Verifica di fine parte V · Trasformazioni, funzioni circolari e vettori

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). È ammessa la calcolatrice scientifica. Scrivi tutti i passaggi e giustifica le affermazioni citando la proprietà o il teorema che usi: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 11)* La composizione di due simmetrie assiali i cui assi si incontrano in un punto O formando un angolo di 35° è:
   - **A.** una traslazione
   - **B.** una rotazione di centro O e angolo 35°
   - **C.** una rotazione di centro O e angolo 70°
   - **D.** la simmetria centrale di centro O

2. ● *(0,5 punti · cap. 11)* Il simmetrico del punto $P(3; -2)$ rispetto alla bisettrice $y = x$ è:
   - **A.** $(-2; 3)$
   - **B.** $(2; -3)$
   - **C.** $(-3; 2)$
   - **D.** $(3; 2)$

3. ● *(0,5 punti · cap. 12)* $\text{sen}\,150° + \cos 300°$ vale:
   - **A.** 0
   - **B.** 1
   - **C.** -1
   - **D.** $\sqrt{3}$

4. ●● *(0,5 punti · cap. 13)* I vettori $\mathbf{a}(2; -3)$ e $\mathbf{b}(6; 4)$ sono:
   - **A.** paralleli
   - **B.** opposti
   - **C.** inclinati di 45°
   - **D.** perpendicolari

Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 11)* Il triangolo di vertici $A(1; 0)$, $B(3; 0)$, $C(1; 2)$ viene trasformato con l'omotetia di centro l'origine e rapporto -3. Trova i vertici dell'immagine e confronta i perimetri e le aree dei due triangoli.

6. ●● *(1 punto · cap. 12)* Risolvi il triangolo in cui $a = 7$ cm, $b = 8$ cm e $\gamma = 60°$, e calcolane l'area.

7. ●● *(1 punto · cap. 13)* Dati **a**(1; 2; −2) e **b**(3; 0; 4), calcola **a** · **b**, l'angolo tra i due vettori, **a** × **b** e l'area del parallelogramma costruito su **a** e **b**.

8. ●● *(1 punto · cap. 13)* Risolvi con la regola di Cramer il sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$

Dimostrare

9. ●● *(1,5 punti · cap. 13)* Nel triangolo ABC siano M e N i punti medi dei lati AB e BC. Dimostra con i vettori che **MN** = (1/2) **AC**, e deduci che il segmento MN è parallelo al lato AC e congruente alla sua metà.

Problemi

10. ●● *(1,5 punti · cap. 12–13)* Una slitta viene trascinata per 50 m in piano con una corda tesa, inclinata di 30° sull'orizzontale, con una forza di 120 N. a) Calcola la componente orizzontale e quella verticale della forza. b) Calcola il lavoro compiuto dalla forza. c) Quale lavoro compirebbe la stessa forza con la corda orizzontale?

Sfida

11. ●●● *(1 punto · cap. 11–13)* Siano S_1 la simmetria rispetto all'asse y e S_2 la simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$. a) Scrivi le matrici A_1 e A_2 delle due simmetrie. b) Calcola A_2A_1 e A_1A_2 e riconosci le trasformazioni che rappresentano. c) Controlla il risultato con il teorema sulla composizione di due simmetrie assiali.

Soluzioni

1. C. Due simmetrie con assi incidenti danno una rotazione attorno al punto d'intersezione, di angolo doppio dell'angolo tra gli assi: $2 \cdot 35° = 70°$.

2. A. La simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$ scambia le coordinate: $(x; y) \mapsto (y; x)$.

3. B. $\text{sen}\, 150° = \text{sen}\, 30° = 1/2$ (angoli supplementari); $\cos 300° = \cos(-60°) = \cos 60° = 1/2$; la somma è 1.

4. D. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 12 - 12 = 0$, con vettori non nulli. Non sono paralleli: $2 \cdot 4 - (-3) \cdot 6 = 26 \neq 0$.

5. Equazioni $x' = -3x$, $y' = -3y$: $A'(-3; 0)$, $B'(-9; 0)$, $C'(-3; -6)$. Il triangolo ABC è rettangolo in A con cateti 2 e 2: perimetro $4 + 2\sqrt{2}$, area 2. L'immagine ha cateti 6 e 6: perimetro $12 + 6\sqrt{2}$ (moltiplicato per $|k| = 3$), area 18 (moltiplicata per $k^2 = 9$).

6. Teorema del coseno:
$c^2 = 49 + 64 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos 60° = 57$, $c = \sqrt{57} \approx 7{,}55$ cm.
$\cos \alpha = (b^2 + c^2 - a^2) / (2bc) = 72 / (16\sqrt{57}) \approx 0{,}596$, $\alpha \approx 53{,}4°$; $\beta \approx 180° - 60° - 53{,}4° = 66{,}6°$. Area $(1/2) \cdot 7 \cdot 8 \cdot \text{sen}\, 60° = 14\sqrt{3} \approx 24{,}2$ cm^2.

7. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 + 0 - 8 = -5$; $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 5$; $\cos \theta = -1/3$, $\theta \approx 109{,}5°$. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (2 \cdot 4 - (-2) \cdot 0; (-2) \cdot 3 - 1 \cdot 4; 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3) = (8; -10; -6)$. Area $\sqrt{(64 + 100 + 36)} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1$.

8. Sarrus: $D = (-2 + 2 - 2) - (1 + 1 + 8) = -12$. $D_x = -12$, $D_y = -24$, $D_z = -36$. Soluzione $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Controllo: $1 + 4 - 3 = 2$, $2 - 2 + 3 = 3$, $1 + 2 + 6 = 9$ ✓.

9. Con la regola punta-coda $\mathbf{MN} = \mathbf{MB} + \mathbf{BN}$. Poiché M e N sono punti medi, $\mathbf{MB} = (1/2)\,\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BN} = (1/2)\,\mathbf{BC}$. Quindi $\mathbf{MN} = (1/2)\,\mathbf{AB} + (1/2)\,\mathbf{BC} = (1/2)(\mathbf{AB} + \mathbf{BC}) = (1/2)\,\mathbf{AC}$. Un vettore multiplo di un altro ha la stessa direzione, quindi MN è parallelo ad AC, e il modulo è la metà: $MN = AC/2$. c.v.d.

10. a) Orizzontale $120 \cos 30° = 60\sqrt{3} \approx 103{,}9$ N; verticale $120 \,\text{sen}\, 30° = 60$ N. b) $W = 120 \cdot 50 \cdot \cos 30° = 3000\sqrt{3} \approx 5196$ J: lavora solo la componente orizzontale, parallela allo spostamento. c) $120 \cdot 50 = 6000$ J, perché $\cos 0° = 1$.

11. a) S_1: $x' = -x$, $y' = y$, $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; S_2: $x' = y$, $y' = x$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. b) $A_2A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$: $(x; y) \mapsto (y; -x)$, rotazione di $-90°$ attorno all'origine (prima S_1, poi S_2). $A_1A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $(x; y) \mapsto (-y; x)$, rotazione di $+90°$. I due prodotti sono diversi: né la composizione né il prodotto di matrici sono commutativi. c) Gli assi si incontrano in O; l'angolo orientato dall'asse y (90°) alla bisettrice (45°) è $-45°$, quindi $S_2 \circ S_1$ è la rotazione di $2 \cdot (-45°) = -90°$ ✓. Per esempio $(3; 1) \mapsto (-3; 1) \mapsto (1; -3)$.