Matematica 2 · Parte IV · Il secondo grado · versione 1.0
Verifica: Verifica di fine parte IV · pagine 263–264 del volume completo · estratto per lo studio

Verifica di fine parte IV · Il secondo grado

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). Non è ammessa la calcolatrice. Scrivi tutti i passaggi e controlla le soluzioni: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 8)* L'equazione $2x^2 - 5x + 3 = 0$:
   - **A.** ha due soluzioni coincidenti
   - **B.** ha le soluzioni 1 e $\frac{3}{2}$
   - **C.** ha le soluzioni -1 e $-\frac{3}{2}$
   - **D.** non ha soluzioni reali

2. ● *(0,5 punti · cap. 9)* Il vertice della parabola $y = x^2 - 6x + 5$ è:
   - **A.** $(-3;\ 32)$
   - **B.** $(6;\ 5)$
   - **C.** $(3;\ -4)$
   - **D.** $(3;\ 4)$

3. ●● *(0,5 punti · cap. 9)* La disequazione $x^2 - 2x + 5 > 0$ è:
   - **A.** impossibile
   - **B.** verificata solo per $x > 1$
   - **C.** verificata per ogni $x \neq 1$
   - **D.** verificata per ogni x reale

4. ●● *(0,5 punti · cap. 10)* Le soluzioni reali dell'equazione $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ sono:
   - **A.** $x = \pm 2$
   - **B.** $x = \pm 2$ e $x = \pm 1$
   - **C.** $x = 4$ e $x = -1$
   - **D.** nessuna

Calcolare

5. ● *(1 punto · cap. 8)* Risolvi l'equazione $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$.

6. ●● *(1 punto · cap. 8)* Senza risolvere l'equazione $3x^2 - 7x - 6 = 0$, trova la somma e il prodotto delle sue soluzioni. Poi scomponi il trinomio $3x^2 - 7x - 6$ e semplifica la frazione $\dfrac{3x^2 - 7x - 6}{x^2 - 9}$.

7. ●● *(1 punto · cap. 9)* Della parabola $y = -x^2 + 2x + 3$ trova il vertice, l'asse di simmetria e le intersezioni con gli assi; disegnala e risolvi la disequazione $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$.

8. ●● *(1 punto · cap. 10)* Risolvi la disequazione $\dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 1} \leq 0$.

9. ●● *(1 punto · cap. 10)* Risolvi: a) $|2x - 5| = 3$; b) $|x^2 - 3| < 1$.

Problemi

10. ●● *(1 punto · cap. 9)* Con 40 m di rete si vuole recintare un'area rettangolare appoggiata a un muro, che fa da quarto lato. Indicata con x la misura dei due lati perpendicolari al muro, esprimi l'area in funzione di x e trova le dimensioni che rendono l'area massima.

11. ●● *(1 punto · cap. 10)* Per quale valore di q la retta $y = x + q$ è tangente alla parabola $y = x^2 - 3x + 6$? Trova il punto di tangenza e indica per quali q la retta è secante.

Sfida

12. ●●● *(1 punto · cap. 8–10)* Determina per quali valori del parametro k l'equazione $x^4 - 4x^2 + k = 0$ ha quattro soluzioni reali distinte.

Soluzioni

1. B. $\Delta = 25 - 24 = 1$, $x = \frac{5 \pm 1}{4}$: $x = \frac{3}{2}$ e $x = 1$.

2. C. $x = -\frac{b}{2a} = 3$; $y = 9 - 18 + 5 = -4$.

3. D. $\frac{\Delta}{4} = 1 - 5 = -4 < 0$ e $a = 1 > 0$: il trinomio è sempre positivo.

4. A. Con $t = x^2$: $t^2 - 3t - 4 = 0$, $t = 4$ oppure $t = -1$; solo $x^2 = 4$ dà soluzioni reali, $x = \pm 2$.

5. C.E. $x \neq \pm 1$. Denominatore comune $x^2 - 1$: $x(x + 1) - 2(x - 1) = 4$, $x^2 - x - 2 = 0$, $x = 2$ oppure $x = -1$. Il valore -1 è escluso dalle C.E.: l'unica soluzione è $x = 2$. Controllo: $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ ✓.

6. Somma $\frac{7}{3}$, prodotto -2 ($\Delta = 49 + 72 = 121 > 0$). Soluzioni $x = \frac{7 \pm 11}{6}$: 3 e $-\frac{2}{3}$;
$3x^2 - 7x - 6 = (x - 3)(3x + 2)$. Frazione:
$\frac{(x - 3)(3x + 2)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{3x + 2}{x + 3}$, con $x \neq \pm 3$.

7. Vertice $x = 1$, $y = -1 + 2 + 3 = 4$: $V(1; 4)$; asse $x = 1$; concavità verso il basso ($a < 0$). Asse y: $(0; 3)$. Asse x: $x^2 - 2x - 3 = 0$, $(-1; 0)$ e $(3; 0)$. La parabola sta sopra l'asse x o lo tocca per $-1 \leq x \leq 3$.

8. C.E. $x \neq \pm 1$. Numeratore $x(x - 4)$: positivo fuori da $[0; 4]$. Denominatore: positivo fuori da $[-1; 1]$. Zeri ordinati -1, 0, 1, 4; segni della frazione +, −, +, −, +. Soluzioni $-1 < x \leq 0$ oppure $1 < x \leq 4$.

9. a) $2x - 5 = \pm 3$: $x = 4$, $x = 1$. b) $-1 < x^2 - 3 < 1$, cioè $2 < x^2 < 4$: $-2 < x < -\sqrt{2}$ oppure $\sqrt{2} < x < 2$.

10. Lato parallelo al muro $40 - 2x$, con $0 < x < 20$. Area $A(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$: è una parabola con concavità verso il basso, massimo nel vertice $x = \frac{40}{4} = 10$. Dimensioni 10 m e 20 m, area massima 200 m^2.

11. Risolvente $x^2 - 4x + 6 - q = 0$;
$\frac{\Delta}{4} = 4 - 6 + q = q - 2$. Tangente per $q = 2$: $(x - 2)^2 = 0$, punto $(2; 4)$ (controllo sulla parabola: $4 - 6 + 6 = 4$ ✓). Secante per $q > 2$.

12. Con $t = x^2$: $t^2 - 4t + k = 0$. Servono due soluzioni t distinte ed entrambe positive: $\frac{\Delta}{4} = 4 - k > 0$, prodotto $k > 0$, somma $4 > 0$ (sempre vera). Quindi $0 < k < 4$. (Per $k = 0$ le soluzioni sono 0 e ± 2, solo tre; per $k = 4$ solo $\pm\sqrt{2}$.)