CAPITOLO

3

Le funzioni e le loro proprietà

Una funzione è una promessa: dimmi chi è x, e ti dirò, senza esitare, chi è y. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Determinare dominio, zeri e segno di una funzione algebrica e leggerli sul grafico.
2. Riconoscere funzioni iniettive, suriettive, biiettive, monotone, pari, dispari e periodiche.
3. Costruire la funzione inversa, anche restringendo il dominio, e tracciarne il grafico per simmetria.
4. Comporre e scomporre funzioni, determinando il dominio della composta.
5. Dedurre grafici con traslazioni, simmetrie, dilatazioni e valori assoluti, nell'ordine corretto.
6. Risolvere graficamente equazioni e disequazioni e calcolare il tasso medio di variazione come pendenza di una secante.

INDICE DEL CAPITOLO

3.1 Le funzioni reali di variabile reale 2
3.2 Le proprietà delle funzioni 6
3.3 Funzione inversa e funzione composta 10
3.4 Grafici deducibili 13
3.5 Risoluzione grafica di equazioni e disequazioni 15
3.6 La velocità di variazione 17

Matematica 3 · Parte I · Equazioni, funzioni e successioni · versione 1.0
Capitolo 3: Le funzioni e le loro proprietà · pagine 65–88 del volume completo · estratto per lo studio

Il prezzo di una corsa in taxi dipende dai chilometri percorsi, la quota raggiunta da un sasso che cade dipende dal tempo, la pressione di un gas chiuso in un cilindro dipende dal volume che gli lasciamo. Ogni volta una grandezza è determinata da un'altra: è l'idea di **funzione**, che hai incontrato in *Matematica 1* (cap. 6) come relazione tra due insiemi e che nel volume dello scorso anno hai usato con le rette, le parabole e le funzioni circolari.

In questo capitolo le funzioni diventano l'oggetto stesso dello studio. Impariamo a stabilire dove una funzione ha senso, dove si annulla e che segno ha; a riconoscere le sue proprietà, cioè se cresce o decresce, se il suo grafico ha simmetrie, se si può «tornare indietro» con la funzione inversa; a comporre due funzioni e a ottenere grafici nuovi da grafici noti. Infine misuriamo con quale rapidità una funzione cambia: è il primo passo verso un'idea, la **velocità di variazione**, che accompagnerà la matematica e la fisica fino all'ultimo anno.

3.1 Le funzioni reali di variabile reale

3.1.1 Dominio, immagine, grafico

Ricordiamo la definizione. Dati due insiemi A e B, una funzione $f\colon A \to B$ associa a *ogni* elemento x di A *uno e un solo* elemento $y = f(x)$ di B, detto *immagine* di x. Le due condizioni sono entrambe essenziali: il primo diagramma della Figura 3.1 non rappresenta una funzione, perché un elemento di A ha due immagini e un altro non ne ha nessuna.

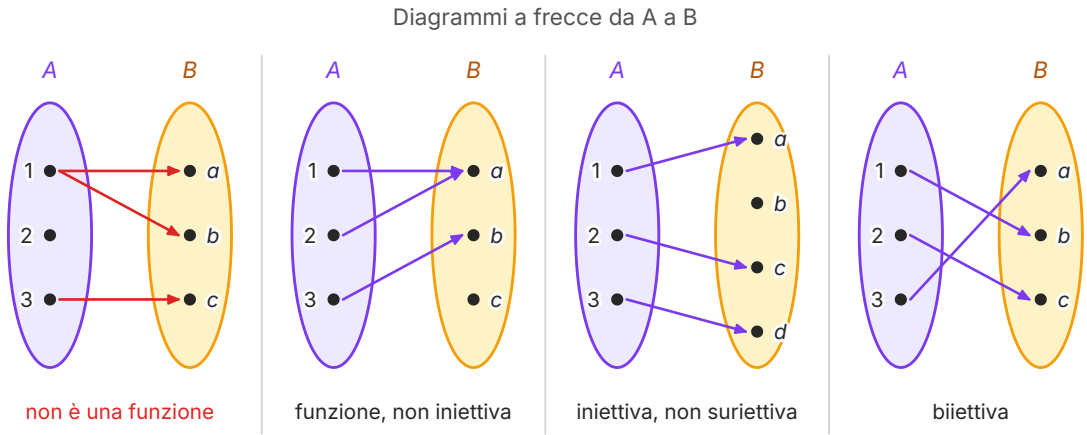


Figura 3.1 Quattro corrispondenze da A a B. Nella prima l'elemento 1 ha due immagini e il 2 nessuna: non è una funzione. Nella seconda 1 e 2 hanno la stessa immagine e c non è immagine di nulla. Nella terza elementi diversi hanno immagini diverse, ma b resta libero. Nella quarta ogni elemento di B è immagine di uno e un solo elemento di A.

In questo volume ci occupiamo soprattutto di funzioni in cui sia la variabile x sia l'immagine y sono numeri reali. Una **funzione reale di variabile reale** è una funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$ il cui insieme di partenza D è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. L'insieme D si chiama **dominio** (o *insieme di esistenza*) della funzione; la variabile x è detta *variabile indipendente*, y *variabile dipendente*.

Gli elementi di $\mathbb{R}$ che sono effettivamente immagine di qualche x formano l'**immagine** della funzione, indicata con $f(D)$ oppure con $\operatorname{Im} f$:

$$f(D) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ per qualche } x \in D\}$$

In *Matematica 1* l'immagine era chiamata anche *codominio*; poiché alcuni testi usano questa parola per l'intero insieme di arrivo, d'ora in poi diremo sempre «immagine». Il **grafico** di f è l'insieme dei punti $(x; f(x))$ del piano cartesiano, con $x \in D$: proiettando il grafico sull'asse x si ottiene il dominio, proiettandolo sull'asse y si ottiene l'immagine. Nella Figura 3.2 la funzione $f(x) = x^2 - 2x - 3$ è considerata solo per $-2 \le x \le 4$: il dominio è l'intervallo $[-2; 4]$ e l'immagine è $[-4; 5]$, dall'ordinata del vertice a quella degli estremi.

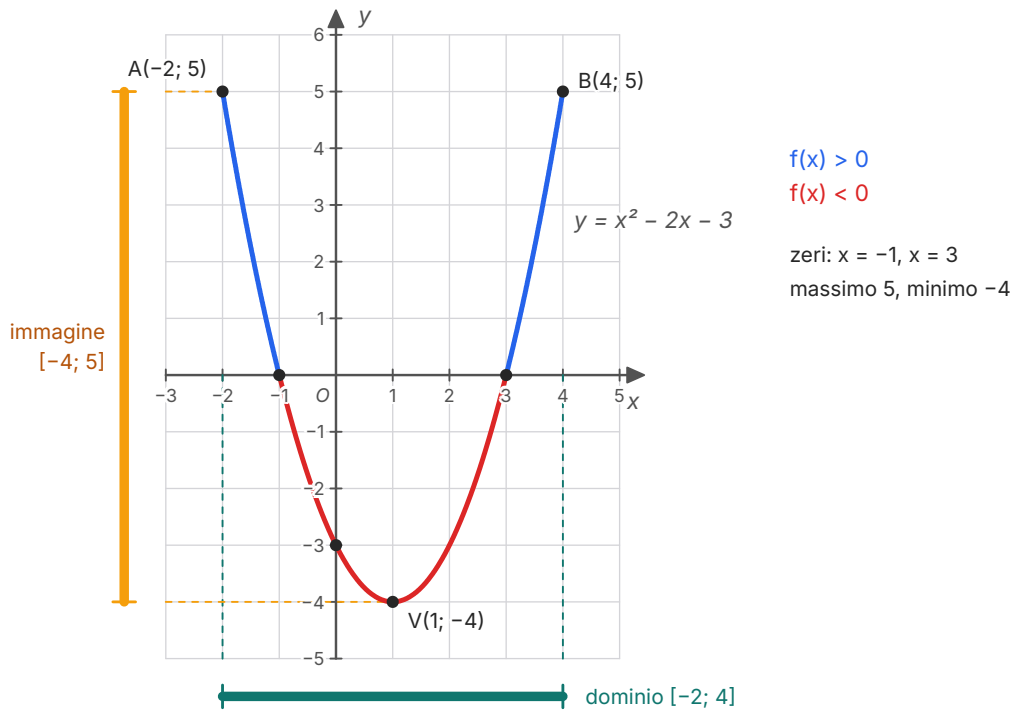


Figura 3.2 Il grafico di $y = x^2 - 2x - 3$ con dominio $[-2; 4]$. La proiezione sull'asse x è il dominio, quella sull'asse y è l'immagine $[-4; 5]$. Gli zeri sono -1 e 3; il grafico è in blu dove $f(x) > 0$ e in rosso dove $f(x) < 0$.

Spesso una funzione è data soltanto con la sua espressione, per esempio $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, senza dire quale sia il dominio. In questo caso si intende che il dominio è il più ampio sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui l'espressione ha significato: qui $x \neq 2$. Quando invece il problema impone limitazioni (un tempo non negativo, una lunghezza positiva, un numero di oggetti intero), il dominio è quello del *contesto*, che può essere più piccolo.

3.1.2 Classificazione delle funzioni

Le funzioni che si ottengono dalla variabile x con un numero finito di addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni ed estrazioni di radice si dicono **funzioni algebriche**. Tra queste distinguiamo:

- le funzioni **razionali intere**, o polinomiali, come $f(x) = 2x^3 - x + 5$: la x non compare al denominatore né sotto radice;
- le funzioni **razionali fratte**, come $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$: la x compare al denominatore;

- le funzioni **irrazionali**, come $f(x) = \sqrt{x+2} - x$: la x compare sotto il segno di radice (le hai studiate nel capitolo 2).

Le funzioni che non sono algebriche si dicono **funzioni trascendenti**. Ne conosci già alcune, le funzioni circolari $y = \text{sen}\, x$ e $y = \cos x$; nei capitoli 12 e 13 studieremo la funzione esponenziale $y = 2^x$ e la funzione logaritmica.

3.1.3 Come si determina il dominio

Per una funzione algebrica data con la sua espressione, le operazioni che possono «perdere significato» sono soltanto due: la divisione per zero e la radice di indice pari di un numero negativo. Da qui le regole.

IN SINTESI

Dominio delle funzioni algebriche.

• Razionale intera: il dominio è $\mathbb{R}$.

• Razionale fratta $\dfrac{A(x)}{B(x)}$: si impone $B(x) \neq 0$.

• Radice di indice pari $\sqrt{A(x)}$: si impone $A(x) \geq 0$.

• Radice di indice dispari $\sqrt[3]{A(x)}$: nessuna condizione oltre a quelle richieste da $A(x)$.

• Se l'espressione contiene più operazioni, le condizioni si mettono a **sistema**: devono valere tutte insieme. Per $\dfrac{1}{\sqrt{A(x)}}$ il sistema dà $A(x) > 0$.

Nel capitolo 13 si aggiungerà la condizione per il logaritmo: argomento positivo.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Determina il dominio delle funzioni

a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-5x+6}$; b) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$; c) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-3}$; d) $k(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x-4}}$.

Soluzione. a) Il denominatore $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ si annulla per $x = 2$ e $x = 3$: $D = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$.

b) Il radicando deve essere non negativo e il denominatore non nullo: $\dfrac{x-1}{x+2} \geq 0$. Lo studio del segno di numeratore e denominatore dà $x < -2 \vee x \geq 1$, cioè $D =]-\infty; -2[\cup [1; +\infty[$. Il valore $x = 1$ è compreso perché annulla il radicando; $x = -2$ è escluso perché annulla il denominatore.

c) Due condizioni a sistema: $x + 1 \geq 0$ e $x - 3 \neq 0$. Quindi $x \geq -1 \wedge x \neq 3$, cioè $D = [-1; 3[\cup]3; +\infty[$.

d) La radice cubica non richiede condizioni; resta il denominatore: $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

3.1.4 Zeri e segno

Gli *zeri* di una funzione sono i valori di x del dominio per cui $f(x) = 0$: sul grafico sono le ascisse dei punti che stanno sull'asse x. Il punto in cui il grafico taglia l'asse y, se $0 \in D$, è $(0; f(0))$. Studiare il **segno di una funzione** significa trovare gli x del dominio per cui $f(x) > 0$ (il grafico sta sopra l'asse x) e quelli per cui $f(x) < 0$ (il grafico sta sotto). In pratica si risolve la disequazione $f(x) > 0$ *all'interno del dominio*, con le tecniche dei capitoli 1 e 2. Nella Figura 3.2 la funzione è positiva per $-2 \le x < -1$ e per $3 < x \le 4$, negativa per $-1 < x < 3$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Determina dominio, zeri e segno di $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$.

Soluzione. *Dominio.* $x^2 - 2x = x(x - 2) \neq 0$, quindi $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$.

Zeri. Il numeratore $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ si annulla per $x = \pm 2$, ma $x = 2$ non appartiene al dominio. L'unico zero è $x = -2$.

Segno. Per $x \in D$ scriviamo $f(x) = \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{x(x - 2)}$. Il fattore $x - 2$ compare sopra e sotto: il loro quoziente vale 1 in tutto il dominio, quindi il segno di f è quello di $\dfrac{x + 2}{x}$. Questo quoziente è positivo per $x < -2 \vee x > 0$ e negativo per $-2 < x < 0$. Togliendo il punto escluso: $f(x) > 0$ per $x < -2 \vee 0 < x < 2 \vee x > 2$; $f(x) < 0$ per $-2 < x < 0$.

Controllo. $f(-3) = \dfrac{5}{15} > 0$, $f(-1) = \dfrac{-3}{3} = -1 < 0$, $f(1) = \dfrac{-3}{-1} = 3 > 0$.

ERRORE FREQUENTE

«$\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \dfrac{x + 2}{x}$, quindi il dominio è $x \neq 0$.» No: il dominio si determina **prima** di semplificare. Le due espressioni coincidono solo per $x \neq 2$; il grafico di $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$ è quello di $y = \dfrac{x + 2}{x}$ privato del punto $(2; 2)$, che sul disegno si segna con un pallino vuoto. Allo stesso modo, $x = 2$ non è uno zero di f anche se annulla il numeratore.

3.2 Le proprietà delle funzioni

3.2.1 Funzioni iniettive, suriettive, biiettive

Riprendiamo da *Matematica 1* tre proprietà, ora lette sul grafico. Una funzione $f\colon A \to B$ è **iniettiva** se elementi diversi hanno immagini diverse: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, o, in modo equivalente,

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. È **suriettiva** se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A, cioè se $f(A) = B$. È **biiettiva** se è sia iniettiva sia suriettiva (Figura 3.1).

Per una funzione reale di variabile reale queste proprietà si riconoscono tracciando le rette orizzontali $y = b$. La retta $y = b$ incontra il grafico nei punti di ascissa x tali che $f(x) = b$, cioè nei punti che hanno immagine b. Quindi:

- f è iniettiva se e solo se **ogni** retta orizzontale incontra il grafico **al più in un punto**;
- $f\colon D \to B$ è suriettiva se e solo se ogni retta $y = b$ con $b \in B$ incontra il grafico **almeno in un punto**.

La funzione $f(x) = x^2$, con dominio $\mathbb{R}$, non è iniettiva: la retta $y = 4$ incontra la parabola nei due punti di ascissa ± 2. Considerata come funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è nemmeno suriettiva, perché la retta $y = -1$ non incontra il grafico. Se però scegliamo come insieme di arrivo $[0; +\infty[$, la stessa espressione definisce una funzione suriettiva. La suriettività dipende dunque dall'insieme di arrivo che dichiariamo, e l'iniettività dal dominio: restringendo il dominio a $[0; +\infty[$, anche l'iniettività è salva.

3.2.2 Funzioni crescenti e decrescenti

Sia I un intervallo contenuto nel dominio di f. Diciamo che f è **crescente** in I se, per ogni x_1, x_2 di I,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

e che è **decrescente** in I se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Sul grafico, percorso da sinistra verso destra, una funzione crescente «sale» e una decrescente «scende». Se nelle definizioni si ammette anche l'uguaglianza ($f(x_1) \le f(x_2)$, oppure $f(x_1) \ge f(x_2)$) si parla di funzione crescente o decrescente *in senso lato*: una funzione costante, per esempio, è crescente e decrescente in senso lato. In questo libro «crescente» senza altre indicazioni significa sempre crescente in senso stretto. Una funzione crescente oppure decrescente in I si dice **monotona** in I.

La funzione $f(x) = x^2 - 2x - 3$ della Figura 3.2 è decrescente in $[-2; 1]$ e crescente in $[1; 4]$: non è monotona nel suo dominio, ma lo è in ciascuno dei due intervalli. Per una retta $y = mx + q$ il segno di m decide tutto: crescente se $m > 0$, decrescente se $m < 0$, costante se $m = 0$. Dimostriamolo per $m > 0$: se $x_1 < x_2$, allora $f(x_2) - f(x_1) = m(x_2 - x_1) > 0$, prodotto di due numeri positivi.

La monotonia ha una conseguenza importante.

IN SINTESI

Teorema. Una funzione strettamente monotona in un insieme è iniettiva in quell'insieme.

Ipotesi: f è crescente (oppure decrescente) in I. **Tesi:** f è iniettiva in I.

Dimostrazione. Siano x_1, x_2 due elementi distinti di I; possiamo chiamare x_1 il minore, così che $x_1 < x_2$. Se f è crescente, $f(x_1) < f(x_2)$; se è decrescente, $f(x_1) > f(x_2)$. In entrambi i casi $f(x_1) \neq f(x_2)$: elementi distinti hanno immagini distinte. c.v.d.

DA RICORDARE

Il teorema non si inverte: una funzione può essere iniettiva senza essere monotona. L'esempio più semplice è $f(x) = \dfrac{1}{x}$. È decrescente in $]-\infty; 0[$ ed è decrescente in $]0; +\infty[$, ma **non** è decrescente nel suo dominio: $-1 < 1$ e $f(-1) = -1 < f(1) = 1$. Eppure è iniettiva, perché $\dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{x_2}$ implica $x_1 = x_2$. La monotonia si dichiara sempre **su un intervallo**.

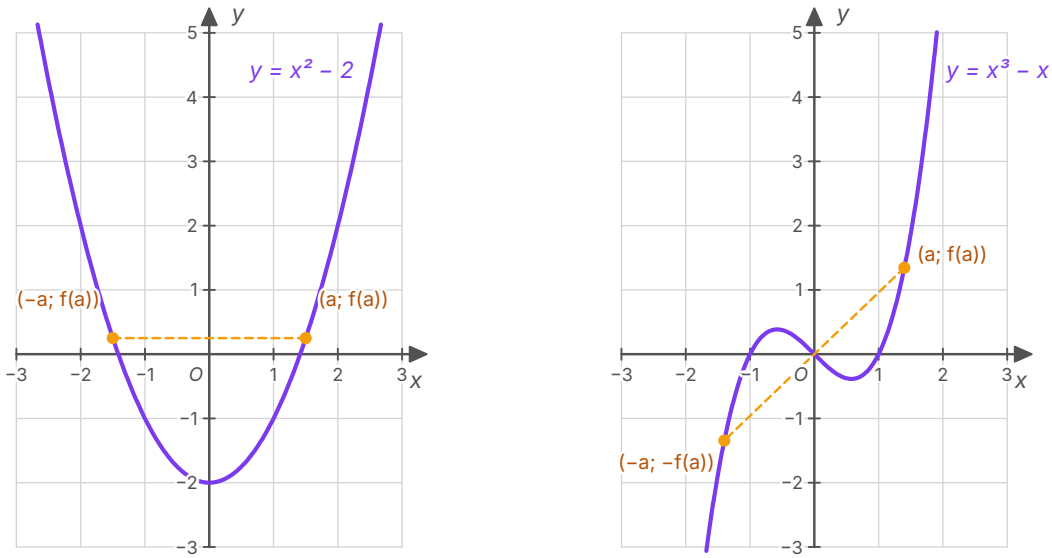
3.2.3 Massimi e minimi assoluti

Un numero M è il **massimo assoluto** di f se esiste un $x_0 \in D$ con $f(x_0) = M$ e $f(x) \leq M$ per ogni $x \in D$; x_0 si chiama *punto di massimo*. In modo analogo si definisce il **minimo assoluto** m: $f(x) \geq m$ per ogni x del dominio, e il valore m è raggiunto. Nella Figura 3.2 il massimo assoluto è 5, raggiunto in due punti di massimo, $x = -2$ e $x = 4$; il minimo assoluto è -4, nel punto di minimo $x = 1$. Una funzione può non avere massimo né minimo: $f(x) = x$ su $\mathbb{R}$ non ne ha, e neppure $f(x) = \dfrac{1}{x}$ per $x > 0$, i cui valori si avvicinano a 0 senza raggiungerlo. Per ora massimi e minimi si leggono dal grafico o si ottengono, come per la parabola, con l'algebra; il metodo generale verrà con il calcolo differenziale.

3.2.4 Funzioni pari e funzioni dispari

Supponiamo che il dominio D sia simmetrico rispetto a 0, cioè che $x \in D \Rightarrow -x \in D$. La funzione f è **pari** se $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in D$; è **dispari** se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in D$.

Il significato grafico si ricava dalle simmetrie di *Matematica 2* (cap. 11). Se f è pari, insieme a ogni punto $(a; f(a))$ il grafico contiene $(-a; f(a))$, il suo simmetrico rispetto all'asse y: il grafico di una funzione pari è **simmetrico rispetto all'asse y**. Se f è dispari, insieme a $(a; f(a))$ contiene $(-a; -f(a))$, il simmetrico rispetto all'origine: il grafico di una funzione dispari è **simmetrico rispetto all'origine** (Figura 3.3).



pari: simmetrico rispetto all'asse y

dispari: simmetrico rispetto a O

Figura 3.3 A sinistra la funzione pari $y = x^2 - 2$: i punti di ascissa a e $-a$ hanno la stessa ordinata. A destra la funzione dispari $y = x^3 - x$: i punti di ascissa a e $-a$ hanno ordinate opposte e sono simmetrici rispetto a O.

Il controllo algebrico è un calcolo: si scrive $f(-x)$ e lo si confronta con $f(x)$ e con $-f(x)$. Per $f(x) = x^4 - 3x^2$ si ha $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x)$: pari. Per $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ si ha $g(-x) = \dfrac{-x}{x^2+1} = -g(x)$: dispari. Il nome viene dalle potenze: x^n è pari se l'esponente n è pari, dispari se n è dispari. Molte funzioni non sono né pari né dispari. Per mostrarlo basta **un** controesempio: per $h(x) = x^2 + x$, $h(1) = 2$ e $h(-1) = 0$, che non è né 2 né -2. E $k(x) = \sqrt{x}$ non è né pari né dispari perché il suo dominio, $[0; +\infty[$, non è simmetrico. La funzione nulla $f(x) = 0$ è l'unica, su un dato dominio, a essere pari e dispari insieme.

Riconoscere una simmetria dimezza il lavoro: basta studiare la funzione per $x \geq 0$ e completare il grafico per simmetria. Inoltre una funzione dispari definita in 0 passa per l'origine, perché $f(0) = -f(0)$ dà $f(0) = 0$.

3.2.5 Funzioni periodiche

Nel volume dello scorso anno (cap. 12) hai visto che sen x e cos x riprendono gli stessi valori ogni 2π: sono funzioni periodiche di periodo 2π, e tg x ha periodo π. In generale f è periodica di periodo $T > 0$ se $f(x + T) = f(x)$ per ogni x del dominio (con $x + T$ nel dominio), e T è il più piccolo numero positivo con questa proprietà. Il grafico di una funzione periodica si ripete identico per

traslazioni di vettore $(T; 0)$. Studieremo a fondo le funzioni periodiche e i fenomeni periodici in *Matematica 4*; qui ci basta saperle riconoscere.

3.3 Funzione inversa e funzione composta

3.3.1 La funzione inversa

Se $f\colon A \to B$ è biiettiva, ogni $y \in B$ è immagine di *uno e un solo* $x \in A$. Possiamo allora definire una funzione che fa il percorso al contrario: la **funzione inversa** $f^{-1}\colon B \to A$ associa a ogni y di B l'unico x di A tale che $f(x) = y$. Valgono le due relazioni

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ per ogni } x \in A \quad f(f^{-1}(y)) = y \text{ per ogni } y \in B$$

Se f non è biiettiva, l'inversa non esiste: se non è iniettiva, qualche y avrebbe più «candidati»; se non è suriettiva, qualche y non ne avrebbe nessuno. Il secondo difetto si ripara scegliendo come insieme di arrivo l'immagine $f(A)$; il primo si ripara **restringendo** il dominio a un insieme su cui f sia iniettiva, per esempio un intervallo in cui è monotona. È così che nasce la radice quadrata: la funzione $f(x) = x^2$ non è invertibile su $\mathbb{R}$, ma la sua restrizione $f\colon [0; +\infty[\to [0; +\infty[$ è biiettiva, e la sua inversa è $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Restringendo invece a $]-\infty; 0]$ si otterrebbe l'inversa $y = -\sqrt{x}$.

Il grafico dell'inversa. Il punto $(a; b)$ appartiene al grafico di f se e solo se $f(a) = b$, cioè se e solo se $f^{-1}(b) = a$, cioè se e solo se $(b; a)$ appartiene al grafico di f^{-1}. I punti $(a; b)$ e $(b; a)$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$ del primo e terzo quadrante. Quindi **il grafico di f^{-1} è il simmetrico del grafico di f rispetto alla retta $y = x$** (Figura 3.4). Perché la simmetria si veda nel disegno, i due assi devono avere la stessa unità di misura.

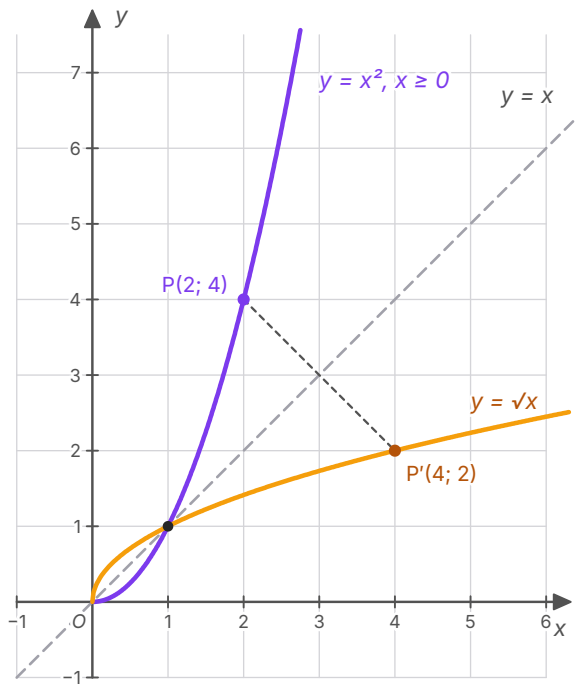


Figura 3.4 La restrizione di $y = x^2$ a $x \geq 0$ e la sua inversa $y = \sqrt{x}$ sono simmetriche rispetto alla bisettrice $y = x$. Il punto $P(2; 4)$ del primo grafico corrisponde al punto $P'(4; 2)$ del secondo; i due grafici si incontrano sulla bisettrice, in O e in $(1; 1)$.

Per trovare l'espressione di f^{-1} si risolve l'equazione $y = f(x)$ rispetto a x; se la soluzione è unica per ogni y dell'immagine, si ottiene $x = f^{-1}(y)$. Infine, per abitudine, si chiama di nuovo x la variabile indipendente.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Verifica che $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ è invertibile, trova la sua inversa e il suo insieme immagine.

Soluzione. Il dominio è $x \neq 3$. Risolviamo $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$ rispetto a x: moltiplicando per $x-3$ si ha $yx - 3y = 2x + 1$, cioè $x(y-2) = 3y + 1$.

Se $y = 2$ l'equazione diventa $0 = 7$: nessun x ha immagine 2. Se $y \neq 2$, c'è una e una sola soluzione, $x = \dfrac{3y+1}{y-2}$, che è diversa da 3 (altrimenti $3y + 1 = 3y - 6$, impossibile). Dunque ogni $y \neq 2$ ha esattamente una controimmagine: f è iniettiva e la sua immagine è $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

L'inversa è $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$, con dominio $x \neq 2$. *Verifica:* $f(0) = -\dfrac{1}{3}$ e $f^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{-1+1}{-\frac{1}{3} - 2} = 0$.

3.3.2 La funzione composta

Due funzioni si possono applicare una dopo l'altra. Date f e g, la **funzione composta** $g \circ f$ (si legge «g composto f») è definita da

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Si applica **prima** f, poi g: la funzione scritta a destra agisce per prima. Il dominio di $g \circ f$ è formato dagli x del dominio di f tali che $f(x)$ appartenga al dominio di g.

Prendiamo $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Allora $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, con dominio $x^2 - 1 \geq 0$, cioè $x \leq -1 \vee x \geq 1$. Invece $(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$, con dominio $x \geq 0$: anche se l'espressione finale ha senso per ogni x, il primo passo, $\sqrt{x}$, richiede $x \geq 0$. Le due composte sono diverse: la composizione di funzioni **non è commutativa**. Un esempio ancora più semplice: con $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 2x$ si ha $(g \circ f)(x) = 2x + 2$ ma $(f \circ g)(x) = 2x + 1$.

Spesso serve il cammino inverso: *scomporre* una funzione complicata in funzioni semplici. La funzione $h(x) = (3x + 2)^5$ è $g \circ f$ con $f(x) = 3x + 2$ e $g(t) = t^5$; $h(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$ è $g \circ f$ con $f(x) = x^2 + 4$ e $g(t) = \dfrac{1}{t}$. Questa abilità diventerà essenziale nel calcolo delle derivate, al quinto anno.

Infine, se f e g sono invertibili, anche $g \circ f$ lo è, e per tornare indietro bisogna disfare i passi in ordine inverso, come quando ci si toglie prima le scarpe e poi le calze: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Per esempio, $h(x) = 2x + 2$ è «aggiungi 1, poi raddoppia»; la sua inversa è «dimezza, poi togli 1»: $h^{-1}(x) = \dfrac{x}{2} - 1$.

3.4 Grafici deducibili

3.4.1 Traslazioni e simmetrie

Nel cap. 11 di *Matematica 2* hai visto come le isometrie del piano cartesiano trasformano il grafico di $y = f(x)$. La Tabella 3.1 riassume quei risultati e aggiunge le trasformazioni nuove di questo paragrafo. I grafici che si ottengono così da un grafico noto si dicono **grafici deducibili**.

Tabella 3.1 I grafici deducibili da quello di $y = f(x)$.

Equazione	Trasformazione del grafico	Il punto del grafico
$y = f(x - a) + b$	traslazione di vettore $(a; b)$	$(x; y) \mapsto (x + a; y + b)$
$y = -f(x)$	simmetria rispetto all'asse x	$(x; y) \mapsto (x; -y)$
$y = f(-x)$	simmetria rispetto all'asse y	$(x; y) \mapsto (-x; y)$
$y = -f(-x)$	simmetria rispetto all'origine	$(x; y) \mapsto (-x; -y)$
$y = k\,f(x)$, $k > 0$	dilatazione verticale di fattore k	$(x; y) \mapsto (x; ky)$
$y = f(hx)$, $h > 0$	dilatazione orizzontale di fattore $\frac{1}{h}$	$(x; y) \mapsto (\frac{x}{h}; y)$
$y = \lvert f(x)\rvert$	le parti sotto l'asse x si ribaltano sopra	—
$y = f(\lvert x\rvert)$	la parte con $x \geq 0$ si conserva e se ne aggiunge la simmetrica rispetto all'asse y	—

Ricorda la regola che le unisce tutte: quando x è sostituito da $x - a$, il grafico si sposta di a nel verso *positivo*, perché il valore che f aveva in x_0 viene ora assunto in $x_0 + a$.

3.4.2 Le dilatazioni

Moltiplicare $f(x)$ per un numero $k > 0$ moltiplica per k tutte le ordinate e lascia invariate le ascisse: il grafico di $y = k\,f(x)$ si ottiene da quello di f con una **dilatazione** verticale di fattore k. Se $k > 1$ il grafico si «allunga» in verticale, se $0 < k < 1$ si «schiaccia». Gli zeri non cambiano, perché $k \cdot 0 = 0$.

Sostituire x con hx, con $h > 0$, agisce invece sulle ascisse, e al contrario di quanto suggerisce l'istinto: il valore che f assumeva in x_0 viene ora assunto quando $hx = x_0$, cioè in $\frac{x_0}{h}$. Il grafico di $y = f(hx)$ si ottiene con una dilatazione orizzontale di fattore $\frac{1}{h}$: per $h = 2$ il grafico si **comprime** di metà verso l'asse y, per $h = \frac{1}{2}$ si allarga del doppio. La Figura 3.5 confronta le

due dilatazioni sulla parabola $y = x^2 - 1$: il punto (2; 3) va in (2; 6) nel primo caso e in (1; 3) nel secondo. Se k o h sono negativi, alla dilatazione si aggiunge una simmetria: $y = -2f(x)$ è la dilatazione di fattore 2 seguita dalla simmetria rispetto all'asse x.

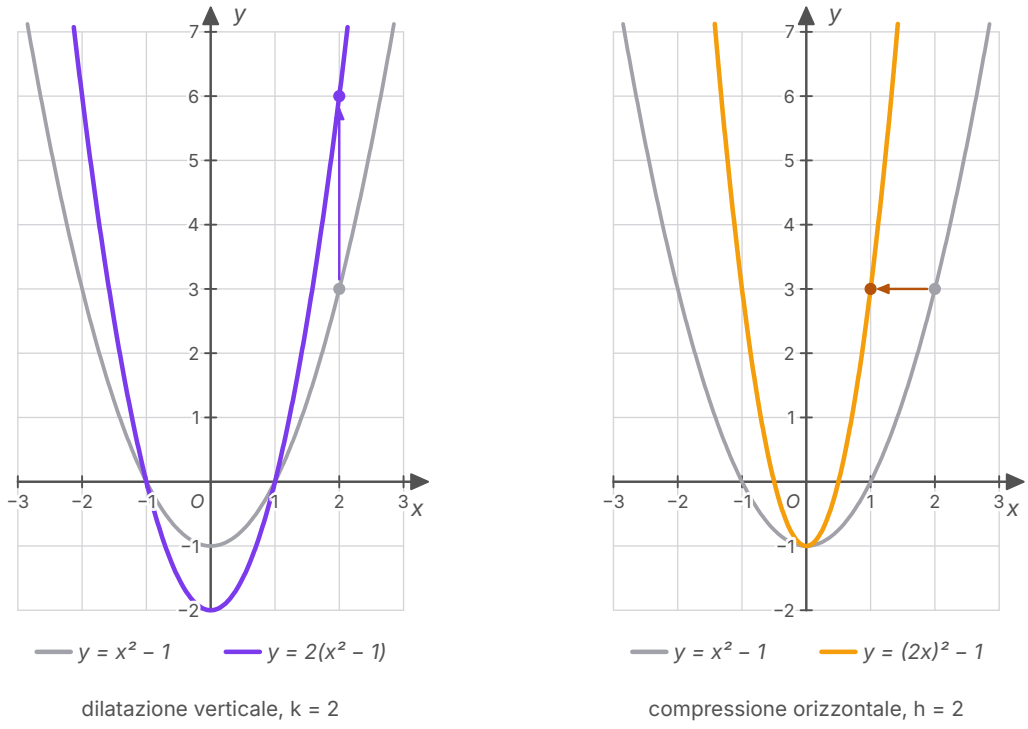


Figura 3.5 A sinistra, $y = 2(x^2 - 1)$ si ottiene da $y = x^2 - 1$ raddoppiando le ordinate: il punto (2; 3) va in (2; 6), mentre gli zeri ±1 restano fermi. A destra, $y = (2x)^2 - 1$ si ottiene dimezzando le ascisse: il punto (2; 3) va in (1; 3), mentre l'intersezione (0; −1) con l'asse y resta ferma.

Una dilatazione orizzontale cambia il periodo delle funzioni periodiche: se f ha periodo T, la funzione $y = f(hx)$ ha periodo $\frac{T}{h}$. Per esempio $y = \text{sen}(2x)$ compie un'oscillazione completa in un intervallo lungo π, metà del periodo di sen x.

3.4.3 Valori assoluti

Nel capitolo 1 hai costruito i grafici di $y = |f(x)|$ e di $y = f(|x|)$. Rileggiamoli con il linguaggio di questo capitolo. Il grafico di $|f(x)|$ coincide con quello di f dove $f(x) \geq 0$ e con quello di $-f(x)$ dove $f(x) < 0$. La funzione $f(|x|)$ è sempre pari, perché $f(|-x|) = f(|x|)$: per $x \geq 0$ coincide con $f(x)$, e la parte per $x < 0$ si ottiene per simmetria rispetto all'asse y.

3.4.4 Più trasformazioni in sequenza

Quando le trasformazioni sono più d'una, l'ordine conta. Un metodo sicuro è costruire l'espressione passo dopo passo partendo da $f(x)$, controllando a ogni passo quale sostituzione si è fatta.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Disegna il grafico di $y = 3 - 2\sqrt{x+1}$ a partire da quello di $y = \sqrt{x}$, e determina dominio, immagine e zeri.

Soluzione. Costruiamo l'espressione in quattro passi.

1) $y = \sqrt{x+1}$: traslazione di vettore $(-1; 0)$; il punto iniziale O va in $(-1; 0)$.

2) $y = 2\sqrt{x+1}$: dilatazione verticale di fattore 2; il punto $(3; 2)$ del passo 1 va in $(3; 4)$.

3) $y = -2\sqrt{x+1}$: simmetria rispetto all'asse x; il grafico ora scende.

4) $y = 3 - 2\sqrt{x+1}$: traslazione di vettore $(0; 3)$; il punto iniziale va in $(-1; 3)$ e $(3; -4)$ va in $(3; -1)$.

Il dominio è $x \geq -1$; l'immagine è $]-\infty; 3]$, perché $\sqrt{x+1}$ assume tutti i valori non negativi. Lo zero: $2\sqrt{x+1} = 3$, $x + 1 = \frac{9}{4}$, $x = \frac{5}{4}$. La funzione è decrescente nel dominio, con massimo assoluto 3 per $x = -1$.

ERRORE FREQUENTE

«Il grafico di $y = f(2x - 2)$ si ottiene comprimendo di un fattore $\frac{1}{2}$ e poi traslando di 2 verso destra.» Facciamo la prova: comprimendo si ottiene $y = f(2x)$; traslando di 2 si sostituisce x con $x - 2$ e si ottiene $y = f(2(x - 2)) = f(2x - 4)$, che è un'altra funzione. La strada giusta si legge raccogliendo: $f(2x - 2) = f(2(x - 1))$, quindi si comprime e poi si trasla di **1**. In alternativa si trasla prima di 2, ottenendo $f(x - 2)$, e poi si comprime, sostituendo x con $2x$: $f(2x - 2)$. Controlla sempre un punto: se $f(0)$ è noto, in $y = f(2x - 2)$ quel valore si ritrova dove $2x - 2 = 0$, cioè in $x = 1$.

3.5 Risoluzione grafica di equazioni e disequazioni

Le soluzioni dell'equazione $f(x) = g(x)$ sono le ascisse dei punti comuni ai grafici di $y = f(x)$ e $y = g(x)$; le soluzioni della disequazione $f(x) > g(x)$ sono le ascisse dei punti in cui il grafico di f sta *sopra* quello di g. Il metodo grafico ha due pregi: dice a colpo d'occhio *quante* sono le soluzioni e *dove* si trovano, anche quando l'algebra non sa trovarle esattamente; e permette di controllare un risultato algebrico.

Riprendiamo dal capitolo 2 la disequazione $\sqrt{x} > x - 2$. Il grafico di $y = \sqrt{x}$ parte da O e sale sempre più lentamente; la retta $y = x - 2$ sale con pendenza 1. I due grafici si incontrano una sola volta, in $(4; 2)$ (infatti $\sqrt{4} = 2 = 4 - 2$); a sinistra di quel punto la curva sta sopra la retta, a de-

stra sotto. Tenendo conto del dominio, la soluzione è $0 \le x < 4$. Il grafico spiega anche la radice estranea che compare elevando al quadrato: l'equazione $x = (x-2)^2$ ha anche la soluzione $x = 1$, che corrisponde all'intersezione della retta con $y = -\sqrt{x}$.

3.5.1 Contare le soluzioni di un'equazione

Quante soluzioni reali ha l'equazione $x^3 - 3x = k$ al variare di k? Per le equazioni di terzo grado non disponiamo, in questo corso, di una formula risolutiva; ma separando le due parti possiamo contare le soluzioni come intersezioni tra il grafico di $y = x^3 - 3x$ e la retta orizzontale $y = k$ (Figura 3.6).

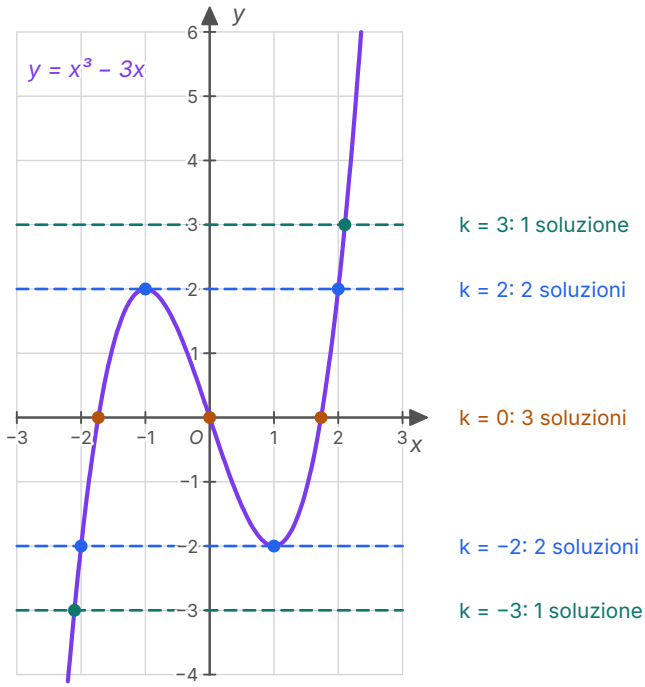


Figura 3.6 Le soluzioni di $x^3 - 3x = k$ sono le ascisse delle intersezioni tra la curva $y = x^3 - 3x$ e la retta $y = k$. Per $-2 < k < 2$ le intersezioni sono tre; per $k = \pm 2$ la retta tocca la curva in un punto e la taglia in un altro; per $|k| > 2$ c'è una sola intersezione.

La funzione $f(x) = x^3 - 3x$ è dispari; il grafico presenta un «dosso» in $(-1;\, 2)$ e una «valle» in $(1;\, -2)$. Le due quote critiche si confermano con l'algebra: $x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$, quindi per $k = 2$ l'equazione ha la soluzione doppia $x = -1$ e la soluzione $x = 2$: due soluzioni distinte. Allo stesso modo $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$. Ne segue: tre soluzioni distinte per $-2 < k < 2$, due per $k = \pm 2$, una per $k < -2$ e per $k > 2$. Il problema generale del numero delle soluzioni di un'equazione polinomiale sarà affrontato in *Matematica 4*, con i numeri complessi.

Il metodo grafico localizza le soluzioni, ma non le calcola con precisione. Per $k = 1$, per esempio, la figura mostra una soluzione tra -2 e -1, una tra -1 e 0 e una tra 1 e 2; per averle con le cifre decimali che servono si usa il metodo di bisezione del capitolo 2, partendo proprio da questi intervalli.

3.6 La velocità di variazione

3.6.1 Il tasso medio di variazione

Una funzione descrive come cambia una grandezza; spesso interessa *quanto rapidamente* cambia. Siano a e b due punti del dominio di f, con $a < b$. Chiamiamo $\Delta x = b - a$ la variazione della variabile e $\Delta f = f(b) - f(a)$ la variazione corrispondente della funzione. Il **tasso medio di variazione** di f nell'intervallo $[a; b]$ è il quoziente

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geometricamente è il coefficiente angolare della retta che passa per $A(a; f(a))$ e $B(b; f(b))$, la **retta secante** il grafico in quei due punti. Se il tasso medio è positivo, in media la funzione è aumentata; se è negativo, è diminuita. Per una funzione lineare $y = mx + q$ il tasso medio è m su qualunque intervallo: è il tasso di variazione del modello lineare che conosci dal cap. 6 di *Matematica 2*. Per tutte le altre funzioni il tasso medio cambia con l'intervallo, e proprio questo lo rende interessante.

Il tasso medio ha un'**unità di misura**: quella della funzione divisa per quella della variabile. Se $s(t)$ è la posizione in metri al tempo t in secondi, $\Delta s/\Delta t$ si misura in m/s ed è la **velocità media** nell'intervallo di tempo. Se $P(t)$ è il numero di abitanti di un paese nell'anno t, $\Delta P/\Delta t$ è l'aumento medio di abitanti per anno. Se $C(q)$ è il costo di produzione di q oggetti, $\Delta C/\Delta q$ è il costo medio di ogni oggetto in più.

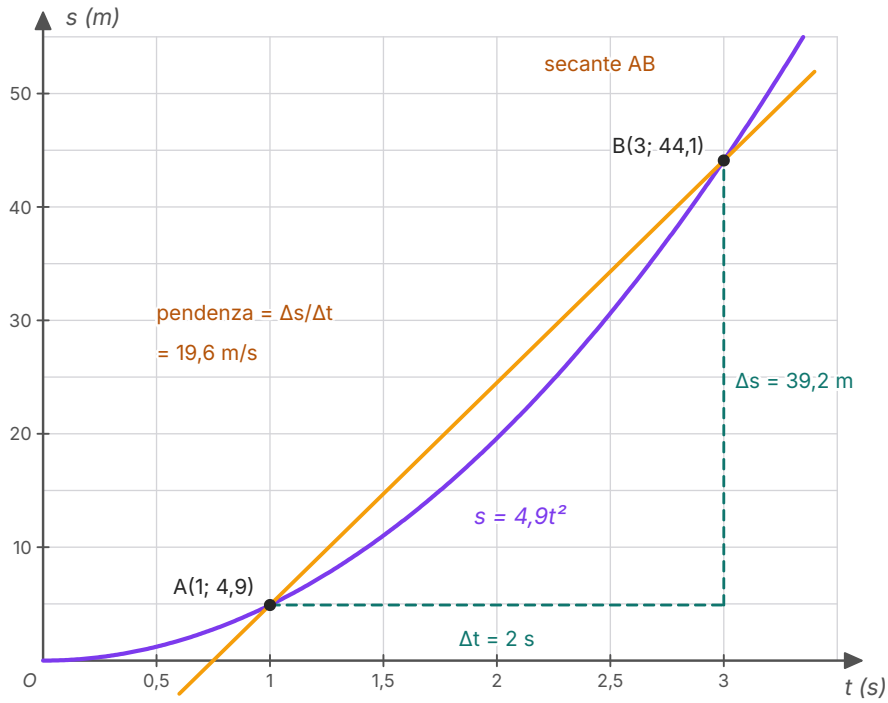


Figura 3.7 Il grafico di $s = 4{,}9t^2$ (sasso in caduta libera, s in metri e t in secondi; le due scale sono diverse). La pendenza della secante AB è la velocità media tra $t = 1$ s e $t = 3$ s: 39,2/2 = 19,6 m/s.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Un sasso lasciato cadere da fermo percorre, trascurando la resistenza dell'aria, $s(t) = 4{,}9t^2$ metri in t secondi. Calcola la velocità media nell'intervallo [1; 3], nell'intervallo [0; 1] e nell'intervallo $[1; 1 + h]$, con $h > 0$.

Soluzione. $s(1) = 4{,}9$ m, $s(3) = 44{,}1$ m, quindi su [1; 3] la velocità media è $\dfrac{44{,}1 - 4{,}9}{3 - 1} = 19{,}6$ m/s (Figura 3.7). Su [0; 1]: $\dfrac{4{,}9 - 0}{1} = 4{,}9$ m/s. Il sasso accelera: le velocità medie crescono negli intervalli successivi.

Su $[1; 1 + h]$: $\dfrac{4{,}9(1+h)^2 - 4{,}9}{h} = \dfrac{4{,}9(2h + h^2)}{h} = 9{,}8 + 4{,}9h$ m/s. Per $h = 0{,}1$ si ottiene 10,29 m/s, per $h = 0{,}01$ 9,849 m/s, per $h = 0{,}001$ 9,8049 m/s: più l'intervallo è breve, più la velocità media si avvicina a 9,8 m/s.

L'ultimo calcolo apre una domanda: che cosa succede al tasso medio quando b si avvicina sempre più ad a? La secante tende a diventare la retta *tangente* al grafico in A, e la velocità media tende alla velocità *in quell'istante*, quella che segna il tachimetro. Nel capitolo 6 calcoleremo la

tangente a una parabola e daremo un significato intuitivo a questa velocità istantanea; la teoria completa, il calcolo differenziale, è il contenuto del quinto anno.

Attenzione: il tasso medio dipende solo dai valori agli **estremi** dell'intervallo, non da ciò che accade in mezzo. Un'automobile che percorre 120 km in due ore ha velocità media 60 km/h, che sia andata sempre a 60 km/h o che sia rimasta ferma un'ora e poi abbia viaggiato a 120 km/h. Un tasso medio nullo, quindi, non dice che la funzione è rimasta costante: dice soltanto che $f(a) = f(b)$.

COLLEGAMENTI

Le funzioni della fisica. In fisica quasi ogni legge è una funzione. Nel moto rettilineo uniforme la posizione $s(t) = s_0 + vt$ è una funzione lineare del tempo, e la velocità è il suo tasso di variazione, lo stesso su ogni intervallo. Nella caduta libera la posizione è una funzione quadratica e la velocità media cambia da un intervallo all'altro; la velocità istantanea $v(t) = 9{,}8t$ (con $g \approx 9{,}8$ m/s^2) è a sua volta una funzione del tempo, lineare.

La **legge di Boyle** afferma che, a temperatura costante, il prodotto della pressione e del volume di una quantità fissata di gas è costante: $pV = k$. La pressione è dunque una funzione del volume, $p(V) = \dfrac{k}{V}$: una proporzionalità inversa, il cui grafico per $V > 0$ è un ramo di iperbole. La funzione è decrescente e ha tasso medio negativo: comprimendo il gas la pressione aumenta, e aumenta tanto più rapidamente quanto più il volume è già piccolo. Nel capitolo 10 vedremo che quella curva è davvero un'iperbole nel senso della geometria analitica.

Con il computer

Un software di geometria dinamica permette di «vedere» le trasformazioni. Definisci quattro *slider* a, b, k, h e disegna, insieme a una funzione f scelta da te, il grafico di $y = k\,f(h(x - a)) + b$: muovendo gli slider uno alla volta, osserva quale parametro sposta il grafico, quale lo allunga, quale lo comprime, e che cosa accade quando k o h diventano negativi. Con un foglio di calcolo, invece, si costruisce una tabella dei tassi medi: in una colonna i valori di h (1; 0,1; 0,01; ...), nella successiva il tasso medio di f su $[a; a + h]$, calcolato con una formula che fa riferimento a una cella contenente a. Gli esercizi alla fine del capitolo propongono entrambe le attività.

APPROFONDIMENTO · BREVE STORIA DELLA PAROLA «FUNZIONE»

La parola *funzione* compare in matematica con Leibniz, in un manoscritto del 1673, per indicare segmenti legati a una curva che «svolgono una certa funzione» nella figura, come la tangente o l'ordinata. Nel Settecento il significato si allarga: nel 1748 Eulero, nell'*Introductio in analysin infinitorum*, chiama funzione di una quantità variabile un'espressione analitica composta in qualunque modo con quella quantità e con numeri costanti. Per Eulero, dunque, una funzione è una *formula*.

Nell'Ottocento lo studio delle serie trigonometriche costrinse i matematici a considerare funzioni molto più generali. Dirichlet propose un esempio che nessuna «formula» del tempo poteva descrivere in modo naturale: la funzione che vale 0 nei numeri razionali e 1 nei numeri irrazionali. Si affermò così l'idea moderna, quella che usiamo in questo libro: una funzione è una qualsiasi legge che associ a ogni elemento del dominio uno e un solo valore, senza che sia necessario esprimerla con una formula.

SINTESI

- Una funzione reale di variabile reale $f\colon D \to \mathbb{R}$ associa a ogni x del dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ uno e un solo numero reale $f(x)$; l'immagine $f(D)$ è l'insieme dei valori assunti. Il grafico è l'insieme dei punti $(x; f(x))$.
- Le funzioni algebriche si dividono in razionali intere, razionali fratte e irrazionali; le altre sono trascendenti.
- Dominio: denominatori diversi da zero, radicandi di radici di indice pari maggiori o uguali a zero; nessuna condizione per le radici di indice dispari. Il dominio si determina prima di semplificare.
- Zeri e segno si ottengono risolvendo $f(x) = 0$ e $f(x) > 0$ all'interno del dominio.
- Iniettiva: ogni retta orizzontale incontra il grafico al più una volta. Suriettiva su B: ogni retta y = b con b in B lo incontra almeno una volta.
- f è crescente in I se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; una funzione strettamente monotona è iniettiva, ma non vale il viceversa ($y = 1/x$).
- Pari: $f(-x) = f(x)$, grafico simmetrico rispetto all'asse y. Dispari: $f(-x) = -f(x)$, grafico simmetrico rispetto all'origine.
- Una funzione biiettiva ha l'inversa f^{-1}, il cui grafico è il simmetrico di quello di f rispetto a $y = x$; se f non è iniettiva si restringe il dominio.
- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$: agisce prima f. La composizione non è commutativa; $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- $y = f(x - a) + b$ trasla di $(a; b)$; $y = k\,f(x)$ dilata in verticale di k; $y = f(hx)$ dilata in orizzontale di $1/h$. Nelle sequenze di trasformazioni l'ordine conta: $f(2x - 2) = f(2(x - 1))$.
- Le soluzioni di $f(x) = g(x)$ sono le ascisse delle intersezioni dei grafici; il numero delle soluzioni di $f(x) = k$ si conta con le rette orizzontali.
- Il tasso medio di variazione $\Delta f/\Delta x = (f(b) - f(a))/(b - a)$ è la pendenza della secante; ha come unità quella di f divisa per quella di x (per esempio la velocità media).

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Il dominio di $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 2}}{x - 5}$ è:

   A. $x \geq 2 \wedge x \neq 5$

   B. $x > 2$

   C. $x \neq 5$

   D. $x \geq 2$

2. ● Quale di queste funzioni è dispari?

   A. $y = x^2 + x$

   B. $y = x^3 + 1$

   C. $y = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

   D. $y = |x|$

3. ●● La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, è:

   A. iniettiva ma non suriettiva

   B. suriettiva ma non iniettiva

   C. biiettiva

   D. né iniettiva né suriettiva

4. ●● Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2$, allora $(g \circ f)(1)$ vale:

   A. 3

   B. 9

   C. 4

   D. 5

5. ●● Il grafico di $y = f(x + 3) - 2$ si ottiene da quello di $y = f(x)$ con la traslazione di vettore:

   A. $(3; -2)$

   B. $(-3; -2)$

   C. $(-3; 2)$

   D. $(3; 2)$

6. ●● Il tasso medio di variazione di $f(x) = x^2$ nell'intervallo $[1; 4]$ è:

   A. 5

   B. 15

   C. 3

   D. 4

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.

   a) Ogni funzione crescente in $\mathbb{R}$ è iniettiva.

   b) La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è decrescente nel suo dominio.

   c) Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y.

   d) Per ogni coppia di funzioni, $g \circ f = f \circ g$.

   e) Esiste una funzione che è sia pari sia dispari.

   f) Il grafico di f^{-1} è il simmetrico del grafico di f rispetto all'asse x.

8. ● Completa.
   a) Una funzione f con dominio simmetrico è pari se _____ per ogni x del dominio.
   b) f è crescente in I se per ogni $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ si ha _____ .
   c) Il dominio di $g \circ f$ è formato dagli x del dominio di f tali che _____ .
   d) Il tasso medio di variazione di f in $[a; b]$ è _____ ed è il coefficiente angolare della _____ .

Calcolare

9. ● Determina il dominio delle funzioni.
   a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-9}$ b) $f(x) = \sqrt{6-2x}$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x+1} + \dfrac{1}{x^2+1}$ d) $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2-4x}$

10. ●● Determina il dominio delle funzioni.
    a) $f(x) = \sqrt{x^2-5x+4}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{2-x}}$
    d) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{5-x}$ e) $f(x) = \dfrac{x}{|x|-2}$

11. ●● Determina zeri e segno delle funzioni.
    a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$ b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ c) $f(x) = x^3 - 4x$

12. ●● Trova il dominio e i punti di intersezione con gli assi del grafico di $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x+3}$.

13. ● Stabilisci se le funzioni sono pari, dispari o né pari né dispari.
    a) $x^4 - 2x^2 + 3$ b) $x^3 - 5x$ c) $\dfrac{x^2+1}{x}$ d) $x^2 - 3x$ e) $\sqrt{x^2+4}$ f) $x|x|$

14. ●● Trova l'inversa delle funzioni, precisandone il dominio.
    a) $f(x) = 3x - 6$ b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + 2$ d) $f(x) = x^2 + 1$, con $x \geq 0$

15. ●● Date $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$, scrivi $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ e $g \circ g$, ciascuna con il suo dominio.

16. ●● Scrivi ciascuna funzione come composta $g \circ f$ di due funzioni più semplici.
    a) $\sqrt{x^2+1}$ b) $(3x-2)^4$ c) $\dfrac{1}{x^2-4}$ d) $|2x+5|$

17. ●● Scrivi l'equazione del grafico che si ottiene da $y = x^2$ con:
    a) la traslazione di vettore $(-2; 3)$;
    b) la dilatazione verticale di fattore 3 seguita dalla traslazione di vettore $(0; -1)$;
    c) la simmetria rispetto all'asse x seguita dalla traslazione di vettore $(0; 4)$.
    Per ciascuna parabola indica il vertice.

18. ●● Descrivi come si ottengono i grafici seguenti da quello di $y = \sqrt{x}$ e scrivi dominio e immagine di ciascuna funzione.
a) $y = \sqrt{x-4} + 1$ b) $y = -2\sqrt{x}$ c) $y = \sqrt{-x}$ d) $y = \sqrt{2x+6}$

19. ●● Calcola il tasso medio di variazione:
a) di $f(x) = x^3$ negli intervalli $[0; 2]$, $[1; 2]$, $[-1; 1]$;
b) di $g(x) = \dfrac{1}{x}$ nell'intervallo $[1; 4]$.

20. ●●● Risolvi graficamente, e poi verifica con l'algebra, la disequazione $x^2 - 2x \le x$ e la disequazione $\dfrac{1}{x} > x$.

Dimostrare e argomentare

21. ●● Dimostra che la somma di due funzioni pari (con lo stesso dominio) è pari e che il prodotto di due funzioni dispari è pari.

22. ●● Dimostra che se f e g sono crescenti in $\mathbb{R}$, allora $g \circ f$ è crescente in $\mathbb{R}$. Che cosa si può dire di $g \circ f$ se f e g sono entrambe decrescenti?

23. ●● Trova l'errore. «$f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3$, quindi il grafico di f è una retta e $f(3) = 6$.»

24. ●● Spiega perché $f(x) = x^2 - 2x$ non è invertibile in $\mathbb{R}$. Trova il più ampio intervallo che contiene 3 su cui f è invertibile e scrivi l'inversa della restrizione.

25. ●●● Sia f una funzione con dominio simmetrico rispetto a 0. Dimostra che $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ è pari, che $d(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ è dispari e che $f = p + d$. Applica il risultato a $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$.

Problemi

26. ● Una compagnia di taxi (immaginaria) applica la tariffa $C(d) = 3{,}50 + 1{,}20d$, dove C è il prezzo in euro e d la distanza in km.
a) Qual è il tasso di variazione di C, e con quale unità di misura?
b) Scrivi la funzione inversa e calcola quanti chilometri si percorrono con 15,50 €.

27. ●● Un sasso cade da fermo da un'altezza di 78,4 m; dopo t secondi ha percorso $s(t) = 4{,}9t^2$ metri.
a) Dopo quanti secondi tocca terra? Qual è il dominio della funzione nel contesto?
b) Calcola la velocità media nei primi 2 s e negli ultimi 2 s.
c) Scrivi l'altezza dal suolo $h(t)$ e ricava t in funzione di h.

28. ●● Per una certa quantità di gas a temperatura costante vale $pV = 240$, con p in kPa e V in litri.
a) Scrivi p in funzione di V e stabilisci se è crescente o decrescente per $V > 0$.
b) Calcola il tasso medio di variazione della pressione tra 2 L e 4 L e tra 4 L e 8 L. Commenta.
c) Scrivi la funzione inversa $V(p)$.

29. ●● Gli abitanti di un paese (dati inventati) sono stati: 12 000 nel 2015, 12 480 nel 2017, 13 100 nel 2019, 13 900 nel 2023. Calcola l'aumento medio di abitanti per anno in ciascuno dei tre intervalli e sull'intero periodo. In quale intervallo la popolazione è cresciuta più rapidamente?

30. ●● Il costo giornaliero di un forno per produrre q pagnotte è $C(q) = 50 + 0{,}8q + 0{,}002q^2$ euro.
a) Calcola il tasso medio di variazione del costo tra 100 e 200 pagnotte e tra 200 e 300 pagnotte, e spiega il significato.
b) Calcola il costo medio di una pagnotta, $C(q)/q$, quando se ne producono 200.

Con il computer

31. ●● Con un software di geometria dinamica, crea gli slider a, b, k, h e disegna $y = k(h(x - a))^2 + b$.
a) Quali parametri spostano il vertice? Quali cambiano l'apertura della parabola?
b) Trova valori dei parametri per cui il grafico è $y = 2(x - 1)^2 - 3$. La scelta è unica?
c) Spiega perché, per la parabola, una dilatazione orizzontale si può sempre sostituire con una verticale.

32. ●● In un foglio di calcolo scrivi in una colonna i valori $h = 1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001$ e nelle colonne successive il tasso medio di $f(x) = x^2$ e di $g(x) = x^3$ sull'intervallo $[1;\ 1 + h]$. A quale numero sembrano avvicinarsi i due tassi medi? Verifica con l'algebra.

Verso la verifica

33. ●● Sia $f(x) = \sqrt{4 - x}$.
a) Determina dominio, immagine, zeri e segno.
b) Spiega come si ottiene il grafico da quello di $y = \sqrt{x}$.
c) Stabilisci se f è invertibile e, in caso affermativo, scrivi f^{-1} con il suo dominio.

34. ●● Siano $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e $g(x) = |x|$.
a) Scrivi $g \circ f$ e $f \circ g$.
b) Stabilisci quale delle due è pari.
c) Risolvi l'equazione $(f \circ g)(x) = 0$.

35. ●●● Sfida. Determina a e b in modo che la funzione $f(x) = \dfrac{ax + b}{x - 2}$ abbia il grafico passante per $P(3;\ 7)$ e coincida con la propria inversa.

PER APPROFONDIRE

- BOY — i capitoli su Eulero e sull'Ottocento, per la storia del concetto di funzione.
- CR — il capitolo sulle funzioni e i limiti, per una presentazione rigorosa e ricca di esempi.
- POL — per il metodo: «disegna una figura», che nella risoluzione grafica diventa «disegna un grafico».

Glossario del capitolo

Dilatazione
Trasformazione che moltiplica le ordinate ($y = k\,f(x)$) o le ascisse ($y = f(hx)$, fattore $1/h$) dei punti di un grafico per un numero positivo.

Dominio di una funzione
Insieme dei valori della variabile per cui la funzione è definita; se è data solo l'espressione, il più ampio sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui essa ha significato. Si dice anche insieme di esistenza.

Funzione algebrica
Funzione ottenuta dalla variabile con un numero finito di operazioni razionali ed estrazioni di radice: razionale intera, razionale fratta o irrazionale.

Funzione crescente
In un intervallo I: $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$ per ogni x_1, x_2 di I; in senso lato se $f(x_1) \le f(x_2)$.

Funzione decrescente
In un intervallo I: $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$ per ogni x_1, x_2 di I; in senso lato se $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Funzione dispari
Funzione con dominio simmetrico tale che $f(-x) = -f(x)$; il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.

Funzione inversa
Data $f: A \to B$ biiettiva, la funzione $f^{-1}: B \to A$ che associa a ogni y l'unico x con $f(x) = y$; il suo grafico è il simmetrico di quello di f rispetto alla retta $y = x$.

Funzione monotona
Funzione crescente oppure decrescente in un intervallo.

Funzione pari
Funzione con dominio simmetrico tale che $f(-x) = f(x)$; il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

Funzione reale di variabile reale
Funzione $f: D \to \mathbb{R}$ il cui dominio D è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Funzione trascendente
Funzione che non è algebrica, come le funzioni circolari, l'esponenziale e il logaritmo.

Grafico deducibile
Grafico ottenuto da quello di una funzione nota con traslazioni, simmetrie, dilatazioni o valori assoluti.

Immagine di una funzione
Insieme f(D) dei valori assunti dalla funzione; si indica anche con Im f.

Massimo assoluto
Il valore $M = f(x_0)$ tale che $f(x) \le M$ per ogni x del dominio; x_0 è un punto di massimo.

Minimo assoluto
Il valore $m = f(x_0)$ tale che $f(x) \ge m$ per ogni x del dominio; x_0 è un punto di minimo.

Restrizione
La funzione che si ottiene da f limitandone il dominio a un sottoinsieme, per esempio per renderla iniettiva.

Retta secante (a un grafico)
Retta che passa per due punti distinti del grafico di una funzione.

Segno di una funzione
Indicazione degli intervalli del dominio in cui $f(x) > 0$ e di quelli in cui $f(x) < 0$.

Tasso medio di variazione
Il quoziente $(f(b) - f(a))/(b - a)$: variazione media di f per unità di variazione della variabile in $[a; b]$; è la pendenza della retta secante.

Soluzioni

1. A. Radicando $x - 2 \geq 0$ e denominatore $x - 5 \neq 0$, a sistema.

2. C. $\frac{-x}{x^2+4} = -\frac{x}{x^2+4}$. La A non è né pari né dispari, la B nemmeno ($f(0) = 1 \neq 0$), la D è pari.

3. D. $f(-2) = f(2)$, quindi non è iniettiva; i numeri negativi non sono immagini, quindi non è suriettiva su $\mathbb{R}$.

4. B. $f(1) = 3$, $g(3) = 9$. (Invece $(f \circ g)(1) = f(1) = 3$.)

5. B. $x + 3 = x - (-3)$: $a = -3$, $b = -2$.

6. A. $(16 - 1)/(4 - 1) = 5$.

7. a) V (teorema sulle funzioni monotone). b) F: è decrescente in $]-\infty; 0[$ e in $]0; +\infty[$, ma non nel dominio: $f(-1) < f(1)$. c) V. d) F: la composizione non è commutativa; per esempio con $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$ si ha $g \circ f = 2x + 2$ e $f \circ g = 2x + 1$. e) V: la funzione nulla. f) F: rispetto alla bisettrice $y = x$.

8. a) $f(-x) = f(x)$. b) $f(x_1) < f(x_2)$. c) $f(x)$ appartiene al dominio di g. d) $(f(b) - f(a))/(b - a)$; retta secante il grafico nei punti di ascissa a e b.

9. a) $x \neq \pm 3$. b) $x \leq 3$. c) $\mathbb{R}$ ($x^2 + 1 > 0$ sempre). d) $x \neq 0 \wedge x \neq 4$.

10. a) $x \leq 1 \vee x \geq 4$. b) $16 - x^2 > 0$: $-4 < x < 4$. c) $-3 \leq x < 2$. d) $x \geq 0 \wedge x \leq 5$: $[0; 5]$. e) $|x| \neq 2$: $x \neq \pm 2$.

11. a) Zeri 2 e 4; $f(x) > 0$ per $x < 2 \vee x > 4$, $f(x) < 0$ per $2 < x < 4$. b) D: $x \neq 3$; zero -1; positiva per $x < -1 \vee x > 3$, negativa per $-1 < x < 3$. c) $x(x - 2)(x + 2)$: zeri -2, 0, 2; positiva per $-2 < x < 0 \vee x > 2$, negativa per $x < -2 \vee 0 < x < 2$.

12. D: $x \neq -3$. Asse y: $(0; -\frac{2}{3})$. Asse x: $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) = 0$, punti $(-1; 0)$ e $(2; 0)$.

13. a) Pari. b) Dispari. c) Dispari: $f(-x) = \frac{x^2+1}{-x} = -f(x)$. d) Né l'una né l'altra: $f(1) = -2$, $f(-1) = 4$. e) Pari. f) Dispari: $(-x)|-x| = -x|x|$.

14. a) $f^{-1}(x) = \frac{x+6}{3}$, dominio $\mathbb{R}$. b) Da $y(x - 1) = x + 2$: $x(y - 1) = y + 2$, $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-1}$, dominio $x \neq 1$: la funzione coincide con la propria inversa, e il suo grafico è simmetrico rispetto a $y = x$. c) $f^{-1}(x) = (x - 2)^3 + 1$, dominio $\mathbb{R}$. d) $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$, dominio $x \geq 1$.

15. $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2x-1}$, $x \neq \frac{1}{2}$. $(f \circ g)(x) = \frac{2}{x} - 1$, $x \neq 0$. $(f \circ f)(x) = 2(2x - 1) - 1 = 4x - 3$, $\mathbb{R}$. $(g \circ g)(x) = x$, ma con dominio $x \neq 0$.

16. a) $f(x) = x^2 + 1$, $g(t) = \sqrt{t}$. b) $f(x) = 3x - 2$, $g(t) = t^4$. c) $f(x) = x^2 - 4$, $g(t) = 1/t$. d) $f(x) = 2x + 5$, $g(t) = |t|$. (Sono possibili altre scomposizioni.)

17. a) $y = (x + 2)^2 + 3$, vertice $(-2; 3)$. b) $y = 3x^2 - 1$, vertice $(0; -1)$. c) $y = -x^2 + 4$, vertice $(0; 4)$.

18. a) Traslazione di vettore $(4; 1)$; D: $x \geq 4$, immagine $y \geq 1$. b) Dilatazione verticale di fattore 2 e simmetria rispetto all'asse x; D: $x \geq 0$, immagine $y \leq 0$. c) Simmetria rispetto all'asse y; D: $x \leq 0$, immagine $y \geq 0$. d) $\sqrt{2(x + 3)}$: compressione orizzontale di fattore $\frac{1}{2}$, poi traslazione di vettore $(-3; 0)$; D: $x \geq -3$, immagine $y \geq 0$.

19. a) $8/2 = 4$; $(8 - 1)/1 = 7$; $(1 - (-1))/2 = 1$. b) $(\frac{1}{4} - 1)/3 = -\frac{1}{4}$.

20. Prima: la parabola $y = x^2 - 2x$ sta sotto o sulla retta $y = x$ tra le intersezioni $x = 0$ e $x = 3$: $0 \leq x \leq 3$; algebricamente $x^2 - 3x \leq 0$. Seconda: l'iperbole $y = 1/x$ e la bisettrice si incontrano in $(\pm 1; \pm 1)$; l'iperbole sta sopra per $x < -1$ e per $0 < x < 1$. Algebricamente $(1 - x^2)/x > 0$: $x < -1 \vee 0 < x < 1$.

21. Se $f(-x) = f(x)$ e $g(-x) = g(x)$, allora $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$. Se f e g sono dispari, $f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x)$. c.v.d.

22. Se $x_1 < x_2$, poiché f è crescente $f(x_1) < f(x_2)$; poiché g è crescente, $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$. c.v.d. Se entrambe sono decrescenti:
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2))$: la composta è crescente.

23. Il dominio va determinato prima di semplificare: $x \neq 3$. Il grafico è la retta $y = x + 3$ privata del punto (3; 6), e $f(3)$ non esiste.

24. $f(0) = f(2) = 0$: non è iniettiva. $f(x) = (x - 1)^2 - 1$ è crescente in $[1; +\infty[$, che contiene 3; ogni intervallo più ampio contiene punti a sinistra di 1, dove f riprende valori già assunti. Da $y = (x - 1)^2 - 1$ con $x \geq 1$: $x = 1 + \sqrt{y + 1}$. Inversa: $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x + 1}$, dominio $x \geq -1$.

25. $p(-x) = (f(-x) + f(x))/2 = p(x)$;
$d(-x) = (f(-x) - f(x))/2 = -d(x)$;
$p(x) + d(x) = 2f(x)/2 = f(x)$. c.v.d. Per l'esempio:
$f(-x) = -x^3 + x^2 + 2x + 1$, quindi $p(x) = x^2 + 1$ e $d(x) = x^3 - 2x$.

26. a) 1,20 €/km, su ogni intervallo. b)
$d = (C - 3{,}50)/1{,}20$; per $C = 15{,}50$: $d = 12/1{,}2 = 10$ km.

27. a) $4{,}9t^2 = 78{,}4$, $t^2 = 16$, $t = 4$ s; dominio $[0; 4]$. b)
$s(2) = 19{,}6$ m: $19{,}6/2 = 9{,}8$ m/s; negli ultimi 2 s:
$(78{,}4 - 19{,}6)/2 = 29{,}4$ m/s. c) $h(t) = 78{,}4 - 4{,}9t^2$;
$t = \sqrt{\dfrac{78{,}4 - h}{4{,}9}}$, con $0 \leq h \leq 78{,}4$.

28. a) $p(V) = 240/V$, decrescente: se $0 < V_1 < V_2$ allora $240/V_1 > 240/V_2$. b) $(60 - 120)/2 = -30$ kPa/L;
$(30 - 60)/4 = -7{,}5$ kPa/L. La pressione diminuisce sempre, ma sempre più lentamente al crescere del volume. c) $V(p) = 240/p$: la funzione ha la stessa forma della sua inversa.

29. 2015–2017: $480/2 = 240$ abitanti/anno. 2017–2019: $620/2 = 310$. 2019–2023: $800/4 = 200$. 2015–2023: $1900/8 = 237{,}5$. Più rapido tra il 2017 e il 2019.

30. a) $C(100) = 150$, $C(200) = 290$, $C(300) = 470$. Tassi medi: $140/100 = 1{,}40$ €/pagnotta e $180/100 = 1{,}80$ €/pagnotta: ogni pagnotta in più costa, in media, di più quando la produzione è già alta. b)
$290/200 = 1{,}45$ €.

31. a) a e b spostano il vertice in $(a; b)$; k e h cambiano l'apertura. b) $a = 1$, $b = -3$ e ogni coppia con $kh^2 = 2$: per esempio $k = 2$, $h = 1$, oppure $k = 1$, $h = \sqrt{2}$, oppure $k = 8$, $h = \dfrac{1}{2}$. Non è unica. c)
$k(h(x - a))^2 = kh^2(x - a)^2$: conta solo il prodotto kh^2.

32. Per x^2: 3; 2,1; 2,01; 2,001 → si avvicina a 2. Infatti $((1 + h)^2 - 1)/h = 2 + h$. Per x^3: 7; 3,31; 3,0301; 3,003001 → si avvicina a 3, perché $((1 + h)^3 - 1)/h = 3 + 3h + h^2$.

33. a) D: $x \leq 4$; immagine $[0; +\infty[$; zero $x = 4$; positiva per $x < 4$. b) $\sqrt{4 - x} = \sqrt{-(x - 4)}$: simmetria rispetto all'asse y ($y = \sqrt{-x}$), poi traslazione di vettore $(4; 0)$. c) È decrescente, quindi iniettiva: da $y = \sqrt{4 - x}$, $y \geq 0$, si ha $x = 4 - y^2$. $f^{-1}(x) = 4 - x^2$, con dominio $x \geq 0$.

34. a) $(g \circ f)(x) = |x^2 - 4x + 3|$; $(f \circ g)(x) = x^2 - 4|x| + 3$.
b) $f \circ g$ è pari ($|-x| = |x|$); $g \circ f$ no: $(g \circ f)(1) = 0$,
$(g \circ f)(-1) = 8$. c) $|x|^2 - 4|x| + 3 = 0$ dà $|x| = 1$ o $|x| = 3$:
$x = \pm 1$, $x = \pm 3$.

35. Da $y(x - 2) = ax + b$: $x(y - a) = 2y + b$, quindi $f^{-1}(x) = \dfrac{2x + b}{x - a}$. Perché coincida con $f(x)$ per ogni x del dominio i denominatori devono avere la stessa radice: $a = 2$. Allora $f(3) = 6 + b = 7$, $b = 1$:
$f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$. Controllo: $2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = -5 \neq 0$, quindi la funzione non è costante; e $f(f(x)) = x$ per $x \neq 2$.