CAPITOLO

2

Equazioni e disequazioni irrazionali

Elevare al quadrato è facile. Il difficile è ricordarsi del segno che, così facendo, si è perso. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Scrivere le condizioni di esistenza dei radicali e capire quando l'elevamento a potenza dei due membri è un'equivalenza.
2. Risolvere le equazioni irrazionali con un radicale, con il metodo della verifica e con il sistema equivalente.
3. Risolvere equazioni con due radicali, con indice dispari e con un'incognita ausiliaria.
4. Ricavare e applicare i sistemi equivalenti alle disequazioni irrazionali.
5. Interpretare equazioni e disequazioni irrazionali con i grafici di semiparabole e semicirconferenze.
6. Approssimare con la bisezione la soluzione di un'equazione non risolubile algebricamente, dichiarando l'errore.

INDICE DEL CAPITOLO

2.1 Radicali, domini e trasformazioni equivalenti 2
2.2 L'equazione √A(x) = B(x) 4
2.3 Altre equazioni irrazionali 7
2.4 Disequazioni irrazionali 9
2.5 Interpretazione grafica 12
2.6 Quando non c'è una formula: soluzioni approssimate 14

Matematica 3 · Parte I · Equazioni, funzioni e successioni · versione 1.0
Capitolo 2: Equazioni e disequazioni irrazionali · pagine 43–64 del volume completo · estratto per lo studio

Un pendolo che batte il secondo, cioè che impiega 2 secondi per un'oscillazione completa, quanto deve essere lungo? Il periodo di un pendolo semplice è dato, per piccole oscillazioni, dalla formula $T = 2\pi\sqrt{l/g}$: la lunghezza l, l'incognita, sta sotto il segno di radice. Per ricavarla bisogna «liberarla» dalla radice, e il modo più naturale è elevare al quadrato. Qui però si nasconde una trappola. Elevare al quadrato i due membri di un'equazione non è un'operazione innocua come sommare lo stesso numero o dividere per lo stesso numero diverso da zero: può far comparire soluzioni che l'equazione di partenza non ha.

In questo capitolo impariamo a risolvere le equazioni e le disequazioni in cui l'incognita compare sotto una radice, e soprattutto a capire *perché* ogni passaggio è lecito. Nel volume dello scorso anno hai incontrato le equazioni irrazionali solo in un riquadro di approfondimento; ora diventano una tecnica completa, che userai di continuo: quando studieremo la parabola con l'asse orizzontale (capitolo 6), la circonferenza (capitolo 7), l'ellisse e l'iperbole, molte curve si scriveranno proprio con una radice. Chiuderemo con una domanda diversa: che cosa vuol dire «risolvere» un'equazione per la quale non esiste alcun procedimento algebrico? La risposta, approssimare con un errore garantito, è un'idea che attraversa tutta la matematica applicata.

2.1 Radicali, domini e trasformazioni equivalenti

2.1.1 Richiamo: quando esiste un radicale

Ricordiamo da *Matematica 2* (capitolo 2) i fatti essenziali. Per $a \geq 0$ la radice quadrata aritmetica $\sqrt{a}$ è il numero *non negativo* il cui quadrato è a; un radicale di indice pari esiste solo se il radicando è non negativo, mentre un radicale di indice dispari esiste per ogni radicando reale e ne conserva il segno: $\sqrt[3]{-8} = -2$. Inoltre $\sqrt{a^2} = |a|$ per ogni a reale, mentre $\sqrt[3]{a^3} = a$.

Quando il radicando è un'espressione $A(x)$, le condizioni di esistenza (C.E.) si scrivono prima di ogni calcolo:

- $\sqrt{A(x)}$, e in generale ogni radice di indice pari, richiede $A(x) \geq 0$ (e che $A(x)$ esista);
- $\sqrt[3]{A(x)}$, e ogni radice di indice dispari, richiede soltanto che $A(x)$ esista.

Così $\sqrt{x+2}$ esiste per $x \geq -2$; $\sqrt{4-x^2}$ per $-2 \leq x \leq 2$; $\sqrt[3]{x-5}$ per ogni x reale; $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$ dove la frazione è non negativa, cioè (con lo studio del segno) per $x < -3 \vee x \geq 1$. Il valore $x = -3$ è escluso perché annulla il denominatore, $x = 1$ è incluso perché il radicando vale 0.

Ci servirà anche un'altra proprietà: le funzioni radice sono *crescenti*. Se $0 \leq a < b$, allora $\sqrt{a} < \sqrt{b}$; con indice dispari la stessa cosa vale per ogni coppia di numeri reali.

2.1.2 Elevare a potenza i due membri

Un'equazione irrazionale, come sai, è un'equazione in cui l'incognita compare sotto il segno di radice. Per risolverla vogliamo eliminare le radici, e l'unico strumento è elevare a potenza i due membri. Chiediamoci allora quando l'**elevamento a potenza dei due membri** trasforma un'equazione in un'equazione equivalente, cioè con le stesse soluzioni.

Una direzione è sempre vera: se due numeri sono uguali, anche i loro quadrati (e i loro cubi, e ogni loro potenza) sono uguali. In simboli, $A = B \implies A^2 = B^2$. Quindi ogni soluzione dell'equazione di partenza è anche soluzione dell'equazione elevata al quadrato: elevando al quadrato *non si perde* alcuna soluzione. Il viceversa invece è falso: $(-3)^2 = 3^2$ ma $-3 \neq 3$. Infatti

$$A^2 = B^2 \iff A^2 - B^2 = 0 \iff (A-B)(A+B) = 0 \iff A = B \ \vee \ A = -B$$

Elevando al quadrato, all'equazione $A = B$ si aggiunge di nascosto l'equazione $A = -B$: le soluzioni di quest'ultima che non risolvono la prima sono soluzioni estranee, già incontrate nelle equazioni fratte. Ma se sappiamo che A e B sono *entrambi non negativi*, l'uguaglianza $A = -B$ può valere solo per $A = B = 0$, e allora non aggiunge nulla: in questo caso elevare al quadrato è un'equivalenza.

Con il cubo le cose vanno meglio. La funzione $y = x^3$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$, quindi due numeri diversi hanno cubi diversi: $A^3 = B^3$ implica $A = B$, senza condizioni di segno. Lo stesso vale per ogni esponente dispari.

IN SINTESI

Teorema. Siano A e B due espressioni nell'incognita x e sia n un numero naturale non nullo.

- **Sempre:** $A = B \implies A^n = B^n$. Ogni soluzione di $A = B$ risolve anche $A^n = B^n$.
- **Esponente dispari:** $A = B \iff A^n = B^n$. L'elevamento a potenza è un'equivalenza.
- **Esponente pari:** l'equivalenza vale *se* A e B sono entrambi non negativi per i valori di x considerati; altrimenti l'equazione elevata può avere soluzioni in più.

Per le disuguaglianze vale una regola analoga: per $a \geq 0$ e $b \geq 0$ si ha $a < b \iff a^2 < b^2$; senza la condizione di segno è falso: $-3 < 2$ ma $9 > 4$.

Tutto il capitolo è un'applicazione di questo teorema. Il metodo per risolvere un'equazione o una disequazione irrazionale si riduce a una domanda: *i due membri che sto per elevare al quadrato sono sicuramente non negativi?* Se sì, procedo; se no, devo imporlo con una condizione oppure controllare alla fine.

2.2 L'equazione $\sqrt{A(x)} = B(x)$

2.2.1 Primo metodo: elevare al quadrato e verificare

Risolviamo $\sqrt{x+2} = x$. Le C.E. sono $x \geq -2$. Eleviamo al quadrato:

$$x + 2 = x^2 \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies (x-2)(x+1) = 0 \implies x = 2 \vee x = -1$$

Entrambi i valori rispettano le C.E., ma il teorema ci avverte che l'equazione elevata al quadrato può avere soluzioni in più. Facciamo la **verifica**, cioè sostituiamo ciascun valore nell'equazione *di partenza*:

- $x = 2$: $\sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$, e il secondo membro vale 2. L'uguaglianza è vera: 2 è soluzione.
- $x = -1$: $\sqrt{-1+2} = \sqrt{1} = 1$, ma il secondo membro vale -1. L'uguaglianza è falsa: -1 è una soluzione estranea.

L'equazione ha quindi la sola soluzione $x = 2$. Da dove viene -1? Elevando al quadrato abbiamo risolto insieme $\sqrt{x+2} = x$ e $-\sqrt{x+2} = x$, e -1 risolve la seconda: $-\sqrt{1} = -1$. La Figura 2.1 lo mostra sul piano cartesiano. L'equazione $x + 2 = x^2$, cioè $y^2 = x + 2$ con $y = x$, descrive le intersezioni della retta $y = x$ con l'intera curva formata dai due rami $y = \pm\sqrt{x+2}$; solo l'intersezione sul ramo superiore risolve l'equazione data.

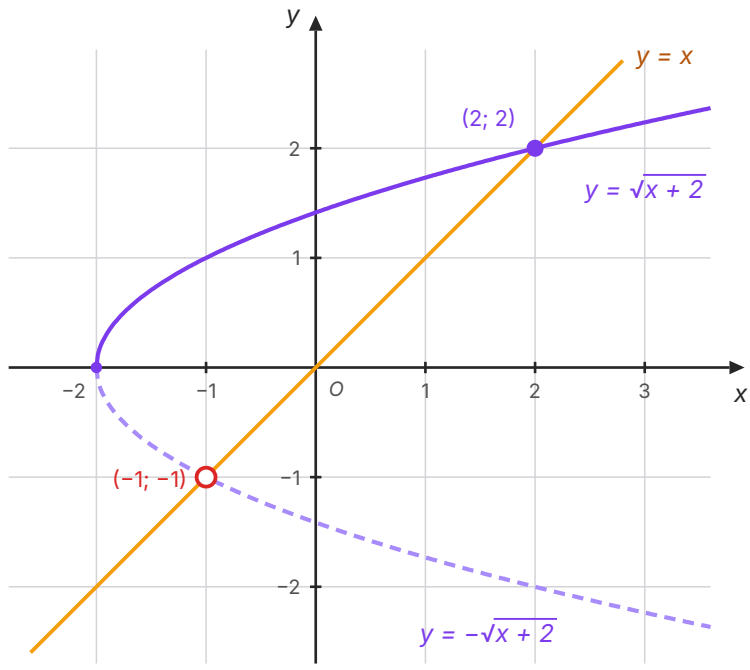


Figura 2.1 Le soluzioni di $x + 2 = x^2$ sono le ascisse delle intersezioni della retta $y = x$ con i due rami $y = \sqrt{x + 2}$ (continuo) e $y = -\sqrt{x + 2}$ (tratteggiato). Solo (2; 2) sta sul ramo superiore: $x = -1$ è una soluzione estranea. Grafici calcolati dalle equazioni, con la stessa unità sui due assi.

Il metodo della verifica è sicuro, ma ha due difetti. Se i valori trovati sono numeri irrazionali, sostituirli è laborioso; e il metodo non si estende alle disequazioni, che hanno infinite soluzioni e non si possono controllare una per una. Conviene allora un secondo metodo, che rende ogni passaggio un'equivalenza.

2.2.2 Secondo metodo: il sistema equivalente

Nell'equazione $\sqrt{A} = B$ il primo membro, se esiste, è non negativo. Allora l'uguaglianza può essere vera solo dove anche il secondo membro è non negativo: $B \geq 0$. È la **condizione di concordanza**, così chiamata perché impone ai due membri lo stesso segno. Sotto questa condizione entrambi i membri sono non negativi, e per il teorema l'elevamento al quadrato è un'equivalenza.

IN SINTESI

Teorema. Ipotesi: $A(x)$ e $B(x)$ sono espressioni dell'incognita x. **Tesi:**

$$\sqrt{A} = B \iff A = B^2 \text{ e } B \geq 0$$

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Se $\sqrt{A} = B$, allora B è uguale a una radice quadrata aritmetica, quindi $B \geq 0$; elevando al quadrato, $A = B^2$. ($\Longleftarrow$) Se $A = B^2$ e $B \geq 0$, allora $A \geq 0$ e $\sqrt{A}$ esiste; $\sqrt{A}$ è il numero non negativo il cui quadrato è A, e B è proprio un numero non negativo con $B^2 = A$: dunque $\sqrt{A} = B$. c.v.d.

Osserva che nel sistema non compare la condizione di esistenza $A \geq 0$. Non è una dimenticanza: l'equazione $A = B^2$ la garantisce da sola, perché un quadrato non è mai negativo. Scriverla non è un errore, ma è lavoro inutile. Un sistema come questo, formato da un'equazione e da una disequazione, è un sistema misto, come quelli del capitolo 1: per risolverlo si risolve l'equazione e si tengono le soluzioni che soddisfano la disequazione.

Riprendiamo $\sqrt{x+2} = x$: il sistema è $x + 2 = x^2$ e $x \geq 0$. L'equazione dà 2 e -1, la condizione scarta -1. Lo stesso risultato di prima, senza sostituzioni.

ESEMPIO SVOLTO

Risolviamo $\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 2x - 3$.

1. Condizione di concordanza. $2x - 3 \geq 0$, cioè $x \geq \frac{3}{2}$.

2. Elevamento al quadrato (equivalente sotto la condizione). Attenzione: il secondo membro è un binomio e il suo quadrato è $4x^2 - 12x + 9$, non $4x^2 + 9$.

$$x^2 - 3x + 3 = 4x^2 - 12x + 9 \implies 3x^2 - 9x + 6 = 0 \implies x^2 - 3x + 2 = 0$$

Le soluzioni sono $x = 1$ e $x = 2$.

3. Confronto con la condizione. $x = 1$ non soddisfa $x \geq \frac{3}{2}$ e si scarta; $x = 2$ la soddisfa.

Risultato: $x = 2$. Un controllo non è obbligatorio, ma costa poco: $\sqrt{4 - 6 + 3} = \sqrt{1} = 1$ e $2 \cdot 2 - 3 = 1$. Il valore scartato, invece, darebbe $\sqrt{1} = 1$ contro $2 - 3 = -1$: è la solita soluzione dell'equazione con il segno opposto.

2.2.3 Casi particolari

Alcune equazioni si risolvono quasi a vista, se si ragiona sul segno prima di calcolare.

- $\sqrt{A} = k$ con k costante: se $k < 0$ l'equazione è impossibile (una radice quadrata non è mai negativa); se $k \geq 0$ equivale ad $A = k^2$. Per esempio $\sqrt{x - 1} = -3$ non ha soluzioni, mentre $\sqrt{2x - 1} = 3$ dà $2x - 1 = 9$, $x = 5$.

- $\sqrt{A} = \sqrt{B}$: i due membri sono non negativi dove esistono, quindi l'equazione equivale ad $A = B$ con $A \geq 0$ (la condizione $B \geq 0$ segue da $B = A$).
- $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0$: una somma di numeri non negativi è nulla solo se lo sono entrambi, cioè $A = 0$ e $B = 0$ contemporaneamente.

ERRORE FREQUENTE

Elevare al quadrato e fermarsi. Chi risolve $\sqrt{x+6} = x$ scrivendo $x + 6 = x^2$, cioè $x = 3 \vee x = -2$, e dà entrambe come soluzioni, sbaglia: per $x = -2$ si ha $\sqrt{4} = 2 \neq -2$. Le C.E. ($x \geq -6$) sono rispettate, eppure -2 non va bene: *le condizioni di esistenza non bastano*, serve la condizione di concordanza $B \geq 0$ oppure la verifica.

Il quadrato del binomio. Elevando al quadrato $x - 4$ si ottiene $x^2 - 8x + 16$: il doppio prodotto non si dimentica mai.

COLLEGAMENTI

Fisica: il pendolo che batte il secondo. Per piccole oscillazioni il periodo di un pendolo semplice di lunghezza l è $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, dove $g \approx 9{,}81\ \text{m/s}^2$ è l'accelerazione di gravità. Se vogliamo $T = 2$ s dobbiamo risolvere un'equazione irrazionale nell'incognita l. Dividiamo per 2π: $\sqrt{\dfrac{l}{g}} = \dfrac{T}{2\pi}$. Il secondo membro è positivo, quindi possiamo elevare al quadrato senza altre condizioni:

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9{,}81 \cdot 4}{4\pi^2}\ \text{m} \approx 0{,}994\ \text{m}$$

Un pendolo che batte il secondo è lungo circa un metro. La stessa tecnica dà la formula inversa del tempo di caduta di un corpo lasciato cadere da fermo da un'altezza h, trascurando l'aria: da $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ segue $h = \dfrac{1}{2}gt^2$.

2.3 Altre equazioni irrazionali

2.3.1 Equazioni con due radicali

Quando i radicali sono due, come in $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = C$, un solo elevamento al quadrato non basta: il doppio prodotto $2\sqrt{A}\sqrt{B}$ porta con sé un radicale. La strategia è questa:

1. scrivere le C.E. di entrambi i radicali;
2. *isolare* un radicale in un membro (**isolamento del radicale**), in modo che il quadrato di quel membro non contenga doppi prodotti con radici;
3. elevare al quadrato, isolare il radicale rimasto ed elevare di nuovo;

4. risolvere l'equazione razionale ottenuta e fare la verifica nell'equazione di partenza.

La verifica finale è il modo più semplice per non sbagliare, perché imporre a ogni elevamento la condizione di concordanza richiederebbe di risolvere a ogni passo una disequazione irrazionale.

ESEMPIO SVOLTO

Risolviamo $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 2$.

C.E. $2x + 1 \geq 0$ e $x - 3 \geq 0$, cioè $x \geq 3$.

Isoliamo il primo radicale: $\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3}$. Il secondo membro è positivo, il primo non negativo: questo elevamento è un'equivalenza.

$$2x + 1 = 4 + 4\sqrt{x-3} + x - 3 \implies x = 4\sqrt{x-3}$$

Nelle C.E. il primo membro x è positivo: eleviamo ancora. $x^2 = 16(x-3)$, cioè $x^2 - 16x + 48 = 0$, con soluzioni $x = 4$ e $x = 12$.

Verifica. $x = 4$: $\sqrt{9} - \sqrt{1} = 3 - 1 = 2$ ✓. $x = 12$: $\sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$ ✓. Entrambi i valori sono soluzioni.

Un confronto istruttivo. L'equazione $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2$, con il segno + al posto del −, porta dopo due elevamenti alla *stessa* equazione $x^2 - 16x + 48 = 0$: ma qui né 4 né 12 la verificano (per $x = 4$ il primo membro vale 4). L'equazione è impossibile, e lo si poteva vedere subito: per $x \geq 3$ si ha $\sqrt{2x+1} \geq \sqrt{7} > 2$.

L'ultimo ragionamento suggerisce un'abitudine utile: prima di calcolare, guardare il *segno* e l'*ordine di grandezza* dei due membri. Una somma di radicali non è mai negativa; se un radicale è sempre maggiore del secondo membro, l'equazione è impossibile.

2.3.2 Equazioni con radicali di indice dispari

Per una radice cubica il teorema del primo paragrafo dà un'equivalenza senza condizioni: $\sqrt[3]{A} = B \iff A = B^3$. Non servono condizioni di esistenza né di concordanza, e non serve la verifica (che si può comunque fare come controllo dei calcoli). Risolviamo $\sqrt[3]{x^3 - 7} = x - 1$. Elevando al cubo:

$$x^3 - 7 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \implies 3x^2 - 3x - 6 = 0 \implies x^2 - x - 2 = 0$$

Le soluzioni sono $x = 2$ e $x = -1$, entrambe accettabili. Controllo: $\sqrt[3]{1} = 1 = 2 - 1$ e $\sqrt[3]{-8} = -2 = -1 - 1$. Nota che per $x = -1$ entrambi i membri sono negativi: con indice pari un valore così sarebbe stato scartato, con indice dispari è una soluzione a pieno titolo.

2.3.3 Un'incognita ausiliaria

A volte un radicale compare in più punti di un'equazione in modo regolare, e conviene sostituirlo con un'incognita ausiliaria, come per le equazioni biquadratiche. In $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$ (C.E. $x \geq 0$) poniamo $t = \sqrt{x}$, con $t \geq 0$: poiché $x = t^2$, l'equazione diventa $t^2 - 5t + 6 = 0$, con soluzioni $t = 2$ e $t = 3$, entrambe non negative. Tornando a x: $\sqrt{x} = 2$ dà $x = 4$, $\sqrt{x} = 3$ dà $x = 9$. Una soluzione negativa in t andrebbe scartata, perché $\sqrt{x}$ non può essere negativa.

ESEMPIO SVOLTO

Un problema di geometria. Un triangolo rettangolo ha un cateto di 12 cm e il perimetro di 30 cm. Quanto misura l'altro cateto?

Sia x la misura in centimetri dell'altro cateto, con $x > 0$. Per il teorema di Pitagora l'ipotenusa misura $\sqrt{x^2 + 144}$, quindi

$$x + 12 + \sqrt{x^2 + 144} = 30 \implies \sqrt{x^2 + 144} = 18 - x$$

Condizione di concordanza: $18 - x \geq 0$, cioè $x \leq 18$. Elevando al quadrato: $x^2 + 144 = 324 - 36x + x^2$, da cui $36x = 180$ e $x = 5$, che soddisfa $0 < x \leq 18$.

Il cateto misura 5 cm e l'ipotenusa $\sqrt{25 + 144} = 13$ cm; infatti $5 + 12 + 13 = 30$. Nota che i termini in x^2 si sono cancellati: l'equazione irrazionale si è ridotta a un'equazione di primo grado. Nota anche la doppia condizione: $x > 0$ viene dal problema (è una lunghezza), $x \leq 18$ dall'equazione.

2.4 Disequazioni irrazionali

Una **disequazione irrazionale** è una disequazione in cui l'incognita compare sotto il segno di radice. Qui la verifica non è possibile: le soluzioni sono di solito intervalli, infiniti numeri. Ogni passaggio deve quindi essere un'equivalenza, e l'elevamento al quadrato è lecito solo quando i due membri sono certamente non negativi. Ricaviamo i sistemi equivalenti ragionando sul segno di B: non vanno imparati a memoria, perché si ritrovano in poche righe.

2.4.1 Il caso $\sqrt{A} < B$

Se $\sqrt{A} < B$, allora $\sqrt{A}$ deve esistere ($A \geq 0$), e B è maggiore di un numero non negativo, quindi $B > 0$. Sotto queste due condizioni i due membri sono non negativi e possiamo elevare al quadrato: $A < B^2$. Viceversa, se valgono tutte e tre le condizioni, dal teorema segue $\sqrt{A} < B$. Le tre condizioni vanno messe a sistema:

$$\sqrt{A} < B \iff A \geq 0 \text{ e } B > 0 \text{ e } A < B^2$$

Qui la condizione $A \geq 0$ è indispensabile: la disuguaglianza $A < B^2$ non impedisce ad A di essere negativo. Per esempio $\sqrt{x} < 1$ equivale a $0 \leq x < 1$, non a $x < 1$. Con il segno $\leq$ si ragiona allo stesso

modo: $\sqrt{A} \le B \iff A \ge 0,\ B \ge 0,\ A \le B^2$.

ESEMPIO SVOLTO

Risolviamo $\sqrt{x+3} < x+1$.

- Esistenza: $x + 3 \ge 0$, cioè $x \ge -3$.
- Concordanza: $x + 1 > 0$, cioè $x > -1$.
- Quadrati: $x + 3 < x^2 + 2x + 1$, cioè $x^2 + x - 2 > 0$. Il trinomio ha zeri -2 e 1 ed è positivo all'esterno: $x < -2 \vee x > 1$.

Intersecando le tre condizioni (conviene un grafico con tre righe, come per ogni sistema di disequazioni) restano gli $x > 1$: le soluzioni sono l'intervallo $]1; +\infty[$.

Controllo per campioni. Sostituiamo nella disequazione di partenza qualche **valore di prova**, dentro e fuori dall'intervallo trovato. $x = 2$: $\sqrt{5} \approx 2{,}24 < 3$ ✓. $x = 0$: $\sqrt{3} \approx 1{,}73 < 1$ ✗. $x = -2{,}5$: $\sqrt{0{,}5} \approx 0{,}71 < -1{,}5$ ✗. Quest'ultimo valore soddisfa la disequazione elevata al quadrato ($x < -2$) ma non quella di partenza: senza la condizione di concordanza l'avremmo incluso per errore.

2.4.2 Il caso $\sqrt{A} > B$

Qui il segno di B può essere qualsiasi, e bisogna distinguere due casi.

- **Se $B < 0$**, la disuguaglianza è vera ovunque la radice esista, perché un numero non negativo è sempre maggiore di un numero negativo. Primo sistema: $B < 0$ e $A \ge 0$.
- **Se $B \ge 0$**, i due membri sono non negativi e possiamo elevare al quadrato. Secondo sistema: $B \ge 0$ e $A > B^2$. La condizione $A \ge 0$ è automatica, perché $A > B^2 \ge 0$.

Le soluzioni sono l'*unione* delle soluzioni dei due sistemi:

$$\sqrt{A} > B \iff (B < 0 \text{ e } A \ge 0) \vee (B \ge 0 \text{ e } A > B^2)$$

Per $\sqrt{A} \ge B$ cambia solo l'ultima disuguaglianza, che diventa $A \ge B^2$. La Figura 2.2 riassume i due ragionamenti. Applichiamolo a $\sqrt{x+2} > x$: il primo sistema, $x < 0$ e $x \ge -2$, dà $-2 \le x < 0$; il secondo, $x \ge 0$ e $x + 2 > x^2$, cioè $x \ge 0$ e $-1 < x < 2$, dà $0 \le x < 2$. L'unione è $-2 \le x < 2$, cioè l'intervallo $[-2; 2[$.

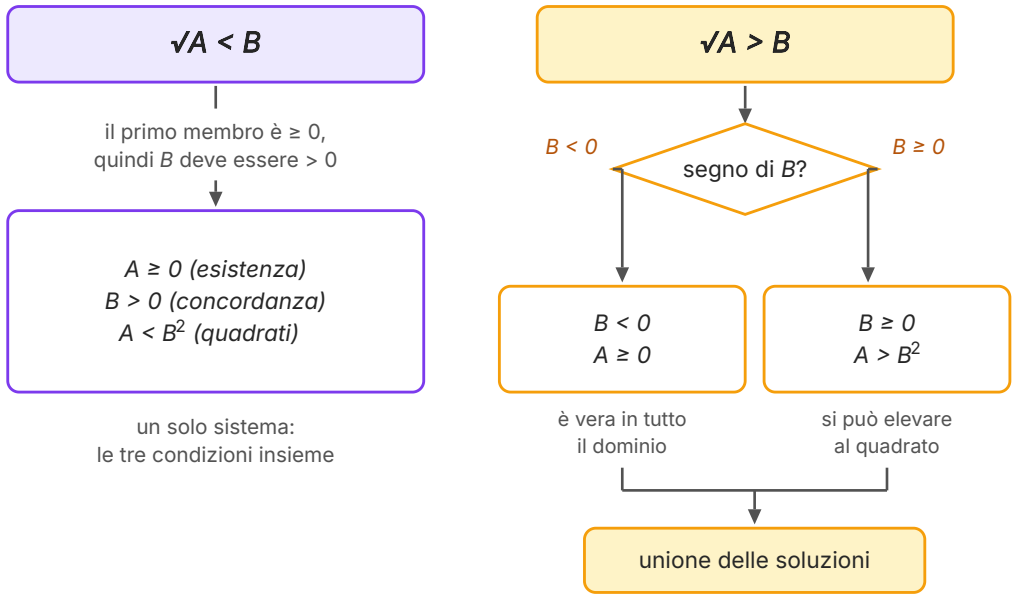


Figura 2.2 Schema di risoluzione delle disequazioni $\sqrt{A} < B$ (un sistema) e $\sqrt{A} > B$ (due sistemi, da unire). Ogni condizione nasce da una domanda sul segno dei due membri.

ERRORE FREQUENTE

«Risolvere» $\sqrt{A} > B$ elevando subito al quadrato. Con $\sqrt{x+2} > x$ si otterrebbe $x + 2 > x^2$, cioè $-1 < x < 2$: mancano tutti i valori tra -2 e -1, compresi. Eppure per $x = -1{,}5$ si ha $\sqrt{0{,}5} \approx 0{,}71 > -1{,}5$. Dove B è negativo la disequazione elevata può essere falsa anche se quella di partenza è vera: lì l'elevamento al quadrato *perde* soluzioni.

Ricorda: nella forma $\sqrt{A} < B$ l'errore tipico è *aggiungere* soluzioni (dimenticando $B > 0$ o $A \geq 0$); nella forma $\sqrt{A} > B$ è *perderle* (dimenticando il caso $B < 0$).

2.4.3 Due radicali e indice dispari

Se entrambi i membri sono radici quadrate, sono non negativi dove esistono, e l'elevamento al quadrato è sempre un'equivalenza:

$$\sqrt{A} < \sqrt{B} \iff A \geq 0 \text{ e } A < B$$

La condizione $B \geq 0$ non serve: segue da $B > A \geq 0$. Per esempio $\sqrt{x+1} < \sqrt{3-x}$ equivale a $x \geq -1$ e $x + 1 < 3 - x$, cioè $-1 \leq x < 1$. In generale va imposta l'esistenza del radicale con il radicando *minore*.

Con indice dispari, infine, non servono condizioni: la funzione $y = x^3$ è crescente, quindi $\sqrt[3]{A} < B \iff A < B^3$ e $\sqrt[3]{A} > B \iff A > B^3$. Così $\sqrt[3]{x^3+7} > x + 1$ equivale a $x^3 + 7 > x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, cioè

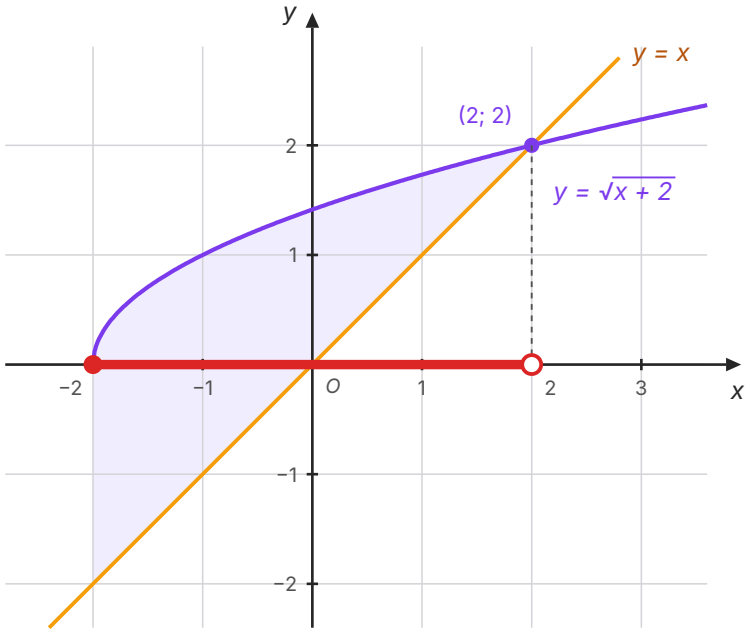
$x^2 + x - 2 < 0$, con soluzioni $-2 < x < 1$.

2.5 Interpretazione grafica

2.5.1 Una semiparabola con l'asse orizzontale

Che curva è il grafico di $y = \sqrt{x+2}$? I suoi punti hanno $y \geq 0$ e, elevando al quadrato, $y^2 = x + 2$, cioè $x = y^2 - 2$. È l'equazione di una parabola come quelle di *Matematica 2*, ma con i ruoli di x e y scambiati: l'asse di simmetria è orizzontale (la retta $y = 0$) e il vertice è $(-2; 0)$. Il grafico di $y = \sqrt{x+2}$ ne è la metà superiore, una **semiparabola**; la metà inferiore è il grafico di $y = -\sqrt{x+2}$. Studieremo le parabole con l'asse orizzontale nel capitolo 6; qui ci basta saperle disegnare per punti.

Con i grafici le disequazioni acquistano un significato visivo. Le soluzioni di $\sqrt{x+2} > x$ sono le ascisse dei punti in cui la semiparabola sta *sopra* la retta $y = x$ (Figura 2.3). Si vede subito che la curva parte da $(-2; 0)$, dove la retta è più in basso, e che le due linee si incontrano solo in $(2; 2)$: le soluzioni sono $-2 \leq x < 2$, esattamente come avevamo trovato con i due sistemi. Il grafico spiega anche il primo sistema: per $-2 \leq x < 0$ la retta sta sotto l'asse x, mentre la curva sta sopra.



Dove la curva viola sta sopra la retta:

$-2 \leq x < 2$

in (2; 2) i grafici si incontrano: 2 è escluso; a sinistra di −2 la radice non esiste.

Figura 2.3 La disequazione $\sqrt{x+2} > x$ letta sul grafico: la semiparabola $y = \sqrt{x+2}$ sta sopra la retta $y = x$ per $-2 \leq x < 2$ (regione colorata; in rosso l'intervallo delle soluzioni). Grafici calcolati dalle equazioni.

2.5.2 Una semicirconferenza

Consideriamo ora $y = \sqrt{4 - x^2}$, definita per $-2 \le x \le 2$. Elevando al quadrato: $y^2 = 4 - x^2$, cioè $x^2 + y^2 = 4$, con $y \ge 0$. Per il teorema di Pitagora, $\sqrt{x^2 + y^2}$ è la distanza del punto $(x; y)$ dall'origine: l'equazione dice che questa distanza è 2. I punti del grafico sono dunque i punti della circonferenza di centro O e raggio 2 che stanno nel semipiano $y \ge 0$: una **semicirconferenza**. Nel capitolo 7 scriveremo l'equazione di ogni circonferenza del piano.

ESEMPIO SVOLTO

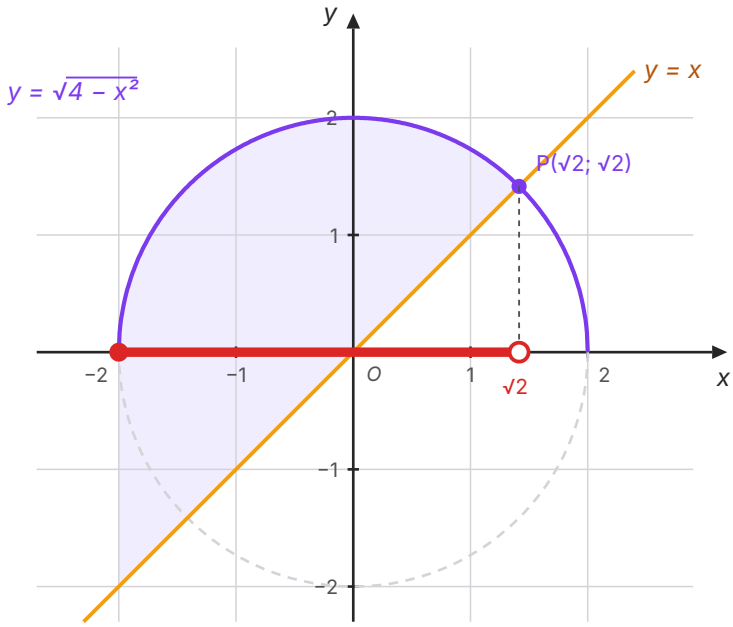
Risolviamo $\sqrt{4 - x^2} > x$ in due modi.

Algebricamente. È del tipo $\sqrt{A} > B$ con $B = x$.

- Primo sistema: $x < 0$ e $4 - x^2 \ge 0$, cioè $-2 \le x < 0$.
- Secondo sistema: $x \ge 0$ e $4 - x^2 > x^2$, cioè $x^2 < 2$, $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$; con $x \ge 0$ resta $0 \le x < \sqrt{2}$.

Unione: $-2 \le x < \sqrt{2}$.

Graficamente (Figura 2.4). La retta $y = x$ incontra la semicirconferenza nel punto P di ascissa positiva con $x = y$ e $2x^2 = 4$, cioè $P(\sqrt{2}; \sqrt{2})$. A sinistra di P l'arco sta sopra la retta, a destra sta sotto. Le soluzioni sono le ascisse da -2 (dove l'arco comincia) fino a $\sqrt{2}$ escluso: lo stesso risultato.



La semicirconferenza di centro O e raggio 2 sta sopra la retta per

$-2 \le x < \sqrt{2}$

(in grigio la metà che l'equazione non descrive)

Figura 2.4 La disequazione $\sqrt{4 - x^2} > x$: la semicirconferenza di centro O e raggio 2 sta sopra la retta $y = x$ per $-2 \le x < \sqrt{2}$. Il punto P(√2; √2) è l'unica intersezione. Curve calcolate dalle equazioni, con la stessa unità sui due assi.

Il metodo grafico è un controllo prezioso, e a volte è la via più rapida per capire *quante* soluzioni ha un'equazione. Non sostituisce però il calcolo: dal disegno si legge che l'intersezione sta tra 1 e 2, ma è il calcolo a dire che è esattamente $\sqrt{2}$. Nel prossimo paragrafo useremo il disegno proprio per questo: localizzare una soluzione che non sappiamo calcolare.

2.6 Quando non c'è una formula: soluzioni approssimate

2.6.1 Localizzare la soluzione

Consideriamo l'equazione $\sqrt{x} + x^3 = 3$. Isolando la radice ed elevando al quadrato si ottiene $x = (3 - x^3)^2$, un'equazione polinomiale di sesto grado che nessuno dei metodi di questo corso sa risolvere. Eppure la domanda «c'è una soluzione, e quanto vale?» ha una risposta precisa.

Poniamo $f(x) = \sqrt{x} + x^3 - 3$, definita per $x \ge 0$. La funzione è crescente, perché somma di due funzioni crescenti ($\sqrt{x}$ e x^3) e di una costante: quindi si annulla *al più una volta*. Inoltre $f(1) = 1 + 1 - 3 = -1 < 0$ e $f(2) = \sqrt{2} + 8 - 3 \approx 6{,}41 > 0$. Il grafico di f è una linea senza salti, che passa da sotto a sopra l'asse x tra 1 e 2: deve attraversarlo. Che una funzione come questa, il cui grafico non ha interruzioni, assuma lo zero tra due valori di segno opposto è un teorema che dimo-

strerai al quinto anno (**teorema di esistenza degli zeri**); per ora lo usiamo come fatto evidente sul grafico. L'intervallo]1; 2[è un **intervallo di separazione** della soluzione: la contiene, ed è l'unica che contiene.

2.6.2 La bisezione con errore garantito

Per stringere l'intervallo usiamo il metodo di bisezione, che conosci dai volumi precedenti: si calcola f nel punto medio m dell'intervallo e si tiene la metà in cui f cambia ancora segno. La Tabella 2.1 riporta i primi sette passi, la Figura 2.5 li mostra sulla retta.

Tabella 2.1 Sette passi di bisezione per $f(x) = \sqrt{x} + x^3 - 3$ a partire da [1; 2]. I valori di $f(m)$ sono arrotondati a tre decimali; gli estremi degli intervalli sono esatti.

n	a	b	m	$f(m)$	nuovo intervallo
1	1	2	1,5	1,600	[1; 1,5]
2	1	1,5	1,25	0,071	[1; 1,25]
3	1	1,25	1,125	−0,516	[1,125; 1,25]
4	1,125	1,25	1,1875	−0,236	[1,1875; 1,25]
5	1,1875	1,25	1,21875	−0,086	[1,21875; 1,25]
6	1,21875	1,25	1,234375	−0,008	[1,234375; 1,25]
7	1,234375	1,25	1,2421875	0,031	[1,234375; 1,2421875]

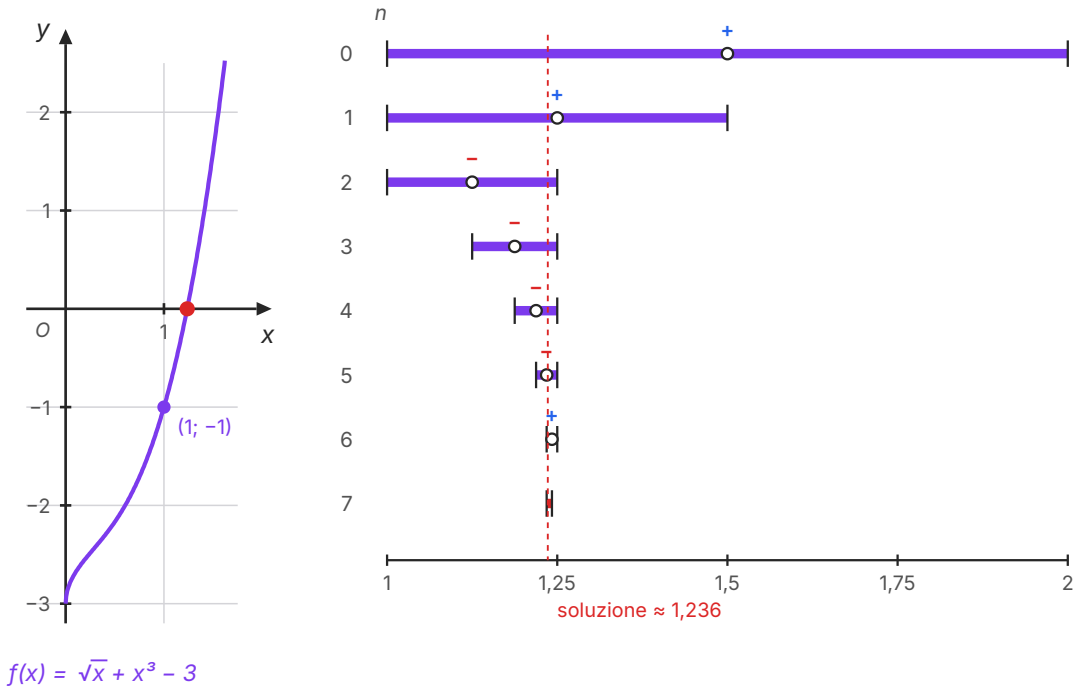


Figura 2.5 A sinistra, il grafico di $f(x) = \sqrt{x} + x^3 - 3$, calcolato dall'equazione: attraversa l'asse x una sola volta, tra 1 e 2. A destra, gli intervalli della bisezione: la riga n mostra l'intervallo ottenuto dopo n passi, e il segno di f nel suo punto medio (cerchietto) decide quale metà tenere al passo successivo. L'ultimo intervallo, in rosso, ha ampiezza 1/128.

L'**ampiezza** di un intervallo è la differenza tra i suoi estremi. Partendo da [1; 2], di ampiezza 1, dopo n passi l'ampiezza è $\frac{1}{2^n}$, e la soluzione sta sempre all'interno. Dopo sette passi sappiamo che

$$1{,}234375 < x < 1{,}2421875$$

Se diamo come valore approssimato $x \approx 1{,}24$, l'errore è al massimo la distanza di 1,24 dall'estremo più lontano, cioè $1{,}24 - 1{,}234375 = 0{,}005625$: meno di sei millesimi, e lo possiamo *garantire* senza conoscere il valore esatto. In generale, se si prende come approssimazione il punto medio dell'ultimo intervallo, l'**errore massimo** è metà della sua ampiezza: dopo n passi a partire da un intervallo di ampiezza L, è $\frac{L}{2^{n+1}}$.

Questa formula permette di decidere in anticipo quanti passi servono. Per avere un errore minore di 10^{-3} partendo da [1; 2] bisogna che $2^{n+1} > 1000$; poiché $2^{10} = 1024$, bastano $n = 9$ passi. Per ogni cifra decimale in più servono poco più di tre passi, perché $2^3 = 8$ e $2^4 = 16$ stanno a ca-

vallo di 10. Proseguendo con un foglio di calcolo si trova $x \approx 1{,}2360$, con tutte le cifre scritte esatte.

IN SINTESI

Risolvere in modo approssimato un'equazione $f(x) = 0$ significa:

1. **localizzare** la soluzione (**localizzazione**) in un intervallo di separazione, per esempio con un grafico, controllando che f abbia segni opposti agli estremi e che non ci siano altre soluzioni (per esempio perché f è crescente);
2. **restringere** l'intervallo, per esempio con la bisezione;
3. **dichiarare l'errore**: un valore approssimato senza una stima dell'errore non è un risultato.

Una **soluzione approssimata** è un numero che differisce dalla soluzione esatta meno di un errore massimo dichiarato.

È un cambiamento di prospettiva importante. Per gli antichi e per gran parte della matematica che hai studiato finora, risolvere un'equazione voleva dire trovare una formula: $x = 2$, $x = \sqrt{2}$, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Ma le equazioni dei problemi reali raramente hanno una formula risolutiva, e anche quando ce l'hanno, per usarla dobbiamo comunque approssimare le radici che contiene. Ciò che conta è sapere che la soluzione esiste, quante sono, e conoscerla con la precisione che serve. Le calcolatrici e i programmi di calcolo risolvono le equazioni proprio così, con algoritmi più veloci della bisezione ma basati sulla stessa idea.

APPROFONDIMENTO · PERCHÉ ELEVARE AL QUADRATO AGGIUNGE SOLUZIONI

Il teorema del primo paragrafo ha un significato geometrico che chiarisce tutto il capitolo. Elevando al quadrato $\sqrt{x+2} = x$ si ottiene $x + 2 = x^2$, e questa equazione non distingue tra $y = \sqrt{x+2}$ e $y = -\sqrt{x+2}$: nel piano descrive l'intera parabola $y^2 = x + 2$, entrambi i rami. Ogni elevamento al quadrato «dimentica un segno», cioè sostituisce una curva con la curva unita alla sua simmetrica.

Con due radicali i segni dimenticati sono due. Le quattro equazioni $\pm\sqrt{2x+1} \pm \sqrt{x-3} = 2$ portano, dopo due elevamenti, alla stessa equazione $x^2 - 16x + 48 = 0$: le soluzioni 4 e 12 appartengono a quella con i segni +, − (lo abbiamo verificato); le altre tre combinazioni di segni, compresa quella con +, +, non ne hanno nessuna. Per questo la verifica, o un controllo sui segni, è parte del metodo, non una formalità.

La stessa idea spiega perché le radici di indice dispari non creano problemi: $y = x^3$ è una funzione iniettiva, e il cubo non dimentica alcun segno.

SINTESI

- Un radicale di indice pari esiste se il radicando è ≥ 0; uno di indice dispari esiste per ogni radicando. Le C.E. si scrivono prima di risolvere.
- Elevare a potenza i due membri non fa perdere soluzioni di un'equazione. Con esponente dispari è un'equivalenza; con esponente pari lo è solo se i due membri sono non negativi.
- Elevando al quadrato $A = B$ si risolve anche $A = -B$: possono comparire soluzioni estranee.
- $\sqrt{A} = B \iff A = B^2$ e $B \geq 0$: la condizione di concordanza sostituisce la verifica; $A \geq 0$ è automatica.
- Con due radicali si isola un radicale, si eleva due volte e si verifica nell'equazione di partenza.
- Con indice dispari: $\sqrt[3]{A} = B \iff A = B^3$, senza condizioni e senza verifica.
- $\sqrt{A} < B \iff A \geq 0,\ B > 0,\ A < B^2$ (un solo sistema).
- $\sqrt{A} > B \iff (B < 0,\ A \geq 0) \vee (B \geq 0,\ A > B^2)$ (unione di due sistemi).
- $\sqrt{A} < \sqrt{B} \iff A \geq 0,\ A < B$; con indice dispari si eleva al cubo senza condizioni.
- $y = \sqrt{x + 2}$ è una semiparabola con l'asse orizzontale, $y = \sqrt{4 - x^2}$ una semicirconferenza: i grafici permettono di leggere e controllare le soluzioni.
- Se un'equazione non ha un metodo algebrico, la si risolve in modo approssimato: si localizza la soluzione, la si stringe (bisezione) e si dichiara l'errore massimo, $L/2^{n+1}$ dopo n passi.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Le condizioni di esistenza di $\sqrt{6 - 2x}$ sono:

   A. $x \geq 3$

   B. $x \leq 3$

   C. $x \leq -3$

   D. nessuna: il radicale esiste per ogni x

2. ● L'equazione $\sqrt{x - 4} = -2$:

   A. ha la soluzione $x = 8$

   B. ha la soluzione $x = 0$

   C. ha le soluzioni $x = 0$ e $x = 8$

   D. non ha soluzioni

3. ● L'equazione $\sqrt{A} = B$ è equivalente a:

   A. $A = B^2$ e $B \geq 0$

   B. $A = B^2$ e $A \geq 0$

   C. $A = B^2$

   D. $A = B$ e $B \geq 0$

4. ●● La disequazione $\sqrt{2 - x} < x$ è equivalente al sistema:

   A. $2 - x < x^2$

   B. $x > 0$ e $2 - x < x^2$

   C. $2 - x \geq 0$, $x > 0$ e $2 - x < x^2$

   D. $2 - x \geq 0$ e $2 - x < x^2$

5. ●● Per risolvere $\sqrt[3]{A} = B$:

   A. bisogna imporre $A \geq 0$

   B. bisogna imporre $B \geq 0$

   C. bisogna verificare le soluzioni trovate

   D. basta risolvere $A = B^3$

6. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Elevando al quadrato i due membri di un'equazione si ottiene sempre un'equazione equivalente. b) $\sqrt{x^2} = x$ per ogni x reale. c) L'equazione $\sqrt{x - 3} + \sqrt{5 - x} = -1$ non ha soluzioni. d) Se $a < b$, allora $a^2 < b^2$.

7. ● Completa. Nell'equazione $\sqrt{A} = B$ la condizione $B \geq 0$ si chiama condizione di _____. La condizione $A \geq 0$ non va scritta perché _____. In una disequazione si possono elevare al quadrato i due membri, ottenendo una disequazione equivalente con lo stesso verso, solo se _____.

8. ● Senza svolgere calcoli, stabilisci quali equazioni sono impossibili e spiega perché: a) $\sqrt{x - 1} = -3$; b) $\sqrt{x + 2} + \sqrt{x^2 + 1} = 0$; c) $\sqrt{x^2 + 4} = 1$; d) $\sqrt[3]{x - 2} = -3$.

Calcolare

9. ● Scrivi le condizioni di esistenza: a) $\sqrt{x^2 - 9}$; b) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x - 2}}$; c) $\sqrt{\dfrac{x + 1}{2 - x}}$; d) $\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{x - 1}$.

10. ● Risolvi: a) $\sqrt{2x - 1} = 3$; b) $\sqrt{x^2 - 7} = 3$; c) $\sqrt{5 - x} = \sqrt{2x - 1}$; d) $\sqrt{x + 3} = -1$.

11. ●● Risolvi elevando al quadrato e verificando le soluzioni: a) $\sqrt{x + 6} = x$; b) $\sqrt{3x + 10} = x + 2$; c) $\sqrt{x^2 - 5} = x - 1$.

12. ●● Risolvi con il sistema equivalente: a) $\sqrt{2x^2 + x - 1} = x + 1$; b) $2\sqrt{x + 1} = x - 2$; c) $\sqrt{4 - x} = x - 4$.

13. ●● Risolvi le equazioni con due radicali: a) $\sqrt{x + 5} = 1 + \sqrt{x}$; b) $\sqrt{x + 3} + \sqrt{x - 2} = 5$; c) $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x - 3} = 2$.

14. ●● Risolvi: a) $\sqrt[3]{x - 1} = 2$; b) $\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 4} = x + 1$; c) $\sqrt[3]{x^2 - 1} = x - 1$.

15. ●● Risolvi con un'incognita ausiliaria: a) $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$; b) $x + 2\sqrt{x} - 8 = 0$.

16. ●● Risolvi: a) $\sqrt{x-1} < 3$; b) $\sqrt{x+7} < x + 1$; c) $\sqrt{x^2 - 4x} \le x - 2$.

17. ●● Risolvi: a) $\sqrt{x+4} > x - 2$; b) $\sqrt{x^2 - 1} \ge x + 2$; c) $\sqrt{9 - x^2} > x - 3$.

18. ●● Risolvi: a) $\sqrt{2x-1} < \sqrt{x+2}$; b) $\sqrt{x^2 - 3x} \ge \sqrt{x+5}$; c) $\sqrt[3]{x-2} < x - 2$.

19. ●● Risolvi la disequazione fratta $\dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 3} \ge 0$, studiando separatamente il segno del numeratore e del denominatore.

20. ●● Disegna nello stesso piano cartesiano i grafici di $y = \sqrt{x+1}$ (per punti) e $y = x - 1$. Usa il disegno per prevedere le soluzioni di $\sqrt{x+1} \ge x - 1$, poi confermale algebricamente.

Dimostrare e argomentare

21. ●● *Trova l'errore.* Luca risolve $\sqrt{x+1} = x - 5$ così: «$x + 1 = x^2 - 10x + 25$, $x^2 - 11x + 24 = 0$, quindi $x = 3$ oppure $x = 8$. Le C.E. $x \ge -1$ sono rispettate: S = {3; 8}». Dov'è l'errore? Qual è la soluzione corretta?

22. ●● *Trova l'errore.* Sara risolve $\sqrt{x+5} > x - 1$ elevando al quadrato: $x + 5 > x^2 - 2x + 1$, cioè $-1 < x < 4$. Mostra con un valore di prova che ha perso delle soluzioni, spiega perché e risolvi correttamente.

23. ●● Dimostra che, se $a \ge 0$ e $b \ge 0$, allora $a < b \iff a^2 < b^2$. *Suggerimento:* scomponi $b^2 - a^2$.

24. ●● Spiega perché nel sistema equivalente a $\sqrt{A} = B$ la condizione $A \ge 0$ è superflua, mentre in quello equivalente a $\sqrt{A} < B$ è indispensabile. Fai un esempio in cui dimenticarla porta a un risultato sbagliato.

25. ●● Dimostra, senza risolverla, che l'equazione $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 1$ non ha soluzioni.

Problemi

26. ● Il periodo di un pendolo semplice, per piccole oscillazioni, è $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, con $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$. a) Calcola il periodo di un pendolo lungo 1,00 m. b) Quanto deve essere lungo un pendolo per avere un periodo di 1,5 s? Arrotonda al millimetro.

27. ● Un corpo lasciato cadere da fermo da un'altezza h, trascurando la resistenza dell'aria, arriva a terra con velocità $v = \sqrt{2gh}$ ($g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$). Un pacco si danneggia se arriva a terra a più di 6 m/s: da quale altezza massima può cadere? Imposta e risolvi una disequazione irrazionale e arrotonda al centimetro.

28. ●● Una scala lunga 5 m è appoggiata a un muro verticale. La sua base dista x metri dal muro e la sommità tocca il muro a un'altezza che supera di 1 m la distanza della base. Scrivi un'equazione irrazionale nell'incognita x e risolvila.

29. ●● In un triangolo rettangolo un cateto misura 8 cm e la somma dell'altro cateto e dell'ipotenusa è 32 cm. Determina le misure dei lati, impostando un'equazione irrazionale.

30. ●● Sull'asse x trova il punto P(x; 0) la cui distanza dal punto A(2; 4) è uguale a $x + 2$. Spiega perché il problema richiede $x \geq -2$.

31. ●●● Un sasso lasciato cadere da fermo in un pozzo arriva in fondo dopo $\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ secondi, e il suono del tonfo risale alla velocità di 340 m/s. Il tonfo si sente 3,0 s dopo aver lasciato il sasso. a) Scrivi l'equazione nell'incognita h e la condizione di concordanza. b) Risolvila ($g = 9{,}81$ m/s^2) e scarta la soluzione estranea. c) Di quanto si sbaglierebbe trascurando il tempo del suono?

Verso la verifica

32. ●● Risolvi $\sqrt{x^2 - x + 7} = 2x - 1$.

33. ●● Risolvi $\sqrt{x^2 - 5x + 4} < x - 2$ e controlla il risultato con un valore di prova in ciascun intervallo.

34. ●● Considera l'equazione $x + \sqrt{x} = 1$. a) Risolvila esattamente con un'incognita ausiliaria. b) Applica tre passi di bisezione a partire dall'intervallo [0; 1] e verifica che l'ultimo intervallo contiene la soluzione esatta. c) Qual è l'errore massimo garantito dopo tre passi, prendendo il punto medio dell'ultimo intervallo?

35. ●●● *Sfida.* Al variare del numero reale k, quante soluzioni ha l'equazione $\sqrt{x + 2} = x + k$? Ragiona sul grafico, confrontando la semiparabola $y = \sqrt{x + 2}$ con le rette parallele $y = x + k$: trova la retta che passa per il vertice (−2; 0) e quella tangente alla semiparabola (imponi che l'equazione di secondo grado ottenuta elevando al quadrato abbia discriminante nullo).

PER APPROFONDIRE

- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: impostare l'equazione di un problema e, alla fine, controllare il risultato, l'abitudine che in questo capitolo ha la forma della verifica.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le funzioni continue e l'esistenza delle soluzioni di un'equazione, il fondamento della bisezione.

Glossario del capitolo

Ampiezza (di un intervallo)
Differenza $b - a$ tra gli estremi dell'intervallo $[a; b]$; nella bisezione si dimezza a ogni passo.

Condizione di concordanza
Nell'equazione $\sqrt{A} = B$, la condizione $B \geq 0$, che impone ai due membri lo stesso segno e rende equivalente l'elevamento al quadrato.

Disequazione irrazionale
Disequazione in cui l'incognita compare sotto il segno di radice; si risolve con sistemi equivalenti, perché la verifica non è possibile.

Elevamento a potenza dei due membri
Trasformazione che sostituisce $A = B$ con $A^n = B^n$; non perde soluzioni, è un'equivalenza per n dispari, e per n pari solo se i due membri sono non negativi.

Errore massimo
Limite superiore garantito della distanza tra un valore approssimato e il valore esatto; nella bisezione, preso il punto medio, è metà dell'ampiezza dell'ultimo intervallo.

Intervallo di separazione
Intervallo che contiene una e una sola soluzione di un'equazione.

Isolamento del radicale
Passaggio che lascia un solo radicale in un membro prima di elevare al quadrato, così che il quadrato non contenga doppi prodotti con radici.

Localizzazione
Ricerca di un intervallo di separazione per una soluzione, per esempio da un grafico e dal segno della funzione agli estremi.

Semicirconferenza
Metà di una circonferenza delimitata da un diametro, come il grafico di $y = \sqrt{4 - x^2}$ (centro O, raggio 2, $y \geq 0$).

Semiparabola
Metà di una parabola rispetto al suo asse, come il grafico di $y = \sqrt{x + 2}$, metà superiore della parabola $x = y^2 - 2$.

Soluzione approssimata
Numero che differisce dalla soluzione esatta di un'equazione meno di un errore massimo dichiarato.

Teorema di esistenza degli zeri
Se il grafico di f su $[a; b]$ è una linea senza interruzioni e $f(a)$, $f(b)$ hanno segni opposti, f si annulla in almeno un punto di $]a; b[$; si dimostra al quinto anno.

Valore di prova
Valore dell'incognita sostituito in una disequazione per controllare se un intervallo appartiene o no all'insieme delle soluzioni.

Verifica
Sostituzione dei valori trovati nell'equazione di partenza, per scartare le soluzioni estranee introdotte da un elevamento al quadrato.

Soluzioni

1. B. Indice pari: $6 - 2x \geq 0$, cioè $x \leq 3$.

2. D. Una radice quadrata non è mai negativa. Elevando al quadrato si troverebbe $x = 8$, che però dà $\sqrt{4} = 2 \neq -2$.

3. A. È il sistema con la condizione di concordanza; $A \geq 0$ è implicata da $A = B^2$.

4. C. Servono esistenza ($2 - x \geq 0$), concordanza ($x > 0$) e disuguaglianza dei quadrati ($x^2 + x - 2 > 0$, cioè $x < -2 \vee x > 1$): le soluzioni sono $1 < x \leq 2$. Senza l'esistenza (B) si accetterebbe $x = 3$, dove la radice non esiste; senza la concordanza (D) si accetterebbe $x = -3$, per cui $\sqrt{5} < -3$ è falso; con i soli quadrati (A) si sbaglia in entrambi i modi.

5. D. Il cubo è un'equivalenza: nessuna condizione e nessuna verifica.

6. a) Falso: si possono aggiungere soluzioni; l'equivalenza vale se i due membri sono non negativi (o con esponente dispari). b) Falso: $\sqrt{x^2} = |x|$; per $x = -2$ il primo membro vale 2. c) Vero: una somma di radici quadrate non è mai negativa. d) Falso: $-3 < 2$ ma $9 > 4$; è vero se $a \geq 0$ e $b \geq 0$.

7. Concordanza; $A = B^2$ e un quadrato non è mai negativo; entrambi i membri sono non negativi.

8. a) Impossibile: una radice quadrata non è negativa. b) Impossibile: $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$, quindi la somma è almeno 1. c) Impossibile: $x^2 + 4 \geq 4$, quindi il primo membro è almeno 2. d) Possibile: indice dispari, $x - 2 = -27$, $x = -25$.

9. a) $x \leq -3 \vee x \geq 3$. b) $x \neq 2$ (indice dispari: basta che la frazione esista). c) $-1 \leq x < 2$. d) $-2 \leq x \leq 2$ e $x \geq 1$, cioè $1 \leq x \leq 2$.

10. a) $2x - 1 = 9$, $x = 5$. b) $x^2 - 7 = 9$, $x = \pm 4$. c) $5 - x = 2x - 1$, $x = 2$, con radicando $5 - 2 = 3 \geq 0$: $x = 2$. d) Impossibile.

11. a) $x^2 - x - 6 = 0$, $x = 3 \vee x = -2$; verifica: $\sqrt{9} = 3$ ✓, $\sqrt{4} = 2 \neq -2$ ✗. Soluzione $x = 3$. b) $x^2 + x - 6 = 0$, $x = 2 \vee x = -3$; verifica: $\sqrt{16} = 4$ ✓, $\sqrt{1} = 1 \neq -1$ ✗. Soluzione $x = 2$. c) $x^2 - 5 = x^2 - 2x + 1$, $x = 3$; verifica $\sqrt{4} = 2$ ✓.

12. a) Concordanza $x \geq -1$; $x^2 - x - 2 = 0$, $x = -1 \vee x = 2$, entrambe accettabili (per $x = -1$ i due membri valgono 0). b) $x \geq 2$; $4x + 4 = x^2 - 4x + 4$, $x^2 - 8x = 0$, $x = 0 \vee x = 8$: solo $x = 8$. c) $x \geq 4$; $4 - x = (x - 4)^2$, $(x - 4)(x - 3) = 0$: solo $x = 4$.

13. a) C.E. $x \geq 0$; $x + 5 = 1 + 2\sqrt{x} + x$, $\sqrt{x} = 2$, $x = 4$; verifica $\sqrt{9} = 3 = 1 + 2$ ✓. b) C.E. $x \geq 2$; $\sqrt{x + 3} = 5 - \sqrt{x - 2}$, $x + 3 = 25 - 10\sqrt{x - 2} + x - 2$, $\sqrt{x - 2} = 2$, $x = 6$; verifica $3 + 2 = 5$ ✓. c) Impossibile: per $x \geq 3$ il primo membro è almeno $\sqrt{7} > 2$; i valori 4 e 12 che si ottengono elevando al quadrato non verificano l'equazione.

14. a) $x - 1 = 8$, $x = 9$. b) $x^3 + 3x^2 - 4 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $3x = -5$, $x = -\frac{5}{3}$. c) $x^2 - 1 = (x - 1)^3$, $(x - 1)[(x - 1)^2 - (x + 1)] = 0$, $(x - 1)(x^2 - 3x) = 0$: $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$, tutte accettabili.

15. a) $t = \sqrt{x} \geq 0$: $t^2 - 3t - 4 = 0$, $t = 4$ ($t = -1$ si scarta), $x = 16$. b) $t^2 + 2t - 8 = 0$, $t = 2$ ($t = -4$ si scarta), $x = 4$.

16. a) $x \geq 1$ e $x - 1 < 9$: $1 \leq x < 10$. b) $x \geq -7$, $x > -1$, $x^2 + x - 6 > 0$ ($x < -3 \vee x > 2$): $x > 2$. c) $x \leq 0 \vee x \geq 4$, $x \geq 2$, $x^2 - 4x \leq x^2 - 4x + 4$ (sempre vera): $x \geq 4$.

17. a) $x - 2 < 0$ e $x \geq -4$: $-4 \leq x < 2$; $x \geq 2$ e $x + 4 > x^2 - 4x + 4$ ($0 < x < 5$): $2 \leq x < 5$. Unione $-4 \leq x < 5$. b) $x < -2$ e $x^2 \geq 1$: $x < -2$; $x \geq -2$ e $x^2 - 1 \geq x^2 + 4x + 4$ ($x \leq -\frac{5}{4}$): $-2 \leq x \leq -\frac{5}{4}$. Unione $x \leq -\frac{5}{4}$. c) $x < 3$ e $-3 \leq x \leq 3$: $-3 \leq x < 3$; $x \geq 3$ e $9 - x^2 > (x - 3)^2$, cioè $0 < x < 3$: nessuna soluzione. Risultato $-3 \leq x < 3$.

18. a) $x \geq \frac{1}{2}$ e $2x - 1 < x + 2$: $\frac{1}{2} \leq x < 3$. b) Si impone l'esistenza del radicando minore: $x \geq -5$ e $x^2 - 3x \geq x + 5$, cioè $x^2 - 4x - 5 \geq 0$ ($x \leq -1 \vee x \geq 5$): $-5 \leq x \leq -1 \vee x \geq 5$. c) Con $t = x - 2$: $t < t^3$, $t(t - 1)(t + 1) > 0$, $-1 < t < 0 \vee t > 1$: $1 < x < 2 \vee x > 3$.

19. C.E. $x \geq -3$, $x \neq 3$. Numeratore ≥ 0: $\sqrt{x+3} \geq 2 \iff x \geq 1$ (nullo per $x = 1$). Denominatore positivo per $x > 3$. Segno: positivo in $[-3; 1[$, nullo in 1, negativo in $]1; 3[$, positivo per $x > 3$. Soluzioni $-3 \leq x \leq 1 \vee x > 3$.

20. La semiparabola parte da $(-1; 0)$ e incontra la retta in $(3; 2)$; per $-1 \leq x \leq 3$ sta sopra la retta o la tocca. Algebricamente: $x < 1$ e $x \geq -1$ dà $-1 \leq x < 1$; $x \geq 1$ e $x^2 - 3x \leq 0$ dà $1 \leq x \leq 3$. Soluzioni $-1 \leq x \leq 3$.

21. Luca non ha imposto la condizione di concordanza $x - 5 \geq 0$ né ha fatto la verifica: per $x = 3$ si ha $\sqrt{4} = 2$ e $3 - 5 = -2$. La soluzione è solo $x = 8$ ($\sqrt{9} = 3 = 8 - 5$).

22. Per $x = -2$: $\sqrt{3} \approx 1{,}73 > -3$, vera, ma -2 non sta in $]-1; 4[$. Dove $x - 1 < 0$ la disequazione di partenza è sempre vera, mentre quella elevata al quadrato può essere falsa. Correttamente: $x < 1$ e $x \geq -5$ dà $-5 \leq x < 1$; $x \geq 1$ e $-1 < x < 4$ dà $1 \leq x < 4$. Soluzioni $-5 \leq x < 4$.

23. *Traccia.* $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$. ($\Longrightarrow$) Se $0 \leq a < b$, allora $b - a > 0$ e $b + a > 0$, quindi $b^2 - a^2 > 0$. ($\Longleftarrow$) Se $a^2 < b^2$, il prodotto è positivo; $b + a \geq 0$ e non può essere 0 (altrimenti $a = b = 0$ e il prodotto sarebbe nullo), quindi $b + a > 0$ e allora $b - a > 0$. c.v.d.

24. Nel primo caso $A = B^2 \geq 0$: l'esistenza della radice è garantita dall'equazione. Nel secondo, $A < B^2$ non impedisce ad A di essere negativo. Esempio: $\sqrt{x} < 1$ senza la condizione darebbe $x < 1$, che comprende $x = -4$, dove $\sqrt{x}$ non esiste; la soluzione corretta è $0 \leq x < 1$.

25. Le C.E. sono $x \geq -1$. Allora $x + 6 \geq 5$, quindi $\sqrt{x+6} \geq \sqrt{5} > 2$, e $\sqrt{x+1} \geq 0$: il primo membro è maggiore di 2, mai uguale a 1.

26. a) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{1{,}00}{9{,}81}} \approx 2{,}01$ s. b) $l = \dfrac{gT^2}{4\pi^2} = \dfrac{9{,}81 \cdot 2{,}25}{4\pi^2} \approx 0{,}559$ m.

27. $\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot h} \leq 6$ con $h \geq 0$: i due membri sono non negativi, quindi $19{,}62\,h \leq 36$, $h \leq 1{,}834\ldots$ m. Altezza massima circa 1,83 m (arrotondando per difetto, per sicurezza).

28. Altezza $\sqrt{25 - x^2}$, quindi $\sqrt{25 - x^2} = x + 1$ con $0 < x < 5$. Elevando: $25 - x^2 = x^2 + 2x + 1$, $x^2 + x - 12 = 0$, $x = 3$ ($x = -4$ si scarta). La base dista 3 m dal muro, la sommità è a 4 m.

29. $x + \sqrt{x^2 + 64} = 32$, $\sqrt{x^2 + 64} = 32 - x$ con $0 < x \leq 32$: $x^2 + 64 = 1024 - 64x + x^2$, $x = 15$. I lati misurano 8 cm, 15 cm, 17 cm.

30. $\sqrt{(x-2)^2 + 16} = x + 2$: una distanza non è negativa, quindi serve $x + 2 \geq 0$. Elevando: $x^2 - 4x + 20 = x^2 + 4x + 4$, $x = 2$, accettabile. P(2; 0), con PA = 4 = 2 + 2.

31. a) $\sqrt{\dfrac{2h}{9{,}81}} = 3 - \dfrac{h}{340}$, con la condizione $3 - \dfrac{h}{340} \geq 0$, cioè $h \leq 1020$ m. b) Elevando al quadrato e moltiplicando per $340^2 = 115\,600$: $h^2 - 25\,607{,}8\,h + 1\,040\,400 = 0$ (coefficiente arrotondato), con soluzioni $h \approx 40{,}7$ m e $h \approx 25\,567$ m; la seconda viola la condizione. Profondità circa 40,7 m. c) Trascurando il suono: $h = \dfrac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 3^2 \approx 44{,}1$ m, circa 3,5 m in più.

32. Concordanza $x \geq \dfrac{1}{2}$; $x^2 - x + 7 = 4x^2 - 4x + 1$, $x^2 - x - 2 = 0$, $x = 2 \vee x = -1$: solo $x = 2$ ($\sqrt{9} = 3 = 2 \cdot 2 - 1$).

33. Esistenza $x \leq 1 \vee x \geq 4$; concordanza $x > 2$; quadrati $x^2 - 5x + 4 < x^2 - 4x + 4$, cioè $x > 0$. Soluzioni $x \geq 4$. Prove: $x = 5$: $2 < 3$ ✓; $x = 3$: la radice non esiste; $x = 0$: $2 < -2$ ✗.

34. a) $t = \sqrt{x} \geq 0$: $t^2 + t - 1 = 0$, $t = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$ (l'altra è negativa), $x = t^2 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0{,}382$. b) Con $f(x) = x + \sqrt{x} - 1$: $f(0{,}5) \approx 0{,}207 > 0 \to [0; 0{,}5]$; $f(0{,}25) = -0{,}25 < 0 \to [0{,}25; 0{,}5]$; $f(0{,}375) \approx -0{,}013 < 0 \to [0{,}375; 0{,}5]$, che contiene 0,382. c) Punto medio 0,4375, errore massimo $\dfrac{1}{2^4} = 0{,}0625$.

35. Elevando al quadrato (con $x + k \geq 0$): $x^2 + (2k - 1)x + k^2 - 2 = 0$, con $\Delta = 9 - 4k$. La retta è tangente per $k = \dfrac{9}{4}$ (punto di contatto $x = -\dfrac{7}{4}$) e passa per il vertice $(-2; 0)$ per $k = 2$. Quindi: per $k > \dfrac{9}{4}$ nessuna soluzione; per $k = \dfrac{9}{4}$ una; per

$2 \le k < \frac{9}{4}$ due (per $k = 2$: $x = -2$ e $x = -1$); per $k < 2$ una sola.