CAPITOLO

13

Vettori e matrici

Un numero dice quanto; un vettore dice anche dove. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Distinguere grandezze scalari e vettoriali e definire un vettore con modulo, direzione e verso.
2. Sommare e sottrarre vettori, moltiplicarli per uno scalare e operare con le componenti cartesiane, nel piano e nello spazio.
3. Riconoscere vettori linearmente dipendenti e indipendenti e scrivere un vettore come combinazione lineare di una base.
4. Calcolare il prodotto scalare e il prodotto vettoriale e usarli per angoli, perpendicolarità, aree, lavoro e momento di una forza.
5. Operare con le matrici (somma, prodotto righe per colonne, trasposta, inversa 2×2) e calcolare determinanti di ordine 2 e 3.
6. Scrivere un sistema lineare in forma matriciale e risolvere i sistemi 3×3 con la regola di Cramer.

INDICE DEL CAPITOLO

13.1 Grandezze scalari e vettoriali 2
13.2 Le operazioni con i vettori 3
13.3 I vettori in componenti 5
13.4 Prodotto scalare e prodotto vettoriale 8
13.5 Le matrici 13
13.6 Sistemi lineari e matrici 17

Matematica 2 · Parte V · Trasformazioni, funzioni circolari e vettori · versione 1.0
Capitolo 13: Vettori e matrici · pagine 315–338 del volume completo · estratto per lo studio

Se un amico ti dice «ho camminato per 3 km», sai quanta strada ha fatto, ma non dove è arrivato: verso nord? verso il mare? avanti e indietro? Per sapere dove si trova ti servono un numero *e* una direzione con un verso. Lo stesso vale per una forza che spinge un'auto in panne o per la velocità di una barca che attraversa un fiume. Le grandezze di questo tipo si descrivono con i **vettori**, che nel capitolo 11 abbiamo usato solo per descrivere le traslazioni.

In questo capitolo i vettori diventano oggetti di calcolo: si sommano, si moltiplicano per un numero, si scompongono lungo gli assi. Impareremo due prodotti tra vettori, il prodotto scalare e il prodotto vettoriale, che in fisica servono per il lavoro di una forza e per il momento che fa ruotare una chiave inglese. Nell'ultima parte riprendiamo i determinanti del capitolo 7 e li inseriamo in uno strumento più generale, le **matrici**: tabelle di numeri con cui si può calcolare, che permettono di scrivere un sistema lineare in una sola riga e di risolvere con la regola di Cramer anche i sistemi di tre equazioni in tre incognite.

13.1 Grandezze scalari e vettoriali

13.1.1 Scalari e vettori

La massa di un corpo, la temperatura di una stanza, la durata di una lezione, l'energia: per descriverle basta un numero, accompagnato dall'unità di misura. Sono **grandezze scalari**. Lo spostamento, la velocità, l'accelerazione e la forza richiedono invece tre informazioni: *quanto* (l'intensità), *lungo quale retta* (la direzione) e *da che parte* (il verso). Una spinta di 200 N verso destra e una di 200 N verso sinistra hanno effetti opposti, anche se l'intensità è la stessa. Queste sono **grandezze vettoriali**.

13.1.2 Vettori e segmenti orientati

Nel capitolo 11 abbiamo chiamato *segmento orientato* un segmento AB di cui si stabilisce il primo e il secondo estremo, disegnato con una freccia da A a B. Due segmenti orientati si dicono **equipollenti** se hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione (cioè stanno su rette parallele o sulla stessa retta) e lo stesso verso. Se AB e CD sono equipollenti e non stanno sulla stessa retta, il quadrilatero $ABDC$ è un parallelogramma: un segmento orientato equipollente ad AB è una «copia» di AB spostata con una traslazione.

IN SINTESI

Un **vettore** è l'insieme di tutti i segmenti orientati equipollenti a un segmento orientato dato; ognuno di essi *rappresenta* il vettore. Lo indichiamo con una lettera in grassetto, $\mathbf{v}$, oppure con $\mathbf{AB}$ se è rappresentato dal segmento orientato AB.

Un vettore ha un **modulo** (la lunghezza comune dei segmenti, indicata con $|\mathbf{v}|$), una **direzione** e un **verso**.

Il vettore il cui modulo è zero, rappresentato da un segmento «degenere» AA, è il **vettore nullo** $\mathbf{0}$: non ha direzione né verso. Il **vettore opposto** di $\mathbf{v}$, indicato con $-\mathbf{v}$, ha lo stesso modulo e la stessa direzione di $\mathbf{v}$ ma verso contrario: se $\mathbf{AB}$ rappresenta $\mathbf{v}$, $\mathbf{BA}$ rappresenta $-\mathbf{v}$. Un vettore di modulo 1 si chiama **versore**.

La definizione con le classi di segmenti equipollenti dice in forma precisa una cosa che in fisica si usa continuamente: un vettore si può disegnare a partire da qualsiasi punto, purché si conservino modulo, direzione e verso. Per sommare due spostamenti, come vedremo subito, si «trasporta» la freccia del secondo fino alla punta del primo.

13.2 Le operazioni con i vettori

13.2.1 La somma

Una ragazza cammina 3 km verso est e poi 4 km verso nord: il suo spostamento complessivo va dal punto di partenza a quello di arrivo, e per il teorema di Pitagora è lungo $\sqrt{(3^2 + 4^2)} = 5$ km. Lo spostamento totale è la *somma* dei due spostamenti, e non ha per modulo la somma dei moduli (7 km). La somma di due vettori si costruisce in due modi equivalenti (Figura 13.1).

- **Regola punta-coda.** Si disegna $\mathbf{a}$ a partire da un punto O; dalla punta di $\mathbf{a}$ si disegna $\mathbf{b}$. Il vettore $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ va dalla coda di $\mathbf{a}$ alla punta di $\mathbf{b}$: se $\mathbf{OA}$ rappresenta $\mathbf{a}$ e $\mathbf{AS}$ rappresenta $\mathbf{b}$, allora $\mathbf{OS}$ rappresenta $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.
- **Regola del parallelogramma.** Si disegnano $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ a partire dallo stesso punto O e si completa il parallelogramma che ha per lati i due segmenti orientati: la diagonale uscente da O rappresenta $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

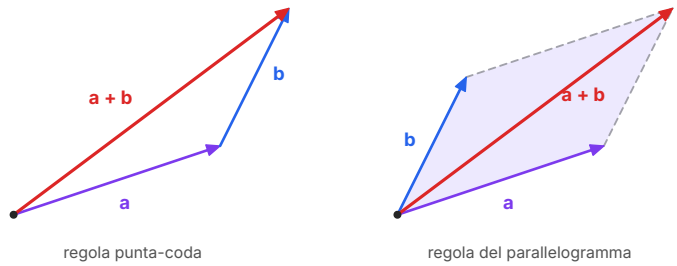


Figura 13.1 La somma **a** + **b** con la regola punta-coda (a sinistra) e con la regola del parallelogramma (a destra). Il lato tratteggiato del parallelogramma opposto ad **a** rappresenta **b**: le due costruzioni danno lo stesso vettore.

Le due regole danno lo stesso risultato perché nel parallelogramma il lato opposto a quello che rappresenta **b** è equipollente a esso. La regola punta-coda si estende subito a più vettori: si dispongono uno dopo l'altro, ciascuno con la coda sulla punta del precedente, e la somma va dalla prima coda all'ultima punta. Nel triangolo formato da **a**, **b** e **a** + **b** un lato è minore della somma degli altri due, quindi $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$, con l'uguaglianza solo quando **a** e **b** hanno la stessa direzione e lo stesso verso (o uno dei due è nullo): è la *disuguaglianza triangolare*.

13.2.2 La differenza e il prodotto per uno scalare

La **differenza** $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ è la somma di **a** con l'opposto di **b**: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$. Se **a** e **b** partono dallo stesso punto, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ è rappresentato dal segmento orientato che va dalla punta di **b** alla punta di **a**; nel parallelogramma della Figura 13.1 è l'*altra* diagonale. Infatti $\mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}$.

Il **prodotto di un vettore per uno scalare** k (un numero reale) è il vettore $k\mathbf{v}$ che ha modulo $|k| \cdot |\mathbf{v}|$, la stessa direzione di **v** e lo stesso verso se $k > 0$, verso opposto se $k < 0$; se $k = 0$ oppure $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ il prodotto è il vettore nullo. Così $2\mathbf{v}$ è lungo il doppio di **v**, $-\mathbf{v}$ è il suo opposto e, se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, il vettore $\mathbf{v} / |\mathbf{v}|$ è il versore che ha la direzione e il verso di **v**. Nel capitolo 11 l'omotetia di centro O e rapporto k portava P in P' proprio con $\mathbf{OP}' = k\mathbf{OP}$.

Per ogni **a**, **b**, **c** e per ogni coppia di numeri reali h, k:

- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (commutativa); $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (associativa);
- $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$; $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$;
- $h(k\mathbf{a}) = (hk)\mathbf{a}$; $(h + k)\mathbf{a} = h\mathbf{a} + k\mathbf{a}$; $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$; $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Con i vettori si calcola dunque come con le espressioni letterali di primo grado: si raccoglie, si porta da un membro all'altro, si semplifica.

13.3 I vettori in componenti

13.3.1 Componenti cartesiane e versori

Nel piano cartesiano chiamiamo **i** e **j** i versori degli assi: **i** va da $O(0; 0)$ a $(1; 0)$, **j** da O a $(0; 1)$. Ogni vettore **v** si può rappresentare con un segmento orientato che parte dall'origine, **OP**; se $P(v_x; v_y)$, il vettore è la somma di un vettore orizzontale, $v_x\mathbf{i}$, e di uno verticale, $v_y\mathbf{j}$ (Figura 13.2):

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$$

I numeri v_x e v_y sono le **componenti cartesiane** di **v**, e scriviamo $\mathbf{v}(v_x; v_y)$ come per le coordinate di un punto, con il punto e virgola. Se il vettore è rappresentato da **AB**, con $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$, le sue componenti sono le differenze delle coordinate: $\mathbf{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$. Per esempio, con $A(1; 2)$ e $B(5; 5)$ si ha **AB**(4; 3): lo stesso vettore della figura, disegnato a partire da A anziché da O.

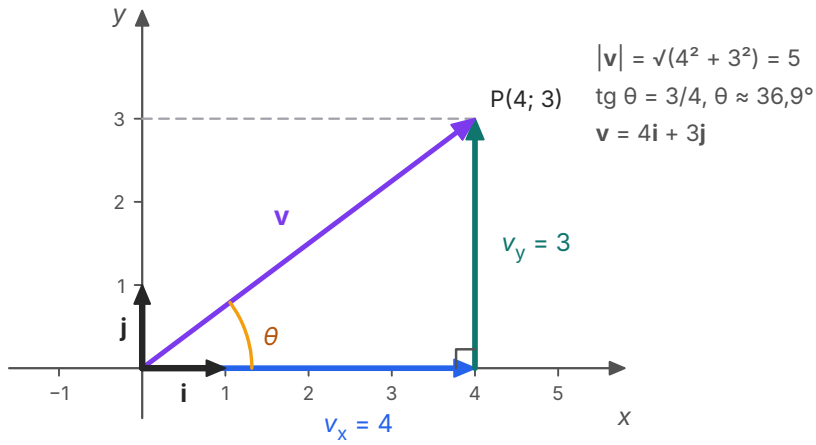


Figura 13.2 Il vettore **v**(4; 3), rappresentato dal segmento orientato **OP**, è la somma della componente orizzontale 4**i** e di quella verticale 3**j**; **i** e **j** sono i versori degli assi. Modulo e angolo θ con l'asse x si ricavano dal triangolo rettangolo.

13.3.2 Modulo e direzione

Le componenti sono i cateti di un triangolo rettangolo che ha per ipotenusa il segmento orientato. Con il teorema di Pitagora e con le funzioni circolari del capitolo 12 si passa dalle componenti al modulo e all'angolo θ che il vettore forma con il semiasse positivo delle x, e viceversa.

IN SINTESI

Se $\mathbf{v}(v_x; v_y)$ forma l'angolo orientato θ con il semiasse positivo delle x:

- $|\mathbf{v}| = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}$; $\quad \text{tg}\,\theta = v_y / v_x$ (se $v_x \neq 0$);
- $v_x = |\mathbf{v}| \cos\theta$; $\quad v_y = |\mathbf{v}| \,\text{sen}\,\theta$.

La tangente individua due angoli che differiscono di 180°: si sceglie quello del quadrante indicato dai segni di v_x e v_y.

Per $\mathbf{v}(4; 3)$: $|\mathbf{v}| = \sqrt{(16 + 9)} = 5$ e $\text{tg}\,\theta = 3/4$, da cui con la calcolatrice $\theta \approx 36{,}9°$. Per $\mathbf{w}(-3; -3)$: $|\mathbf{w}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ e $\text{tg}\,\theta = 1$; l'angolo non è 45°, che la calcolatrice restituisce, ma 225°, perché entrambe le componenti sono negative e il vettore punta nel III quadrante.

13.3.3 Le operazioni in componenti

Poiché $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}$, le proprietà della sezione precedente danno $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j}$: **per sommare due vettori si sommano le componenti**, e allo stesso modo si sottraggono e si moltiplicano per un numero.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y) \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y) \quad k\mathbf{a} = (ka_x; ka_y)$$

ESEMPIO SVOLTO

Due forze. Due funi tirano un anello fissato a terra. La prima esercita una forza di 40 N in direzione dell'asse x; la seconda una forza di 30 N inclinata di 60° sulla prima. Calcola l'intensità della forza risultante e l'angolo che forma con la prima fune.

Soluzione. Scegliamo l'asse x lungo la prima fune. Componenti: $\mathbf{F}_1(40; 0)$; per la seconda $F_{2x} = 30 \cos 60° = 15$ e $F_{2y} = 30 \,\text{sen}\, 60° = 15\sqrt{3}$. La risultante è la somma delle componenti:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (55; 15\sqrt{3})$$

Modulo: $|\mathbf{R}| = \sqrt{(55^2 + 675)} = \sqrt{3700} = 10\sqrt{37}$ N $\approx 60{,}8$ N. Angolo: $\text{tg}\,\theta = 15\sqrt{3} / 55 = 3\sqrt{3} / 11 \approx 0{,}472$, quindi $\theta \approx 25{,}3°$.

Controllo. Con il teorema del coseno (capitolo 12) nel parallelogramma delle forze, la diagonale opposta all'angolo di 120° vale $\sqrt{(40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot \cos 120°)} = \sqrt{(1600 + 900 + 1200)} = \sqrt{3700}$ ✓. Osserva che 60,8 N è meno di 40 N + 30 N = 70 N, come vuole la disuguaglianza triangolare.

13.3.4 I vettori nello spazio

Nello spazio si fissano tre assi a due a due perpendicolari, x, y, z, uscenti dall'origine O, con i versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Gli assi si scelgono in modo che, guardando dalla punta di $\mathbf{k}$, la rotazione di 90°

che porta **i** su **j** sia antioraria: è la terna *destrorsa* che si usa in fisica. Ogni punto ha tre coordinate $P(x; y; z)$ e ogni vettore tre componenti:

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}$$

La formula del modulo si ottiene applicando due volte il teorema di Pitagora, come per la diagonale di un parallelepipedo nel capitolo 4: la proiezione di **OP** sul piano xy è lunga $\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}$, e con la componente verticale v_z forma un nuovo triangolo rettangolo. Nella Figura 13.3 il vettore $\mathbf{v}(2; 3; 6)$ ha modulo $\sqrt{(4 + 9 + 36)} = 7$. Le operazioni si eseguono componente per componente, esattamente come nel piano.

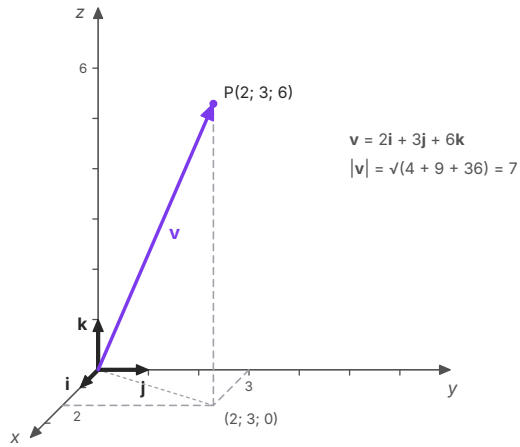


Figura 13.3 Il vettore $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ in assonometria cavaliera: l'asse x è disegnato obliquo e accorciato a metà, gli assi y e z in vera grandezza. Le linee tratteggiate costruiscono la proiezione (2; 3; 0) del punto P sul piano xy.

13.3.5 Combinazione lineare e indipendenza lineare

Dati due vettori **a** e **b**, ogni vettore della forma $h\mathbf{a} + k\mathbf{b}$, con h e k reali, si chiama **combinazione lineare** di **a** e **b**. Per esempio $\mathbf{v}(4; 3)$ è la combinazione $4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ dei versori.

Due vettori **a** e **b** si dicono **linearmente dipendenti** se uno dei due è multiplo dell'altro, cioè se esiste una combinazione $h\mathbf{a} + k\mathbf{b} = \mathbf{0}$ con h e k non entrambi nulli; altrimenti sono **linearmente indipendenti**. Se $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$, i due vettori hanno la stessa direzione: **due vettori del piano sono linearmente dipendenti se e solo se sono paralleli** (il vettore nullo si considera parallelo a ogni vettore).

In componenti, $\mathbf{a}(a_x; a_y)$ e $\mathbf{b}(b_x; b_y)$ sono dipendenti se e solo se

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x = 0$$

Se per esempio $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$, si ha $a_x \cdot ka_y - a_y \cdot ka_x = 0$; viceversa, se il determinante è nullo e $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, le componenti di **b** sono proporzionali a quelle di **a**. È la stessa condizione che nel capitolo 6 diceva quando due rette sono parallele.

Il fatto importante è che **due vettori indipendenti del piano bastano a costruire tutti gli altri**: per ogni vettore **w** esistono e sono unici due numeri h e k tali che $\mathbf{w} = h\mathbf{a} + k\mathbf{b}$. Si dice che **a** e **b** formano una **base** del piano; **i** e **j** sono la base più comoda, e i coefficienti rispetto a essa sono le componenti. Trovare h e k significa risolvere un sistema lineare 2×2 il cui determinante è proprio $a_x b_y - a_y b_x$: è diverso da zero perché **a** e **b** sono indipendenti, quindi il sistema è determinato. Nello spazio servono tre vettori indipendenti, cioè non paralleli a uno stesso piano: per esempio **i**, **j**, **k**.

Per esempio, verifichiamo che **a**(1; 2) e **b**(3; −1) sono indipendenti e scriviamo **w**(5; 3) come loro combinazione lineare.

$1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = -7 \neq 0$: i vettori non sono paralleli, quindi sono indipendenti. Cerchiamo h e k con $h\mathbf{a} + k\mathbf{b} = \mathbf{w}$, cioè $(h + 3k;\ 2h - k) = (5;\ 3)$:

$$\begin{cases} h + 3k = 5 \\ 2h - k = 3 \end{cases}$$

Dalla seconda $k = 2h - 3$; sostituendo, $h + 6h - 9 = 5$, $h = 2$, $k = 1$. Dunque $\mathbf{w} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Controllo: $2(1;\ 2) + (3;\ -1) = (5;\ 3)$ ✓.

13.4 Prodotto scalare e prodotto vettoriale

13.4.1 Il prodotto scalare

Dati due vettori non nulli, chiamiamo **angolo tra due vettori** l'angolo θ, compreso tra 0° e 180°, formato da due segmenti orientati che li rappresentano a partire dallo stesso punto.

> **IN SINTESI**
> Il **prodotto scalare** di due vettori **a** e **b** è il **numero** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\theta$ dove θ è l'angolo tra i due vettori. Se uno dei due vettori è nullo, il prodotto scalare è 0.

Il nome dice che il risultato è uno scalare, non un vettore. Il segno dipende dall'angolo: positivo se θ è acuto, nullo se è retto, negativo se è ottuso. Il prodotto $|\mathbf{b}| \cos\theta$ è la misura con segno della *proiezione* di **b** sulla retta di **a**, quindi il prodotto scalare è il modulo di **a** moltiplicato per la proiezione di **b** su **a** (Figura 13.4).

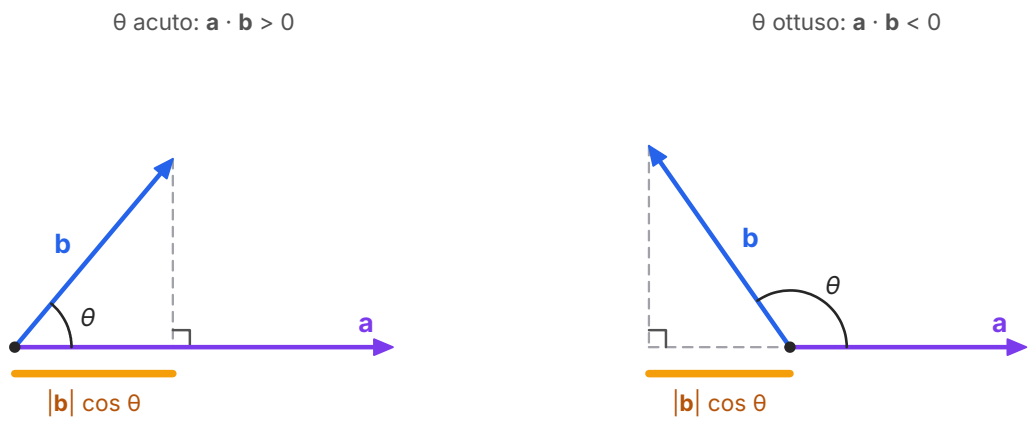


Figura 13.4 Il prodotto scalare come proiezione: **a** · **b** è il prodotto di $|\mathbf{a}|$ per $|\mathbf{b}|\cos\theta$, la proiezione di **b** sulla retta di **a** (segmento arancione). A destra l'angolo è ottuso, la proiezione cade dalla parte opposta ad **a** e il prodotto scalare è negativo.

Dalla definizione seguono alcune proprietà. Il prodotto scalare è commutativo, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$; vale $(k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$; vale la proprietà distributiva $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$, che si giustifica osservando che la proiezione di una somma è la somma delle proiezioni. Inoltre $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2$, perché l'angolo di un vettore con sé stesso è 0° e $\cos 0°=1$.

Due vettori non nulli sono **perpendicolari se e solo se il loro prodotto scalare è zero**: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0\Leftrightarrow\theta=90°$, perché tra 0° e 180° il coseno si annulla solo a 90°.

Il prodotto scalare in componenti. Applichiamo il teorema del coseno al triangolo che ha per lati i segmenti orientati di **a**, **b** e **a** − **b**: $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$. Scrivendo i moduli con le componenti si ha $(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2=a_x^2+a_y^2+b_x^2+b_y^2-2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$; sviluppando i quadrati a sinistra, quasi tutto si semplifica e resta $-2a_xb_x-2a_yb_y=-2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. Lo stesso calcolo vale nello spazio con una componente in più.

IN SINTESI

Nel piano $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_xb_x+a_yb_y$; nello spazio $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

L'angolo tra due vettori non nulli si ricava da $\cos\theta=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$.

Due esempi. a) Calcoliamo l'angolo tra $\mathbf{a}(1;2)$ e $\mathbf{b}(3;1)$. b) Per quale valore di k il vettore $\mathbf{c}(k;2)$ è perpendicolare a $\mathbf{d}(3;-6)$?

a) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=1\cdot3+2\cdot1=5$, $|\mathbf{a}|=\sqrt{5}$, $|\mathbf{b}|=\sqrt{10}$. Quindi $\cos\theta=5/\sqrt{50}=5/(5\sqrt{2})=\sqrt{2}/2$ e $\theta=45°$.

b) $\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}=3k-12$, che si annulla per $k=4$. Controllo: $(4;2)\cdot(3;-6)=12-12=0$ ✓.

Osservazione. Una retta di coefficiente angolare m ha la direzione del vettore $(1; m)$. Due rette con coefficienti m e m' sono quindi perpendicolari se $(1; m) \cdot (1; m') = 1 + mm' = 0$, cioè $mm' = -1$: la condizione del capitolo 6 ritrovata con i vettori.

ERRORE FREQUENTE

«$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, quindi $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.» È falso: per i numeri un prodotto nullo ha un fattore nullo, per il prodotto scalare no. $(2; 3) \cdot (-6; 4) = -12 + 12 = 0$, ma nessuno dei due vettori è nullo: sono perpendicolari. Non confondere poi il prodotto scalare, che è un **numero**, con il prodotto per uno scalare $k\mathbf{v}$, che è un **vettore**.

COLLEGAMENTI

Il lavoro di una forza. In fisica, quando una forza costante $\mathbf{F}$ agisce su un corpo che si sposta di $\mathbf{s}$, il lavoro compiuto dalla forza è il prodotto scalare $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{s}| \cdot \cos\theta$, e si misura in joule (1 J = 1 N · 1 m). Conta solo la componente della forza nella direzione dello spostamento.

Una cassa di 5 kg, il cui peso è $|\mathbf{P}| = 5 \cdot 9{,}8$ N = 49 N, scivola di 4 m lungo un piano inclinato di 30° (Figura 13.5). L'angolo tra il peso, verticale, e lo spostamento, diretto lungo il piano verso il basso, è 90° − 30° = 60°, quindi $W = 49 \cdot 4 \cdot \cos 60° = 98$ J. Lo stesso risultato si ottiene con la componente del peso parallela al piano, 49 sen 30° = 24,5 N, moltiplicata per 4 m; oppure con il peso per il dislivello, 49 N · 2 m. La reazione del piano, perpendicolare allo spostamento, compie lavoro nullo: cos 90° = 0.

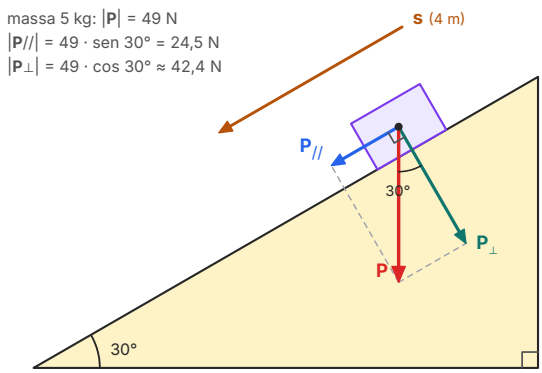


Figura 13.5 La cassa sul piano inclinato di 30°: il peso $\mathbf{P}$ (49 N) si scompone nella componente parallela al piano $\mathbf{P}_{//}$ (24,5 N) e in quella perpendicolare $\mathbf{P}_{\perp}$ (circa 42,4 N). L'angolo tra $\mathbf{P}$ e $\mathbf{P}_{\perp}$ è anch'esso 30°; lo spostamento $\mathbf{s}$ di 4 m forma 60° con il peso.

13.4.2 Il prodotto vettoriale

Nello spazio esiste un secondo prodotto tra due vettori, che dà come risultato un vettore. Per girare un bullone con una chiave inglese conta la forza, ma anche quanto lontano dal bullone la si applica e con quale inclinazione: l'effetto di rotazione dipende da due vettori, e la rotazione avviene attorno a un asse perpendicolare a entrambi.

IN SINTESI

Il **prodotto vettoriale** $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ di due vettori dello spazio che formano l'angolo θ è il **vettore** che ha:

- modulo $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \operatorname{sen}\theta$;
- direzione perpendicolare sia ad $\mathbf{a}$ sia a $\mathbf{b}$ (cioè al piano che li contiene);
- verso dato dalla **regola della mano destra**: chiudendo le dita della mano destra da $\mathbf{a}$ verso $\mathbf{b}$, attraverso l'angolo θ, il pollice indica il verso di $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Equivalentemente: chi guarda dalla punta di $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vede $\mathbf{a}$ ruotare verso $\mathbf{b}$ in senso antiorario.

Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono paralleli (o uno è nullo), $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

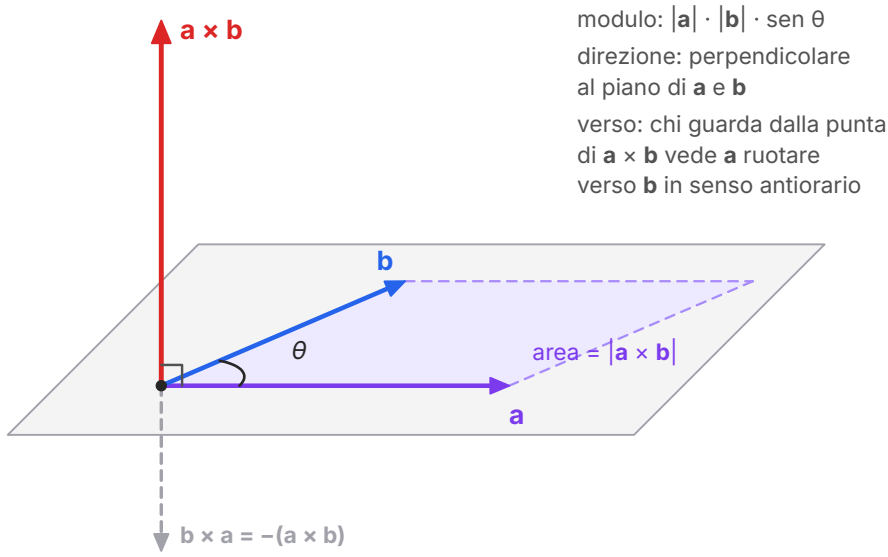


Figura 13.6 Il prodotto vettoriale. $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ stanno in un piano (in grigio); $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ è perpendicolare a quel piano e il suo modulo è l'area del parallelogramma costruito su $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ (in viola). Scambiando i fattori si ottiene il vettore opposto, tratteggiato.

Il modulo ha un significato geometrico: nel parallelogramma di lati $|\mathbf{a}|$ e $|\mathbf{b}|$, l'altezza relativa al lato $|\mathbf{a}|$ è $|\mathbf{b}|$ sen θ (capitolo 12), quindi $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ è l'**area del parallelogramma** costruito sui due vettori, e la metà è l'area del triangolo (Figura 13.6).

Scambiando i fattori il modulo e la direzione non cambiano, ma la rotazione da **b** verso **a** ha verso opposto: il prodotto vettoriale è **anticommutativo**, $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. In particolare $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Per i versori degli assi, con la terna destrorsa, si ha $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$. Si può dimostrare che anche per il prodotto vettoriale vale la proprietà distributiva rispetto alla somma; usandola con queste tabelline dei versori si ottiene la formula in componenti.

Se $\mathbf{a}(a_x; a_y; a_z)$ e $\mathbf{b}(b_x; b_y; b_z)$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y;\ a_z b_x - a_x b_z;\ a_x b_y - a_y b_x)$$

Ogni componente è un determinante 2×2 formato con le altre due componenti dei fattori: la prima con le componenti y e z, la seconda con z e x, la terza con x e y. Nella sezione sulle matrici vedremo un modo per ricordarla.

ESEMPIO SVOLTO

Dati $\mathbf{a}(1; 2; 2)$ e $\mathbf{b}(2; -1; 2)$, calcola $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, l'angolo tra i due vettori, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e l'area del triangolo che ha due lati rappresentati da **a** e **b**.

Soluzione. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 - 2 + 4 = 4$; $|\mathbf{a}| = \sqrt{(1 + 4 + 4)} = 3$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{(4 + 1 + 4)} = 3$; $\cos\theta = 4/9$, $\theta \approx 63{,}6°$.

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1);\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2;\ 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2) = (6; 2; -5)$.

Controllo. $(6; 2; -5) \cdot (1; 2; 2) = 6 + 4 - 10 = 0$ e $(6; 2; -5) \cdot (2; -1; 2) = 12 - 2 - 10 = 0$: il risultato è perpendicolare a entrambi i fattori ✓. Il modulo è $\sqrt{(36 + 4 + 25)} = \sqrt{65}$; con la definizione, sen $\theta = \sqrt{(1 - 16/81)} = \sqrt{65}/9$ e $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \text{sen}\,\theta = 9 \cdot \sqrt{65}/9 = \sqrt{65}$ ✓.

L'area del triangolo è $\sqrt{65}/2 \approx 4{,}03$.

COLLEGAMENTI

Il momento di una forza. Se una forza **F** è applicata in un punto che dista **r** dal centro di rotazione (il vettore **r** va dal centro al punto di applicazione), l'effetto di rotazione è descritto dal momento $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, che si misura in N · m. Con una chiave lunga 25 cm e una forza di 50 N perpendicolare alla chiave, $|\mathbf{M}| = 0{,}25 \cdot 50 = 12{,}5$ N · m; se la stessa forza forma 30° con la chiave, il momento si dimezza: $0{,}25 \cdot 50 \cdot \text{sen}\,30° = 6{,}25$ N · m. Per questo si spinge una porta lontano dai cardini e perpendicolarmente al battente. La direzione di **M** è quella dell'asse di rotazione, il verso dice se la rotazione è oraria o antioraria.

13.5 Le matrici

13.5.1 Definizioni

Nel capitolo 7 abbiamo chiamato matrice una tabella ordinata di numeri. Una matrice con m righe e n colonne si dice di **tipo** $m \times n$; l'elemento che si trova nella riga i e nella colonna j si indica con a_{ij}. Le matrici si indicano con lettere maiuscole e si scrivono tra parentesi tonde; per esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{è di tipo } 2 \times 3, \text{ con } a_{12} = 0 \text{ e } a_{21} = -1.$$

Una matrice con tante righe quante colonne è una **matrice quadrata**; il numero delle righe è il suo *ordine*. In una matrice quadrata gli elementi a_{11}, a_{22}, … formano la *diagonale principale*. La **matrice nulla** O ha tutti gli elementi uguali a 0; la **matrice identità** I è la matrice quadrata con 1 sulla diagonale principale e 0 altrove. La **matrice trasposta** A^{T} di una matrice A si ottiene scambiando le righe con le colonne: se A è di tipo $m \times n$, A^{T} è di tipo $n \times m$. Per la matrice dell'esempio:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Un vettore del piano o dello spazio, scritto con le sue componenti in colonna, è una matrice di tipo 2×1 o 3×1: un *vettore colonna*.

13.5.2 Somma e prodotto per uno scalare

Due matrici dello stesso tipo si sommano elemento per elemento; per moltiplicare una matrice per un numero k si moltiplica per k ogni elemento. Come per i vettori, la somma è commutativa e associativa, $A + O = A$, e ogni matrice ha l'opposta $-A$. Matrici di tipo diverso non si possono sommare.

13.5.3 Il prodotto righe per colonne

Un'edicola vende in un giorno 40 quotidiani, 25 riviste e 10 album di figurine; un'altra 30, 35 e 20. I prezzi sono 1,20 €, 1,50 € e 12 €. L'incasso della prima edicola si ottiene moltiplicando ogni quantità per il proprio prezzo e sommando: $40 \cdot 1{,}20 + 25 \cdot 1{,}50 + 10 \cdot 12 = 205{,}50$ €. È il prodotto scalare tra la *riga* delle quantità e la *colonna* dei prezzi. Disponendo le quantità in una matrice e i prezzi in un vettore colonna, i due incassi si ottengono con una sola operazione:

$$\begin{pmatrix} 40 & 25 & 10 \\ 30 & 35 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}20 \\ 1{,}50 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \cdot 1{,}20 + 25 \cdot 1{,}50 + 10 \cdot 12 \\ 30 \cdot 1{,}20 + 35 \cdot 1{,}50 + 20 \cdot 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 205{,}50 \\ 328{,}50 \end{pmatrix}$$

IN SINTESI

Se A è di tipo $m \times n$ e B di tipo $n \times p$, il **prodotto righe per colonne** AB è la matrice di tipo $m \times p$ il cui elemento di posto ij si ottiene moltiplicando ordinatamente gli elementi della riga i di A per quelli della colonna j di B e sommando i prodotti.

Il prodotto è definito solo se **il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B**.

Per esempio, con la matrice A di tipo 2×3 di prima e una matrice di tipo 3×2, il prodotto è di tipo 2×2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0+2 & 1+0+0 \\ -3+6+1 & -1+3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice identità si comporta come il numero 1: $AI = IA = A$ per ogni matrice quadrata A dello stesso ordine. Il prodotto righe per colonne è associativo, $(AB)C = A(BC)$, e distributivo rispetto alla somma. Ma non è commutativo.

ERRORE FREQUENTE

«$AB = BA$, come per i numeri.» Falso. Se A è di tipo 2×3 e B di tipo 3×4, AB esiste e BA non esiste nemmeno. Ma anche per due matrici quadrate dello stesso ordine, in generale, $AB \neq BA$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Moltiplicare a destra per $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ scambia le colonne, moltiplicare a sinistra scambia le righe.

Per lo stesso motivo $(A + B)^2$ vale $A^2 + AB + BA + B^2$, non $A^2 + 2AB + B^2$.

13.5.4 Il determinante

Solo alle matrici **quadrate** si associa un numero, il determinante, indicato con $\det A$ oppure scrivendo gli elementi tra due barre verticali. Per l'ordine 2 lo conosciamo dal capitolo 7: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Per l'ordine 3 la definizione è

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Sei prodotti di tre elementi, uno per ogni riga e per ogni colonna, tre con il segno + e tre con il segno −. Per ricordarli si usa la **regola di Sarrus**: si ricopiano a destra della matrice le prime due colonne; i tre prodotti lungo le diagonali che scendono verso destra hanno il segno +, i tre lungo le diagonali che scendono verso sinistra il segno − (Figura 13.7).

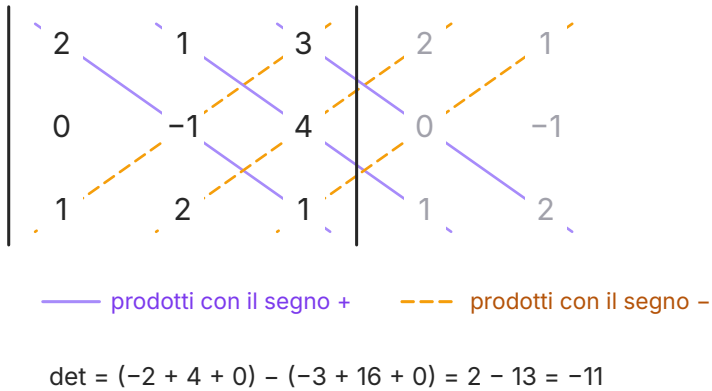


Figura 13.7 La regola di Sarrus per il determinante della matrice dell'esempio svolto: le prime due colonne (in grigio) sono ricopiate a destra; i prodotti lungo le diagonali continue si sommano, quelli lungo le diagonali tratteggiate si sottraggono.

Per esempio, calcoliamo $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Diagonali con il segno +: $2 \cdot (-1) \cdot 1 = -2$, $1 \cdot 4 \cdot 1 = 4$, $3 \cdot 0 \cdot 2 = 0$; somma 2. Diagonali con il segno −: $3 \cdot (-1) \cdot 1 = -3$, $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$, $1 \cdot 0 \cdot 1 = 0$; somma 13. Il determinante è $2 - 13 = -11$.

La regola di Sarrus vale **solo** per i determinanti di ordine 3. Per l'ordine 4 o superiore si usano altri metodi, che studierai negli anni successivi; ricopiare le colonne di una matrice 4×4 dà un risultato sbagliato.

Il determinante dà anche un modo per ricordare il prodotto vettoriale. Se si scrive formalmente un «determinante» con i versori nella prima riga, $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$, e lo si sviluppa con la regola di Sarrus, i coefficienti di **i**, **j** e **k** sono esattamente le tre componenti di $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Non

è un vero determinante, perché la prima riga contiene vettori e non numeri: è solo una regola per ricordare la formula.

13.5.5 La matrice inversa

Per i numeri, 3 ha l'inverso 1/3 perché $3 \cdot 1/3 = 1$. Una matrice quadrata A si dice **invertibile** se esiste una matrice A^{-1}, la **matrice inversa**, tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Si dimostra che A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$. Per l'ordine 2 c'è una formula semplice, che si verifica eseguendo il prodotto:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (\text{se } ad - bc \neq 0)$$

Si scambiano gli elementi della diagonale principale, si cambia segno agli altri due e si divide per il determinante. Per esempio, per $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ il determinante è $6 - 5 = 1$ e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$; controllo: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -2+2 \\ 15-15 & -5+6 \end{pmatrix} = I$ ✓.

APPROFONDIMENTO · MATRICI E TRASFORMAZIONI

Le equazioni delle trasformazioni del capitolo 11 che lasciano fissa l'origine si scrivono come prodotti di una matrice per un vettore colonna. La rotazione di +90° attorno all'origine, $x' = -y$, $y' = x$, diventa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Allo stesso modo la simmetria rispetto all'asse x ha matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e l'omotetia di centro l'origine e rapporto k ha matrice $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, cioè kI. Applicare due trasformazioni una dopo l'altra corrisponde a moltiplicare le loro matrici: se prima si applica la trasformazione di matrice A e poi quella di matrice B, la composizione ha matrice BA. Per esempio due rotazioni di 90° danno $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, la matrice della simmetria centrale, cioè della rotazione di 180°. Che la composizione di isometrie non sia commutativa e che il prodotto di matrici non lo sia sono lo stesso fatto, visto in due linguaggi.

13.6 Sistemi lineari e matrici

13.6.1 La forma matriciale di un sistema

Il prodotto righe per colonne permette di scrivere un sistema lineare in modo compatto. Il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \quad \text{si scrive} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

cioè $AX = B$, dove A è la **matrice dei coefficienti**, X il vettore colonna delle incognite e B quello dei termini noti: eseguendo il prodotto AX si ritrovano proprio i primi membri delle tre equazioni. Se A è invertibile, moltiplicando a sinistra per A^{-1} si ottiene $X = A^{-1}B$, come si risolve $ax = b$ dividendo per a. In pratica, per sistemi piccoli, è più comoda la regola di Cramer.

13.6.2 La regola di Cramer

Nel capitolo 7 abbiamo risolto i sistemi 2×2 con la regola di Cramer: se il determinante D della matrice dei coefficienti è diverso da zero, $x = D_x / D$ e $y = D_y / D$, dove D_x e D_y si ottengono da D sostituendo la colonna dei coefficienti dell'incognita con quella dei termini noti. La regola vale, con la stessa forma, per i sistemi di tre equazioni in tre incognite.

IN SINTESI

Regola di Cramer per i sistemi 3 × 3. Se il determinante D della matrice dei coefficienti è diverso da zero, il sistema è determinato e la sua unica soluzione è $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$, $z = \frac{D_z}{D}$, dove D_x, D_y, D_z sono i determinanti che si ottengono da D sostituendo, rispettivamente, la prima, la seconda o la terza colonna con la colonna dei termini noti.

Se $D = 0$ il sistema può essere impossibile oppure indeterminato, e per stabilirlo conviene ricorrere al metodo di sostituzione o di riduzione. Attenzione: per i sistemi 3×3 **non** si può concludere che il sistema è indeterminato solo perché anche D_x, D_y e D_z sono nulli. Il sistema formato dalle equazioni $x + y + z = 1$, $x + y + z = 2$, $x + y + z = 3$ ha $D = D_x = D_y = D_z = 0$ (ogni determinante ha due colonne uguali), eppure è evidentemente impossibile.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi con la regola di Cramer il sistema scritto sopra in forma matriciale.

Soluzione. Con la regola di Sarrus:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1 + 1 + 4) - (-1 + 2 - 2) = 6 - (-1) = 7$$

Poiché $D = 7 \neq 0$, il sistema è determinato. Sostituiamo una colonna alla volta con i termini noti (6; 3; 2):

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7 \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 14 \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 21$$

Quindi $x = 7/7 = 1$, $y = 14/7 = 2$, $z = 21/7 = 3$. Controllo nelle tre equazioni: $1 + 2 + 3 = 6$ ✓, $2 - 2 + 3 = 3$ ✓, $1 + 4 - 3 = 2$ ✓. È lo stesso sistema che nel capitolo 7 avevamo risolto per sostituzione.

APPROFONDIMENTO · HAMILTON, GRASSMANN, CAYLEY

Il calcolo con i vettori e con le matrici è nato nell'Ottocento. Nel 1843 l'irlandese William Rowan Hamilton inventò i *quaternioni*, numeri con quattro componenti per i quali la moltiplicazione non è commutativa; dalla loro parte «vettoriale» derivano il prodotto scalare e il prodotto vettoriale. Nel 1844 il tedesco Hermann Grassmann pubblicò la *Ausdehnungslehre* («teoria dell'estensione»), in cui sviluppava una teoria generale delle grandezze con più componenti, compresi i concetti di combinazione lineare e di dipendenza lineare; l'opera fu a lungo ignorata.

Il termine «matrice» fu introdotto nel 1850 dall'inglese James Joseph Sylvester. Nel 1858 Arthur Cayley, in una memoria sulla teoria delle matrici, definì le operazioni che abbiamo studiato, compreso il prodotto, e osservò che non è commutativo. Il calcolo vettoriale nella forma usata oggi dai fisici fu sistemato verso la fine dell'Ottocento, soprattutto da Josiah Willard Gibbs e da Oliver Heaviside.

SINTESI

- Le grandezze scalari sono descritte da un numero; quelle vettoriali (spostamento, velocità, forza) anche da una direzione e da un verso.
- Un vettore è la classe dei segmenti orientati equipollenti a uno dato; ha modulo, direzione e verso. Il vettore nullo ha modulo 0; l'opposto $-\mathbf{v}$ ha verso contrario.
- La somma si costruisce con la regola punta-coda o del parallelogramma; $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$; $k\mathbf{v}$ ha modulo $|k| \cdot |\mathbf{v}|$ e verso dipendente dal segno di k.
- In componenti $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$; $|\mathbf{v}| = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}$, $v_x = |\mathbf{v}| \cos\theta$, $v_y = |\mathbf{v}| \operatorname{sen}\theta$; le operazioni si eseguono componente per componente, anche nello spazio con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.
- Due vettori del piano sono linearmente dipendenti se e solo se sono paralleli, cioè se $a_x b_y - a_y b_x = 0$; due vettori indipendenti formano una base.
- Prodotto scalare: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta = a_x b_x + a_y b_y (+ a_z b_z)$; è un numero, nullo per vettori perpendicolari; il lavoro è $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$.
- Prodotto vettoriale (nello spazio): vettore perpendicolare ad $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, di modulo $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta$ (area del parallelogramma), verso dato dalla regola della mano destra; $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$; il momento è $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.
- Matrici di tipo m × n: somma e prodotto per uno scalare elemento per elemento; trasposta; identità; il prodotto righe per colonne esiste se le colonne del primo fattore sono tante quante le righe del secondo e non è commutativo.
- Solo le matrici quadrate hanno un determinante; per l'ordine 3 si usa la regola di Sarrus. Una matrice 2×2 con $ad - bc \neq 0$ ha inversa $(1/(ad - bc)) \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- Un sistema lineare si scrive $AX = B$; con $D \neq 0$ la regola di Cramer dà $x = D_x/D$, $y = D_y/D$, $z = D_z/D$. Con $D = 0$ il sistema 3×3 si discute con la riduzione.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Quale di queste grandezze è vettoriale?
   - **A.** la massa di un'auto
   - **B.** la temperatura dell'acqua
   - **C.** la forza con cui si spinge un carrello
   - **D.** la durata di un viaggio

2. ● Due vettori hanno moduli $|\mathbf{u}| = 3$ e $|\mathbf{v}| = 4$. Quale dei seguenti valori può essere il modulo di $\mathbf{u} + \mathbf{v}$?

   A. 0,5
   B. 8
   C. 9
   D. 5

3. ● Se $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$ e l'angolo tra i due vettori è 120°, il prodotto scalare $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ vale:

   A. −5
   B. 5
   C. 10
   D. $-5\sqrt{3}$

4. ● Il vettore $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, rispetto ad $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

   A. è lo stesso vettore
   B. è perpendicolare
   C. è il vettore opposto
   D. ha modulo diverso

5. ●● A è una matrice 2×3 e B una matrice 3×4. Allora:

   A. AB è di tipo 2×4 e BA non esiste
   B. AB e BA sono entrambe di tipo 2×4
   C. AB è di tipo 3×3
   D. AB non esiste

6. ● Il determinante $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ vale:

   A. −5
   B. 11
   C. 5
   D. −11

7. ●● Quale coppia di vettori è formata da vettori linearmente indipendenti?

   A. (2; 4) e (1; 2)
   B. (3; −6) e (−1; 2)
   C. (0; 0) e (1; 1)
   D. (1; 2) e (2; 1)

8. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
   a) Due segmenti orientati equipollenti hanno la stessa direzione.
   b) Il prodotto scalare di due vettori è un vettore.
   c) Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono non nulli e $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, allora sono perpendicolari.
   d) Per due matrici quadrate dello stesso ordine si ha sempre $AB = BA$.
   e) Ogni matrice ha un determinante.

9. ● Completa.
   a) L'opposto di $\mathbf{v}$ ha lo stesso modulo, la stessa direzione e verso _____ .
   b) Due vettori del piano sono linearmente dipendenti se e solo se sono _____ .
   c) La trasposta di una matrice di tipo 2×5 è di tipo _____ .
   d) Il modulo di $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ è uguale all'area del _____ costruito su $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Calcolare

10. ● Dati $\mathbf{u}(3; -1)$ e $\mathbf{v}(-2; 4)$, calcola $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$, $|\mathbf{u}|$ e $|\mathbf{v}|$.

11. ● Calcola modulo e angolo con il semiasse positivo delle x (tra 0° e 360°) dei vettori
    a) $\mathbf{a}(-3; 3\sqrt{3})$ b) $\mathbf{b}(5; -5)$ c) $\mathbf{c}(-4; -3)$.

12. ● Scrivi le componenti del vettore che ha
    a) modulo 10 e angolo 30°; b) modulo 8 e angolo 135°; c) modulo 6 e angolo 240°
    con il semiasse positivo delle x. Usa i valori esatti.

13. ●● Verifica che $\mathbf{a}(1; 2)$ e $\mathbf{b}(2; 1)$ sono linearmente indipendenti e scrivi $\mathbf{w}(1; 8)$ come loro combinazione lineare.

14. ● Dati nello spazio $\mathbf{a}(2; -1; 2)$ e $\mathbf{b}(1; 3; -2)$, calcola $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ e $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. L'angolo tra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ è acuto o ottuso?

15. ●● Calcola l'angolo tra le coppie di vettori.
    a) (2; 1) e (−1; 3) b) (1; 1; 0) e (0; 1; 1) c) (3; 4) e (4; −3)

16. ●● Trova k in modo che
    a) $(k; 3)$ sia perpendicolare a $(2; -4)$; b) $(k; 3)$ sia parallelo a $(2; -4)$;
    c) $(1; k; 2)$ sia perpendicolare a $(3; -1; 1)$.

17. ●● Dati $\mathbf{a}(1; 0; 2)$ e $\mathbf{b}(0; 3; 1)$, calcola $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e verifica che è perpendicolare a entrambi i vettori. Calcola l'area del parallelogramma e quella del triangolo costruiti su $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, e scrivi $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

18. ●● Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calcola a) $A + B$ e $2A - B$; b) AB, BA e A^{T}; c) dette $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, i prodotti CE ed EC, indicandone il tipo.

19. ● Calcola i determinanti.

a) $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

20. ●● Risolvi con la regola di Cramer il sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = 8 \end{cases}$

21. ●● Calcola l'inversa di $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ e verifica che $AA^{-1} = I$. Poi risolvi il sistema $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 5x + 2y = 7 \end{cases}$ come $X = A^{-1}B$.

Dimostrare e argomentare

22. ●● Usando la proprietà distributiva del prodotto scalare, dimostra che $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$. Deduci che $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ se e solo se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono perpendicolari, e interpreta il risultato sul parallelogramma costruito sui due vettori.

23. ● Spiega perché $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$ e perché $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

24. ●● Trova l'errore.

a) «$AB = AC$ e $A \neq O$, quindi $B = C$.» Controlla con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = O$.

b) «$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ per ogni coppia di matrici quadrate.»

25. ●● Dimostra che $\mathbf{u}(a; b)$ e $\mathbf{v}(c; d)$ sono linearmente dipendenti se e solo se $ad - bc = 0$.

26. ●●● Con i vettori, dimostra che le diagonali di un rombo sono perpendicolari. (Suggerimento: se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ rappresentano due lati consecutivi, le diagonali sono $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ e $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.)

Problemi

27. ●● Una barca attraversa un fiume largo 60 m puntando la prua perpendicolarmente alla riva, con velocità di 4 m/s rispetto all'acqua; la corrente ha velocità 3 m/s parallela alla riva. Calcola la velocità della barca rispetto alla riva (modulo e angolo con la direzione perpendicolare alla riva), il tempo di attraversamento e di quanti metri la barca viene trascinata a valle.

28. ● Un ragazzo trascina un trolley per 25 m in orizzontale tirando la maniglia con una forza di 60 N inclinata di 40° sull'orizzontale. Quanto lavoro compie la forza?

29. ●● Un carrello di 12 kg viene spinto per 3 m lungo un piano inclinato di 25°, verso l'alto. Usa $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$. a) Calcola le componenti del peso parallela e perpendicolare al piano. b) Calcola il lavoro compiuto dal peso e spiega il segno.

30. ●● Per svitare un bullone si applica una forza di 80 N all'estremità di una chiave lunga 30 cm, con un angolo di 60° tra la forza e la chiave. a) Calcola il modulo del momento. b) Quale forza perpendicolare alla chiave darebbe lo stesso momento? c) Qual è il momento massimo che si può ottenere con 80 N?

31. ●● La tabella delle vendite delle due edicole del paragrafo sul prodotto righe per colonne è la matrice $Q = \begin{pmatrix} 40 & 25 & 10 \\ 30 & 35 & 20 \end{pmatrix}$. a) Il giorno dopo i prezzi diventano 1,30 €, 1,50 € e 12 €: calcola i nuovi incassi con un prodotto di matrici. b) Che cosa rappresenta il prodotto $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot Q$?

32. ●●● In una cartoleria 2 quaderni, 1 penna e 3 matite costano 7,40 €; 1 quaderno, 2 penne e 1 matita costano 5,30 €; 3 quaderni, 1 penna e 5 matite costano 10,70 €. Scrivi il sistema in forma matriciale e trova i prezzi con la regola di Cramer.

Verso la verifica

33. ●● Il triangolo ABC ha vertici $A(1; 2)$, $B(5; 4)$, $C(2; 7)$. Con i vettori **AB** e **AC** calcola l'ampiezza dell'angolo in A e l'area del triangolo (per l'area, pensa i vettori nello spazio con terza componente 0 e usa il prodotto vettoriale).

34. ●● Dati $\mathbf{a}(2; 1; -1)$ e $\mathbf{b}(1; -1; 3)$, trova un vettore di modulo 1 perpendicolare a entrambi.

35. ●●● **Sfida.** Considera il sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$ a) Dimostra che il determinante dei coefficienti è $(k - 1)^2$. b) Per quali k il sistema è determinato? Trova la soluzione. c) Che cosa succede per $k = 1$? d) E se, per $k = 1$, il termine noto della seconda equazione diventa 2?

PER APPROFONDIRE

- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le coordinate nello spazio e il calcolo con le grandezze a più componenti.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Hamilton e i quaternioni, Grassmann, Cayley e la nascita dell'algebra delle matrici.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: scegliere le incognite e il riferimento, come nei problemi di forze e di prezzi di questo capitolo.

Glossario del capitolo

Base
Insieme di vettori indipendenti con cui ogni vettore si scrive in modo unico come combinazione lineare: due nel piano, tre nello spazio.

Combinazione lineare
Vettore della forma $h\mathbf{a} + k\mathbf{b}$, con h e k numeri reali.

Componenti cartesiane
I coefficienti v_x, v_y (e v_z) con cui un vettore si scrive come combinazione dei versori degli assi.

Grandezza scalare
Grandezza descritta da un solo numero con la sua unità di misura (massa, temperatura, tempo, energia).

Grandezza vettoriale
Grandezza descritta da un'intensità, una direzione e un verso (spostamento, velocità, forza).

Matrice identità
Matrice quadrata con 1 sulla diagonale principale e 0 altrove; nel prodotto si comporta come il numero 1.

Matrice inversa
Matrice A^{-1} tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$; esiste se e solo se $\det A \neq 0$.

Matrice quadrata
Matrice con tante righe quante colonne; è l'unico tipo di matrice che ha un determinante.

Matrice trasposta
Matrice che si ottiene scambiando le righe con le colonne.

Modulo di un vettore
Lunghezza comune dei segmenti orientati che rappresentano il vettore; si indica con $|\mathbf{v}|$.

Prodotto righe per colonne
Prodotto di una matrice m × n per una n × p: ogni elemento è la somma dei prodotti di una riga del primo fattore per una colonna del secondo. Non è commutativo.

Prodotto scalare
Il numero $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$; in componenti $a_x b_x + a_y b_y$ (+ $a_z b_z$).

Prodotto vettoriale
Il vettore $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, perpendicolare ad $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, di modulo $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta$ e verso dato dalla regola della mano destra.

Regola della mano destra
Chiudendo le dita della mano destra da $\mathbf{a}$ verso $\mathbf{b}$, il pollice indica il verso di $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Regola di Sarrus
Regola per calcolare un determinante di ordine 3: si ricopiano le prime due colonne e si sommano i prodotti delle diagonali discendenti a destra, sottraendo quelli delle diagonali discendenti a sinistra.

Segmenti equipollenti
Segmenti orientati con la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso.

Versore
Vettore di modulo 1; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sono i versori degli assi.

Vettore
Insieme dei segmenti orientati equipollenti a un segmento orientato dato; ha modulo, direzione e verso.

Vettore opposto
Il vettore $-\mathbf{v}$, con lo stesso modulo e la stessa direzione di $\mathbf{v}$ e verso contrario.

Vettori linearmente dipendenti
Vettori di cui uno è combinazione lineare degli altri; nel piano, due vettori sono dipendenti se e solo se sono paralleli.

Soluzioni

1. C. La forza ha un'intensità, una direzione e un verso; le altre sono scalari.

2. D. Per la disuguaglianza triangolare $1 \le |\mathbf{u} + \mathbf{v}| \le 7$; il valore 5 si ottiene quando i vettori sono perpendicolari.

3. A. $2 \cdot 5 \cdot \cos 120° = 10 \cdot (-1/2) = -5$.

4. C. Il prodotto vettoriale è anticommutativo: stesso modulo e stessa direzione, verso opposto.

5. A. Le colonne di A (3) sono tante quante le righe di B (3): AB è 2×4. Per BA servirebbero 4 righe in A.

6. B. $3 \cdot 1 - (-2) \cdot 4 = 3 + 8 = 11$.

7. D. $1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 \neq 0$. Nelle altre coppie il determinante è nullo: $2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0$, $3 \cdot 2 - (-6)(-1) = 0$; il vettore nullo è dipendente con qualsiasi vettore.

8. a) V. b) F: è un numero (scalare); il prodotto vettoriale è un vettore. c) V. d) F: in generale $AB \neq BA$ (vedi l'esempio dell'Errore frequente). e) F: solo le matrici quadrate.

9. a) opposto (contrario). b) paralleli. c) 5×2. d) parallelogramma.

10. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1; 3)$; $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (5; -5)$; $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = (9 + 4; -3 - 8) = (13; -11)$; $|\mathbf{u}| = \sqrt{10}$; $|\mathbf{v}| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

11. a) $|\mathbf{a}| = \sqrt{(9 + 27)} = 6$; $\operatorname{tg}\theta = -\sqrt{3}$, II quadrante: $\theta = 120°$. b) $5\sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\theta = -1$, IV quadrante: $\theta = 315°$. c) 5; $\operatorname{tg}\theta = 3/4$, III quadrante: $\theta \approx 180° + 36{,}9° = 216{,}9°$.

12. a) $(10 \cos 30°; 10 \operatorname{sen} 30°) = (5\sqrt{3}; 5)$. b) $(-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$. c) $(-3; -3\sqrt{3})$.

13. $1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 \neq 0$: indipendenti. Da $h + 2k = 1$, $2h + k = 8$: $h = 5$, $k = -2$. $\mathbf{w} = 5\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$; controllo $(5; 10) - (4; 2) = (1; 8)$ ✓.

14. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3; 2; 0)$; $2\mathbf{a} - \mathbf{b} = (3; -5; 6)$; $|\mathbf{a}| = 3$; $|\mathbf{b}| = \sqrt{14}$; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 - 3 - 4 = -5$. Il prodotto scalare è negativo: l'angolo è ottuso ($\cos\theta = -5/(3\sqrt{14})$, $\theta \approx 116{,}5°$).

15. a) Prodotto scalare $-2 + 3 = 1$; moduli $\sqrt{5}$ e $\sqrt{10}$; $\cos\theta = 1/\sqrt{50} = \sqrt{2}/10 \approx 0{,}141$, $\theta \approx 81{,}9°$. b) $1/(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = 1/2$: $\theta = 60°$. c) $12 - 12 = 0$: $\theta = 90°$.

16. a) $2k - 12 = 0$, $k = 6$. b) $k \cdot (-4) - 3 \cdot 2 = 0$, $k = -3/2$. c) $3 - k + 2 = 0$, $k = 5$.

17. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0 \cdot 1 - 2 \cdot 3; 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 1 \cdot 3 - 0 \cdot 0) = (-6; -1; 3)$. Prodotti scalari: $-6 + 0 + 6 = 0$ e $0 - 3 + 3 = 0$ ✓. Area del parallelogramma $\sqrt{(36 + 1 + 9)} = \sqrt{46} \approx 6{,}78$; triangolo $\sqrt{46}/2 \approx 3{,}39$. $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = (6; 1; -3)$.

18. a) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $2A - B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. b) $AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ (diversa da AB); $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. c) $CE = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$, di tipo 2×2; $EC = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -6 & 12 \end{pmatrix}$, di tipo 3×3.

19. a) $20 + 6 = 26$. b) Sarrus: diagonali +: $0 + (-8) + (-3) = -11$; diagonali −: $0 + 2 + 24 = 26$; determinante $-11 - 26 = -37$. c) Sopra la diagonale principale ci sono solo zeri: resta il prodotto della diagonale, $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

20. $D = -10$, $D_x = -10$, $D_y = -20$, $D_z = -10$. Soluzione $(1; 2; 1)$. Controllo: $2 + 2 - 1 = 3$, $1 - 2 + 2 = 1$, $3 + 4 + 1 = 8$ ✓.

21. $\det A = 6 - 5 = 1$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 6-5 & -3+3 \\ 10-10 & -5+6 \end{pmatrix} = I$ ✓. $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-7 \\ -20+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $x = 1$, $y = 1$.

22. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$. Allo stesso modo $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$. I due quadrati sono uguali se e solo se $4\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, cioè (per

vettori non nulli) se sono perpendicolari. Le due diagonali del parallelogramma sono congruenti se e solo se è un rettangolo.

23. Un vettore forma con sé stesso un angolo di 0°: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \cos 0° = |\mathbf{a}|^2$, mentre $|\mathbf{a} \times \mathbf{a}| = |\mathbf{a}|^2 \operatorname{sen} 0° = 0$. Si può dire anche così: $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{a})$ per l'anticommutatività, e l'unico vettore uguale al suo opposto è il vettore nullo.

24. a) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AC$, ma $B \neq C$: con le matrici non si può «semplificare» un fattore non nullo (non tutte le matrici non nulle sono invertibili; qui $\det A = 0$). b) $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, che coincide con la formula solo se $AB = BA$.

25. Se sono dipendenti, uno è multiplo dell'altro: per esempio $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$, cioè $c = ka$, $d = kb$, e $ad - bc = akb - bka = 0$ (se $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$ si ragiona allo stesso modo). Viceversa, sia $ad - bc = 0$. Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ i vettori sono dipendenti. Altrimenti, per esempio con $a \neq 0$, posto $k = c/a$ si ha $c = ka$ e $d = bc/a = kb$: $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$. Se $a = 0$, allora $b \neq 0$ e da $bc = 0$ segue $c = 0$: $\mathbf{v} = (d/b)\mathbf{u}$. c.v.d.

26. Nel rombo $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$. Allora $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 0$, quindi le diagonali sono perpendicolari. c.v.d.

27. Velocità rispetto alla riva: somma dei vettori, $\sqrt{(4^2 + 3^2)} = 5$ m/s; $\operatorname{tg} \theta = 3/4$, $\theta \approx 36{,}9°$ rispetto alla perpendicolare. Tempo: la componente perpendicolare è 4 m/s, quindi 60 : 4 = 15 s. Spostamento a valle: 3 · 15 = 45 m.

28. $W = 60 \cdot 25 \cdot \cos 40° \approx 1149$ J (circa 1,15 kJ).

29. a) $|\mathbf{P}| = 117{,}6$ N; componente parallela $117{,}6 \cdot \operatorname{sen} 25° \approx 49{,}7$ N; perpendicolare $117{,}6 \cdot \cos 25° \approx 106{,}6$ N. b) L'angolo tra il peso e lo spostamento è 90° + 25° = 115°: $W = 117{,}6 \cdot 3 \cdot \cos 115° \approx -149$ J. È negativo perché il peso si oppone alla salita (equivale a $-|\mathbf{P}| \cdot h$ con $h = 3 \operatorname{sen} 25° \approx 1{,}27$ m).

30. a) $0{,}3 \cdot 80 \cdot \operatorname{sen} 60° = 12\sqrt{3} \approx 20{,}8$ N · m. b) $12\sqrt{3} / 0{,}3 = 40\sqrt{3} \approx 69{,}3$ N. c) Con la forza perpendicolare: $0{,}3 \cdot 80 = 24$ N · m.

31. a) $Q \cdot \begin{pmatrix} 1{,}30 \\ 1{,}50 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 + 37{,}5 + 120 \\ 39 + 52{,}5 + 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 209{,}50 \\ 331{,}50 \end{pmatrix}$: 209,50 € e 331,50 €. b) $\begin{pmatrix} 70 & 60 & 30 \end{pmatrix}$: il numero totale di quotidiani, riviste e album venduti dalle due edicole insieme.

32. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}40 \\ 5{,}30 \\ 10{,}70 \end{pmatrix}$. $D = 1$; $D_q = 2{,}5$, $D_p = 1{,}2$, $D_m = 0{,}4$. Quaderno 2,50 €, penna 1,20 €, matita 0,40 €. Controllo: 5 + 1,2 + 1,2 = 7,4 ✓, 2,5 + 2,4 + 0,4 = 5,3 ✓, 7,5 + 1,2 + 2 = 10,7 ✓.

33. $\mathbf{AB}(4; 2)$, $\mathbf{AC}(1; 5)$; prodotto scalare 4 + 10 = 14; moduli $\sqrt{20}$ e $\sqrt{26}$; $\cos \alpha = 14/\sqrt{520} \approx 0{,}614$, $\alpha \approx 52{,}1°$. $(4; 2; 0) \times (1; 5; 0) = (0; 0; 4 \cdot 5 - 2 \cdot 1) = (0; 0; 18)$: area 18/2 = 9.

34. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} =$ $(1 \cdot 3 - (-1)(-1); (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3; 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1) = (2; -7; -3)$; modulo $\sqrt{(4 + 49 + 9)} = \sqrt{62}$. Un versore è $(2; -7; -3)/\sqrt{62}$ (va bene anche l'opposto). Controllo: 4 − 7 + 3 = 0, 2 + 7 − 9 = 0 ✓.

35. a) Sarrus: $k^2 + 1 + 1 - k - k - 1 = k^2 - 2k + 1 = (k - 1)^2$. b) Per $k \neq 1$; si verifica subito che (1; 0; 0) soddisfa le tre equazioni, e per Cramer è l'unica soluzione. c) Le tre equazioni coincidono con $x + y + z = 1$: il sistema è indeterminato (infinite soluzioni, per esempio $(1 - s - t; s; t)$). d) La prima e la seconda equazione diventano $x + y + z = 1$ e $x + y + z = 2$: il sistema è impossibile. Con $D = 0$ la regola di Cramer non distingue i due casi: lo fa la riduzione.