CAPITOLO

1

Disequazioni e valore assoluto

Il valore assoluto dimentica la direzione e ricorda soltanto la distanza: per questo è la lingua delle tolleranze e degli errori. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Risolvere disequazioni intere, fratte e sistemi con la tabella dei segni, distinguendo intersezione e unione delle soluzioni.
2. Usare la definizione per casi e il significato di distanza del valore assoluto; dimostrare la disuguaglianza triangolare.
3. Risolvere equazioni $|A(x)| = B(x)$ e con più valori assoluti, con le condizioni e con il metodo degli intervalli.
4. Risolvere disequazioni con valore assoluto nelle forme $|A| < B$, $|A| > B$, $|A| < |B|$ e con più valori assoluti, giustificando ogni passaggio.
5. Costruire i grafici di $y = |f(x)|$ e $y = f(|x|)$ e discutere graficamente il numero delle soluzioni di un'equazione al variare di un parametro.
6. Tradurre in disequazioni con valore assoluto problemi di tolleranze, errori e distanze.

INDICE DEL CAPITOLO

1.1 Le disequazioni: un richiamo 2
1.2 Il valore assoluto e le sue proprietà 3
1.3 Equazioni con valore assoluto 6
1.4 Disequazioni con valore assoluto 9
1.5 La lettura grafica 11
1.6 Problemi con il valore assoluto 14

Matematica 3 · Parte I · Equazioni, funzioni e successioni · versione 1.0
Capitolo 1: Disequazioni e valore assoluto · pagine 23–42 del volume completo · estratto per lo studio

Una ditta produce perni che devono misurare 25 mm, ma nessuna macchina taglia un pezzo esattamente a 25 mm: il progetto dice «25 mm ± 0,2 mm». Un perno di lunghezza x è accettato se lo scarto dal valore nominale non supera 0,2 mm, in un senso o nell'altro. In simboli, $|x - 25| \le 0{,}2$: una *disequazione con valore assoluto*. Il valore assoluto è il modo più economico per dire «non importa in quale direzione, conta quanto»: compare ogni volta che si parla di distanze, di scarti, di errori e di tolleranze.

Nel volume dello scorso anno (*Matematica 2*, cap. 10) abbiamo risolto i casi semplici: $|A| = k$, $|A| = |B|$, $|A| < k$, $|A| > k$ con k numero. In questo capitolo affrontiamo i casi generali, in cui anche il secondo membro dipende dall'incognita o compaiono più valori assoluti. Prima però riprendiamo in una pagina la strategia per le disequazioni intere e fratte, perché ogni problema di questo capitolo, alla fine, si riduce a disequazioni di quel tipo. Poi studieremo le proprietà del valore assoluto (tra cui la disuguaglianza triangolare, che dimostreremo), i metodi per equazioni e disequazioni e, infine, la lettura grafica, che permette di contare le soluzioni di un'equazione con un colpo d'occhio.

1.1 Le disequazioni: un richiamo

Ricordiamo la strategia generale, valida per le disequazioni intere di qualunque grado e per quelle fratte (*Matematica 2*, cap. 9 e 10). Prima di tutto si scrivono le condizioni di esistenza (C.E.): un denominatore non può annullarsi. Poi:

1. **porta tutto a primo membro**, in modo che a secondo membro resti 0: $A(x) > 0$, $A(x) \le 0$, …; se c'è un denominatore, *non* si moltiplica per esso, perché il suo segno cambia al variare di x;
2. **scomponi** il primo membro in fattori di primo e di secondo grado e **studia il segno** di ciascun fattore (e del denominatore): una retta $y = ax + b$ è positiva da una parte del suo zero, un trinomio di secondo grado ha il segno di a fuori dalle soluzioni e il segno opposto tra di esse (se $\Delta > 0$);
3. raccogli i segni in una **tabella dei segni** e leggi, con la regola dei segni, il segno del prodotto o del quoziente in ogni intervallo;
4. **scegli gli intervalli** richiesti dal verso, includendo gli zeri del numeratore se la disuguaglianza è larga ($\ge$, $\le$) ed escludendo sempre gli zeri del denominatore.

Per un **sistema** di disequazioni si risolve ciascuna disequazione e si prende l'**intersezione** delle soluzioni (devono valere tutte insieme); quando invece le condizioni sono alternative («oppure», $\vee$) si prende l'**unione**. Questa distinzione tra «e» e «oppure» sarà il filo conduttore di tutto il capitolo: le forme con valore assoluto si traducono a volte in un sistema, a volte in un'unione di sistemi.

Esempio. Risolviamo $\dfrac{x^2-2x-3}{4-x} \geq 0$.

C.E. $x \neq 4$. Il secondo membro è già 0.

Segni. Il numeratore $x^2-2x-3 = (x+1)(x-3)$ è positivo per $x < -1 \vee x > 3$, negativo tra -1 e 3. Il denominatore $4-x$ è positivo per $x < 4$.

Tabella. Negli intervalli $]-\infty;-1[$, $]-1;3[$, $]3;4[$, $]4;+\infty[$ il numeratore ha segni +, −, +, + e il denominatore +, +, +, −; il quoziente ha quindi segni +, −, +, −.

Soluzioni. Servono i tratti positivi, con gli zeri del numeratore (la disuguaglianza è larga) e senza $x = 4$: $x \leq -1 \vee 3 \leq x < 4$, cioè $]-\infty;-1] \cup [3;4[$. **Controllo:** per $x = 0$ il primo membro vale $-\dfrac{3}{4} < 0$, e 0 infatti è escluso; per $x = 3{,}5$ vale $2{,}25 : 0{,}5 = 4{,}5 > 0$ ✓.

Scriveremo le soluzioni in entrambi i modi, con le disuguaglianze e con gli intervalli. Ricorda che un estremo infinito è sempre escluso: $]-\infty;-1]$, mai $[-\infty;-1]$.

1.2 Il valore assoluto e le sue proprietà

1.2.1 Definizione per casi e distanza

Il valore assoluto di un numero reale a si definisce per casi:

$$|a| = a \text{ se } a \geq 0, \quad |a| = -a \text{ se } a < 0.$$

Non bisogna lasciarsi ingannare dal segno meno: se $a < 0$, il numero $-a$ è *positivo*. Per esempio $|-7| = -(-7) = 7$. Quando al posto di a c'è un'espressione $A(x)$, diremo che $A(x)$ è l'**argomento** del valore assoluto: $|A(x)|$ vale $A(x)$ dove l'argomento è positivo o nullo e $-A(x)$ dove l'argomento è negativo. Per esempio

$$|x-3| = x-3 \text{ se } x \geq 3, \quad |x-3| = 3-x \text{ se } x < 3.$$

La funzione $y = |x|$, che a ogni numero reale associa il suo valore assoluto, si chiama **funzione valore assoluto**; il suo grafico è la «V» formata dalle bisettrici $y = x$ (per $x \geq 0$) e $y = -x$ (per $x < 0$). È il primo esempio di **funzione definita a tratti**: una funzione data da espressioni diverse su intervalli diversi del dominio. Togliere un valore assoluto significa proprio riscriverlo come funzione definita a tratti, e quasi tutti i metodi di questo capitolo partono da qui.

La seconda lettura, già vista in *Matematica 2*, è geometrica: $|a|$ è la distanza del punto a dall'origine della retta reale, e $|a-b|$ è la distanza tra i punti a e b. Allora la disequazione $|x-a| < r$, con $r > 0$, descrive i punti che distano da a meno di r: l'intervallo aperto $]a-r;\, a+r[$, che ha centro a e **semiampiezza** r. Un intervallo di questo tipo si chiama **intorno** di a di raggio r; la disequazione opposta $|x-a| > r$ descrive invece i punti esterni all'intorno (Figura 1.1). Viceversa, ogni intervallo limitato si può scrivere con un valore assoluto: $[2;8]$ ha centro 5 e semiampiezza 3, quindi è l'insieme dei numeri con $|x-5| \leq 3$. Il perno dell'introduzione è accettato se $x \in [24{,}8;\, 25{,}2]$.

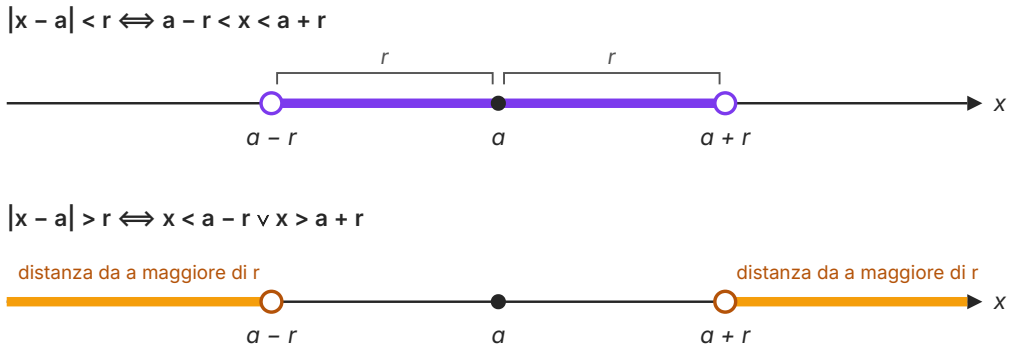


Figura 1.1 Sopra: i punti che soddisfano $|x - a| < r$ formano l'intorno di a di raggio r, l'intervallo aperto di centro a e semiampiezza r. Sotto: i punti con $|x - a| > r$ sono quelli fuori dall'intorno. Gli estremi $a \pm r$ (cerchietti vuoti) sono esclusi in entrambi i casi; con $\le$ e $\ge$ andrebbero inclusi.

1.2.2 Le proprietà

Dalla definizione per casi seguono alcune proprietà che useremo continuamente. Per ogni a, b reali:

- $|a| \ge 0$, e $|a| = 0$ se e solo se $a = 0$;
- $|-a| = |a|$, quindi anche $|a - b| = |b - a|$ (la distanza da a a b è la stessa che da b ad a);
- $-|a| \le a \le |a|$ (il numero a coincide con uno dei due estremi);
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ e, se $b \neq 0$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$: è la **proprietà moltiplicativa** del valore assoluto;
- $|a|^2 = a^2$: elevare al quadrato «cancella» il segno, e quindi anche il valore assoluto.

La proprietà moltiplicativa si dimostra per casi. Se a e b sono concordi, $ab \ge 0$ e $|ab| = ab$; inoltre $|a||b|$ è uguale ad ab (se entrambi sono positivi o nulli) oppure a $(-a)(-b) = ab$ (se entrambi sono negativi). Se sono discordi, per esempio $a < 0 < b$, allora $ab < 0$ e $|ab| = -ab = (-a) \cdot b = |a| \cdot |b|$. Attenzione: per la *somma* non vale niente di simile, perché $|3 + (-5)| = 2$ mentre $|3| + |-5| = 8$.

DA RICORDARE

La radice di un quadrato è un valore assoluto: $\sqrt{a^2} = |a|$ per ogni a reale. Infatti $\sqrt{a^2}$ è per definizione il numero *non negativo* che elevato al quadrato dà a^2, e quel numero è $|a|$, non a. Per esempio $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4|$. Così $\sqrt{(x-3)^2} = |x - 3|$, che vale $x - 3$ solo per $x \ge 3$. Scrivere $\sqrt{x^2} = x$ è un errore che porta a perdere soluzioni o a trovarne di false; ne riparleremo nel capitolo 2, con le equazioni irrazionali.

1.2.3 La disuguaglianza triangolare

La disuguaglianza triangolare, che hai incontrato nel volume dello scorso anno, dice che il valore assoluto di una somma non supera la somma dei valori assoluti. Ora siamo in grado di dimostrarla e di stabilire esattamente quando vale l'uguaglianza.

IN SINTESI

Teorema (disuguaglianza triangolare).

Ipotesi: a, b numeri reali.

Tesi: $|a+b| \le |a| + |b|$, e l'uguaglianza vale se e solo se $ab \ge 0$ (a e b concordi, oppure almeno uno dei due nullo).

Dimostrazione (elevando al quadrato). I due membri $|a+b|$ e $|a|+|b|$ sono entrambi non negativi. Per due numeri non negativi u e v vale $u \le v \iff u^2 \le v^2$, perché $v^2 - u^2 = (v-u)(v+u)$ e il fattore $v+u$ è positivo o nullo (se è nullo, $u = v = 0$). Basta quindi confrontare i quadrati. Usando $|t|^2 = t^2$ e la proprietà moltiplicativa:

$$|a+b|^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (|a|+|b|)^2 = a^2 + 2|ab| + b^2.$$

La disuguaglianza tra i quadrati si riduce a $ab \le |ab|$, vera per ogni numero (un numero non supera il proprio valore assoluto). L'uguaglianza vale se e solo se $ab = |ab|$, cioè se e solo se $ab \ge 0$. c.v.d.

Dimostrazione (per casi). Si può anche ragionare senza quadrati: da $-|a| \le a \le |a|$ e $-|b| \le b \le |b|$, sommando membro a membro, si ottiene $-(|a|+|b|) \le a+b \le |a|+|b|$, che per la regola sugli intorni (con $r = |a|+|b|$) significa proprio $|a+b| \le |a|+|b|$. c.v.d.

Sulla retta, la disuguaglianza ha un significato di distanze. Applicata ai numeri $a-c$ e $c-b$, la cui somma è $a-b$, dà

$$|a-b| \le |a-c| + |c-b|$$

cioè: andare da a a b passando per c non è mai più breve che andarci direttamente, e costa lo stesso solo se c sta tra a e b. Useremo questa osservazione per capire «a vista» le equazioni con due valori assoluti.

APPROFONDIMENTO · DUE SBARRE E UN TRIANGOLO

Il nome *disuguaglianza triangolare* viene dalla geometria: nella proposizione 20 del primo libro degli *Elementi*, Euclide dimostra che in ogni triangolo due lati, comunque presi, hanno somma maggiore del lato rimanente. Con i vettori del volume dello scorso anno la proprietà si scrive $|u + v| \le |u| + |v|$: se u e v sono due lati consecutivi di un triangolo, $u + v$ è il terzo. La versione per i numeri che abbiamo dimostrato è il caso «schiacciato» su una retta, in cui il triangolo degenera e l'uguaglianza diventa possibile.

Il simbolo con le due sbarre verticali è molto più recente. Viene attribuito a Karl Weierstrass (1815–1897): compare in un suo scritto del 1841, che però fu stampato soltanto nel 1894, nelle opere raccolte; in una memoria del 1876 Weierstrass lo introduce esplicitamente per indicare il valore assoluto di un numero complesso. Prima di lui si usavano parole o abbreviazioni diverse da un autore all'altro.

1.3 Equazioni con valore assoluto

1.3.1 La forma |A(x)| = B(x)

Nel volume dello scorso anno il secondo membro era un numero k, e bastava guardarne il segno. Ora consideriamo il caso generale $|A(x)| = B(x)$, in cui anche $B(x)$ dipende dall'incognita e può essere positivo per certi valori di x e negativo per altri. Ci sono due metodi, equivalenti; conviene conoscerli entrambi.

Metodo 1: due sistemi. Si toglie il valore assoluto secondo la definizione per casi. Dove $A(x) \ge 0$ l'equazione diventa $A(x) = B(x)$; dove $A(x) < 0$ diventa $-A(x) = B(x)$. Si risolvono i due **sistemi misti** (sistemi che contengono equazioni e disequazioni)

$$\{\, A(x) \ge 0 \,;\, A(x) = B(x) \,\} \quad \cup \quad \{\, A(x) < 0 \,;\, -A(x) = B(x) \,\}$$

e si fa l'unione delle loro soluzioni. Ogni soluzione dell'equazione di un sistema è accettata solo se soddisfa la disequazione dello *stesso* sistema.

Metodo 2: la condizione sul secondo membro. Un valore assoluto non è mai negativo, quindi l'equazione può avere soluzioni solo dove $B(x) \ge 0$. E dove $B(x) \ge 0$, dire che $|A(x)|$ vale $B(x)$ significa che $A(x)$ è uguale a $B(x)$ o al suo opposto. Perciò

$$|A(x)| = B(x) \quad \iff \quad B(x) \ge 0 \quad \text{e} \quad (A(x) = B(x) \vee A(x) = -B(x))$$

Il secondo metodo richiede di risolvere una sola disequazione, $B(x) \ge 0$, spesso più semplice di $A(x) \ge 0$; il primo è più sicuro quando $A(x)$ è di primo grado e il suo segno si legge subito. In entrambi i casi, alla fine, una sostituzione nell'equazione di partenza è un ottimo controllo.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi $|x^2 - 4x| = 2x - 5$.

Condizione. Con il metodo 2 serve $2x - 5 \geq 0$, cioè $x \geq \frac{5}{2}$.

Primo caso, $x^2 - 4x = 2x - 5$: $x^2 - 6x + 5 = 0$, $(x - 1)(x - 5) = 0$, quindi $x = 1$ oppure $x = 5$. Solo $x = 5$ soddisfa $x \geq \frac{5}{2}$.

Secondo caso, $x^2 - 4x = -(2x - 5)$: $x^2 - 2x - 5 = 0$, $x = 1 \pm \sqrt{6}$. Poiché $\sqrt{6} \approx 2{,}45$, si ha $1 + \sqrt{6} \approx 3{,}45$ (accettabile) e $1 - \sqrt{6} \approx -1{,}45$ (non accettabile).

Soluzioni. $x = 5$ e $x = 1 + \sqrt{6}$. **Controllo:** per $x = 5$, $|25 - 20| = 5$ e $2 \cdot 5 - 5 = 5$ ✓. Per $x = 1 + \sqrt{6}$ l'argomento vale $(1 + \sqrt{6})^2 - 4(1 + \sqrt{6}) = 3 - 2\sqrt{6}$, che è negativo; il suo valore assoluto è $2\sqrt{6} - 3$, proprio uguale a $2(1 + \sqrt{6}) - 5$ ✓.

Con il metodo 1 si sarebbe studiato il segno di $x^2 - 4x$ (positivo per $x \leq 0 \vee x \geq 4$): nel primo sistema $x = 1$ cade dove l'argomento è negativo e va scartata, $x = 5$ è accettata; nel secondo sistema, dove $0 < x < 4$, è accettata $1 + \sqrt{6}$ e scartata $1 - \sqrt{6}$. Stesse soluzioni, ma più segni da studiare.

ERRORE FREQUENTE

Dimenticare la condizione $B(x) \geq 0$. La scorciatoia «$A = \pm B$» da sola non basta. Per $|2x - 1| = x - 3$ essa dà $2x - 1 = x - 3$, cioè $x = -2$, e $2x - 1 = -x + 3$, cioè $x = \frac{4}{3}$. Ma per $x = -2$ il secondo membro vale -5 e il primo $|-5| = 5$: un valore assoluto non può essere uguale a un numero negativo. Lo stesso accade per $\frac{4}{3}$. Imponendo $x - 3 \geq 0$, cioè $x \geq 3$, si scartano entrambe: l'equazione è **impossibile**. Senza la condizione si sarebbero «trovate» due soluzioni false.

1.3.2 Equazioni con più valori assoluti: il metodo degli intervalli

Quando i valori assoluti sono due o più, conviene toglierli tutti insieme con il **metodo degli intervalli**:

1. si trovano gli zeri degli argomenti e li si segna sulla retta reale: dividono la retta in intervalli;
2. si studia il segno di ogni argomento e, in ogni intervallo, si riscrive l'equazione *senza* valori assoluti (un argomento positivo resta com'è, uno negativo cambia segno);
3. si risolve l'equazione di ogni intervallo, tenendo solo le soluzioni che cadono nell'intervallo stesso;
4. si fa l'unione delle soluzioni accettate.

Gli estremi degli intervalli vanno assegnati a uno solo dei due intervalli vicini (per esempio con «≤» a sinistra e «<» a destra): in un punto in cui un argomento si annulla le due espressioni coincidono, quindi la scelta non cambia il risultato, ma un punto non deve essere né perso né contato due volte.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi $|x - 1| + |x + 2| = 5$.

Zeri degli argomenti. $x - 1 = 0$ per $x = 1$, $x + 2 = 0$ per $x = -2$. Gli intervalli sono $x < -2$, $-2 \le x < 1$, $x \ge 1$. La tabella di Figura 1.2 mostra il segno di ciascun argomento e come si riscrive la somma in ogni intervallo.

Per $x < -2$ entrambi gli argomenti sono negativi: $(1 - x) + (-x - 2) = 5$, cioè $-2x - 1 = 5$, $x = -3$. È minore di -2: accettata.

Per $-2 \le x < 1$: $(1 - x) + (x + 2) = 5$, cioè $3 = 5$: impossibile. Nessuna soluzione in questo intervallo.

Per $x \ge 1$: $(x - 1) + (x + 2) = 5$, cioè $2x + 1 = 5$, $x = 2$: accettata.

Soluzioni. $x = -3$ e $x = 2$. **Controllo:** $|-4| + |-1| = 5$ ✓; $|1| + |4| = 5$ ✓.

Lettura con le distanze. $|x - 1| + |x + 2|$ è la somma delle distanze di x dai punti 1 e -2, che distano 3 tra loro. Se x sta tra i due punti la somma vale proprio 3 (la disuguaglianza triangolare con il segno di uguale); se sta fuori, vale 3 più il doppio della distanza dal punto più vicino. Per ottenere 5 bisogna uscire di 1 da una parte o dall'altra: $x = 2$ o $x = -3$.

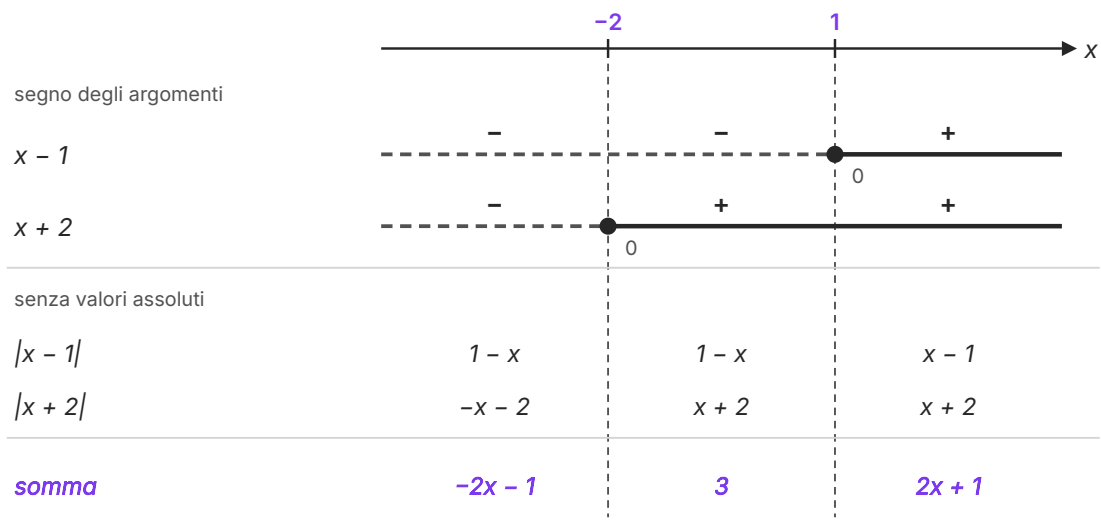


Figura 1.2 Il metodo degli intervalli per $|x - 1| + |x + 2|$. In alto il segno degli argomenti (tratto pieno: positivo; tratteggiato: negativo); in basso come si scrivono i due valori assoluti e la loro somma in ciascuno dei tre intervalli. Nel tratto centrale la somma è costante, uguale a 3.

Il metodo funziona anche quando a secondo membro c'è un'espressione in x, o quando i valori assoluti si sottraggono: cambia soltanto l'equazione da risolvere in ogni intervallo. Con tre argomenti gli intervalli diventano quattro, e così via. Un caso curioso è $|x-1|+|x-3|=2$: nell'intervallo centrale l'equazione diventa $2=2$, vera sempre, e *tutti* i numeri di $[1;3]$ sono soluzioni. Anche questo si capisce con le distanze: i punti 1 e 3 distano 2, e la somma delle distanze vale 2 esattamente per i punti del segmento che li unisce.

1.4 Disequazioni con valore assoluto

1.4.1 Le forme $|A(x)| < B(x)$ e $|A(x)| > B(x)$

Per le disequazioni le regole del volume dello scorso anno si estendono senza fatica, e con una sorpresa: le due forme principali **non richiedono alcuna condizione** sul segno del secondo membro. Vediamo perché.

$|A| < B$. Supponiamo di essere in un punto x in cui $B(x) > 0$: allora $|A(x)| < B(x)$ dice che $A(x)$ dista da 0 meno di $B(x)$, cioè $-B(x) < A(x) < B(x)$. Se invece $B(x) \le 0$, la disequazione $|A(x)| < B(x)$ è falsa (un valore assoluto non è minore di un numero negativo o nullo), ma è falsa anche la doppia disuguaglianza $-B(x) < A(x) < B(x)$, perché richiederebbe $-B(x) < B(x)$, cioè $B(x) > 0$. Le due scritture sono quindi vere esattamente negli stessi punti.

$|A| > B$. Se $B(x) \ge 0$, la disequazione dice che $A(x)$ dista da 0 più di $B(x)$: $A(x) < -B(x) \vee A(x) > B(x)$. Se $B(x) < 0$, la disequazione è vera (un valore assoluto supera sempre un numero negativo); ma è vera anche l'unione, perché in quel punto $-B(x)$ è positivo e ogni numero $A(x)$ è maggiore di $B(x)$ oppure, se non lo è, è minore o uguale a $B(x) < 0 < -B(x)$. Anche qui le due scritture sono equivalenti per ogni $B(x)$.

IN SINTESI

Disequazioni con valore assoluto (per ogni espressione $B(x)$, senza condizioni sul suo segno):

$|A(x)| < B(x) \iff -B(x) < A(x) < B(x)$, cioè il **sistema** $A(x) < B(x)$ e $A(x) > -B(x)$;

$|A(x)| > B(x) \iff A(x) < -B(x) \vee A(x) > B(x)$, cioè l'**unione** delle soluzioni delle due disequazioni;

e lo stesso con $\le$ e $\ge$. Inoltre, se entrambi i membri sono valori assoluti, $|A(x)| < |B(x)| \iff A(x)^2 < B(x)^2$: si può elevare al quadrato, perché i due membri non sono mai negativi.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi $|x^2 - 4| < 3x$.

Traduzione. $-3x < x^2 - 4 < 3x$, cioè il sistema delle due disequazioni $x^2 + 3x - 4 > 0$ e $x^2 - 3x - 4 < 0$.

Prima disequazione. $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$: positivo per $x < -4 \vee x > 1$.

Seconda disequazione. $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$: negativo per $-1 < x < 4$.

Intersezione. $1 < x < 4$, cioè $]1; 4[$. Non abbiamo imposto $3x > 0$: la condizione è già contenuta nel sistema, e infatti tutte le soluzioni sono positive.

Controllo per campioni. $x = 2$: $|0| = 0 < 6$ ✓. $x = 0{,}5$: $|-3{,}75| = 3{,}75$, non minore di 1,5 ✓ (escluso). $x = 5$: $21 < 15$ è falso ✓ (escluso).

ERRORE FREQUENTE

«Risolvere» $|A| < B$ come $A < B$. Togliere le sbarre e tenere solo $x^2 - 4 < 3x$ dà $-1 < x < 4$, che contiene per esempio $x = 0$: ma $|0 - 4| = 4$ non è minore di $3 \cdot 0 = 0$. La disuguaglianza $|A| < B$ chiede che A stia *tra* $-B$ e B: le disequazioni sono due, e vanno messe a sistema. Allo stesso modo, $|A| > B$ non è $A > B$: manca la metà $A < -B$.

Un esempio della seconda forma: $|x - 2| > 2x - 1$. Si risolvono $x - 2 < -(2x - 1)$, cioè $x < 1$, e $x - 2 > 2x - 1$, cioè $x < -1$, e si prende l'unione: $x < 1$. Per $x = 0$ si ha $2 > -1$ ✓, per $x = 1$ si ha $1 > 1$, falso ✓.

E un esempio con due valori assoluti, da elevare al quadrato: $|2x - 1| \le |x + 1|$. Si ottiene $(2x - 1)^2 \le (x + 1)^2$, cioè $(2x - 1)^2 - (x + 1)^2 \le 0$; scomponendo la differenza di quadrati, $(x - 2) \cdot 3x \le 0$, quindi $0 \le x \le 2$. Per $x = 1$: $1 \le 2$ ✓; per $x = 3$: $5 \le 4$, falso ✓.

1.4.2 Disequazioni con più valori assoluti

Con più valori assoluti si usa di nuovo il metodo degli intervalli: in ogni intervallo si scrive una disequazione senza valori assoluti, la si risolve, si interseca la sua soluzione con l'intervallo (è un sistema!) e infine si uniscono i risultati dei diversi intervalli.

Risolviamo $|x - 1| + |x + 2| < x + 5$, usando la tabella di Figura 1.2.

- Per $x < -2$: $-2x - 1 < x + 5$, cioè $x > -2$; in sistema con $x < -2$: nessuna soluzione.
- Per $-2 \le x < 1$: $3 < x + 5$, cioè $x > -2$; in sistema: $-2 < x < 1$.
- Per $x \ge 1$: $2x + 1 < x + 5$, cioè $x < 4$; in sistema: $1 \le x < 4$.

L'unione è $-2 < x < 4$, cioè $]-2; 4[$. Il grafico di Figura 1.3 conferma il risultato: la spezzata $y = |x - 1| + |x + 2|$ sta sotto la retta $y = x + 5$ proprio tra le ascisse dei punti di intersezione, $(-2; 3)$

e (4; 9). Gli estremi sono esclusi perché lì i due membri sono uguali e la disuguaglianza è stretta.

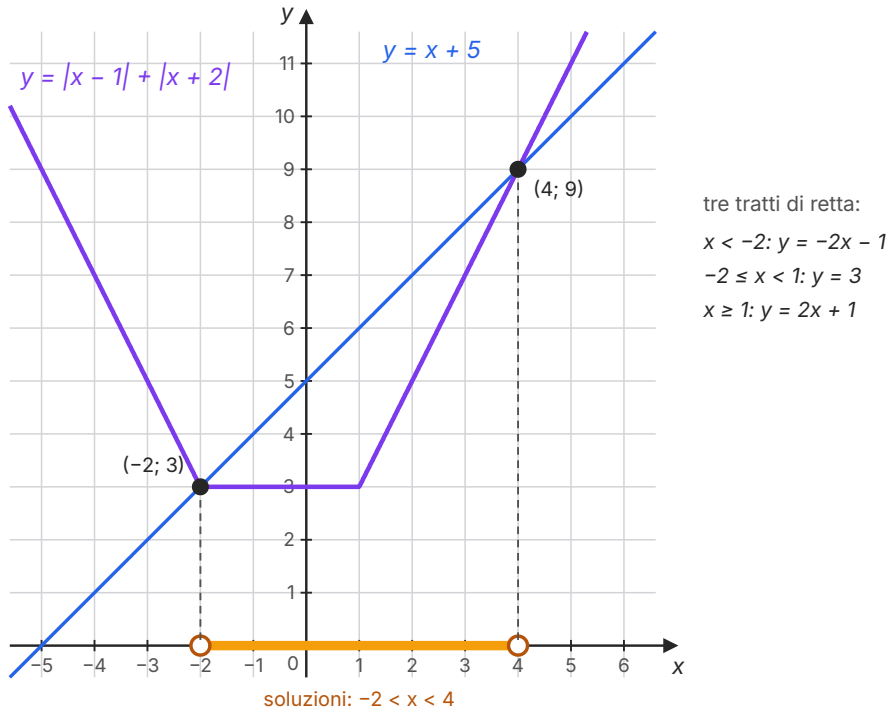


Figura 1.3 Il grafico di $y = |x - 1| + |x + 2|$, disegnato dalla sua espressione a tratti, e la retta $y = x + 5$. La spezzata sta sotto la retta per $-2 < x < 4$ (in arancio sull'asse x): sono le soluzioni della disequazione $|x - 1| + |x + 2| < x + 5$. Le unità sono uguali sui due assi.

1.5 La lettura grafica

1.5.1 I grafici di $y = |f(x)|$ e $y = f(|x|)$

Dato il grafico di una funzione $y = f(x)$, due grafici con il valore assoluto si costruiscono senza calcoli. Le due costruzioni si somigliano nella scrittura ma sono molto diverse, e vanno distinte con cura (Figura 1.4).

Il grafico di $y = |f(x)|$. Il valore assoluto agisce sull'*ordinata*. Dove $f(x) \geq 0$ non cambia nulla; dove $f(x) < 0$ l'ordinata cambia segno. Si tengono quindi le parti del grafico che stanno sopra l'asse x (o su di esso) e si ribaltano rispetto all'asse x quelle che stanno sotto. Il nuovo grafico non scende mai sotto l'asse x; i suoi zeri sono gli stessi di f.

Il grafico di $y = f(|x|)$. Qui il valore assoluto agisce sull'*ascissa*. Per $x \geq 0$ si ha $f(|x|) = f(x)$: il grafico coincide con quello di f. Per $x < 0$ si ha $f(|x|) = f(-x)$: la funzione assume in x lo stesso va-

lore che assume in $-x$. Si tiene allora la parte del grafico di f con $x \geq 0$, si cancella quella con $x < 0$ e la si sostituisce con la simmetrica, rispetto all'asse y, della parte tenuta. Il grafico ottenuto è simmetrico rispetto all'asse y.

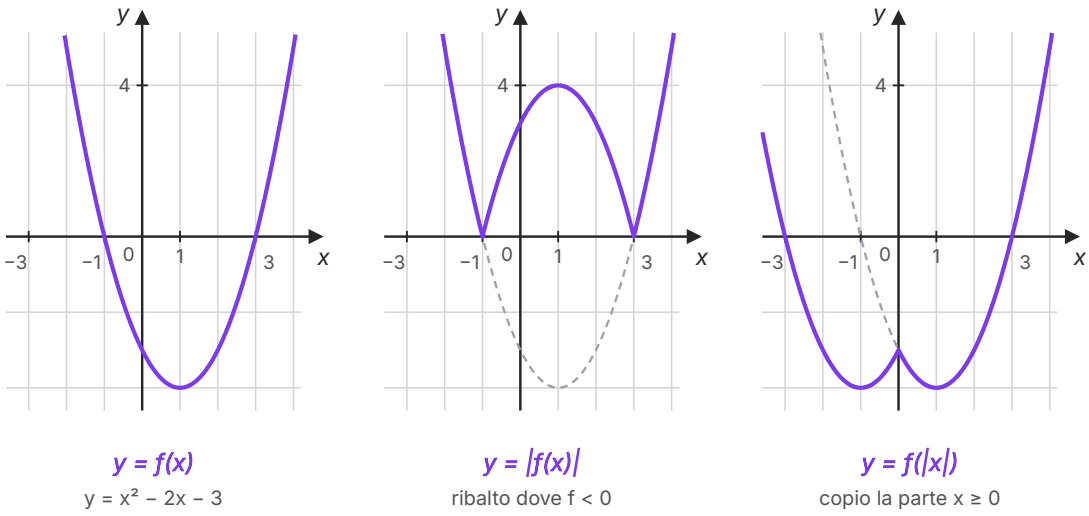


Figura 1.4 Dalla parabola $y = x^2 - 2x - 3$ (a sinistra) si ottengono $y = |x^2 - 2x - 3|$ (al centro: l'arco tra -1 e 3, che stava sotto l'asse x, è ribaltato verso l'alto) e $y = x^2 - 2|x| - 3$ (a destra: la parte con $x \geq 0$ è conservata e copiata simmetricamente rispetto all'asse y). In grigio tratteggiato le parti del grafico di partenza che sono state sostituite.

Nell'esempio di Figura 1.4 la parabola $y = x^2 - 2x - 3$ ha zeri -1 e 3 e vertice $(1; -4)$. Il grafico di $y = |x^2 - 2x - 3|$ ha lo stesso aspetto fuori da $[-1; 3]$ e, tra -1 e 3, un arco rivolto verso il basso con il punto più alto in $(1; 4)$. Il grafico di $y = x^2 - 2|x| - 3$ ha invece zeri ± 3 e due punti di minimo, $(1; -4)$ e $(-1; -4)$. Nel capitolo 3 queste due costruzioni entreranno nel quadro generale delle trasformazioni dei grafici, accanto alle traslazioni, alle simmetrie e alle dilatazioni.

1.5.2 Contare le soluzioni al variare di un parametro

Le soluzioni di un'equazione $f(x) = k$ sono le ascisse dei punti in cui il grafico di $y = f(x)$ incontra la retta orizzontale $y = k$. Se k è un **parametro**, cioè un numero non fissato, possiamo far scorrere la retta dal basso verso l'alto e contare le intersezioni: è la **discussione grafica** dell'equazione. I valori di k in cui il numero delle soluzioni cambia si chiamano **valori critici** del parametro: in genere sono le ordinate dei punti più alti o più bassi di un tratto del grafico e dei punti in cui il grafico tocca l'asse x. È il solo tipo di discussione con un parametro che useremo in questo volume.

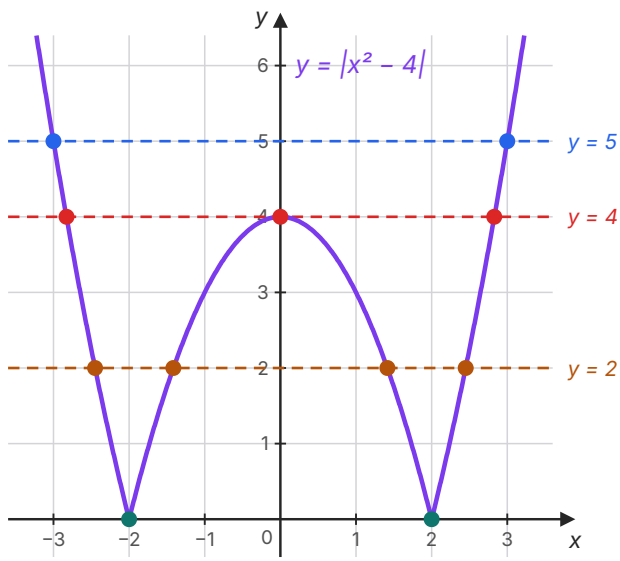
ESEMPIO SVOLTO

Al variare di k, quante soluzioni ha $|x^2 - 4| = k$?

Grafico. La parabola $y = x^2 - 4$ ha zeri ± 2 e vertice $(0; -4)$. Il grafico di $y = |x^2 - 4|$ si ottiene ribaltando l'arco tra -2 e 2: compare un arco con il punto più alto in $(0; 4)$, e il grafico tocca l'asse x in $(\pm 2; 0)$ (Figura 1.5).

Scorrimento della retta. Per $k < 0$ la retta $y = k$ sta sotto l'asse x: nessuna soluzione. Per $k = 0$ tocca il grafico in $x = \pm 2$: 2 soluzioni. Per $0 < k < 4$ taglia l'arco centrale in due punti e i due rami esterni in un punto ciascuno: 4 soluzioni. Per $k = 4$ passa per la cima dell'arco e taglia i rami esterni: 3 soluzioni. Per $k > 4$ taglia solo i rami esterni: 2 soluzioni. I valori critici sono $k = 0$ e $k = 4$.

Controllo algebrico. Per $k = 2$: $x^2 - 4 = \pm 2$, $x^2 = 6$ o $x^2 = 2$, cioè $x = \pm\sqrt{6}$ e $x = \pm\sqrt{2}$: quattro soluzioni ✓. Per $k = 4$: $x^2 = 8$ o $x^2 = 0$: $x = \pm 2\sqrt{2}$ e $x = 0$, tre soluzioni ✓. Per $k = 5$: $x^2 = 9$ o $x^2 = -1$ (impossibile): $x = \pm 3$ ✓.



k	soluzioni
$k < 0$	0
$k = 0$	2
$0 < k < 4$	4
$k = 4$	3
$k > 4$	2

Figura 1.5 Il grafico di $y = |x^2 - 4|$, calcolato dalla sua equazione, e le rette $y = k$ per $k = 0$ (l'asse x), 2, 4, 5, con i punti di intersezione. A destra il numero delle soluzioni dell'equazione $|x^2 - 4| = k$ al variare di k.

Il grafico risponde anche a domande sulle disequazioni: $|x^2 - 4| < 2$ è vera dove il grafico sta sotto la retta $y = 2$, cioè per $-\sqrt{6} < x < -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} < x < \sqrt{6}$; $|x^2 - 4| > 5$ dove sta sopra la retta $y = 5$, cioè per $x < -3 \vee x > 3$. In un programma di geometria dinamica o in un foglio di calcolo si può trac-

ciare $y = |x^2 - 4|$, collegare k a uno slider e vedere comparire e sparire le intersezioni: è il modo più rapido per controllare una discussione.

1.6 Problemi con il valore assoluto

Il valore assoluto entra nei problemi ogni volta che conta uno *scarto* e non la sua direzione. Vediamo tre situazioni tipiche.

Tolleranze. Torniamo al perno dell'introduzione: con il **valore nominale** 25 mm e la **tolleranza** 0,2 mm, cioè lo scarto massimo ammesso rispetto al valore nominale, il pezzo è accettato se $|x - 25| \le 0{,}2$, cioè $24{,}8 \le x \le 25{,}2$. Se il controllo riguarda due misure, per esempio il diametro d e la lunghezza x, le condizioni sono due disequazioni da soddisfare insieme: un sistema.

Errore assoluto. Se v è il valore vero di una grandezza e x il valore misurato, l'errore assoluto è $|x - v|$ e l'errore relativo è $\dfrac{|x - v|}{|v|}$ (*Matematica 2*, cap. 1). Chiedere un errore relativo non superiore all'1% su una lunghezza vera di 1,20 m significa $\dfrac{|x - 1{,}20|}{1{,}20} \le 0{,}01$, cioè $|x - 1{,}20| \le 0{,}012$: le misure accettabili vanno da 1,188 m a 1,212 m.

ESEMPIO SVOLTO

Distanze su una strada. Lungo una strada rettilinea due fermate dell'autobus si trovano al km 12 e al km 30. Un'azienda vuole aprire un deposito lungo la stessa strada, in un punto da cui la somma delle distanze dalle due fermate non superi 24 km. Dove può sorgere? *(Dati inventati.)*

Modello. Se il deposito è al km x, le distanze dalle fermate sono $|x - 12|$ e $|x - 30|$; la condizione è $|x - 12| + |x - 30| \le 24$.

Intervalli. Per $x < 12$: $(12 - x) + (30 - x) \le 24$, $42 - 2x \le 24$, $x \ge 9$: dunque $9 \le x < 12$. Per $12 \le x < 30$: $(x - 12) + (30 - x) = 18 \le 24$, sempre vera: tutto l'intervallo. Per $x \ge 30$: $2x - 42 \le 24$, $x \le 33$: dunque $30 \le x \le 33$.

Risposta. L'unione è $9 \le x \le 33$: il deposito può sorgere tra il km 9 e il km 33. Tra le due fermate la somma delle distanze vale sempre 18 km, la loro distanza; fuori, ogni chilometro in più conta due volte, e i 6 km di margine permettono di uscire di 3 km da ciascuna parte. **Controllo:** al km 9 la somma è $3 + 21 = 24$ ✓.

COLLEGAMENTI

Fisica: quando due misure sono compatibili? In laboratorio una misura si scrive come $x \pm \delta$: il valore della grandezza sta, con buona fiducia, nell'intervallo $[x - \delta;\ x + \delta]$, cioè soddisfa $|X - x| \le \delta$. Due misure $x_1 \pm \delta_1$ e $x_2 \pm \delta_2$ della stessa grandezza si dicono **compatibili** se i loro intervalli hanno almeno un punto in comune, e questo accade se e solo se $|x_1 - x_2| \le \delta_1 + \delta_2$. La condizione è necessaria per la disuguaglianza triangolare: se X sta in entrambi gli intervalli, $|x_1 - x_2| \le |x_1 - X| + |X - x_2| \le \delta_1 + \delta_2$; ed è anche sufficiente, perché se i centri distano non più della somma dei raggi i due intervalli si toccano o si sovrappongono. Per esempio due misure dell'accelerazione di gravità, $(9{,}78 \pm 0{,}03)\ \text{m/s}^2$ e $(9{,}83 \pm 0{,}04)\ \text{m/s}^2$ (dati inventati), sono compatibili, perché $|9{,}78 - 9{,}83| = 0{,}05 \le 0{,}07$.

In tutti questi problemi il procedimento è lo stesso: scegliere l'incognita e la sua unità di misura, tradurre «non più di», «almeno», «al massimo» nel verso giusto, risolvere con i metodi del capitolo e controllare che la risposta abbia senso nel contesto (un chilometro di strada negativo, o una lunghezza negativa, vanno scartati).

SINTESI

- Per una disequazione intera o fratta: C.E., tutto a primo membro, scomposizione, tabella dei segni. Le condizioni simultanee si intersecano (sistema), quelle alternative ($\vee$) si uniscono.
- $|a| = a$ se $a \ge 0$, $|a| = -a$ se $a < 0$; $|a - b|$ è la distanza tra a e b. $|x - a| < r$ descrive l'intorno $]a - r;\ a + r[$.
- Proprietà: $|ab| = |a||b|$, $|a|^2 = a^2$, $\sqrt{a^2} = |a|$; disuguaglianza triangolare $|a + b| \le |a| + |b|$, con l'uguale se e solo se $ab \ge 0$.
- $|A(x)| = B(x) \iff B(x) \ge 0$ e $(A = B \vee A = -B)$; oppure due sistemi misti, secondo il segno di $A(x)$.
- Con più valori assoluti: metodo degli intervalli. Zeri degli argomenti, un'equazione o disequazione senza valori assoluti per ogni intervallo, soluzioni accettate solo se cadono nell'intervallo, unione finale.
- $|A| < B \iff -B < A < B$ (sistema) e $|A| > B \iff A < -B \vee A > B$ (unione): valgono per ogni $B(x)$, senza condizioni.
- $|A| < |B| \iff A^2 < B^2$: si può elevare al quadrato perché i due membri non sono negativi.
- Il grafico di $y = |f(x)|$ si ottiene ribaltando rispetto all'asse x le parti sotto l'asse; quello di $y = f(|x|)$ tenendo la parte con $x \ge 0$ e copiandola simmetricamente rispetto all'asse y.
- Le soluzioni di $f(x) = k$ sono le intersezioni del grafico con la retta $y = k$: la discussione grafica conta le soluzioni al variare di k, cambiando risposta nei valori critici.
- Tolleranze, errori e distanze lungo una retta si traducono in disequazioni del tipo $|x - a| \le r$ o in somme di valori assoluti.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● La disequazione $|x - 3| < 2$ equivale a:
   - **A.** $x < 5$
   - **B.** $-5 < x < 1$
   - **C.** $1 < x < 5$
   - **D.** $x < 1 \vee x > 5$

2. ● Per ogni x reale, $\sqrt{(x-2)^2}$ è uguale a:
   - **A.** $x - 2$
   - **B.** $|x - 2|$
   - **C.** $2 - x$
   - **D.** $\pm(x - 2)$

3. ●● Quale delle seguenti disuguaglianze vale per *ogni* coppia di numeri reali a, b?
   - **A.** $|a + b| = |a| + |b|$
   - **B.** $|a - b| \leq |a| - |b|$
   - **C.** $|a + b| \geq |a| + |b|$
   - **D.** $|a - b| \leq |a| + |b|$

4. ●● L'equazione $|2x - 1| = x - 3$:
   - **A.** ha due soluzioni
   - **B.** ha una soluzione
   - **C.** è impossibile
   - **D.** ha infinite soluzioni

5. ●● L'equazione $|x^2 - 4| = k$ ha esattamente tre soluzioni per:
   - **A.** $k = 0$
   - **B.** $k = 4$
   - **C.** $0 < k < 4$
   - **D.** $k > 4$

6. ●● La disequazione $|x + 1| > x - 2$ è verificata:
   - **A.** per ogni x reale
   - **B.** solo per $x > 2$
   - **C.** solo per $x < \frac{1}{2}$
   - **D.** per nessun valore di x

7. ● Il grafico di $y = f(|x|)$ è sempre:
   A. privo di punti sotto l'asse x
   B. simmetrico rispetto all'origine
   C. uguale al grafico di $y = |f(x)|$
   D. simmetrico rispetto all'asse y

8. ●● **Vero o falso?** Correggi le affermazioni false. a) $|-a| = a$ per ogni a reale. b) Se $B(x) < 0$ in un punto, in quel punto la disequazione $|A(x)| < B(x)$ è falsa. c) $|x|^2 = x^2$ per ogni x. d) Per risolvere $|A(x)| \le |B(x)|$ si possono elevare al quadrato i due membri. e) $|x + 3| = |x| + 3$ per ogni x reale.

9. ● **Completa.** Se $r > 0$, la disequazione $|x - a| \le r$ equivale a _____ $\le x \le$ _____: è l'intervallo chiuso di centro _____ e semiampiezza _____. L'intervallo $[-1; 7]$ è l'insieme delle soluzioni della disequazione $|x - c| \le r$ con $c =$ _____ e $r =$ _____.

Calcolare

10. ● Risolvi. a) $|3x - 6| = 2x$; b) $|x + 4| = 2x - 1$; c) $|x^2 - 1| = x + 1$.

11. ●● Risolvi. a) $|x^2 - 5x| = 6 - x$; b) $|x^2 - 2x - 3| = 3 - x$.

12. ●● Risolvi con il metodo degli intervalli. a) $|x| + |x - 4| = 6$; b) $|x + 1| - |x - 2| = 1$; c) $|2x - 1| + |x + 3| = 4$.

13. ●● Risolvi $|x - 1| + |x - 3| = 2$ e interpreta il risultato con le distanze.

14. ● Risolvi. a) $|2x + 3| \le 5$; b) $|x - 1| > x$; c) $|3x - 2| < x + 2$.

15. ●● Risolvi. a) $|x^2 - 2x| < x$; b) $|x^2 - 9| \ge 3x + 1$; c) $|x^2 - 4| > 3x$.

16. ●● Risolvi elevando al quadrato. a) $|x - 3| < |x + 1|$; b) $|2x + 1| \ge |x - 4|$; c) $|x^2 - 1| \le |x - 1|$.

17. ●● Risolvi con il metodo degli intervalli. a) $|x - 2| + |x + 1| \le 5$; b) $|x| - |x - 3| > 1$; c) $|x + 2| > |x| + 1$.

18. ●● Data $f(x) = x^2 - 6x + 5$, disegna i grafici di $y = f(x)$, $y = |f(x)|$ e $y = f(|x|)$, indicando per ciascuno gli zeri e i punti più alti o più bassi dei vari tratti.

19. ●● Discuti graficamente, al variare di k, il numero delle soluzioni di $|x^2 - 2x| = k$.

20. ●●● Discuti graficamente, al variare di k, il numero delle soluzioni di $x^2 - 4|x| + 3 = k$. *Suggerimento:* il primo membro è $f(|x|)$ con $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Dimostrare e argomentare

21. ●● Dimostra che per ogni a, b reali $|a| - |b| \le |a - b|$ e deduci che $||a| - |b|| \le |a - b|$. *Suggerimento:* scrivi $a = (a - b) + b$.

22. ●● Dimostra per casi che $|ab| = |a| \cdot |b|$, distinguendo secondo i segni di a e b.

23. ●● **Trova l'errore.** Per risolvere $|x-4| < 2x-1$ Luca scrive: «tolgo il valore assoluto: $x-4 < 2x-1$, quindi $x > -3$». Spiega dov'è l'errore e risolvi correttamente.

24. ●● Spiega perché l'equivalenza $|A| > B \iff A < -B \vee A > B$ vale anche nei punti in cui $B < 0$. Applicala poi a $|x+1| > x-3$.

25. ●●● Dimostra che $|x-1| + |x+2| \geq 3$ per ogni x reale e stabilisci per quali x vale l'uguaglianza. Confronta con Figura 1.3.

Problemi

26. ● Il diametro di una vite deve essere $(8{,}00 \pm 0{,}05)$ mm. Scrivi la condizione con un valore assoluto e stabilisci quali di queste viti sono accettate: 7,96 mm; 8,06 mm; 7,94 mm; 8,05 mm.

27. ●● Un termostato mantiene la temperatura T di una stanza entro 1,5 °C da 20 °C. a) Scrivi la condizione e l'intervallo. b) Con la formula $F = 1{,}8T + 32$ per i gradi Fahrenheit, mostra che la condizione diventa $|F - 68| \leq 2{,}7$.

28. ●● Lungo una pista ciclabile rettilinea due fontanelle si trovano al km 4 e al km 10. In quali punti della pista la somma delle distanze dalle due fontanelle non supera 10 km?

29. ●● Una lunghezza vera di 1,20 m va misurata con un errore relativo non superiore all'1%. a) Quali misure x sono accettabili? b) Una misura di 1,215 m lo è?

30. ●●● Due gruppi misurano l'accelerazione di gravità e ottengono $(9{,}78 \pm 0{,}03)$ m/s² e $(9{,}83 \pm 0{,}04)$ m/s² (dati inventati). a) Le misure sono compatibili (riquadro *Collegamenti*)? b) Un terzo gruppo ottiene $x_3 \pm 0{,}02$ m/s²: per quali valori di x_3 la sua misura è compatibile con la prima? c) E con entrambe?

Con il computer

31. ●● In un programma di geometria dinamica traccia $y = |x^2 - 4|$, crea uno slider k da -2 a 8 e la retta $y = k$. a) Annota il numero delle intersezioni per $k = -1, 0, 2, 4, 5$ e confrontalo con Figura 1.5. b) Sostituisci la curva con $y = x^2 - 4|x|$: per quali valori di k le intersezioni sono tre? Controlla la risposta risolvendo l'equazione per quel valore.

Verso la verifica

32. ●● Risolvi $|x^2 - 3x| \geq 2x - 4$.

33. ●● a) Risolvi $|x+1| + |x-2| = x + 4$. b) Risolvi $|x+1| + |x-2| < x + 4$.

34. ●●● Risolvi $\dfrac{|x| - 1}{|x| - 3} \leq 0$. *Suggerimento:* poni $t = |x|$.

35. ●●● **Sfida.** Per quali valori di k l'equazione $|x^2 - 4| = x + k$ ha esattamente tre soluzioni? *Suggerimento:* confronta il grafico di $y = |x^2 - 4|$ con le rette parallele $y = x + k$; cerca le rette che passano per un punto in cui il grafico tocca l'asse x e quelle tangenti all'arco centrale.

PER APPROFONDIRE

- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le disuguaglianze, tra cui la disuguaglianza triangolare e la disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: dividere un problema in casi, risolverli uno per uno e controllare il risultato.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: gli *Elementi* di Euclide e, nell'Ottocento, l'opera di Weierstrass sui fondamenti dell'analisi.

Glossario del capitolo

Argomento di un valore assoluto
l'espressione A(x) racchiusa tra le sbarre in |A(x)|; il valore assoluto si toglie diversamente dove l'argomento è positivo o nullo e dove è negativo.

Discussione grafica
studio del numero delle soluzioni di un'equazione f(x) = k al variare del parametro k, contando le intersezioni del grafico di y = f(x) con la retta y = k.

Funzione definita a tratti
funzione data da espressioni diverse su intervalli diversi del suo dominio, come |x − 3|, che vale x − 3 per x ≥ 3 e 3 − x per x < 3.

Funzione valore assoluto
la funzione y = |x|; il suo grafico è formato dalle bisettrici y = x per x ≥ 0 e y = −x per x < 0.

Grafico di y = |f(x)|
si ottiene dal grafico di y = f(x) conservando le parti sopra l'asse x e ribaltando rispetto all'asse x le parti sotto di esso.

Grafico di y = f(|x|)
si ottiene dal grafico di y = f(x) conservando la parte con x ≥ 0 e sostituendo l'altra con la sua simmetrica rispetto all'asse y.

Intorno di un punto
l'intervallo aperto]a − r; a + r[di centro a e raggio r > 0, cioè l'insieme dei numeri x con |x − a| < r.

Metodo degli intervalli
metodo per equazioni e disequazioni con più valori assoluti: gli zeri degli argomenti dividono la retta in intervalli, in ciascuno si scrive il problema senza valori assoluti, si accettano le soluzioni interne all'intervallo e si uniscono i risultati.

Misure compatibili
due misure $x_1 \pm \delta_1$ e $x_2 \pm \delta_2$ della stessa grandezza i cui intervalli hanno punti in comune, cioè con $|x_1 - x_2| \le \delta_1 + \delta_2$.

Proprietà moltiplicativa del valore assoluto
|ab| = |a| · |b| e, se b ≠ 0, |a/b| = |a|/|b|; non ha un analogo per la somma.

Sistema misto
sistema formato da equazioni e disequazioni, le cui soluzioni devono soddisfarle tutte; per esempio A(x) ≥ 0 e A(x) = B(x).

Tolleranza
scarto massimo ammesso tra la misura di un pezzo e il suo valore nominale v: il pezzo è accettato se |x − v| ≤ t.

Valore critico di un parametro
valore del parametro in cui cambia il numero delle soluzioni di un'equazione; nella discussione grafica corrisponde spesso a una retta che passa per un punto più alto o più basso del grafico.

Soluzioni

1. C. Sono i punti che distano da 3 meno di 2: $-2 < x - 3 < 2$, cioè $1 < x < 5$.

2. B. La radice quadrata di un quadrato è il valore assoluto della base, perché il risultato non può essere negativo.

3. D. $|a - b| = |a + (-b)| \le |a| + |-b| = |a| + |b|$ per la disuguaglianza triangolare. A e C falliscono per $a = 1$, $b = -1$; B fallisce per $a = 0$, $b = 1$ ($1 \le -1$ è falso).

4. C. Serve $x \ge 3$; i due casi danno $x = -2$ e $x = \frac{4}{3}$, entrambe minori di 3 (è l'esempio del riquadro *Errore frequente* sulla condizione $B(x) \ge 0$).

5. B. La retta $y = 4$ passa per il punto più alto dell'arco ribaltato, (0; 4), e taglia i due rami esterni: soluzioni 0 e $\pm 2\sqrt{2}$.

6. A. È l'unione di $x + 1 < -x + 2$, cioè $x < \frac{1}{2}$, e di $x + 1 > x - 2$, cioè $1 > -2$, vera sempre.

7. D. $f(|-x|) = f(|x|)$: i punti di ascisse opposte hanno la stessa ordinata. Il grafico può scendere sotto l'asse x (per esempio $y = |x| - 1$ in 0).

8. a) F: vale solo per $a \ge 0$; in generale $|-a| = |a|$. b) V: un valore assoluto non è minore di un numero negativo. c) V. d) V: i due membri sono non negativi. e) F: per la disuguaglianza triangolare l'uguaglianza vale se e solo se $3x \ge 0$, cioè per $x \ge 0$; per $x = -3$ si ha $0 \ne 6$.

9. $a - r$; $a + r$; a; r. L'intervallo $[-1; 7]$ ha centro 3 e semiampiezza 4: $|x - 3| \le 4$.

10. a) Condizione $x \ge 0$; $3x - 6 = 2x$ dà $x = 6$, $3x - 6 = -2x$ dà $x = \frac{6}{5}$: entrambe accettabili. b) Condizione $x \ge \frac{1}{2}$; $x + 4 = 2x - 1$ dà $x = 5$ (sì), $x + 4 = -2x + 1$ dà $x = -1$ (no): $x = 5$. c) Condizione $x \ge -1$; $x^2 - 1 = x + 1$: $x^2 - x - 2 = 0$, $x = 2$, $x = -1$; $x^2 - 1 = -x - 1$: $x^2 + x = 0$, $x = 0$, $x = -1$. Soluzioni -1, 0, 2.

11. a) Condizione $x \le 6$. $x^2 - 5x = 6 - x$: $x^2 - 4x - 6 = 0$, $x = 2 \pm \sqrt{10}$; $x^2 - 5x = x - 6$: $x^2 - 6x + 6 = 0$, $x = 3 \pm \sqrt{3}$. Tutti e quattro i valori sono minori di 6 ($2 + \sqrt{10} \approx 5{,}16$): quattro soluzioni. b) Condizione $x \le 3$. $x^2 - 2x - 3 = 3 - x$: $x^2 - x - 6 = 0$, $x = 3$, $x = -2$; $x^2 - 2x - 3 = x - 3$: $x^2 - 3x = 0$, $x = 0$, $x = 3$. Soluzioni -2, 0, 3.

12. a) $x < 0$: $4 - 2x = 6$, $x = -1$ ✓; $0 \le x < 4$: $4 = 6$, impossibile; $x \ge 4$: $2x - 4 = 6$, $x = 5$ ✓. Soluzioni -1, 5. b) $x < -1$: $-3 = 1$, impossibile; $-1 \le x < 2$: $2x - 1 = 1$, $x = 1$ ✓; $x \ge 2$: $3 = 1$, impossibile. Soluzione $x = 1$. c) $x < -3$: $-3x - 2 = 4$, $x = -2$, non accettabile; $-3 \le x < \frac{1}{2}$: $4 - x = 4$, $x = 0$ ✓; $x \ge \frac{1}{2}$: $3x + 2 = 4$, $x = \frac{2}{3}$ ✓. Soluzioni 0, $\frac{2}{3}$.

13. $x < 1$: $4 - 2x = 2$, $x = 1$, non accettabile (non è minore di 1); $1 \le x < 3$: $2 = 2$, vera per tutto l'intervallo; $x \ge 3$: $2x - 4 = 2$, $x = 3$ ✓. Soluzioni: $1 \le x \le 3$. I punti 1 e 3 distano 2: la somma delle distanze vale 2 esattamente per i punti del segmento che li unisce.

14. a) $-5 \le 2x + 3 \le 5$: $-4 \le x \le 1$, cioè $[-4; 1]$. b) $x - 1 < -x$ dà $x < \frac{1}{2}$; $x - 1 > x$ è impossibile; unione $x < \frac{1}{2}$. c) $-x - 2 < 3x - 2 < x + 2$: $x > 0$ e $x < 2$, cioè $]0; 2[$.

15. a) $-x < x^2 - 2x < x$: $x^2 - x > 0$ ($x < 0 \vee x > 1$) e $x^2 - 3x < 0$ ($0 < x < 3$); intersezione $1 < x < 3$. b) $x^2 - 9 \le -3x - 1$: $x^2 + 3x - 8 \le 0$, $\frac{-3 - \sqrt{41}}{2} \le x \le \frac{-3 + \sqrt{41}}{2}$; oppure $x^2 - 9 \ge 3x + 1$: $x^2 - 3x - 10 \ge 0$, $x \le -2 \vee x \ge 5$. Unione: $x \le \frac{-3 + \sqrt{41}}{2} \vee x \ge 5$ (il primo estremo vale circa 1,70). c) $x^2 - 4 < -3x$: $-4 < x < 1$; oppure $x^2 - 4 > 3x$: $x < -1 \vee x > 4$. Unione: $x < 1 \vee x > 4$.

16. a) $(x - 3)^2 < (x + 1)^2$: $-6x + 9 < 2x + 1$, $x > 1$. b) $(2x + 1)^2 - (x - 4)^2 \ge 0$: $(x + 5)(3x - 3) \ge 0$, $x \le -5 \vee x \ge 1$.

c) $(x-1)^2(x+1)^2-(x-1)^2\le 0$: $(x-1)^2\cdot x(x+2)\le 0$; il fattore $(x-1)^2$ è positivo tranne in $x=1$, dove si annulla: soluzioni $-2\le x\le 0$ e $x=1$.

17. a) $x<-1$: $1-2x\le 5$, $x\ge -2$; $-1\le x<2$: $3\le 5$, sempre; $x\ge 2$: $2x-1\le 5$, $x\le 3$. Unione $[-2;3]$. b) $x<0$: $-3>1$, mai; $0\le x<3$: $2x-3>1$, $x>2$, quindi $2<x<3$; $x\ge 3$: $3>1$, sempre. Unione $x>2$. c) $x<-2$: $-x-2>-x+1$, mai; $-2\le x<0$: $x+2>-x+1$, $x>-\frac{1}{2}$; $x\ge 0$: $x+2>x+1$, sempre. Unione $x>-\frac{1}{2}$.

18. f: zeri 1 e 5, vertice $(3;-4)$, passa per $(0;5)$. $|f|$: stessi zeri; l'arco tra 1 e 5 è ribaltato, con punto più alto $(3;4)$; il grafico non scende mai sotto l'asse x. $f(|x|)=x^2-6|x|+5$: simmetrico rispetto all'asse y, zeri ± 1 e ± 5, minimi in $(\pm 3;-4)$, punto $(0;5)$ in cui i due rami si raccordano formando un angolo.

19. Il grafico di $y=|x^2-2x|$ ha zeri 0 e 2 e l'arco ribaltato ha il punto più alto in $(1;1)$. $k<0$: nessuna soluzione; $k=0$: 2; $0<k<1$: 4; $k=1$: 3; $k>1$: 2. Valori critici 0 e 1.

20. f ha zeri 1 e 3, vertice $(2;-1)$ e $f(0)=3$; il grafico di $f(|x|)$ è simmetrico rispetto all'asse y, con minimi $(\pm 2;-1)$ e il punto $(0;3)$. $k<-1$: 0 soluzioni; $k=-1$: 2 ($x=\pm 2$); $-1<k<3$: 4; $k=3$: 3 ($x=0$, $x=\pm 4$); $k>3$: 2.

21. Per la disuguaglianza triangolare $|a|=|(a-b)+b|\le |a-b|+|b|$, quindi $|a|-|b|\le |a-b|$. Scambiando a e b: $|b|-|a|\le |b-a|=|a-b|$. Il numero $|a|-|b|$ e il suo opposto non superano $|a-b|$, quindi $||a|-|b||\le |a-b|$. c.v.d.

22. Se $a\ge 0$, $b\ge 0$: $ab\ge 0$, $|ab|=ab=|a||b|$. Se $a<0$, $b<0$: $ab>0$, $|ab|=ab=(-a)(-b)=|a||b|$. Se $a\ge 0>b$: $ab\le 0$, $|ab|=-ab=a(-b)=|a||b|$; il caso $a<0\le b$ è simmetrico. c.v.d.

23. Luca ha tenuto solo metà della doppia disuguaglianza: $|A|<B$ equivale a $-B<A<B$. Per esempio $x=0$ soddisfa $x>-3$, ma $|-4|=4$ non è minore di -1. Correttamente: $-2x+1<x-4$, cioè $x>\frac{5}{3}$, e $x-4<2x-1$, cioè $x>-3$; intersezione $x>\frac{5}{3}$.

24. Dove $B<0$ la disequazione è vera, perché un valore assoluto non è negativo; ed è vera anche l'unione, perché se non è $A>B$ allora $A\le B<0<-B$, quindi $A<-B$. Per $|x+1|>x-3$: $x+1>x-3$ equivale a $1>-3$, vera per ogni x; le soluzioni sono tutti i numeri reali.

25. Per la disuguaglianza triangolare $|1-x|+|x+2|\ge |(1-x)+(x+2)|=3$, e $|1-x|=|x-1|$. L'uguaglianza vale se e solo se $(1-x)(x+2)\ge 0$, cioè per $-2\le x\le 1$: è il tratto orizzontale della spezzata, all'altezza 3. c.v.d.

26. $|d-8|\le 0{,}05$, cioè $7{,}95\le d\le 8{,}05$. Accettate 7,96 mm e 8,05 mm (l'estremo è incluso); scartate 8,06 mm e 7,94 mm.

27. a) $|T-20|\le 1{,}5$, cioè $18{,}5\le T\le 21{,}5$ (°C). b) $F-68=1{,}8T+32-68=1{,}8(T-20)$, quindi $|F-68|=1{,}8|T-20|\le 1{,}8\cdot 1{,}5=2{,}7$ per la proprietà moltiplicativa: da 65,3 °F a 70,7 °F.

28. $|x-4|+|x-10|\le 10$. $x<4$: $14-2x\le 10$, $x\ge 2$; $4\le x<10$: $6\le 10$, sempre; $x\ge 10$: $2x-14\le 10$, $x\le 12$. Tra il km 2 e il km 12.

29. a) $\frac{|x-1{,}20|}{1{,}20}\le 0{,}01$, cioè $|x-1{,}20|\le 0{,}012$: $1{,}188\le x\le 1{,}212$ (in metri). b) No: $|1{,}215-1{,}20|=0{,}015>0{,}012$; l'errore relativo è 1,25%.

30. a) Sì: $|9{,}78-9{,}83|=0{,}05\le 0{,}03+0{,}04=0{,}07$. b) $|x_3-9{,}78|\le 0{,}05$: $9{,}73\le x_3\le 9{,}83$. c) Con la seconda: $|x_3-9{,}83|\le 0{,}06$, cioè $9{,}77\le x_3\le 9{,}89$; con entrambe (sistema): $9{,}77\le x_3\le 9{,}83$ (m/s^2).

31. a) 0, 2, 4, 3, 2 intersezioni, come nella tabella della figura. b) Il grafico di $y=x^2-4|x|$ è simmetrico rispetto all'asse y, con zeri 0 e ± 4, minimi $(\pm 2;-4)$ e il punto $(0;0)$ in cui i due rami si raccordano. Tre intersezioni solo per $k=0$: $x^2-4|x|=0$ dà $|x|(|x|-4)=0$, cioè $x=0$, $x=\pm 4$. (Per $k<-4$ nessuna, per $k=-4$ due, per $-4<k<0$ quattro, per $k>0$ due.)

32. $x^2-3x\le -2x+4$: $x^2-x-4\le 0$, $\frac{1-\sqrt{17}}{2}\le x\le \frac{1+\sqrt{17}}{2}$; oppure $x^2-3x\ge 2x-4$: $x^2-5x+4\ge 0$, $x\le 1\vee x\ge 4$. Unione: $x\le \frac{1+\sqrt{17}}{2}\vee x\ge 4$ (il primo estremo vale circa 2,56).

33. a) $x<-1$: $1-2x=x+4$, $x=-1$, non accettabile; $-1\le x<2$: $3=x+4$, $x=-1$ ✓; $x\ge 2$: $2x-1=x+4$, $x=5$

✓. Soluzioni −1, 5. b) $x < -1$: $x > -1$, nessuna; $-1 \le x < 2$: $x > -1$, quindi $-1 < x < 2$; $x \ge 2$: $x < 5$, quindi $2 \le x < 5$. Unione $]-1; 5[$: la spezzata sta sotto la retta tra le due soluzioni di a).

34. C.E. $|x| \neq 3$. Con $t = |x| \ge 0$: $\frac{t-1}{t-3} \le 0$ per $1 \le t < 3$. Quindi $1 \le |x| < 3$: $-3 < x \le -1 \vee 1 \le x < 3$, cioè $]-3; -1] \cup [1; 3[$.

35. Il grafico tocca l'asse x in $(\pm 2; 0)$; per $|x| < 2$ è l'arco $y = 4 - x^2$, fuori sono i rami di $y = x^2 - 4$. **Rette per i punti dell'asse.** Per $(2; 0)$: $k = -2$, una sola intersezione ($x = 2$). Per $(-2; 0)$: $k = 2$; $x^2 - 4 = x + 2$ dà $x = 3$, $x = -2$ e $4 - x^2 = x + 2$ dà $x = 1$, $x = -2$: tre soluzioni, -2, 1, 3. **Tangente all'arco.** $4 - x^2 = x + k$, cioè $x^2 + x + k - 4 = 0$, ha $\Delta = 17 - 4k = 0$ per $k = \frac{17}{4}$, con punto di tangenza $x = -\frac{1}{2}$, interno all'arco; la retta taglia anche i rami esterni in $x = \frac{1 \pm \sqrt{34}}{2}$: tre soluzioni. Riassumendo: 0 soluzioni per $k < -2$, 1 per $k = -2$, 2 per $-2 < k < 2$, 3 per $k = 2$, 4 per $2 < k < \frac{17}{4}$, 3 per $k = \frac{17}{4}$, 2 per $k > \frac{17}{4}$. Esattamente tre soluzioni per $k = 2$ e per $k = \frac{17}{4}$.