CAPITOLO

14

Il calcolo delle probabilità

Il caso non ha memoria, ma ha regole: chi le conosce non prevede il prossimo lancio, eppure sa che cosa accadrà dopo mille. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Descrivere un esperimento aleatorio con lo spazio campionario e gli eventi, e operare sugli eventi come sugli insiemi.
2. Calcolare probabilità con la definizione classica, contando i casi con tabelle a doppia entrata, diagrammi ad albero e il principio di moltiplicazione.
3. Confrontare le definizioni classica, frequentista e soggettiva, e interpretare la legge empirica del caso.
4. Applicare i teoremi dell'evento contrario e dell'unione, la probabilità condizionata e la probabilità del prodotto; riconoscere gli eventi indipendenti.
5. Risolvere problemi di estrazioni con e senza reimmissione e confrontare probabilità teoriche e frequenze osservate o simulate.
6. Valutare se un gioco è equo con il valore atteso e riconoscere le ipotesi di un modello probabilistico.

INDICE DEL CAPITOLO

14.1 Esperimenti aleatori ed eventi 2
14.2 La definizione classica 4
14.3 Frequenza, legge empirica del caso e altre definizioni 6
14.4 Le regole del calcolo 9
14.5 Probabilità condizionata e indipendenza 12
14.6 Probabilità e statistica 17

Matematica 2 · Parte VI · Probabilità · versione 1.0
Capitolo 14: Il calcolo delle probabilità · pagine 343–366 del volume completo · estratto per lo studio

Domani pioverà? La moneta del calcio d'inizio darà «testa»? Quanti dei 25 studenti di una classe festeggiano il compleanno nello stesso giorno? Sono domande a cui nessuno può rispondere con certezza, ma non per questo restiamo senza parole: possiamo dire che un esito è *più* o *meno* probabile di un altro, e spesso possiamo misurare quanto. Il **calcolo delle probabilità** è la parte della matematica che dà un numero all'incertezza e insegna a ragionare correttamente quando non si conosce il risultato.

In questo capitolo useremo il linguaggio degli insiemi e della logica (le operazioni di unione, intersezione e complementare, e i connettivi «e», «o», «non» studiati in *Matematica 1*), le frazioni e le percentuali, e la statistica descrittiva del primo volume, con le frequenze relative e gli istogrammi. Vedremo tre modi di definire la probabilità, le regole per calcolarla e il suo legame con i dati, fino a usarla per decidere se un gioco è equo.

14.1 Esperimenti aleatori ed eventi

14.1.1 Prevedere l'imprevedibile

Se lasciamo cadere un sasso da 5 m di altezza, la fisica ci dice in anticipo, con buona precisione, quanto tempo impiegherà a toccare terra: il fenomeno è *deterministico*, perché le stesse condizioni iniziali producono lo stesso risultato. Se invece lanciamo un dado, anche ripetendo il lancio con la massima cura non sappiamo quale faccia uscirà. Chiamiamo **esperimento aleatorio** (dal latino *alea*, «dado») un esperimento, o più in generale un fenomeno, di cui conosciamo tutti i risultati possibili ma non possiamo prevedere quale si verificherà. Sono esperimenti aleatori il lancio di una moneta, l'estrazione di una carta da un mazzo mescolato, l'estrazione dei numeri del Lotto, ma anche il tempo che farà domani in una città o il sesso di un nascituro.

14.1.2 Lo spazio campionario

L'insieme di tutti i risultati possibili di un esperimento aleatorio si chiama **spazio campionario** e si indica con la lettera greca Ω (omega); i suoi elementi si chiamano **esiti**. Gli esiti devono essere scelti in modo che, a ogni prova, se ne verifichi *uno e uno solo*. Per esempio:

- nel lancio di un dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- nel lancio di una moneta, $\Omega = \{T, C\}$ (testa, croce);
- nel lancio di due monete distinguibili, per esempio una da 1 euro e una da 2 euro, $\Omega = \{TT, TC, CT, CC\}$, dove la prima lettera indica la moneta da 1 euro: gli esiti TC e CT sono *diversi*;
- nell'estrazione di una carta da un mazzo da 40, Ω contiene le 40 carte.

Lo spazio campionario dipende da che cosa decidiamo di osservare. Lanciando due dadi possiamo registrare la coppia ordinata dei due numeri (36 esiti) oppure soltanto la loro somma (11 esiti, da 2 a 12): vedremo che la prima scelta è molto più comoda per calcolare le probabilità.

Nei giochi di carte useremo due mazzi. Il **mazzo di carte italiane** ha 40 carte divise in 4 semi (coppe, denari, bastoni, spade), ciascuno con 10 carte: dall'asso (1) al 7, poi fante, cavallo e re, che sono le tre *figure*. Il **mazzo di carte francesi** ha 52 carte in 4 semi (cuori, quadri, fiori, picche), ciascuno con 13 carte: asso, dal 2 al 10, e le tre figure jack, donna e re; cuori e quadri sono semi rossi, fiori e picche neri.

14.1.3 Gli eventi

Un **evento** è un'affermazione sull'esito di un esperimento aleatorio che, a esperimento concluso, risulta vera o falsa. Ogni evento si identifica con il sottoinsieme di Ω formato dagli esiti che lo rendono vero. Nel lancio di un dado, l'evento «esce un numero pari» è il sottoinsieme {2, 4, 6}; l'evento «esce un numero maggiore di 4» è {5, 6}. Diciamo che un evento *si verifica* quando l'esito dell'esperimento appartiene al suo sottoinsieme.

Alcuni eventi hanno un nome particolare. Un **evento elementare** contiene un solo esito, come «esce il 3», cioè {3}. L'**evento certo** è Ω stesso: si verifica sempre («esce un numero da 1 a 6»). L'**evento impossibile** è l'insieme vuoto ∅: non si verifica mai («esce il 7»). Ogni altro evento, che può verificarsi oppure no, si dice **evento aleatorio**.

14.1.4 Operazioni sugli eventi

Poiché gli eventi sono insiemi, possiamo combinarli con le operazioni insiemistiche, che corrispondono ai connettivi logici di *Matematica 1* (Figura 14.1):

- l'**evento contrario** di E, indicato con $\overline{E}$, si verifica quando E *non* si verifica: è il complementare di E rispetto a Ω;
- l'**unione** $A \cup B$ si verifica quando si verifica *almeno uno* dei due eventi (A *o* B, nel senso del «vel» latino, non esclusivo);
- l'**intersezione** $A \cap B$ si verifica quando si verificano *entrambi* gli eventi (A *e* B).

Due eventi si dicono **eventi incompatibili** se non possono verificarsi insieme, cioè se $A \cap B = \varnothing$; altrimenti si dicono **compatibili**. Nel lancio di un dado, con A = «esce un numero pari» = {2, 4, 6} e B = «esce un numero maggiore di 3» = {4, 5, 6}, si ha $A \cup B$ = {2, 4, 5, 6}, $A \cap B$ = {4, 6} e $\overline{A}$ = {1, 3, 5}: A e B sono compatibili. Invece «esce 1» ed «esce un numero pari» sono incompatibili. Un evento e il suo contrario sono sempre incompatibili, e la loro unione è l'evento certo.

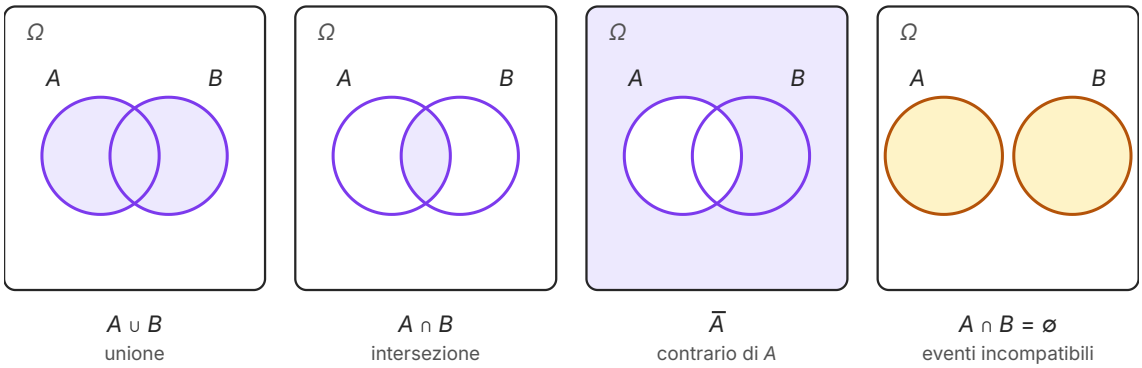


Figura 14.1 Le operazioni sugli eventi nel diagramma di Venn: il rettangolo è lo spazio campionario Ω, le zone colorate sono, da sinistra, l'unione, l'intersezione, il contrario di *A*; a destra due eventi incompatibili, che non hanno esiti in comune.

14.2 La definizione classica

14.2.1 Casi favorevoli e casi possibili

Lanciando un dado ben costruito non c'è motivo di preferire una faccia a un'altra: i sei esiti sono **equiprobabili**. L'evento «esce un numero pari» è vero in 3 dei 6 casi, e ci sembra naturale dire che ha probabilità «3 su 6». È l'idea della **definizione classica** della probabilità, formulata in modo esplicito da Pierre-Simon Laplace all'inizio dell'Ottocento ma usata già da Pascal e Fermat: se gli esiti di un esperimento sono in numero finito e tutti equiprobabili, la probabilità di un evento E è il rapporto tra il numero dei **casi favorevoli** (gli esiti che rendono vero E) e il numero dei **casi possibili**:

$$p(E) = \frac{\text{numero dei casi favorevoli}}{\text{numero dei casi possibili}}$$

Dalla definizione seguono subito tre proprietà. I casi favorevoli sono al minimo 0 e al massimo tutti, quindi $0 \le p(E) \le 1$; l'evento certo ha probabilità $p(\Omega) = 1$; l'evento impossibile ha probabilità $p(\varnothing) = 0$. Una probabilità si può scrivere come frazione, come numero decimale o in percentuale: estraendo una carta da un mazzo da 40, la probabilità di un denari è $\frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$.

14.2.2 Contare con tabelle e alberi

Per applicare la definizione classica bisogna saper *contare* i casi. Quando l'esperimento è composto da due parti, come il lancio di due dadi, conviene una **tabella a doppia entrata**: sulle

righe i risultati del primo dado, sulle colonne quelli del secondo, e in ogni casella l'esito composto. Le caselle sono $6 \cdot 6 = 36$, e se i dadi sono equilibrati e lanciati in modo indipendente le 36 coppie sono equiprobabili. Nella Figura 14.2 ogni casella riporta la somma dei due numeri.



Figura 14.2 Lo spazio campionario del lancio di due dadi: 36 coppie ordinate equiprobabili, ciascuna con la somma dei due numeri. In arancio le 6 caselle con somma 7, in viola le 6 con somma almeno 10.

ESEMPIO SVOLTO

Due dadi. Si lanciano due dadi equilibrati. Calcola la probabilità che a) la somma sia 7; b) la somma sia almeno 10; c) esca un «doppio» (due numeri uguali); d) la somma sia 2.

Casi possibili. Le coppie ordinate (primo dado; secondo dado) sono 36, tutte equiprobabili (Figura 14.2).

a) Le coppie con somma 7 sono (1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1): sono 6, sulla diagonale arancione. Quindi $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

b) Somma 10: (4; 6), (5; 5), (6; 4); somma 11: (5; 6), (6; 5); somma 12: (6; 6). In tutto $3 + 2 + 1 = 6$ casi: $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

c) I doppi sono le 6 caselle della diagonale principale, da (1; 1) a (6; 6): $p = \frac{1}{6}$.

d) Solo la coppia (1; 1): $p = \frac{1}{36}$.

Osservazione. Le somme possibili sono 11, ma *non* sono equiprobabili: la somma 7 si ottiene in 6 modi, la somma 2 in uno solo. Scrivere $p(\text{somma } 7) = \frac{1}{11}$ sarebbe un errore, perché la definizione classica vale solo per esiti equiprobabili.

Quando le fasi dell'esperimento sono più di due la tabella non basta, e si usa un **diagramma ad albero**: da un punto iniziale partono tanti rami quanti sono i risultati della prima fase; da ogni ramo partono tanti rami quanti sono i risultati della seconda fase, e così via. Ogni percorso dalla radice a una foglia è un esito. Lanciando tre monete, dalla radice partono 2 rami (T, C), da ciascuno altri 2 e da ciascuno di questi altri 2: i percorsi sono $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, cioè TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC. L'evento «escono esattamente due teste» corrisponde a TTC, TCT, CTT, e ha probabilità $\frac{3}{8}$.

In entrambi i casi abbiamo usato il **principio di moltiplicazione**: se un esperimento si svolge in due fasi, la prima con m risultati possibili e la seconda con n risultati possibili qualunque sia l'esito della prima, l'esperimento composto ha $m \cdot n$ risultati; con più fasi si moltiplicano tutti i numeri. Un bar che offre 3 tipi di panino e 4 bibite permette $3 \cdot 4 = 12$ combinazioni diverse; un codice di quattro cifre, da 0000 a 9999, si può scegliere in $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$ modi, e chi tira a indovinare ha probabilità $\frac{1}{10000}$ di trovarlo al primo tentativo. Per i problemi di questo capitolo il principio di moltiplicazione basta; le formule generali per contare permutazioni e combinazioni le studierai negli anni successivi.

14.2.3 I limiti della definizione classica

La definizione classica è semplice e potente, ma ha tre limiti. Primo: richiede un numero *finito* di esiti. Secondo: richiede che gli esiti siano *equiprobabili*, cioè che abbiano tutti la stessa probabilità; ma «stessa probabilità» usa proprio la parola che si sta definendo, e la definizione rischia di essere circolare. In pratica l'equiprobabilità si giustifica con la **simmetria** dell'oggetto: un dado perfettamente cubico e omogeneo non ha facce privilegiate. Terzo, e più grave: molti esperimenti aleatori non hanno alcuna simmetria. Una puntina da disegno lanciata sul banco cade «a punta in su» oppure «di lato», ma nessuno sa dire a priori con quale probabilità; un dado truccato o la pioggia di domani non si prestano a contare casi. Per questi eventi servono altre definizioni.

14.3 Frequenza, legge empirica del caso e altre definizioni

14.3.1 La definizione frequentista

Se vogliamo sapere con quale probabilità la puntina cade a punta in su, possiamo lanciarla molte volte e contare. In *Matematica 1* abbiamo chiamato **frequenza relativa** di un evento il rapporto $f = \frac{k}{n}$ tra il numero k di volte in cui l'evento si è verificato e il numero n delle prove. La **definizione frequentista** (o statistica) della probabilità afferma che la probabilità di un evento è la frequenza relativa con cui esso si verifica in un numero *molto grande* di prove, ese-

guite tutte nelle stesse condizioni. In questo senso, dire che un evento ha probabilità 0,3 significa che, ripetendo l'esperimento molte volte, ci aspettiamo che si verifichi circa 30 volte su 100.

La Figura 14.3 mostra che cosa succede alla frequenza relativa di «testa» quando il numero dei lanci di una moneta cresce. I lanci non sono stati fatti a mano: li ha generati un computer, con una **simulazione** che imita una moneta equilibrata. Dopo 10 lanci la frequenza relativa vale 0,2 (solo 2 teste), dopo 100 lanci vale 0,55, dopo 1000 lanci 0,499. All'inizio la curva oscilla molto; poi le oscillazioni si smorzano e la frequenza resta sempre più vicina a 0,5, il valore previsto dalla definizione classica.

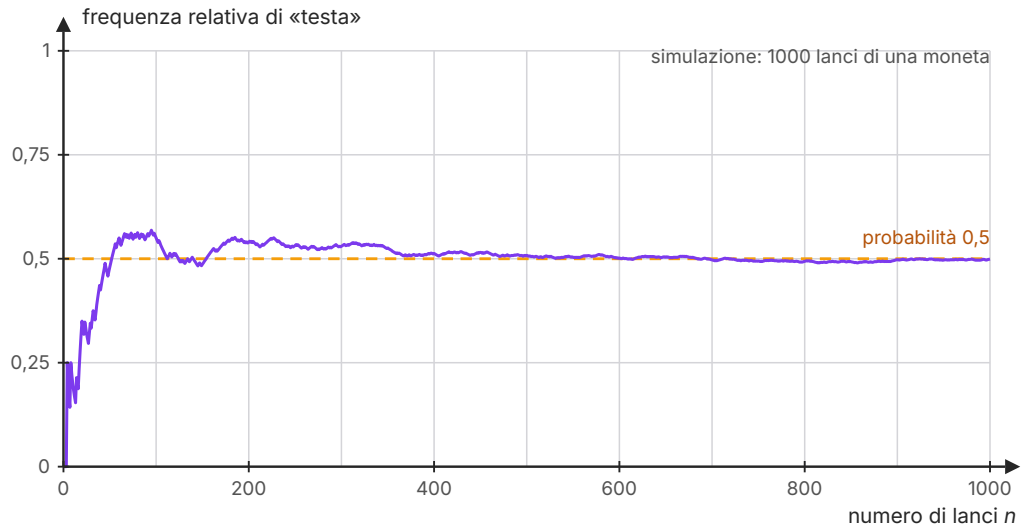


Figura 14.3 Frequenza relativa di «testa» in 1000 lanci di una moneta equilibrata (simulazione al computer con generatore di numeri casuali a seme fisso). Dopo forti oscillazioni iniziali la frequenza si stabilizza attorno alla probabilità 0,5 (linea tratteggiata).

14.3.2 La legge empirica del caso

Il comportamento della figura non è una particolarità di quella simulazione: lo si osserva ogni volta che si ripete a lungo un esperimento aleatorio. Lo riassume la **legge empirica del caso**:

Legge empirica del caso. *In una serie di prove ripetute un gran numero di volte, tutte nelle stesse condizioni, la frequenza relativa di un evento tende ad avvicinarsi alla sua probabilità, e in generale l'approssimazione migliora al crescere del numero delle prove.*

Si chiama *empirica* perché è un fatto osservato, non un teorema: in questo libro non la dimostriamo. Non dice che la frequenza *deve* coincidere con la probabilità, né che si avvicina in modo regolare; dice che, su molte prove, è difficile che se ne discosti molto.

La definizione frequentista ha il grande pregio di applicarsi anche quando non c'è simmetria: le compagnie di assicurazione stimano la probabilità di un incidente dalle frequenze osservate negli anni precedenti, e il «60% di probabilità di pioggia» di una previsione meteorolo-

gica si può leggere, in sostanza, come la frequenza con cui situazioni simili hanno portato pioggia. Anch'essa però ha dei limiti: richiede esperimenti ripetibili nelle stesse condizioni, e un numero di prove «grande» ma pur sempre finito, per cui fornisce sempre una *stima* della probabilità, non il suo valore esatto.

ERRORE FREQUENTE

La fallacia del giocatore. «Alla roulette è uscito rosso sei volte di fila: ora il nero è più probabile.» «Il 53 non esce da cento estrazioni sulla ruota di Venezia: è un numero ritardatario, conviene giocarlo.» Sono ragionamenti sbagliati. Una moneta, un dado, una pallina della roulette non hanno memoria: ogni prova è indipendente dalle precedenti, e la probabilità resta la stessa. Al Lotto, su ogni ruota si estraggono 5 numeri su 90, e la probabilità che un numero fissato sia tra gli estratti è $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ a ogni estrazione, che sia uscito la settimana prima o che manchi da anni.

Chi cade in questo errore fraintende la legge empirica del caso: la frequenza relativa si avvicina alla probabilità non perché gli esiti «mancanti» vengano recuperati, ma perché le prime prove pesano sempre meno quando il numero totale diventa grande. Se dopo 10 lanci abbiamo 7 teste e nei successivi 990 lanci escono teste e croci in parti uguali, la frequenza diventa $\frac{7 + 495}{1000} = 0{,}502$: lo scarto iniziale di 2 teste in più non è stato «compensato», ma è diventato trascurabile.

APPROFONDIMENTO · JAKOB BERNOULLI E LA LEGGE DEI GRANDI NUMERI

Il matematico svizzero Jakob Bernoulli, morto nel 1705, dedicò molti anni a capire perché le frequenze si stabilizzano. Il suo trattato *Ars conjectandi* («L'arte di congetturare») fu pubblicato nel 1713, dopo la sua morte, e contiene il primo teorema che lega in modo rigoroso probabilità e frequenza. In linguaggio moderno: se si ripete molte volte, in modo indipendente, un esperimento in cui un evento ha probabilità p, allora, fissato un margine piccolo quanto si vuole, la probabilità che la frequenza relativa dell'evento differisca da p più di quel margine diventa piccola quanto si vuole al crescere del numero delle prove.

Questo risultato, oggi noto come **legge dei grandi numeri**, è un teorema del calcolo delle probabilità e si dimostra negli studi universitari. A differenza della legge empirica del caso, non parla di ciò che *accade* in una serie di lanci reali, ma della *probabilità* che la frequenza si allontani da p.

14.3.3 La definizione soggettiva

Che probabilità ha la squadra della tua città di vincere la prossima partita? L'esperimento non è ripetibile nelle stesse condizioni, e gli esiti non sono equiprobabili: né la definizione classica né quella frequentista si applicano. Eppure un tifoso informato, o un allibratore, sa esprimere

un'opinione numerica. Il matematico italiano Bruno de Finetti (1906–1985) ha dato a questa idea una forma rigorosa con la **definizione soggettiva**: la probabilità di un evento E, secondo una certa persona, è il prezzo che essa ritiene equo pagare per ricevere 1 euro se E si verifica e nulla se E non si verifica, a patto di essere disposta anche a fare la scommessa opposta, cioè a incassare quel prezzo e pagare 1 euro se E si verifica.

La definizione richiede che la scommessa sia **coerente**: le probabilità assegnate non devono permettere a un avversario di organizzare scommesse che facciano perdere con certezza. Questa sola richiesta obbliga a rispettare le stesse regole delle altre definizioni. Per esempio, chi pagasse 0,70 € per vincere 1 € se domani piove e 0,50 € per vincere 1 € se domani *non* piove spenderebbe 1,20 € per incassare sicuramente 1 €, qualunque tempo faccia: le sue probabilità non sono coerenti, perché per un evento E e il suo contrario deve essere $p(E) + p(\overline{E}) = 1$. La probabilità soggettiva non è quindi arbitraria: persone diverse possono assegnare valori diversi a uno stesso evento, perché hanno informazioni diverse, ma ciascuna deve rispettare la coerenza.

14.3.4 Gli assiomi della probabilità

Le tre definizioni nascono da idee diverse, ma producono numeri che obbediscono alle stesse regole. Nel 1933 il matematico russo Andrej Kolmogorov propose di partire proprio da queste regole, assunte come **assiomi**, senza dire che cosa la probabilità «sia». Nella forma più semplice, adatta agli spazi campionari finiti, una probabilità è una funzione che associa a ogni evento E di Ω un numero $p(E)$ in modo che:

1. $0 \le p(E) \le 1$ per ogni evento E;
2. $p(\Omega) = 1$;
3. se A e B sono incompatibili, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

La definizione classica, quella frequentista e quella soggettiva rispettano tutte e tre gli assiomi; ciascuna è un modo diverso di *assegnare* i valori. Da questo momento ragioneremo sugli assiomi: ciò che ne dedurremo vale qualunque sia la definizione usata.

14.4 Le regole del calcolo

Dagli assiomi si ricavano, con poche righe di ragionamento, le regole che useremo in tutti i problemi. Le dimostriamo una per una: sono i primi teoremi del calcolo delle probabilità, e valgono qualunque sia la definizione con cui le probabilità sono state assegnate.

14.4.1 L'evento contrario

Il primo teorema lega la probabilità di un evento a quella del suo contrario; il secondo dice come calcolare la probabilità che si verifichi almeno uno di due eventi.

IN SINTESI

Teorema dell'evento contrario.

Ipotesi: E è un evento dello spazio campionario Ω. **Tesi:** $p(\overline{E}) = 1 - p(E)$.

Teorema della probabilità dell'unione.

Ipotesi: A e B sono eventi di Ω. **Tesi:** $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. In particolare, se A e B sono incompatibili, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Dimostrazione del teorema dell'evento contrario. Gli eventi E e $\overline{E}$ sono incompatibili e la loro unione è Ω. Per il terzo assioma $p(E) + p(\overline{E}) = p(\Omega)$, e per il secondo $p(\Omega) = 1$. Quindi $p(\overline{E}) = 1 - p(E)$. c.v.d.

Come conseguenza, $p(\varnothing) = 1 - p(\Omega) = 0$. Il teorema è utilissimo quando l'evento contrario è più semplice da contare: la probabilità di *non* estrarre una figura da un mazzo da 40 è $1 - \frac{12}{40} = \frac{28}{40} = \frac{7}{10}$. Soprattutto, è lo strumento giusto per tutti gli eventi del tipo «**almeno uno**»: l'evento contrario di «almeno un 6» è «nessun 6», molto più facile da calcolare, come vedremo studiando la probabilità del prodotto.

14.4.2 L'unione di due eventi

Se A e B sono incompatibili la probabilità dell'unione è la somma delle probabilità: è il terzo assioma. Estraendo una carta da un mazzo da 40, «esce un re» e «esce un asso» sono incompatibili, e $p(\text{re} \cup \text{asso}) = \frac{4}{40} + \frac{4}{40} = \frac{1}{5}$. La proprietà si estende a tre o più eventi a due a due incompatibili: lanciando due dadi, la probabilità che la somma sia almeno 10 è $p(10) + p(11) + p(12) = \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$, come avevamo trovato contando.

Se invece A e B sono compatibili, sommando $p(A) + p(B)$ si contano *due volte* gli esiti dell'intersezione $A \cap B$, che appartengono a entrambi (si guardi la Figura 14.1): per questo nel teorema si sottrae una volta $p(A \cap B)$.

Dimostrazione del teorema della probabilità dell'unione. Scomponiamo $A \cup B$ nell'unione di due eventi incompatibili: A e $B \cap \overline{A}$ (gli esiti di B che non stanno in A). Per il terzo assioma $p(A \cup B) = p(A) + p(B \cap \overline{A})$. Anche B si scompone in due eventi incompatibili, $B \cap A$ e $B \cap \overline{A}$, quindi $p(B) = p(A \cap B) + p(B \cap \overline{A})$, cioè $p(B \cap \overline{A}) = p(B) - p(A \cap B)$. Sostituendo nella prima uguaglianza si ottiene $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. Se A e B sono incompatibili, $A \cap B = \varnothing$ e $p(A \cap B) = 0$. c.v.d.

ESEMPIO SVOLTO

Una carta da un mazzo da 40. Si estrae una carta da un mazzo di carte italiane ben mescolato. Calcola la probabilità degli eventi F = «esce una figura», D = «esce una carta di denari», «esce una figura o un denari», «non esce né una figura né un denari».

Gli eventi. Le figure sono fante, cavallo e re di ciascuno dei 4 semi: $4 \cdot 3 = 12$ carte, e $p(F) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$. Le carte di denari sono 10, e $p(D) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$.

Compatibili o no? F e D sono compatibili: le tre figure di denari appartengono a entrambi, quindi $p(F \cap D) = \frac{3}{40}$.

Unione. $p(F \cup D) = \frac{12}{40} + \frac{10}{40} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40}$. Controllo contando direttamente: le 12 figure più i 7 denari che non sono figure (dall'asso al 7) danno 19 carte.

Né l'uno né l'altro. «Né figura né denari» è il contrario di «figura o denari»: $p = 1 - \frac{19}{40} = \frac{21}{40} = 0{,}525$.

APPROFONDIMENTO · PASCAL, FERMAT E IL CAVALIERE DE MÉRÉ

La nascita del calcolo delle probabilità come teoria matematica si fa risalire alla corrispondenza tra Blaise Pascal e Pierre de Fermat del 1654, in cui i due matematici francesi risolsero alcuni problemi sui giochi d'azzardo, primo fra tutti il «problema delle parti»: come dividere la posta di una partita interrotta prima della fine. In una delle lettere Pascal riferisce anche un dubbio di Antoine Gombaud, il cavaliere de Méré, giocatore e uomo di mondo. Si sapeva per esperienza che scommettere di ottenere almeno un 6 in 4 lanci di un dado era vantaggioso; ragionando per proporzione, sembrava che dovesse esserlo allo stesso modo scommettere di ottenere almeno un doppio 6 in 24 lanci di due dadi (36 casi invece di 6, quindi 24 lanci invece di 4). Ma la seconda scommessa risultava svantaggiosa.

Con il teorema dell'evento contrario e la regola del prodotto, che incontreremo tra poco, il mistero si scioglie. In un lancio la probabilità di non ottenere 6 è $\frac{5}{6}$, in 4 lanci indipendenti è $(\frac{5}{6})^4$, e quindi $p(\text{almeno un 6}) = 1 - (\frac{5}{6})^4 = \frac{671}{1296} \approx 0{,}518$. Per i due dadi la probabilità di non fare doppio 6 in un lancio è $\frac{35}{36}$, e $p(\text{almeno un doppio 6 in 24 lanci}) = 1 - (\frac{35}{36})^{24} \approx 0{,}491$. La prima scommessa è favorevole, la seconda è sfavorevole: di poco, ma abbastanza da accorgersene giocando molte volte. La «regola di proporzione» era semplicemente falsa.

14.5 Probabilità condizionata e indipendenza

14.5.1 La probabilità condizionata

Spesso un'informazione cambia le nostre valutazioni. La Tabella 14.1 riporta i dati (inventati) di un'indagine sui 200 studenti di una scuola: per ciascuno si è registrato se abita entro 3 km dalla scuola e se ci arriva in bicicletta.

Tabella 14.1 Studenti di una scuola secondo la distanza da casa e il mezzo usato (dati inventati).

	in bicicletta	con altri mezzi	totale
abita entro 3 km	48	32	80
abita oltre 3 km	12	108	120
totale	60	140	200

Scegliamo a caso uno studente. Con B = «va in bicicletta» e V = «abita entro 3 km», la probabilità che vada in bicicletta è $p(B) = \frac{60}{200} = 0{,}3$. Ma se sappiamo che abita entro 3 km, i casi possibili non sono più 200: sono solo gli 80 studenti della prima riga, e di questi 48 vanno in bicicletta. La probabilità diventa $\frac{48}{80} = 0{,}6$, il doppio. Questa nuova probabilità si chiama **probabilità condizionata** di B dato V e si scrive $p(B|V)$ (si legge «p di B dato V»).

Osserviamo che $\frac{48}{80} = \frac{48/200}{80/200} = \frac{p(B \cap V)}{p(V)}$. In generale, se $p(V) \neq 0$:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

La probabilità condizionata ha un'interpretazione semplice: sapere che B si è verificato *restringe* lo spazio campionario a B, e dentro B contano come favorevoli solo gli esiti di $A \cap B$. Lanciando due dadi, la probabilità che la somma sia 8 sapendo che il primo dado ha dato 3 è $\frac{1}{6}$: nella riga del 3 (6 caselle della Figura 14.2) solo la coppia (3; 5) ha somma 8. Invece la probabilità che il primo dado abbia dato 3 sapendo che la somma è 8 è $\frac{1}{5}$: le coppie con somma 8 sono 5, e una sola comincia con 3. In generale **$p(A|B)$ e $p(B|A)$ sono numeri diversi**, e scambiarli è un errore grave: la probabilità che uno studente che va in bici abiti vicino, $p(V|B) = \frac{48}{60} = 0{,}8$, non è la stessa di $p(B|V) = 0{,}6$.

14.5.2 La probabilità del prodotto

Ricavando $p(A \cap B)$ dalla definizione si ottiene la **probabilità del prodotto** (o dell'intersezione): $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A)$. Serve quando l'esperimento si svolge in fasi e conosciamo la probabilità di ciascuna fase sapendo come è andata la precedente. Un'urna contiene 3 palline rosse e 2 blu; se ne estraggono due, una dopo l'altra, *senza rimettere* la prima nell'urna. La probabilità che siano entrambe rosse è $p(R_1) \cdot p(R_2|R_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$: dopo aver estratto una rossa restano 4 palline, di cui 2 rosse.

14.5.3 Eventi indipendenti

Nell'esempio delle biciclette l'informazione V ha cambiato la probabilità di B. A volte invece un'informazione non cambia nulla: lanciando un dado e una moneta, sapere che la moneta ha dato testa non modifica la probabilità che il dado dia 6. Diciamo che A e B sono **eventi indipendenti** se $p(A|B) = p(A)$, cioè se il verificarsi di B non modifica la probabilità di A. Sostituendo nella formula del prodotto si ottiene la forma più usata, che è simmetrica e vale anche quando una probabilità è nulla: A e B sono indipendenti se e solo se

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Con due dadi, A = «il primo dado dà 2» e S = «la somma è 7» sono indipendenti: $p(A) = \frac{1}{6}$, $p(S) = \frac{1}{6}$ e $p(A \cap S) = p((2; 5)) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$. Invece A e «la somma è 8» non sono indipendenti: $p(A \cap \text{somma 8}) = \frac{1}{36}$, mentre $p(A) \cdot p(\text{somma 8}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{216}$. L'indipendenza va dunque *verificata*, non intuita. Nei lanci ripetuti di monete e dadi, invece, l'indipendenza tra un lancio e l'altro è un'ipotesi del modello, giustificata dal fatto che gli oggetti non hanno memoria: la probabilità di ottenere tre teste in tre lanci è $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$, come avevamo trovato con l'albero.

ERRORE FREQUENTE

Incompatibili non vuol dire indipendenti. Molti studenti confondono i due concetti, perché entrambi sembrano dire che gli eventi «non hanno a che fare» l'uno con l'altro. È il contrario: se A e B sono incompatibili e hanno probabilità non nulla, sapere che si è verificato B ci dice con certezza che A *non* si è verificato, quindi $p(A|B) = 0 \neq p(A)$. In formule: $p(A \cap B) = 0$, mentre $p(A) \cdot p(B) > 0$.

Nel lancio di un dado, «esce 1» ed «esce un numero pari» sono incompatibili e dipendenti. Lanciando un dado e una moneta, «il dado dà 1» e «la moneta dà testa» sono compatibili (possono verificarsi insieme, con probabilità $\frac{1}{12}$) e indipendenti. Ricorda: per l'**unione** conta l'incompatibilità, per l'**intersezione** l'indipendenza.

IN SINTESI

Probabilità condizionata: $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$, con $p(B) \neq 0$.

Probabilità del prodotto: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A)$.

Eventi indipendenti: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$, cioè $p(A|B) = p(A)$ quando $p(B) \neq 0$.

Sugli alberi: lungo un percorso le probabilità si *moltiplicano*; le probabilità di percorsi diversi (incompatibili) si *sommano*; i rami che escono da uno stesso nodo hanno probabilità con somma 1.

COLLEGAMENTI

Il problema dei compleanni. In una classe di 23 studenti, quanto è probabile che almeno due compiano gli anni lo stesso giorno? Quasi tutti rispondono «pochissimo», perché i giorni sono 365. Supponiamo, per semplicità, che nessuno sia nato il 29 febbraio e che i 365 giorni siano equiprobabili. Calcoliamo l'evento contrario, «tutti i compleanni sono diversi», con la regola del prodotto: il secondo studente deve evitare il compleanno del primo (probabilità $\frac{364}{365}$), il terzo i due precedenti ($\frac{363}{365}$), e così via fino al ventitreesimo ($\frac{343}{365}$). Quindi

$$p(\text{almeno due compleanni uguali}) = 1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{343}{365} \approx 0{,}507$$

Con 23 persone è già più probabile che sì che no; con 30 la probabilità supera il 70%. Sorprende perché pensiamo al *nostro* compleanno, mentre le coppie di studenti sono moltissime. È anche un buon esempio di modello: nella realtà le nascite non sono distribuite in modo perfettamente uniforme durante l'anno, e il modello è un'approssimazione.

14.5.4 Estrazioni con e senza reimmissione

Quando si estraggono più oggetti da un'urna o da un mazzo, bisogna distinguere due situazioni. In un'**estrazione con reimmissione** l'oggetto estratto viene rimesso nell'urna prima dell'estrazione successiva: la composizione dell'urna non cambia e le estrazioni sono indipendenti. In un'**estrazione senza reimmissione** l'oggetto estratto resta fuori: la composizione cambia e le estrazioni successive dipendono dalle precedenti. La Figura 14.4 rappresenta con un albero le due estrazioni senza reimmissione dall'urna con 3 palline rosse e 2 blu.

ESEMPIO SVOLTO

L'urna con 3 rosse e 2 blu. Si estraggono due palline senza reimmissione. Calcola la probabilità che a) siano dello stesso colore; b) almeno una sia blu; c) la seconda sia rossa. d) Ripeti a) con reimmissione.

L'albero. Alla prima estrazione $p(R_1) = \frac{3}{5}$ e $p(B_1) = \frac{2}{5}$. Se la prima è rossa restano 2 rosse e 2 blu, quindi i rami valgono $\frac{2}{4}$ e $\frac{2}{4}$; se la prima è blu restano 3 rosse e 1 blu, con rami $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$ (Figura 14.4). Le probabilità dei quattro percorsi sono $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{10}$, e la loro somma è 1.

a) «Stesso colore» è l'unione dei percorsi rossa-rossa e blu-blu, incompatibili: $p = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$.

b) Il contrario di «almeno una blu» è «entrambe rosse»: $p = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

c) La seconda è rossa nei percorsi rossa-rossa e blu-rossa: $p = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$. È la stessa probabilità della prima estrazione: chi non conosce l'esito della prima non ha informazioni in più sulla seconda.

d) Con reimmissione le estrazioni sono indipendenti e ogni volta $p(R) = \frac{3}{5}$, $p(B) = \frac{2}{5}$: $p = (\frac{3}{5})^2 + (\frac{2}{5})^2 = \frac{9}{25} + \frac{4}{25} = \frac{13}{25} = 0{,}52$, un po' più di prima, perché rimettendo la pallina si rende più facile ripescare lo stesso colore.

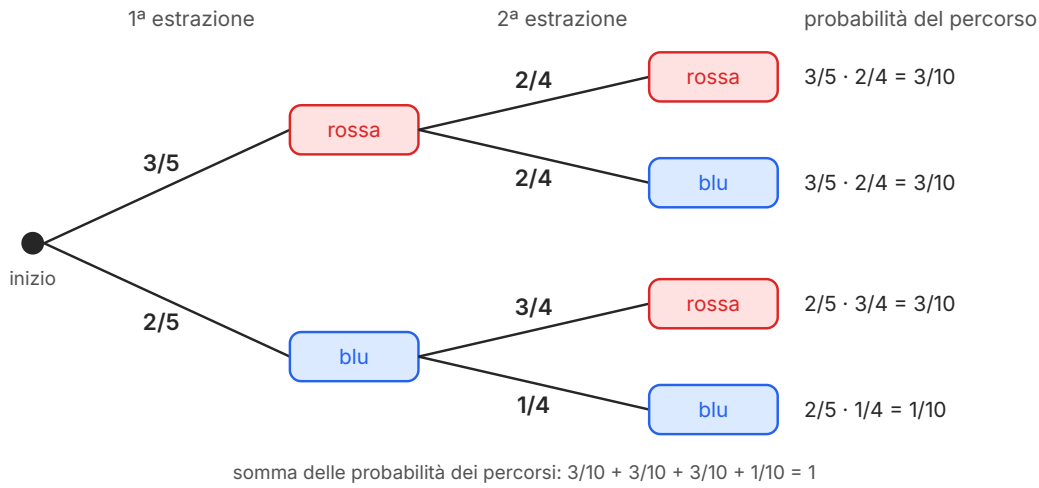


Figura 14.4 Diagramma ad albero di due estrazioni senza reimmissione da un'urna con 3 palline rosse e 2 blu. Sui rami della seconda estrazione ci sono le probabilità condizionate; la probabilità di ogni percorso è il prodotto delle probabilità dei suoi rami.

APPROFONDIMENTO · IL PROBLEMA DI MONTY HALL

Il problema prende il nome dal conduttore di un quiz televisivo americano. Un concorrente sta davanti a tre porte chiuse: dietro una c'è un'automobile, dietro le altre due una capra. Il concorrente sceglie una porta; il conduttore, che sa dov'è l'auto, apre sempre una delle altre due porte, scegliendo una capra, e poi offre al concorrente di cambiare la propria scelta con l'ultima porta rimasta chiusa. Conviene cambiare?

L'intuizione dice che, rimaste due porte, l'auto ha probabilità $\frac{1}{2}$ di stare dietro ciascuna. È sbagliato. La prima scelta è giusta con probabilità $\frac{1}{3}$ e sbagliata con probabilità $\frac{2}{3}$. Se è giusta, chi cambia perde; se è sbagliata, il conduttore è *costretto* ad aprire l'unica altra porta con la capra, e chi cambia trova l'auto. Quindi cambiando si vince con probabilità $\frac{2}{3}$, restando con $\frac{1}{3}$. L'apertura della porta non è un evento casuale come il lancio di un dado: porta un'informazione, perché il conduttore sceglie sapendo dov'è l'auto. Se il conduttore aprisse una porta a caso, potendo anche scoprire l'auto, il calcolo sarebbe diverso: il risultato dipende dalle ipotesi del modello. Si può verificare con una simulazione al foglio di calcolo, o giocando molte volte in classe con tre carte.

14.6 Probabilità e statistica

14.6.1 Frequenze osservate e probabilità teoriche

La legge empirica del caso suggerisce un controllo sperimentale delle probabilità calcolate. Prendiamo la somma di due dadi: le probabilità esatte da 2 a 12 sono $\frac{1}{36}$, $\frac{2}{36}$, ..., $\frac{6}{36}$ (per il 7), ..., $\frac{1}{36}$, e formano la **distribuzione di probabilità** della somma: a ogni valore possibile associano la sua probabilità, e la loro somma è 1. Nella Figura 14.5 questa distribuzione è disegnata come un istogramma, con le barre alte quanto le probabilità; i punti arancioni sono le frequenze relative ottenute in 360 lanci simulati al computer.

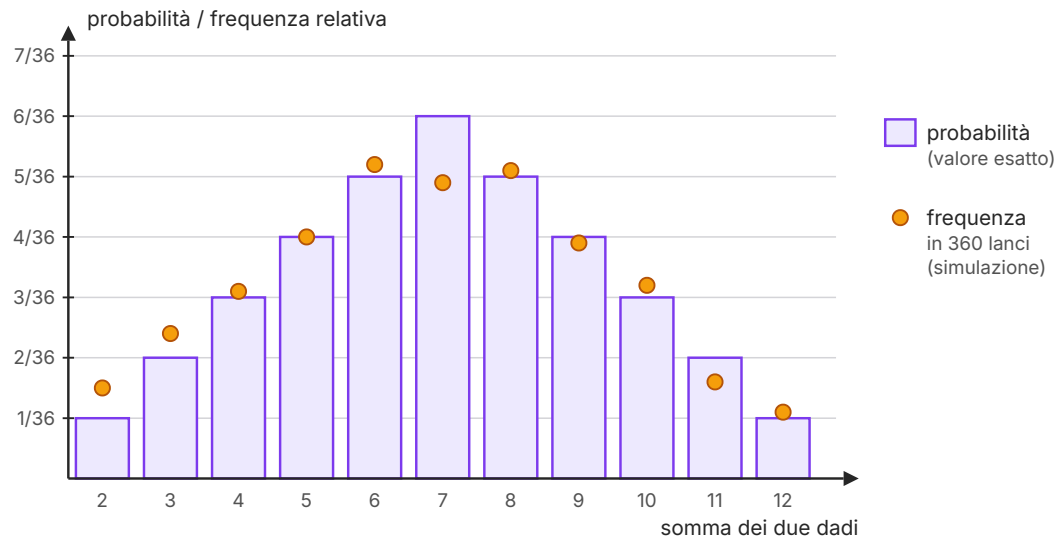


Figura 14.5 Distribuzione di probabilità della somma di due dadi (barre: valori esatti, da 1/36 a 6/36) e frequenze relative osservate in 360 lanci simulati al computer (punti; simulazione con seme fisso).

L'accordo è buono ma non perfetto. Le probabilità prevedono, su 360 lanci, circa $360 \cdot \frac{6}{36} = 60$ volte la somma 7, ma nella simulazione il 7 è uscito 49 volte, meno del 6 (52) e dell'8 (51). Non c'è nulla di strano: 360 prove sono ancora poche, e le frequenze oscillano attorno alle probabilità. Con 3600 o 36 000 lanci le differenze relative diventerebbero di regola più piccole. Lo stesso esperimento si può fare in classe con dadi veri, sommando i lanci di tutti gli studenti.

Un foglio di calcolo permette di simulare migliaia di prove in pochi secondi. La funzione CASUALE() restituisce un numero decimale «casuale» compreso tra 0 (incluso) e 1 (escluso); la

funzione CASUALE.TRA(1; 6) restituisce un numero intero da 1 a 6, come un dado. Una colonna con la formula =CASUALE.TRA(1; 6)+CASUALE.TRA(1; 6) copiata in 1000 righe simula 1000 lanci di due dadi, e con la funzione CONTA.SE si contano le uscite di ciascuna somma. I numeri prodotti dal computer sono in realtà calcolati con un algoritmo (si chiamano *pseudocasuali*), ma per questi scopi si comportano come veri risultati casuali.

14.6.2 Tabelle a doppia entrata e indipendenza statistica

Nella Tabella 14.1 la frequenza relativa di chi va in bicicletta è 0,3 sul totale, ma 0,6 tra chi abita entro 3 km e 12/120 = 0,1 tra chi abita più lontano. I due caratteri «distanza» e «mezzo di trasporto» sono legati. Se invece la frequenza relativa di chi va in bici fosse la stessa, 0,3, in ogni riga (24 studenti su 80 e 36 su 120), conoscere la distanza non darebbe alcuna informazione sul mezzo: in statistica si dice che i due caratteri sono **statisticamente indipendenti**. È l'analogo, sui dati, dell'indipendenza tra eventi: la frequenza relativa di ogni casella è il prodotto delle frequenze relative dei totali di riga e di colonna. Nella tabella reale, per esempio, $\frac{48}{200} = 0{,}24$, mentre $\frac{80}{200} \cdot \frac{60}{200} = 0{,}12$.

14.6.3 Valore atteso e gioco equo

Probabilità e decisioni vanno spesso insieme. Supponiamo di partecipare a un gioco che, a ogni partita, può far guadagnare o perdere somme diverse con probabilità note. Il **valore atteso** del guadagno è la somma dei guadagni possibili, ciascuno moltiplicato per la sua probabilità (le perdite si contano come guadagni negativi). Per la legge empirica del caso, su molte partite il guadagno medio per partita tende ad avvicinarsi al valore atteso. Un gioco si dice **gioco equo** se il valore atteso del guadagno è zero: su molte partite nessuno dei due giocatori è avvantaggiato. Con una sola vincita possibile G, ottenuta con probabilità p, e una perdita s con probabilità $1 - p$, il gioco è equo quando $p \cdot G - (1 - p) \cdot s = 0$.

ESEMPIO SVOLTO

Una scommessa sul 7. Si scommette 1 € che la somma di due dadi sarà 7. a) Il banco, in caso di vittoria, restituisce la puntata e paga altri 5 €: il gioco è equo? b) E se paga solo 4 €? c) Quale dovrebbe essere la vincita netta per rendere equo un gioco in cui si scommette 1 € sulla somma 12?

a) La probabilità di vincere è $p(\text{somma } 7) = \frac{1}{6}$. Il guadagno è +5 € con probabilità $\frac{1}{6}$ e −1 € con probabilità $\frac{5}{6}$. Valore atteso: $\frac{1}{6} \cdot 5 - \frac{5}{6} \cdot 1 = 0$. Il gioco è equo.

b) $\frac{1}{6} \cdot 4 - \frac{5}{6} \cdot 1 = -\frac{1}{6} \approx -0{,}17$ €. In media il giocatore perde circa 17 centesimi a partita: su 600 partite, la perdita attesa è di 100 €. Il gioco è favorevole al banco.

c) $p(\text{somma } 12) = \frac{1}{36}$. Indicata con G la vincita netta, deve essere $\frac{1}{36} \cdot G - \frac{35}{36} \cdot 1 = 0$, cioè $G = 35$ €: la vincita netta equa è pari al rapporto tra la probabilità di perdere e quella di vincere, 35 : 1.

Osservazione. Nei giochi d'azzardo autorizzati il valore atteso è sempre negativo per il giocatore: è il margine con cui chi organizza il gioco si garantisce un guadagno. Nessuna «strategia» basata sui risultati precedenti può cambiarlo, perché le prove sono indipendenti.

14.6.4 Il modello probabilistico

Nel capitolo 9 abbiamo visto che un modello matematico descrive un fenomeno reale sotto certe ipotesi, e che va giudicato confrontando le sue previsioni con i dati. Anche ogni calcolo di probabilità poggia su un **modello probabilistico**: uno spazio campionario, una probabilità assegnata agli eventi e, spesso, alcune ipotesi semplificatrici. Le più comuni sono due. L'**equiprobabilità** degli esiti, giustificata dalla simmetria di dadi, monete e mazzi mescolati con cura. L'**indipendenza** tra prove successive, giustificata dal fatto che un dado non ricorda i lanci precedenti.

Un modello può fallire perché le sue ipotesi non valgono. Un dado consumato o truccato non ha facce equiprobabili; le nascite non sono distribuite in modo uniforme nei giorni dell'anno; due pezzi difettosi prodotti dalla stessa macchina in un giorno di guasto non sono eventi indipendenti; nel problema di Monty Hall chi immagina «due porte equiprobabili» usa un modello che ignora l'informazione data dal conduttore. Come per i modelli del capitolo 9, la verifica sperimentale è decisiva: se le frequenze osservate in moltissime prove si allontanano in modo sistematico dalle probabilità calcolate, il modello va rivisto. Con controlli di questo tipo si può scoprire una roulette difettosa o tenere sotto controllo la qualità di una produzione industriale.

SINTESI

- Un esperimento aleatorio ha più esiti possibili, di cui non si sa prevedere quale si verificherà; il loro insieme è lo spazio campionario Ω. Un evento è un sottoinsieme di Ω: elementare, certo (Ω), impossibile (∅) o aleatorio.
- Contrario $\overline{E}$, unione $A \cup B$ («o»), intersezione $A \cap B$ («e»); A e B sono incompatibili se $A \cap B = \varnothing$.
- Definizione classica: $p(E)$ = casi favorevoli / casi possibili, solo per esiti in numero finito ed equiprobabili. Si conta con tabelle a doppia entrata, alberi e principio di moltiplicazione.
- Definizione frequentista: la probabilità è la frequenza relativa su un gran numero di prove nelle stesse condizioni. La legge empirica del caso è un fatto osservato, non un teorema; il teorema di Bernoulli (*Ars conjectandi*, 1713) ne è la controparte matematica.
- Definizione soggettiva (de Finetti): la probabilità è il prezzo equo di una scommessa coerente che paga 1 se l'evento si verifica.
- Assiomi: $0 \le p(E) \le 1$, $p(\Omega) = 1$, additività per eventi incompatibili. Tutte le definizioni li rispettano.
- Evento contrario: $p(\overline{E}) = 1 - p(E)$, la via più rapida per gli eventi «almeno uno». Unione: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- Probabilità condizionata $p(A|B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$; probabilità del prodotto $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A)$. $p(A|B)$ e $p(B|A)$ sono in generale diverse.
- A e B sono indipendenti se $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. Eventi incompatibili con probabilità non nulla sono sempre dipendenti. Estrazioni con reimmissione: indipendenti; senza reimmissione: dipendenti.
- Sugli alberi le probabilità si moltiplicano lungo i rami e si sommano tra percorsi diversi. Dadi e monete non hanno memoria: i «numeri ritardatari» non sono più probabili.
- Valore atteso del guadagno: somma dei guadagni per le loro probabilità; un gioco è equo se il valore atteso è zero. Ogni calcolo poggia su un modello probabilistico, da confrontare con le frequenze osservate.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Nel lancio di un dado, l'evento «esce 7» è:

   A. certo
   B. impossibile
   C. aleatorio
   D. elementare

2. ● Si lanciano due monete distinguibili. Lo spazio campionario ha:

   A. 2 esiti

   B. 3 esiti

   C. 4 esiti

   D. 6 esiti

3. ● Da un mazzo di 40 carte italiane si estrae una carta. La probabilità che sia un re è:

   A. $\frac{1}{10}$

   B. $\frac{1}{4}$

   C. $\frac{1}{40}$

   D. $\frac{1}{13}$

4. ● Se $p(E) = 0{,}35$, allora $p(\overline{E})$ vale:

   A. $-0{,}35$

   B. 0,35

   C. 1,35

   D. 0,65

5. ●● A e B sono eventi incompatibili con $p(A) = 0{,}2$ e $p(B) = 0{,}5$. Allora $p(A \cup B)$ è:

   A. 0,7

   B. 0,1

   C. 0,6

   D. 1

6. ●● Una moneta equilibrata ha dato testa in 5 lanci consecutivi. Al sesto lancio la probabilità di testa è:

   A. minore di ½, perché «tocca» a croce

   B. ½

   C. maggiore di ½, perché la moneta «è in serie»

   D. $\frac{1}{64}$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Due eventi incompatibili hanno intersezione vuota. b) La probabilità di un evento può valere 1,2. c) Due eventi incompatibili con probabilità non nulla sono indipendenti. d) La legge empirica del caso è un teorema che si dimostra a partire dagli assiomi.

8. ● Completa. Lo spazio campionario Ω è l'insieme … di un esperimento aleatorio. Un evento è un … di Ω. L'evento contrario di E si verifica quando … . Due eventi sono incompatibili quando … . Secondo la definizione classica, la probabilità è il rapporto tra … e … , purché gli esiti siano … .

9. ●● Si lancia un dado. A = «esce un numero dispari», B = «esce un numero minore di 3». Scrivi come insiemi gli eventi A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$ e calcolane le probabilità. A e B sono incompatibili?

Calcolare

10. ● Un'urna contiene 4 palline rosse, 5 blu e 3 bianche. Si estrae una pallina. Calcola la probabilità che sia a) rossa; b) non blu; c) rossa o bianca.

11. ● Si lanciano due dadi. Calcola la probabilità che a) la somma sia 8; b) la somma sia al più 4; c) i due numeri siano uguali; d) la somma sia dispari.

12. ● Si lanciano tre monete. Disegna l'albero degli esiti e calcola la probabilità di a) nessuna testa; b) almeno due teste; c) almeno una testa.

13. ●● Da un mazzo di 52 carte francesi si estrae una carta. Calcola la probabilità che sia a) di cuori o una figura; b) un asso nero; c) né di cuori né una figura.

14. ●● Due eventi A e B hanno $p(A) = 0{,}4$, $p(B) = 0{,}5$ e $p(A \cap B) = 0{,}15$. Calcola a) $p(A \cup B)$; b) la probabilità che non si verifichi nessuno dei due; c) $p(A|B)$ e $p(B|A)$. d) A e B sono indipendenti?

15. ●● Da un mazzo di 40 carte si estraggono due carte. Calcola la probabilità che siano entrambe di denari a) senza reimmissione; b) con reimmissione.

16. ●● Si lancia un dado tre volte. Calcola la probabilità di ottenere a) tre 6; b) nessun 6; c) almeno un 6.

17. ●● Si lanciano due dadi. Calcola a) la probabilità che la somma sia 8 sapendo che il primo dado ha dato 3; b) la probabilità che il primo dado abbia dato 3 sapendo che la somma è 8. Spiega perché i due risultati sono diversi.

18. ●● A e B sono eventi indipendenti con $p(A) = 0{,}3$ e $p(B) = 0{,}6$. Calcola $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$ e la probabilità che non si verifichi né A né B, in due modi diversi.

19. ●● In una classe il 70% degli studenti ha studiato per la verifica. Chi ha studiato la supera con probabilità 0,9; chi non ha studiato con probabilità 0,3. Disegna l'albero e calcola la probabilità che uno studente scelto a caso abbia superato la verifica.

Dimostrare e argomentare

20. ●● Dimostra, a partire dagli assiomi, che se $A \subseteq B$ allora $p(A) \leq p(B)$. *Suggerimento:* scrivi B come unione di due eventi incompatibili.

21. ●● Trova l'errore. «Lanciando due monete i risultati possibili sono tre: due teste, due croci, una testa e una croce. Quindi la probabilità di ottenere una testa e una croce è $\frac{1}{3}$.»

22. ●● Spiega perché due eventi incompatibili, entrambi con probabilità diversa da zero, non possono essere indipendenti. Fai un esempio con il lancio di un dado.

23. ●●● Dimostra che, se A e B sono indipendenti, anche A e $\overline{B}$ sono indipendenti.

24. ●● Luca dice: «Al Lotto il 27 non esce sulla ruota di Napoli da 80 estrazioni. Per la legge empirica del caso la sua frequenza deve tornare vicino alla probabilità, quindi ora è più probabile che esca.» Spiega l'errore di Luca.

Problemi

25. ●● Su 250 candidati all'esame di teoria per la patente, 150 hanno seguito un corso in autoscuola: di questi 120 hanno superato l'esame. Dei 100 che non hanno seguito il corso, 60 l'hanno superato (dati inventati). Si sceglie a caso un candidato. a) Organizza i dati in una tabella a doppia entrata. b) Calcola la probabilità che abbia superato l'esame. c) Calcola la probabilità che l'abbia superato sapendo che ha seguito il corso, e sapendo che non l'ha seguito. d) Calcola la probabilità che abbia seguito il corso sapendo che ha superato l'esame. e) Superare l'esame e seguire il corso sono eventi indipendenti?

26. ●● Un impianto ha due allarmi che funzionano in modo indipendente: il primo scatta in caso di pericolo con probabilità 0,95, il secondo con probabilità 0,9. Calcola la probabilità che, in caso di pericolo, a) scattino entrambi; b) non scatti nessuno; c) scatti almeno un allarme.

27. ●● Per partecipare a un gioco si pagano 2 €; si lanciano due dadi e, se la somma è almeno 11, si ricevono 20 €. a) Calcola il valore atteso del guadagno netto del giocatore. b) Il gioco è equo? c) Quanto dovrebbe ricevere chi vince perché il gioco sia equo?

28. ●● Una macchina produce pezzi difettosi con probabilità 0,05, in modo indipendente da un pezzo all'altro. Si controllano due pezzi. Calcola la probabilità che a) siano entrambi buoni; b) almeno uno sia difettoso. c) Quale ipotesi del modello potrebbe non valere nella realtà?

29. ●●● Il gioco di Monty Hall si fa con 4 porte: dietro una c'è l'auto, dietro le altre tre una capra. Il concorrente sceglie una porta; il conduttore, che sa dov'è l'auto, apre una delle altre porte con una capra; il concorrente cambia scegliendo a caso una delle due porte chiuse rimaste. Calcola la probabilità che vinca e confrontala con quella di chi non cambia.

30. ●● Un test ha 4 domande, ciascuna con 4 risposte di cui una sola giusta. Uno studente risponde a caso a tutte. Calcola la probabilità che a) risponda bene a tutte; b) non ne indovini nessuna; c) ne indovini almeno una.

Con il computer

31. ●● In un foglio di calcolo scrivi nella cella A1 la formula =CASUALE.TRA(0; 1) (1 = testa, 0 = croce) e copiala fino alla riga 1000. Nella colonna B calcola il numero di teste fino a quella riga (B1: =A1; B2: =B1+A2, e così via) e nella colonna C la frequenza relativa (C2: =B2/RIF.RIGA()). a) Costruisci il grafico della colonna C e confrontalo con la Figura 14.3. b) Premi più volte il tasto di ricalcolo: che cosa cambia nel grafico e che cosa resta uguale?

32. ●● Simula con il foglio di calcolo 720 lanci di due dadi, con la formula =CASUALE.TRA(1; 6)+CASUALE.TRA(1; 6). Con CONTA.SE conta quante volte esce ogni somma da 2 a 12 e affianca a ogni conteggio il numero di uscite previsto dalla probabilità. a) Quali sono i valori previsti? b) Costruisci i due istogrammi e commenta le differenze.

Verso la verifica

33. ●● Un'urna contiene 6 palline bianche e 4 nere. Si estraggono due palline senza reimmissione. a) Disegna l'albero con le probabilità sui rami. b) Calcola la probabilità che le palline siano dello stesso colore. c) Calcola la probabilità che almeno una sia nera. d) Ripeti b) nel caso di estrazioni con reimmissione.

34. ●● Si lanciano due dadi. A = «il primo dado dà 4», S = «la somma è 7», T = «la somma è 10». a) A e S sono indipendenti? b) A e T sono indipendenti? c) S e T sono incompatibili? Sono indipendenti?

35. ●●● *Sfida.* Quante volte bisogna lanciare un dado, come minimo, perché la probabilità di ottenere almeno un 6 superi 0,9? Usa la calcolatrice e spiega il ragionamento.

PER APPROFONDIRE

- [MLO] Mlodinow, *La passeggiata dell'ubriaco*: il caso nella vita quotidiana, la fallacia del giocatore, il problema di Monty Hall e la nascita della probabilità con Cardano, Pascal e Fermat.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: la corrispondenza tra Pascal e Fermat e l'*Ars conjectandi* di Jakob Bernoulli.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: scegliere lo spazio campionario giusto, passare all'evento contrario, controllare il risultato con un caso più semplice.

Glossario del capitolo

Definizione classica
la probabilità di un evento è il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili, se gli esiti sono in numero finito ed equiprobabili.

Definizione frequentista
la probabilità di un evento è la frequenza relativa con cui si verifica in un numero molto grande di prove eseguite nelle stesse condizioni.

Definizione soggettiva
la probabilità di un evento è il prezzo che una persona ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica, in una scommessa coerente (de Finetti).

Diagramma ad albero
schema in cui ogni fase di un esperimento genera rami; ogni percorso dalla radice a una foglia è un esito, e la sua probabilità è il prodotto delle probabilità dei rami.

Distribuzione di probabilità
corrispondenza che associa a ogni valore possibile di una grandezza aleatoria (per esempio la somma di due dadi) la sua probabilità; la somma delle probabilità è 1.

Esperimento aleatorio
esperimento o fenomeno di cui si conoscono tutti i risultati possibili, ma non si può prevedere quale si verificherà.

Estrazione con reimmissione
estrazione in cui l'oggetto estratto viene rimesso nell'urna prima della successiva; le estrazioni sono indipendenti.

Eventi incompatibili
eventi che non possono verificarsi insieme: $A \cap B = \varnothing$. Per essi $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Eventi indipendenti
eventi per cui il verificarsi dell'uno non modifica la probabilità dell'altro: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Evento
affermazione sull'esito di un esperimento aleatorio che risulta vera o falsa; si identifica con il sottoinsieme di Ω degli esiti che la rendono vera.

Evento certo
l'evento Ω, che si verifica sempre; ha probabilità 1.

Evento contrario
l'evento $\bar{E}$ che si verifica quando E non si verifica; $p(\bar{E}) = 1 - p(E)$.

Evento elementare
evento formato da un solo esito.

Evento impossibile
l'evento $\varnothing$, che non si verifica mai; ha probabilità 0.

Gioco equo
gioco in cui il valore atteso del guadagno di ciascun giocatore è zero.

Legge empirica del caso
fatto osservato: in molte prove ripetute nelle stesse condizioni la frequenza relativa di un evento tende ad avvicinarsi alla sua probabilità.

Principio di moltiplicazione
se un esperimento si svolge in fasi con m e n risultati possibili, il numero dei risultati complessivi è $m \cdot n$ (e così via per più fasi).

Probabilità condizionata
probabilità di A sapendo che si è verificato B: $p(A|B) = p(A \cap B) / p(B)$, con $p(B) \neq 0$.

Spazio campionario
insieme Ω di tutti gli esiti possibili di un esperimento aleatorio, scelti in modo che a ogni prova se ne verifichi uno e uno solo.

Valore atteso
somma dei valori possibili di un guadagno, ciascuno moltiplicato per la sua probabilità; su molte prove approssima il guadagno medio.

Soluzioni

1. B. Nessun esito di $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ lo rende vero: è l'insieme vuoto.

2. C. $\Omega = \{TT, TC, CT, CC\}$; TC e CT sono esiti diversi ($2 \cdot 2 = 4$).

3. A. I re sono 4: $p = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$.

4. D. $p(\overline{E}) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$.

5. A. Per eventi incompatibili $p(A \cup B) = p(A) + p(B) = 0{,}7$ (0,1 sarebbe il prodotto, che qui non c'entra).

6. B. I lanci sono indipendenti: la moneta non ha memoria. ($\frac{1}{64} = (\frac{1}{2})^6$ è la probabilità, valutata *prima* di lanciare, di ottenere sei teste.)

7. a) V. b) F: $0 \le p(E) \le 1$. c) F: sono dipendenti, perché $p(A \cap B) = 0$ mentre $p(A) \cdot p(B) > 0$. d) F: è un fatto osservato sperimentalmente; il teorema di Bernoulli è un'altra cosa, perché parla della probabilità che la frequenza si allontani da p.

8. ... di tutti gli esiti possibili ...; ... sottoinsieme ...; ... E non si verifica ...; ... non possono verificarsi insieme (intersezione vuota) ...; ... il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili ...; ... in numero finito ed equiprobabili.

9. $A = \{1, 3, 5\}$, $p = \frac{1}{2}$; $B = \{1, 2\}$, $p = \frac{1}{3}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$, $p = \frac{2}{3}$; $A \cap B = \{1\}$, $p = \frac{1}{6}$; $\overline{A} = \{2, 4, 6\}$, $p = \frac{1}{2}$. Non sono incompatibili (hanno in comune l'esito 1). Controllo: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

10. Casi possibili 12. a) $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. b) $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$. c) Eventi incompatibili: $\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$ (è lo stesso evento di b).

11. a) (2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2): $\frac{5}{36}$. b) Somme 2, 3, 4: $1 + 2 + 3 = 6$ casi, $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. c) $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. d) La somma è dispari se un dado è pari e l'altro dispari: $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$ casi, $\frac{1}{2}$.

12. 8 esiti equiprobabili (TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC). a) Solo CCC: $\frac{1}{8}$. b) TTT, TTC, TCT, CTT: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. c) Contrario di a): $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

13. a) Cuori 13, figure 12, figure di cuori 3: $\frac{13 + 12 - 3}{52} = \frac{22}{52} = \frac{11}{26}$. b) Asso di fiori e asso di picche: $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$. c) Contrario di a): $1 - \frac{11}{26} = \frac{15}{26}$.

14. a) $0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}15 = 0{,}75$. b) È il contrario di $A \cup B$: $1 - 0{,}75 = 0{,}25$. c) $p(A|B) = \frac{0{,}15}{0{,}5} = 0{,}3$; $p(B|A) = \frac{0{,}15}{0{,}4} = 0{,}375$. d) No: $p(A) \cdot p(B) = 0{,}2 \neq 0{,}15$ (equivalentemente $p(A|B) = 0{,}3 \neq 0{,}4$).

15. a) $\frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{90}{1560} = \frac{3}{52} \approx 0{,}058$. b) $\frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$.

16. Lanci indipendenti. a) $(\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{216}$. b) $(\frac{5}{6})^3 = \frac{125}{216}$. c) $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 0{,}421$.

17. a) Nella riga del 3 ci sono 6 coppie, solo (3; 5) ha somma 8: $\frac{1}{6}$. b) Le coppie con somma 8 sono 5, solo (3; 5) comincia con 3: $\frac{1}{5}$. L'intersezione è la stessa, ma lo spazio ristretto è diverso: nel primo caso ha 6 esiti, nel secondo 5. In generale $p(A|B) \neq p(B|A)$.

18. $p(A \cap B) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$; $p(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}6 - 0{,}18 = 0{,}72$. Né A né B: $1 - 0{,}72 = 0{,}28$, oppure, poiché anche $\overline{A}$ e $\overline{B}$ sono indipendenti, $0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28$.

19. Percorsi: studia e supera $0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63$; non studia e supera $0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$. Somma: $0{,}63 + 0{,}09 = 0{,}72$, cioè il 72%.

20. Se $A \subseteq B$, allora $B = A \cup (B \cap \overline{A})$ e i due eventi sono incompatibili. Per il terzo assioma $p(B) = p(A) + p(B \cap \overline{A})$, e per il primo $p(B \cap \overline{A}) \geq 0$. Quindi $p(B) \geq p(A)$. c.v.d.

21. I tre risultati elencati non sono equiprobabili, quindi la definizione classica non si applica a essi. Distinguendo le monete gli esiti equiprobabili sono 4 (TT, TC, CT, CC) e «una testa e una croce» ne comprende due: $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

22. Se sono incompatibili $p(A \cap B) = p(\varnothing) = 0$; se fossero indipendenti dovrebbe essere $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) > 0$. Contraddizione. Esempio: «esce 2» ed «esce un dispari»: $p(A \cap B) = 0$, ma $p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

23. A è unione dei due eventi incompatibili $A \cap B$ e $A \cap \overline{B}$, quindi $p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B)$. Per l'indipendenza $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$, perciò $p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A) \cdot p(B) = p(A) \cdot (1 - p(B)) = p(A) \cdot p(\overline{B})$. c.v.d.

24. Le estrazioni sono indipendenti: la probabilità che il 27 sia tra i 5 estratti è $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ a ogni estrazione, qualunque sia la storia passata. La legge empirica del caso non prevede «recuperi»: la frequenza si avvicina alla probabilità perché, su un numero enorme di estrazioni, le 80 iniziali pesano sempre meno.

25. a) Corso: 120 superato, 30 no (150); senza corso: 60 superato, 40 no (100); totali 180 e 70. b) $\frac{180}{250} = 0{,}72$. c) $\frac{120}{150} = 0{,}8$; $\frac{60}{100} = 0{,}6$. d) $\frac{120}{180} = \frac{2}{3}$. e) No: $p(\text{superato} \mid \text{corso}) = 0{,}8 \neq 0{,}72$.

26. a) $0{,}95 \cdot 0{,}9 = 0{,}855$. b) $0{,}05 \cdot 0{,}1 = 0{,}005$. c) $1 - 0{,}005 = 0{,}995$. Due allarmi indipendenti riducono il rischio di mancato allarme da 5 su 100 a 5 su 1000.

27. $p(\text{somma} \geq 11) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. a) Guadagno netto +18 € con probabilità $\frac{1}{12}$, −2 € con probabilità $\frac{11}{12}$: $\frac{18}{12} - \frac{22}{12} = -\frac{1}{3} \approx -0{,}33$ €. b) No, è sfavorevole al giocatore. c) Se riceve R euro: $\frac{1}{12} \cdot R - 2 = 0$, $R = 24$ € (vincita netta 22 €).

28. a) $0{,}95^2 = 0{,}9025$. b) $1 - 0{,}9025 = 0{,}0975$. c) L'indipendenza: se la macchina si guasta, i pezzi difettosi tendono a presentarsi in serie, e la probabilità che il secondo sia difettoso sapendo che lo è il primo sarebbe maggiore di 0,05.

29. Chi non cambia vince con probabilità $\frac{1}{4}$. Chi cambia vince solo se la prima scelta era sbagliata (probabilità $\frac{3}{4}$): in quel caso l'auto è dietro una delle due porte chiuse rimaste, e la sceglie con probabilità $\frac{1}{2}$. Quindi $p = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} > \frac{1}{4}$: conviene cambiare.

30. Risposte indipendenti, ciascuna giusta con probabilità $\frac{1}{4}$. a) $(\frac{1}{4})^4 = \frac{1}{256}$. b) $(\frac{3}{4})^4 = \frac{81}{256} \approx 0{,}316$. c) $1 - \frac{81}{256} = \frac{175}{256} \approx 0{,}684$.

31. Traccia: a) il grafico oscilla molto nelle prime decine di righe e poi si stabilizza vicino a 0,5, come nella figura. b) A ogni ricalcolo cambia la sequenza dei lanci e quindi l'andamento iniziale della curva (che può partire da valori molto diversi); resta invece la tendenza ad avvicinarsi a 0,5 al crescere di n, con scarti di norma piccoli dopo 1000 lanci: è la legge empirica del caso.

32. a) Valore previsto $720 \cdot p$: somme 2 e 12: 20; 3 e 11: 40; 4 e 10: 60; 5 e 9: 80; 6 e 8: 100; 7: 120. b) Traccia: le frequenze osservate oscillano attorno ai valori previsti (scarti di una decina di unità sono normali con 720 lanci); la forma «a triangolo» con il massimo sul 7 si riconosce, ma il massimo osservato può anche cadere su 6 o 8, come nella Figura 14.5.

33. a) Prima: bianca $\frac{6}{10}$, nera $\frac{4}{10}$; dopo una bianca: $\frac{5}{9}$ bianca, $\frac{4}{9}$ nera; dopo una nera: $\frac{6}{9}$ bianca, $\frac{3}{9}$ nera. b) $\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{30}{90} + \frac{12}{90} = \frac{7}{15}$. c) $1 - \frac{30}{90} = \frac{2}{3}$. d) $0{,}6^2 + 0{,}4^2 = 0{,}52 = \frac{13}{25}$.

34. a) $p(A \cap S) = p((4; 3)) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$: sì. b) $p(A \cap T) = p((4; 6)) = \frac{1}{36}$, ma $p(A) \cdot p(T) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{36} = \frac{1}{72}$: no. c) Incompatibili sì (la somma non può valere 7 e 10); quindi, avendo probabilità non nulle, sono dipendenti.

35. p(almeno un 6 in n lanci) $= 1 - (\frac{5}{6})^n > 0{,}9$ equivale a $(\frac{5}{6})^n < 0{,}1$. Calcolando le potenze: $(\frac{5}{6})^{12} \approx 0{,}112$, $(\frac{5}{6})^{13} \approx 0{,}093$. Servono almeno 13 lanci.