

Nella prima riga i termini aumentano di d a ogni passo, nella seconda diminuiscono di d: quindi ogni colonna ha la stessa somma della prima, $a_1 + a_n$ (per esempio $a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$). Le colonne sono n, dunque $2S_n = n(a_1 + a_n)$, cioè $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$: il numero dei termini per la media aritmetica tra il primo e l'ultimo. Sostituendo $a_n = a_1 + (n-1)d$ si ottiene la seconda forma, utile quando l'ultimo termine non è noto. La formula $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ne è il caso $a_1 = 1$, $d = 1$.

ESEMPIO SVOLTO

In una progressione aritmetica $a_3 = 7$ e $a_{10} = 28$. Trova la ragione, il primo termine e la somma dei primi dieci termini.

Da $a_{10} = a_3 + 7d$ si ha $28 = 7 + 7d$, quindi $d = 3$. Poi $a_1 = a_3 - 2d = 7 - 6 = 1$. La progressione è 1, 4, 7, 10, ..., 28 e

$$S_{10} = \frac{10 \cdot (1 + 28)}{2} = 145$$

Controllo: $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28 = 145$.

ESEMPIO SVOLTO

Quanti termini della progressione 5, 9, 13, 17, ... bisogna sommare perché la somma superi 1000?

Qui $a_1 = 5$ e $d = 4$, quindi $S_n = \dfrac{n[10 + 4(n-1)]}{2} = n(2n + 3) = 2n^2 + 3n$. Cerchiamo i numeri naturali n tali che $2n^2 + 3n > 1000$, cioè $2n^2 + 3n - 1000 > 0$. Le radici dell'equazione associata sono $n = \dfrac{-3 \pm \sqrt{8009}}{4}$; la positiva vale circa 21,6. La disequazione è soddisfatta per valori esterni alle radici, e tra i naturali per $n \geq 22$.

Controllo: $S_{21} = 21 \cdot 45 = 945$ e $S_{22} = 22 \cdot 47 = 1034$. Servono **22 termini**. Nota che il risultato deve essere un numero naturale: la soluzione 21,6 della disequazione va interpretata, non riportata così com'è.

4.5 Le progressioni geometriche

4.5.1 Definizione e termine generale

Un foglio di carta piegato a metà ha 2 strati, piegato ancora 4, poi 8, 16, 32: a ogni piega il numero di strati *raddoppia*. Qui non si aggiunge una quantità fissa, si moltiplica per un fattore fisso.

IN SINTESI

Una **progressione geometrica** è una successione di termini non nulli in cui il rapporto tra ogni termine e il precedente è costante: $a_{n+1} = q \cdot a_n$ per ogni n. Il numero $q \neq 0$ è la ragione della progressione.

Termine generale: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Somma dei primi n termini: $S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$ se $q \neq 1$; $S_n = n \cdot a_1$ se $q = 1$.

Esempi: 3, 6, 12, 24, … ($q = 2$); 81, 27, 9, 3, … ($q = \dfrac{1}{3}$); 1, −2, 4, −8, 16, … ($q = -2$). Il comportamento dipende dalla ragione. Se $a_1 > 0$: per $q > 1$ la progressione è crescente, per $0 < q < 1$ decrescente, per $q = 1$ costante; per $q < 0$ i termini cambiano segno a ogni passo e la progressione non è monotona. Il termine generale si ottiene moltiplicando a_1 per q per $n - 1$ volte.

Tre numeri non nulli a, b, c sono termini consecutivi di una progressione geometrica se e solo se $b/a = c/b$, cioè $b^2 = ac$. Se i tre numeri sono positivi, $b = \sqrt{ac}$ si chiama **medio geometrico** tra a e c: è il medio proporzionale della proporzione $a : b = b : c$, già incontrato in geometria.

4.5.2 La somma dei termini

Per sommare $S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}$ usiamo un trucco: moltiplichiamo per q, ottenendo $qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$, e sottraiamo. Tutti i termini intermedi compaiono in entrambe le somme e si cancellano:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1 q^n, \text{ cioè } S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

Se $q \neq 1$ possiamo dividere per $1 - q$ e otteniamo la formula. Se $q = 1$ tutti i termini sono uguali ad a_1 e la somma è na_1. La stessa formula si può dimostrare per induzione (è uno degli esercizi). Per esempio $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^9 = \dfrac{1-2^{10}}{1-2} = 1023$.

4.5.3 Crescita esponenziale discreta

Una progressione geometrica descrive una grandezza che, in ogni intervallo di tempo, viene moltiplicata per lo stesso fattore: cresce (o diminuisce) della stessa *percentuale*, non della stessa

quantità. Parliamo di **crescita esponenziale discreta**, perché la variabile n compare all'esponente e il tempo avanza a scatti. In questi modelli conviene numerare i termini da 0: a_0 è il valore iniziale e $a_n = a_0\, q^n$ il valore dopo n periodi.

- **Capitalizzazione composta.** Un capitale C_0 investito al tasso annuo i, con gli interessi aggiunti al capitale alla fine di ogni anno, diventa $C_0(1+i)$ dopo un anno, $C_0(1+i)^2$ dopo due, e dopo n anni

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

- **Popolazioni.** Una popolazione che cresce del 2% all'anno viene moltiplicata ogni anno per 1,02: $P_n = P_0 \cdot 1{,}02^n$.
- **Decadimento a scatti.** Se ogni lastra di vetro di una pila lascia passare il 90% della luce che la colpisce (dato di esempio), dopo n lastre resta una frazione $0{,}9^n$ dell'intensità iniziale: con 7 lastre meno della metà, perché $0{,}9^7 \approx 0{,}478$. Qui la ragione è compresa tra 0 e 1 e la grandezza diminuisce, sempre di una percentuale fissa.

Il nome di **capitalizzazione composta** dice che gli interessi «si compongono»: dal secondo anno producono a loro volta interessi. Confrontiamo i due regimi su 1000 € al 4% annuo (Tabella 4.2 e Figura 4.5).

Tabella 4.2 Capitale (in euro) prodotto da 1000 € al tasso annuo del 4% nei due regimi, arrotondato al centesimo.

Anni n	Interesse semplice $1000(1+0{,}04n)$	Capitalizzazione composta $1000 \cdot 1{,}04^n$	Differenza
0	1000,00	1000,00	0,00
1	1040,00	1040,00	0,00
2	1080,00	1081,60	1,60
5	1200,00	1216,65	16,65
10	1400,00	1480,24	80,24
20	1800,00	2191,12	391,12
30	2200,00	3243,40	1043,40
40	2600,00	4801,02	2201,02

Nei primi anni la differenza è di pochi euro, poi cresce sempre più in fretta: dopo 40 anni il capitale composto è quasi il doppio di quello semplice. Che il regime composto non dia mai meno di quello semplice è proprio la disuguaglianza di Bernoulli: $(1+i)^n \geq 1+ni$. In generale, una progressione geometrica di ragione $q > 1$ finisce per superare qualsiasi progressione aritmetica, anche se parte più in basso o cresce più lentamente all'inizio: nella Figura 4.4 la progressione geometrica di ragione 1,5 supera quella aritmetica di ragione 2 già dal quinto termine.

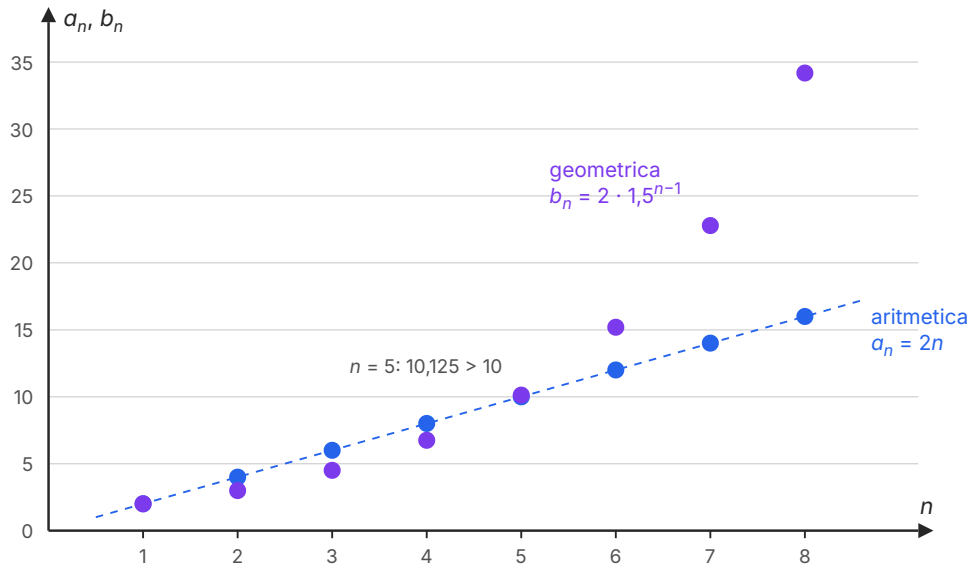


Figura 4.4 Una progressione aritmetica ($a_n = 2n$, ragione 2) e una geometrica ($b_n = 2 \cdot 1{,}5^{n-1}$, ragione 1,5) con lo stesso primo termine 2. I punti della prima stanno su una retta; la seconda resta sotto fino a $n = 4$ (6,75 < 8) e poi la supera, sempre più nettamente.

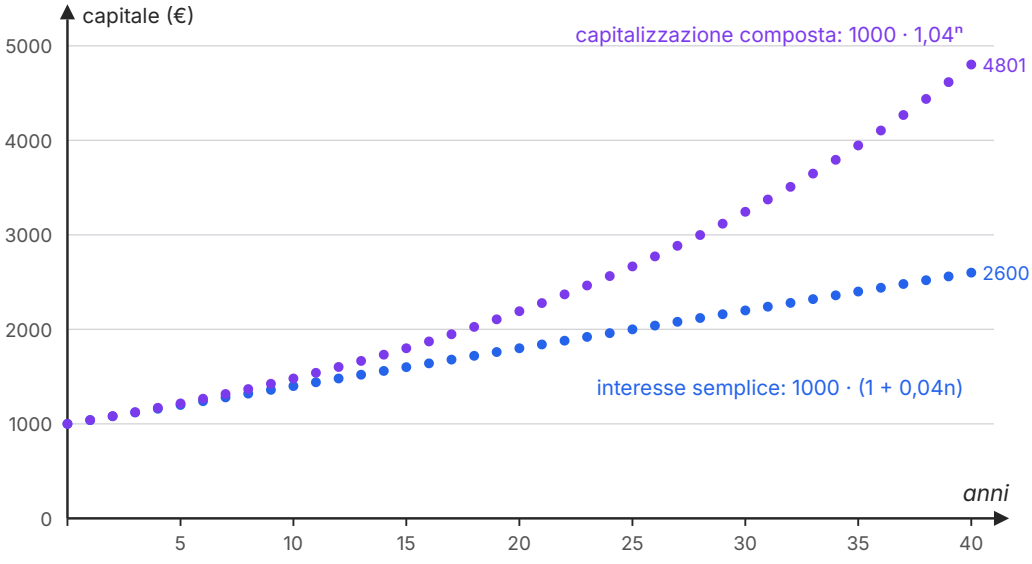


Figura 4.5 Crescita di 1000 € al 4% annuo: interesse semplice (crescita lineare, punti blu) e capitalizzazione composta (crescita esponenziale discreta, punti viola), anno per anno per 40 anni.

ESEMPIO SVOLTO

Un capitale di 5000 € viene investito al 3% annuo in capitalizzazione composta. a) Quanto vale dopo 10 anni? b) Dopo quanti anni interi avrà almeno raddoppiato il suo valore?

a) $C_{10} = 5000 \cdot 1{,}03^{10} \approx 5000 \cdot 1{,}343916 \approx 6719{,}58$ €.

b) Cerchiamo il più piccolo n con $5000 \cdot 1{,}03^n \geq 10\,000$, cioè $1{,}03^n \geq 2$: il risultato non dipende dal capitale iniziale. Senza logaritmi procediamo per tentativi con la calcolatrice: $1{,}03^{23} \approx 1{,}974$ e $1{,}03^{24} \approx 2{,}033$. Servono **24 anni**. Nel capitolo 13 i logaritmi permetteranno di risolvere direttamente l'equazione $1{,}03^n = 2$.

COLLEGAMENTI · DAL DISCRETO AL CONTINUO

Nei modelli di questo paragrafo la grandezza cambia a scatti: gli interessi arrivano a fine anno, una generazione di batteri dopo l'altra. Molti fenomeni, come il decadimento radioattivo o il raffreddamento di un corpo, cambiano invece in modo continuo. Nel capitolo 12 vedremo che, rendendo gli scatti sempre più frequenti e piccoli, la progressione geometrica diventa la funzione esponenziale, e incontreremo il numero e.

4.6 Somme infinite e modelli per ricorrenza

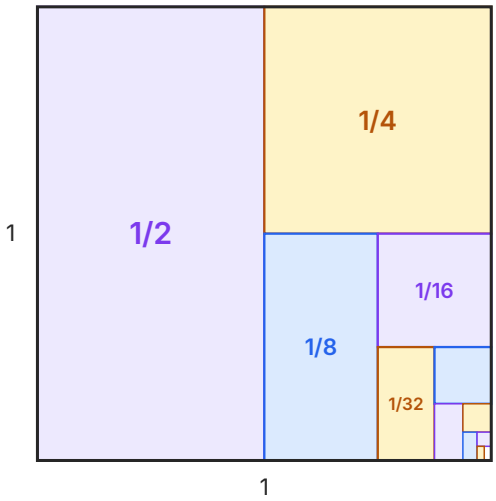
4.6.1 Sommare infiniti termini

Prendiamo un quadrato di area 1 e coloriamone la metà, poi metà di ciò che resta, poi ancora metà del resto, e così via (Figura 4.6). Le parti colorate hanno area $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, …: sono i termini della progressione geometrica di primo termine $\frac{1}{2}$ e ragione $\frac{1}{2}$. Dopo n passi l'area colorata è

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

e l'area non colorata è $(1/2)^n$: dopo 10 passi meno di un millesimo, dopo 20 meno di un milionesimo. Nessuna somma finita arriva a 1, ma la parte mancante diventa piccola quanto vogliamo. Diciamo allora che la somma di *tutti* gli infiniti termini è 1, e scriviamo

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$$



Il quadrato ha area 1. Ogni pezzo è la metà di ciò che restava:

1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... = 1

Dopo *n* pezzi resta scoperta un'area $(1/2)^n$, piccola quanto vogliamo.

Figura 4.6 La serie geometrica $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ come suddivisione di un quadrato di area 1: ogni rettangolo è metà della regione ancora libera.

Lo stesso ragionamento vale per ogni progressione geometrica con $|q| < 1$. In $S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$ il termine q^n diventa, al crescere di n, piccolo quanto vogliamo in valore assoluto (per esempio $0{,}9^{100} \approx 0{,}000027$), e la somma si avvicina sempre più a $\dfrac{a_1}{1-q}$. Chiamiamo **serie geometrica** la somma degli infiniti termini di una progressione geometrica.

IN SINTESI

Se $|q| < 1$, la somma degli infiniti termini della progressione geometrica di primo termine a_1 e ragione q è

$$S = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots = \frac{a_1}{1-q}$$

Se $|q| \geq 1$ (e $a_1 \neq 0$) la somma infinita non è un numero: per $q \geq 1$ le somme parziali superano ogni valore, per $q \leq -1$ oscillano senza avvicinarsi a nessun numero (con $q = -1$: 1, 0, 1, 0, ...).

Il significato preciso di «la somma si avvicina a» è il concetto di *limite*, che studierai al quinto anno: qui ci basta l'idea intuitiva che il resto q^n si possa rendere più piccolo di qualsiasi numero positivo fissato.

Una conseguenza sorprendente riguarda i numeri decimali periodici. Il numero 0,999... con il 9 periodico è la somma $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots$, una serie geometrica con

$a_1 = \frac{9}{10}$ e $q = \frac{1}{10}$, quindi

$$0{,}999\ldots = \frac{9/10}{1 - 1/10} = \frac{9/10}{9/10} = 1$$

Non è un valore «quasi uguale» a 1: è esattamente 1, come conferma la frazione generatrice studiata in *Matematica 1*. Ogni decimale periodico è una serie geometrica, ed è questo il motivo per cui rappresenta sempre un numero razionale.

ESEMPIO SVOLTO

Una pallina viene lasciata cadere da un'altezza di 2 m; a ogni rimbalzo risale fino ai $\frac{3}{5}$ dell'altezza da cui è caduta. Quale distanza verticale percorre in tutto, se supponiamo che rimbalzi indefinitamente?

La pallina scende di 2 m; poi sale e riscende $2 \cdot \frac{3}{5} = 1{,}2$ m, poi sale e riscende $1{,}2 \cdot \frac{3}{5} = 0{,}72$ m, e così via. Le altezze dei rimbalzi formano una progressione geometrica con $a_1 = 1{,}2$ e $q = \frac{3}{5}$, e ognuna è percorsa due volte. La distanza totale è

$$d = 2 + 2 \cdot \frac{1{,}2}{1 - 3/5} = 2 + 2 \cdot \frac{1{,}2}{0{,}4} = 2 + 6 = 8 \text{ m}$$

Il modello è un'idealizzazione: una pallina vera smette di rimbalzare dopo un numero finito di salti. Ma i rimbalzi lontani contano pochissimo, e il valore di 8 m è una buona stima della distanza effettiva.

APPROFONDIMENTO · ACHILLE E LA TARTARUGA

Zenone di Elea, nel V secolo a.C., propose alcuni argomenti contro la possibilità del movimento; li conosciamo soprattutto attraverso Aristotele, che li discute nella *Fisica*. Nel più famoso, il veloce Achille insegue una tartaruga che ha un po' di vantaggio. Quando Achille arriva dove si trovava la tartaruga, questa si è spostata un po' più avanti; quando arriva alla nuova posizione, la tartaruga è avanzata ancora; e così all'infinito. Achille, sembra, non la raggiungerà mai.

Diamo dei numeri (di fantasia): Achille corre a 10 m/s, la tartaruga a 1 m/s e parte con 100 m di vantaggio. Per coprire il vantaggio iniziale Achille impiega 10 s; nel frattempo la tartaruga avanza di 10 m, che Achille copre in 1 s; poi 0,1 s, e così via. Il tempo totale è la serie geometrica

$$10 + 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \ldots = \frac{10}{1 - 1/10} = \frac{100}{9} \approx 11{,}1 \text{ s}$$

Infiniti intervalli di tempo possono avere una somma finita: Achille raggiunge la tartaruga dopo $\frac{100}{9}$ s, a $\frac{1000}{9} \approx 111{,}1$ m dalla partenza. Lo conferma un calcolo diretto: le posizioni sono $10t$ e $100 + t$, uguali per $9t = 100$. Il paradosso non dimostra che il moto è impossibile; mostra quanto sia delicato il concetto di infinito, che la matematica ha saputo trattare con rigore solo molti secoli dopo.

4.6.2 Modelli discreti per ricorrenza

Molti fenomeni si descrivono più naturalmente con una regola di ricorrenza che con un termine generale. Un esempio importante è

$$a_{n+1} = (1 + r)a_n - k$$

in cui una grandezza cresce di una percentuale fissa r in ogni periodo e poi diminuisce di una quantità fissa k. È il modello di un **prestito**: il debito residuo matura ogni mese un interesse e diminuisce della rata pagata. È anche il modello di una **popolazione di pesci** che cresce di una certa percentuale all'anno e da cui ogni anno si pesca una quantità fissa. Con $k = 0$ si ritrova una progressione geometrica.

ESEMPIO SVOLTO

Una famiglia prende in prestito 12 000 € al tasso dello 0,4% mensile e restituisce 250 € al mese. Come evolve il debito?

Indichiamo con a_n il debito dopo n mesi: $a_0 = 12\,000$ e $a_{n+1} = 1{,}004\,a_n - 250$. I primi termini, arrotondati al centesimo, sono riportati nella Tabella 4.3.

Tabella 4.3 Debito residuo di un prestito di 12 000 € allo 0,4% mensile con rata di 250 € (valori arrotondati al centesimo).

Mese n	0	1	2	3	4	5	6
Debito (€)	12 000,00	11 798,00	11 595,19	11 391,57	11 187,14	10 981,89	10 775,82

Il primo mese il debito scende di 202 € e non di 250: 48 € della rata ($12\,000 \cdot 0{,}004$) pagano gli interessi. Con il passare dei mesi la quota di interessi diminuisce e il debito cala sempre più in fretta. Proseguendo il calcolo con un foglio elettronico si trova che dopo 53 rate restano circa 100,92 €: il debito si estingue con la 54ª rata, ridotta a circa 101 €.

Il modello rivela anche un caso critico. Se la rata è uguale agli interessi, cioè $k = ra_0$ (qui $0{,}004 \cdot 12\,000 = 48$ €), il debito resta sempre uguale: $a_{n+1} = a_n + 48 - 48$. Se la rata è minore di 48 €, il debito *cresce*, anche se si continua a pagare.

Con il computer

Un foglio elettronico è lo strumento ideale per le successioni definite per ricorrenza. Per la successione di Fibonacci scrivi 1 nelle celle A1 e A2 e nella cella A3 la formula =A1+A2; copiandola verso il basso, ogni cella somma le due sopra di essa. Nella colonna B, dalla riga 2, calcola i rapporti con =A2/A1 e osserva quante cifre di φ si stabilizzano. Per il prestito, scrivi 12000 in A1 e =A1*1,004-250 in A2, e copia la formula verso il basso fino a quando il valore diventa negativo. Infine seleziona una colonna e inserisci un grafico a dispersione (a punti, non a linee): è il grafico della successione.

SINTESI

- Una **successione** è una funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$; si assegna con il termine generale o **per ricorrenza** (primo termine o primi termini e regola per passare al successivo). Il grafico è fatto di punti isolati.
- Nella successione di Fibonacci ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$) il rapporto tra termini consecutivi si avvicina al numero aureo $\varphi \approx 1{,}618$.
- Una successione è **monotona** se è crescente o decrescente; è **limitata** se i suoi termini sono compresi tra due numeri fissi. Si studia il segno di $a_{n+1} - a_n$.
- **Principio di induzione:** se $P(n_0)$ è vera (passo base) e $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ per ogni $n \geq n_0$ (passo induttivo), allora $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$. Servono entrambi i passi.
- Con l'induzione si dimostrano formule di somma ($1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$, $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$), disuguaglianze (Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1 + nx$ per $x > -1$) e proprietà di divisibilità.
- L'**induzione fisica** ricava leggi generali da molti casi osservati e può essere smentita; l'induzione matematica è una dimostrazione. Molte verifiche non provano nulla: $n^2 + n + 41$ non è primo per $n = 40$.
- **Progressione aritmetica**: $a_{n+1} = a_n + d$, $a_n = a_1 + (n-1)d$, $S_n = n(a_1 + a_n)/2$. Descrive una crescita lineare; il medio aritmetico è $(a + c)/2$.
- **Progressione geometrica**: $a_{n+1} = q a_n$, $a_n = a_1\, q^{n-1}$, $S_n = a_1(1 - q^n)/(1 - q)$ per $q \neq 1$. Descrive una crescita esponenziale discreta; il medio geometrico di due numeri positivi è $\sqrt{ac}$.
- La capitalizzazione composta $C_n = C_0(1 + i)^n$ dà sempre almeno quanto l'interesse semplice $C_0(1 + in)$ e, alla lunga, molto di più.
- Se $|q| < 1$, la somma degli infiniti termini di una progressione geometrica è $a_1/(1 - q)$; per esempio $0{,}999\ldots = 1$.
- I modelli per ricorrenza come $a_{n+1} = (1 + r)a_n - k$ (prestiti, popolazioni sfruttate) si studiano calcolando i termini uno dopo l'altro, anche con il foglio elettronico.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Il quinto termine della successione $a_n = (-1)^n(2n - 1)$ è:

   A. 9

   B. −9

   C. −11

   D. 11

2. ● Una successione è definita da $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = 3a_n - 4$. Il termine a_4 vale:

   A. 29

   B. 11

   C. 23

   D. 35

3. ● Nel passo induttivo di una dimostrazione per induzione si dimostra che:

   A. $P(n + 1)$ è vera

   B. $P(n)$ è vera per ogni n

   C. se $P(n)$ è vera, allora è vera anche $P(n + 1)$

   D. $P(n_0)$ è vera

4. ● Quale delle seguenti sequenze è l'inizio di una progressione geometrica?

   A. 2, 4, 6, 8, ...

   B. 1, 4, 9, 16, ...

   C. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

   D. 5, −10, 20, −40, ...

5. ●● In una progressione aritmetica $a_1 = 7$ e $d = -3$. Il termine a_{20} è:

   A. −53

   B. −50

   C. 64

   D. −47

6. ●● La somma degli infiniti termini $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$ è:

   A. $\frac{3}{2}$

   B. $\frac{4}{3}$

   C. 3

   D. non esiste, perché i termini sono infiniti

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.

   a) Ogni successione crescente è limitata superiormente.

   b) La successione $a_n = (-1)^n$ è limitata ma non è monotona.

   c) Se una proprietà dei numeri naturali è stata verificata per $n = 1, 2, \ldots, 1000$, allora è vera per ogni n.

   d) In una progressione geometrica con $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ i termini decrescono.

8. ● Completa.
   a) Una progressione _____ è una successione in cui il rapporto tra ogni termine e il precedente è costante; tale numero si chiama _____ .
   b) Il termine generale di una progressione aritmetica è $a_n =$ _____ .
   c) Tre numeri positivi a, b, c sono termini consecutivi di una progressione geometrica se e solo se $b =$ _____ .
   d) In una dimostrazione per induzione la proposizione $P(n)$ assunta nel passo induttivo si chiama _____ .

9. ●● Stabilisci se le successioni sono monotone e se sono limitate.
   a) $a_n = 3 - \frac{2}{n}$
   b) $b_n = (-2)^n$
   c) $c_n = \frac{n+3}{n}$

Calcolare

10. ● Scrivi i primi cinque termini delle successioni e rappresentale per punti nel piano cartesiano.
    a) $a_n = n^2 - 4n$
    b) $b_n = \frac{2n}{n+1}$

11. ● Scrivi un termine generale per ciascuna successione.
    a) 3, 7, 11, 15, ...
    b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$
    c) 1, −1, 1, −1, ...
    d) 2, 5, 10, 17, 26, ...

12. ●● Una successione è definita da $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$. Calcola i primi cinque termini, formula una congettura sul termine generale e dimostrala per induzione.

13. ●● In una progressione aritmetica $a_4 = 10$ e $a_9 = 30$. Determina la ragione, il primo termine, a_{20} e S_{20}.

14. ●● Calcola la somma di tutti i multipli di 7 compresi tra 100 e 500.

15. ●● In una progressione geometrica $a_2 = 6$ e $a_5 = 162$. Determina la ragione, il primo termine, a_7 e S_7.

16. ●● Una progressione geometrica ha $a_1 = 5$ e $q = -2$. Scrivi i primi quattro termini e calcola a_6 e S_6. La progressione è monotona?

17. ●● Trova x in modo che i numeri $x - 1$, $x + 3$, $3x + 1$, in questo ordine, siano termini consecutivi a) di una progressione aritmetica; b) di una progressione geometrica. Scrivi in ogni caso i tre termini.

18. ●● Calcola, se esiste, la somma degli infiniti termini.

    a) $6 + 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \ldots$

    b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$

    c) Scrivi 0,777... (7 periodico) e 0,1212... (12 periodico) come somme di serie geometriche e trova le frazioni corrispondenti.

19. ●●● Per quali valori di x la serie $1 + (x - 1) + (x - 1)^2 + (x - 1)^3 + \ldots$ ha una somma finita? Esprimi la somma in funzione di x e trova x in modo che valga 4.

Dimostrare e argomentare

20. ● Dimostra per induzione che $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$ per ogni $n \geq 1$.

21. ●● Dimostra per induzione che $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ per ogni $n \geq 1$.

22. ●● Dimostra per induzione che $4^n - 1$ è divisibile per 3 per ogni $n \geq 1$.

23. ●● a) Verifica che la disuguaglianza $2^n > n^2$ è falsa per $n = 2, 3, 4$ e vera per $n = 1$ e $n = 5$. b) Dimostra per induzione che è vera per ogni $n \geq 5$.

24. ●● Trova l'errore. Uno studente «dimostra» che $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$ così: «se la formula vale per n, allora $1 + \ldots + n + (n + 1) = \frac{n^2 + n + 2}{2} + n + 1 = \frac{(n + 1)^2 + (n + 1) + 2}{2}$, quindi vale per $n + 1$». Il calcolo è corretto? La formula è vera?

25. ●●● Dimostra per induzione la formula della somma dei primi n termini di una progressione geometrica: $a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$, con $q \neq 1$.

26. ●● Spiega perché verificare che $n^2 + n + 41$ è primo per $n = 0, 1, \ldots, 39$ non dimostra che lo sia per ogni n. Senza calcolatrice, trova due valori di n per cui il numero è divisibile per 41.

Problemi

27. ●● Le file di una tribuna hanno 20 posti nella prima fila e 3 posti in più in ogni fila rispetto alla precedente. Le file sono 25. Quanti posti ha l'ultima fila? Quanti posti ha la tribuna?

28. ●● Investi 2000 € al tasso annuo del 2,5% in capitalizzazione composta. a) Quanto avrai dopo 8 anni? b) Quanto avresti con l'interesse semplice allo stesso tasso? c) Spiega perché la differenza aumenta con gli anni.

29. ●● In un esperimento di laboratorio (dati di esempio) una coltura parte da 500 batteri e il numero di batteri raddoppia ogni 20 minuti. a) Quanti batteri ci sono dopo 3 ore? b) Dopo quanto tempo, per la prima volta, i batteri superano il milione?

30. ●●● Un paziente assume un farmaco ogni 12 ore, 100 mg per volta. Nelle 12 ore tra due dosi l'organismo elimina il 60% del farmaco presente (modello semplificato, dati di esempio). Sia a_n la quantità presente subito dopo l'n-esima dose. a) Spiega perché $a_1 = 100$ e $a_{n+1} = 0{,}4a_n + 100$ e calcola a_2, ..., a_5. b) Verifica che $a_n = 100(1 + 0{,}4 + \ldots + 0{,}4^{n-1})$ e calcola il valore a cui si avvicina a_n dopo molte dosi.

31. ●● Un quadrato ha lato 8 cm. Congiungendo i punti medi dei suoi lati si ottiene un secondo quadrato; dal secondo, allo stesso modo, un terzo, e così via all'infinito. a) Verifica che ogni quadrato ha area metà del precedente. b) Calcola la somma delle aree e la somma dei perimetri di tutti i quadrati.

Con il computer

32. ●● In un lago vivono 2000 t di pesce (dati di esempio). In assenza di pesca la popolazione crescerebbe dell'8% all'anno; ogni anno se ne pescano 200 t. a) Spiega perché la quantità a_n dopo n anni segue la ricorrenza $a_0 = 2000$, $a_{n+1} = 1{,}08a_n - 200$. b) Con un foglio elettronico (2000 nella cella A1, =A1*1,08-200 in A2, copiata verso il basso) calcola i valori e disegna il grafico a punti: in che anno la pesca non è più sostenibile? c) Ripeti con una pesca di 120 t all'anno. d) Per quale quantità iniziale la popolazione resterebbe costante con una pesca di 200 t?

Verso la verifica

33. ●● In una progressione aritmetica il primo termine è 2 e la somma dei primi dieci termini è 155. a) Trova la ragione e il decimo termine. b) Quanti termini bisogna sommare, almeno, perché la somma superi 500?

34. ●● Dimostra per induzione che $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ per ogni $n \geq 1$.

35. ●●● Sfida. Il metodo di Erone per $\sqrt{4} = 2$ è la successione $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{4}{a_n}\right)$. a) Calcola a_2, a_3, a_4. b) Verifica che $a_{n+1} - 2 = \dfrac{(a_n - 2)^2}{2a_n}$ e deducine, per induzione, che $a_n > 2$ per ogni n. c) Dimostra che la successione è decrescente.

PER APPROFONDIRE

- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il capitolo sui numeri naturali presenta il principio di induzione matematica, le somme notevoli, la progressione geometrica e la disuguaglianza di Bernoulli.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Fibonacci e il *Liber abaci*, i paradossi di Zenone e la lunga storia delle serie infinite.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: osservare casi particolari, formulare una congettura e poi dimostrarla, come nelle dimostrazioni per induzione.

Glossario del capitolo

Capitalizzazione composta
regime in cui gli interessi maturati vengono aggiunti al capitale e producono a loro volta interessi: $C_n = C_0(1 + i)^n$.

Crescita esponenziale discreta
crescita (o decrescita) di una grandezza che in ogni periodo viene moltiplicata per lo stesso fattore; i suoi valori formano una progressione geometrica.

Crescita lineare
crescita di una grandezza che in ogni periodo aumenta della stessa quantità; i suoi valori formano una progressione aritmetica.

Definizione per ricorrenza
modo di assegnare una successione dando il primo termine (o i primi termini) e una regola che calcola ogni termine a partire dai precedenti.

Induzione fisica
procedimento delle scienze sperimentali che ricava una legge generale dall'osservazione di molti casi particolari; a differenza dell'induzione matematica non è una dimostrazione.

Ipotesi induttiva
la proposizione P(n), assunta come vera nel passo induttivo per dedurne P(n + 1).

Medio aritmetico
il termine b compreso tra a e c in una progressione aritmetica a, b, c: $b = (a + c)/2$.

Medio geometrico
il termine positivo b compreso tra i numeri positivi a e c in una progressione geometrica a, b, c: $b = \sqrt{(ac)}$.

Passo base
nella dimostrazione per induzione, la verifica che la proposizione è vera per il primo valore n_0.

Passo induttivo
nella dimostrazione per induzione, la dimostrazione che, se P(n) è vera, allora è vera anche P(n + 1), per ogni $n \geq n_0$.

Principio di induzione
se una proposizione P(n) è vera per n_0 e, per ogni $n \geq n_0$, la verità di P(n) implica quella di P(n + 1), allora P(n) è vera per ogni $n \geq n_0$.

Progressione aritmetica
successione in cui la differenza tra ogni termine e il precedente è costante: $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Progressione geometrica
successione di termini non nulli in cui il rapporto tra ogni termine e il precedente è costante: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Ragione
in una progressione aritmetica, la differenza costante d tra termini consecutivi; in una progressione geometrica, il rapporto costante q.

Serie geometrica
somma degli infiniti termini di una progressione geometrica; se $|q| < 1$ vale $a_1/(1 - q)$.

Successione di Fibonacci
la successione 1, 1, 2, 3, 5, 8, … in cui ogni termine, dal terzo in poi, è la somma dei due precedenti; il rapporto tra termini consecutivi si avvicina al numero aureo.

Successione limitata
successione i cui termini sono tutti compresi tra due numeri fissi m e M.

Successione monotona
successione crescente o decrescente, anche in senso lato; la monotonia si studia con il segno di $a_{n+1} - a_n$.

Successione numerica
funzione che associa a ogni numero naturale n (da un certo valore in poi) un numero reale a_n, detto termine di indice n.

Termine generale
espressione che dà il termine a_n di una successione in funzione dell'indice n, per esempio $a_n = n^2$.

Soluzioni

1. B. $a_5 = (-1)^5 \cdot 9 = -9$.

2. A. $a_2 = 9 - 4 = 5$, $a_3 = 15 - 4 = 11$, $a_4 = 33 - 4 = 29$.

3. C. Nel passo induttivo $P(n)$ è l'ipotesi, non la tesi; la verità di $P(n_0)$ è il passo base.

4. D. Il rapporto tra termini consecutivi è sempre -2. La A è aritmetica ($d = 2$); la B (quadrati) e la C non hanno né differenza né rapporto costante.

5. B. $a_{20} = 7 + 19 \cdot (-3) = 7 - 57 = -50$.

6. A. Serie geometrica con $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{3}$:

$S = \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{3}{2}$.

7. a) Falso: $a_n = n^2$ è crescente e non è limitata superiormente (ogni successione crescente è però limitata *inferiormente* dal primo termine). b) Vero. c) Falso: molte verifiche non sono una dimostrazione; $n^2 + n + 41$ è primo per $n = 0$, ..., 39 ma non per $n = 40$. Serve una dimostrazione, per esempio per induzione. d) Vero: $a_{n+1} = qa_n < a_n$ perché $a_n > 0$ e $q < 1$.

8. a) geometrica; ragione. b) $a_1 + (n - 1)d$. c) $\sqrt{ac}$ (il medio geometrico). d) ipotesi induttiva.

9. a) $a_{n+1} - a_n = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)} > 0$: crescente. Limitata: $1 \le a_n < 3$ ($a_1 = 1$). b) $-2, 4, -8, 16, \ldots$: i segni si alternano, quindi non è monotona; $|b_n| = 2^n$ supera ogni numero, quindi non è limitata né superiormente né inferiormente. c) $c_n = 1 + \frac{3}{n}$; $c_{n+1} - c_n = \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n} < 0$: decrescente. Limitata: $1 < c_n \le 4$ ($c_1 = 4$).

10. a) $-3, -4, -3, 0, 5$ (decresce da $n = 1$ a $n = 2$, poi cresce: non è monotona). b) $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}$ (crescente). I grafici sono formati da punti isolati, da non unire.

11. a) $a_n = 4n - 1$. b) $a_n = \frac{1}{2^n}$. c) $a_n = (-1)^{n+1}$. d) $a_n = n^2 + 1$. (Altre espressioni equivalenti sono corrette, purché diano gli stessi termini.)

12. 1, 4, 9, 16, 25: congettura $a_n = n^2$. Passo base: $a_1 = 1 = 1^2$. Passo induttivo: se $a_n = n^2$, allora $a_{n+1} = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$. c.v.d.

13. $a_9 = a_4 + 5d$: $30 = 10 + 5d$, $d = 4$. $a_1 = a_4 - 3d = -2$. $a_{20} = -2 + 19 \cdot 4 = 74$. $S_{20} = \frac{20 \cdot (-2 + 74)}{2} = 720$.

14. Il primo è $105 = 7 \cdot 15$, l'ultimo $497 = 7 \cdot 71$; sono $71 - 15 + 1 = 57$ termini di una progressione aritmetica con $d = 7$. $S = \frac{57 \cdot (105 + 497)}{2} = 57 \cdot 301 = 17\,157$.

15. $a_5 = a_2\, q^3$: $q^3 = 27$, $q = 3$. $a_1 = 2$. $a_7 = 2 \cdot 3^6 = 1458$. $S_7 = 2 \cdot \frac{1 - 3^7}{1 - 3} = 2 \cdot \frac{-2186}{-2} = 2186$.

16. $5, -10, 20, -40$. $a_6 = 5 \cdot (-2)^5 = -160$. $S_6 = 5 \cdot \frac{1 - (-2)^6}{1 - (-2)} = 5 \cdot \frac{-63}{3} = -105$ (controllo: $5 - 10 + 20 - 40 + 80 - 160 = -105$). Non è monotona: con $q < 0$ i termini cambiano segno a ogni passo.

17. a) $2(x + 3) = (x - 1) + (3x + 1)$, cioè $2x + 6 = 4x$: $x = 3$; termini 2, 6, 10 ($d = 4$). b) $(x + 3)^2 = (x - 1)(3x + 1)$, cioè $x^2 + 6x + 9 = 3x^2 - 2x - 1$, $x^2 - 4x - 5 = 0$: $x = 5$ oppure $x = -1$. Per $x = 5$: 4, 8, 16 ($q = 2$); per $x = -1$: $-2, 2, -2$ ($q = -1$). Entrambe accettabili (termini non nulli).

18. a) $q = \frac{1}{3}$: $S = \frac{6}{1 - 1/3} = 9$. b) $q = -\frac{1}{2}$: $S = \frac{1}{1 + 1/2} = \frac{2}{3}$. c) $0{,}777\ldots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \ldots = \frac{7/10}{1 - 1/10} = \frac{7}{9}$; $0{,}1212\ldots = \frac{12}{100} + \frac{12}{10000} + \ldots = \frac{12/100}{1 - 1/100} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$.

19. È una serie geometrica di ragione $q = x - 1$: ha somma finita se $|x - 1| < 1$, cioè $0 < x < 2$. Allora

$S = \frac{1}{1-(x-1)} = \frac{1}{2-x}$. Da $\frac{1}{2-x} = 4$: $2 - x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{7}{4}$, che appartiene all'intervallo]0; 2[.

20. Passo base: $2 = 1 \cdot 2$. Passo induttivo: se $2 + \ldots + 2n = n(n+1)$, allora $2 + \ldots + 2n + 2(n+1) = n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(n+2)$. c.v.d. (Oppure: è il doppio di $1 + 2 + \ldots + n$.)

21. Passo base: $1 = 2^1 - 1$. Passo induttivo: se $1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, aggiungendo 2^n si ha $2^n - 1 + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$. c.v.d.

22. Passo base: $4 - 1 = 3$. Passo induttivo: $4^{n+1} - 1 = 4 \cdot 4^n - 4 + 3 = 4(4^n - 1) + 3$; per l'ipotesi induttiva $4^n - 1$ è multiplo di 3, quindi anche $4(4^n - 1) + 3$ lo è. c.v.d.

23. a) $n = 1$: $2 > 1$; $n = 2$: $4 = 4$; $n = 3$: $8 < 9$; $n = 4$: $16 = 16$; $n = 5$: $32 > 25$. b) Passo base: $n = 5$. Passo induttivo: se $2^n > n^2$, allora $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2$. Basta che $2n^2 \geq (n+1)^2$, cioè $n^2 - 2n - 1 \geq 0$, vera per $n \geq 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41$, quindi per ogni $n \geq 5$. Allora $2^{n+1} > (n+1)^2$. c.v.d.

24. Il passo induttivo è corretto: $\frac{n^2 + n + 2 + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 4}{2} = \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 2}{2}$. Manca però il passo base, che è falso: per $n = 1$ la formula dà $2 \neq 1$. La formula è falsa per ogni n (supera sempre di 1 il valore giusto $\frac{n(n+1)}{2}$).

25. Passo base: $n = 1$: $a_1 \frac{1-q}{1-q} = a_1$. Passo induttivo: $S_{n+1} = S_n + a_1 q^n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} + a_1 q^n = a_1 \frac{1 - q^n + q^n - q^{n+1}}{1-q} = a_1 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. c.v.d.

26. Una verifica, anche di moltissimi casi, è induzione fisica: non esclude che il caso successivo sia diverso. Per $n = 40$: $40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41^2$. Per $n = 41$: $41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 1 + 1) = 41 \cdot 43$. In entrambi i casi il numero è composto.

27. Progressione aritmetica con $a_1 = 20$, $d = 3$: $a_{25} = 20 + 24 \cdot 3 = 92$ posti. $S_{25} = \frac{25 \cdot (20 + 92)}{2} = 1400$ posti.

28. a) $2000 \cdot 1{,}025^8 \approx 2436{,}81$ €. b) $2000 \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 8) = 2400$ €. c) Differenza $\approx 36{,}81$ €. Nella capitalizzazione composta anche gli interessi già maturati producono interessi, quindi l'aumento annuo cresce (crescita esponenziale), mentre nell'interesse semplice è sempre 50 € (crescita lineare).

29. a) 3 ore = 9 periodi di 20 minuti: $500 \cdot 2^9 = 256\,000$. b) $500 \cdot 2^n > 1\,000\,000$ equivale a $2^n > 2000$: $2^{10} = 1024$, $2^{11} = 2048$, quindi $n = 11$ periodi, cioè 220 minuti = 3 h 40 min (512 000 batteri dopo 10 periodi, 1 024 000 dopo 11).

30. a) Dopo 12 ore resta il 40% di a_n, a cui si aggiungono 100 mg. $a_2 = 140$, $a_3 = 156$, $a_4 = 162{,}4$, $a_5 = 164{,}96$ mg. b) Ogni dose precedente è stata moltiplicata per 0,4 una volta per ogni intervallo trascorso, quindi $a_n = 100 + 100 \cdot 0{,}4 + \ldots + 100 \cdot 0{,}4^{n-1}$ (si verifica sui valori: $100 \cdot (1 + 0{,}4) = 140$, ...). È una somma geometrica: $a_n = 100 \frac{1 - 0{,}4^n}{0{,}6}$, che si avvicina a $\frac{100}{0{,}6} \approx 166{,}7$ mg.

31. a) Il lato del nuovo quadrato è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele di cateti $l/2$: vale $l/\sqrt{2}$, quindi l'area è $l^2/2$. b) Aree: $64 + 32 + 16 + \ldots = \frac{64}{1 - 1/2} = 128$ cm². Perimetri: ragione $1/\sqrt{2}$: $S = \frac{32}{1 - 1/\sqrt{2}} = \frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = 32\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) = 64 + 32\sqrt{2} \approx 109{,}25$ cm.

32. a) In un anno la popolazione diventa $1{,}08a_n$ e poi diminuisce di 200 t. b) 2000; 1960; 1916,8; 1870,1; 1819,8; ... (in tonnellate, arrotondati): decresce sempre più in fretta; dopo 20 anni restano circa 169,5 t, meno della quantità da pescare, e nel 21° anno il pesce si esaurisce. c) 2000; 2040; 2083,2; 2129,9; ...: la popolazione cresce. d) Costante se $a = 1{,}08a - 200$, cioè $0{,}08a = 200$, $a = 2500$ t: sopra questo valore la popolazione cresce, sotto diminuisce.

33. a) $155 = \frac{10[2 \cdot 2 + 9d]}{2} = 5(4 + 9d)$, $4 + 9d = 31$, $d = 3$; $a_{10} = 2 + 27 = 29$. b) $S_n = \frac{n[4 + 3(n-1)]}{2} = \frac{n(3n+1)}{2} > 500$: $3n^2 + n - 1000 > 0$, radice positiva

$\frac{-1+\sqrt{12001}}{6} \approx 18{,}1$, quindi $n \geq 19$. Controllo: $S_{18} = 495$, $S_{19} = 551$.

34. Passo base: $1 \cdot 2 = 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$. Passo induttivo:

$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$

$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$, raccogliendo $(n+1)(n+2)$: è la formula con $n+1$ al posto di n. c.v.d.

35. a) $a_2 = 2{,}5$; $a_3 = 2{,}05$; $a_4 \approx 2{,}0006$. b) $\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{4}{a_n}\right) - 2 = \frac{a_n^2 - 4a_n + 4}{2a_n} = \frac{(a_n - 2)^2}{2a_n}$. Passo base: $a_1 = 4 > 2$. Passo induttivo: se $a_n > 2$, il numeratore è positivo (perché $a_n \neq 2$) e il denominatore è positivo, quindi $a_{n+1} - 2 > 0$. c) $a_{n+1} - a_n = \frac{4 - a_n^2}{2a_n} < 0$, perché $a_n > 2$ implica $a_n^2 > 4$. Quindi la successione è decrescente e limitata inferiormente da 2.