CAPITOLO

12

Le funzioni circolari e la risoluzione dei triangoli

Un angolo e una distanza bastano per misurare ciò che non si può toccare. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Misurare gli angoli in gradi e in radianti e calcolare archi e settori circolari.
2. Definire seno, coseno e tangente sulla circonferenza goniometrica e usare la relazione fondamentale.
3. Calcolare i valori per gli angoli notevoli e per gli angoli associati.
4. Tracciare e leggere i grafici di $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg } x$ e usare le funzioni inverse sulla calcolatrice.
5. Risolvere triangoli rettangoli e triangoli qualsiasi con i teoremi della corda, dei seni e del coseno.
6. Applicare le funzioni circolari a misure inaccessibili e alla scomposizione delle forze in fisica.

INDICE DEL CAPITOLO

12.1 Angoli orientati e radianti 2
12.2 Seno, coseno e tangente 4
12.3 I grafici delle funzioni circolari 9
12.4 I triangoli rettangoli 11
12.5 I triangoli qualsiasi 14

Matematica 2 · Parte V · Trasformazioni, funzioni circolari e vettori · versione 1.0
Capitolo 12: Le funzioni circolari e la risoluzione dei triangoli · pagine 291–314 del volume completo · estratto per lo studio

Per misurare la larghezza di un fiume senza attraversarlo, l'altezza di un campanile senza salirci, la distanza di una nave dalla costa, basta saper risolvere un triangolo: conoscendo alcuni lati e alcuni angoli, ricavare tutti gli altri. Nel capitolo 5 abbiamo visto che triangoli simili hanno i lati in proporzione; nel capitolo 4 abbiamo studiato a fondo due triangoli rettangoli speciali, quello con gli angoli di 45° e quello con gli angoli di 30° e 60°. Qui facciamo un passo in più: a **ogni** angolo associamo dei numeri, il **seno**, il **coseno** e la **tangente**, che dicono in quale rapporto stanno i lati di un triangolo rettangolo con quell'angolo.

Questi numeri, letti su una circonferenza di raggio 1, diventano funzioni definite per ogni angolo, anche negativo o maggiore di un angolo giro: le **funzioni circolari**. I loro grafici si ripetono uguali a intervalli regolari, e per questo sono il linguaggio naturale dei fenomeni periodici: le oscillazioni di un pendolo, le onde, il moto di un punto su una ruota. In fisica le userai ogni volta che una forza o una velocità andrà scomposta lungo due direzioni; nel capitolo 13 serviranno per definire il prodotto scalare e il prodotto vettoriale.

12.1 Angoli orientati e radianti

12.1.1 Angoli orientati

Finora un angolo è stato una parte di piano compresa tra due semirette. Per descrivere una rotazione, come quella delle lancette di un orologio o di una ruota, ci serve qualcosa di più: un **angolo orientato** è un angolo in cui si distingue un *lato origine* e un *lato termine*, e si immagina che il lato origine ruoti attorno al vertice fino a sovrapporsi al lato termine. Come per le rotazioni del capitolo 11, il verso **antiorario** è quello positivo e il verso orario quello negativo.

Un angolo orientato può superare l'angolo giro: una ruota che compie un giro e mezzo in verso antiorario descrive un angolo di 540°. Gli angoli α e $\alpha + k \cdot 360°$, con k intero, hanno lo stesso lato termine: differiscono per un numero intero di giri. Per esempio 30°, 390° e −330° individuano la stessa posizione finale della semiretta.

12.1.2 La misura in radianti

Il grado (la 360^a parte dell'angolo giro) è un'unità comoda ma arbitraria, un'eredità dell'astronomia antica. In matematica e in fisica si usa quasi sempre un'altra unità, legata alla geometria della circonferenza. Disegniamo un angolo al centro α in una circonferenza di raggio r e chiamiamo l la lunghezza dell'arco su cui insiste. Se raddoppiamo il raggio, anche l'arco raddoppia: circonferenze diverse sono figure simili, e archi corrispondenti allo stesso angolo stanno tra

loro come i raggi (Figura 12.1). Il rapporto $l : r$ dipende quindi solo dall'angolo, e può essere usato per misurarlo.

IN SINTESI

La **misura in radianti** di un angolo al centro è il rapporto tra la lunghezza l dell'arco su cui insiste e il raggio r: $\alpha = \frac{l}{r}$.

Un **radiante** (1 rad) è l'angolo al centro che insiste su un arco lungo quanto il raggio. Il radiante è un numero puro: un rapporto tra due lunghezze.

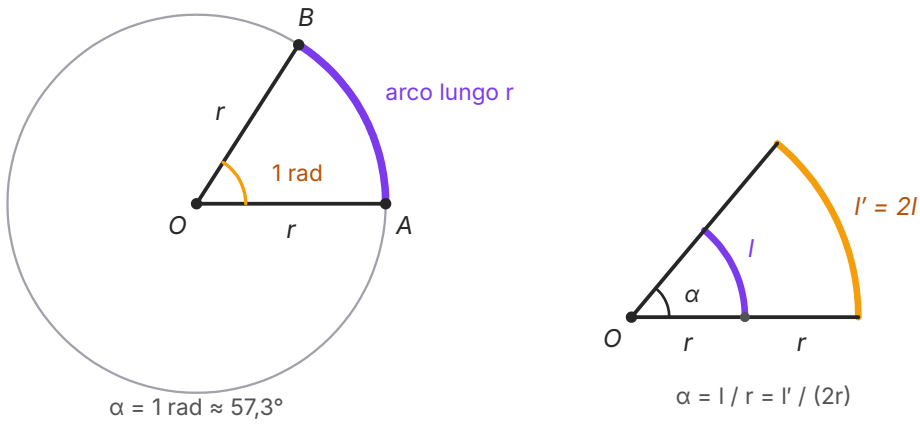


Figura 12.1 A sinistra, l'angolo di 1 radiante: l'arco *AB* è lungo quanto il raggio. A destra, lo stesso angolo α su due circonferenze concentriche di raggi r e $2r$: l'arco raddoppia insieme al raggio, e il rapporto arco/raggio non cambia.

L'angolo giro insiste sull'intera circonferenza, lunga $2\pi r$: la sua misura in radianti è $2\pi r : r = 2\pi$. Dunque 360° corrispondono a 2π rad e 180° a π rad; la proporzione

$$\alpha^\circ : 180^\circ = \alpha_{\text{rad}} : \pi$$

permette di passare da un'unità all'altra: per convertire da gradi a radianti si moltiplica per $\frac{\pi}{180^\circ}$, da radianti a gradi per $\frac{180^\circ}{\pi}$. Un radiante corrisponde a $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}3^\circ$, poco meno di 60°. Lo si capisce anche dalla figura: se fosse la *corda AB* a essere lunga r, il triangolo *OAB* sarebbe equilatero e l'angolo misurerebbe 60°; ma l'arco è più lungo della corda, quindi quando è l'arco a misurare r la corda è più corta di r e l'angolo è un po' minore di 60°.

Tabella 12.1 Angoli notevoli in gradi e in radianti.

gradi	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
radianti	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Quando un angolo è espresso in radianti di solito non si scrive l'unità: «l'angolo $\pi/3$» significa $\pi/3$ rad, cioè 60°.

12.1.3 Archi e settori circolari

Dalla definizione segue subito la lunghezza di un arco: se l'angolo al centro misura α radianti, l'arco è lungo $l = r\alpha$. Anche l'area di un settore circolare (capitolo 3) è proporzionale all'angolo al centro: l'intero cerchio, di area πr^2, corrisponde all'angolo 2π, quindi un settore di angolo α ha area $\pi r^2 \cdot \alpha/(2\pi)$.

In una circonferenza di raggio r, con l'angolo al centro α misurato in **radianti**: lunghezza dell'arco $l = r\alpha$; area del settore $A = \frac{1}{2} r^2\alpha$.

Con gli angoli in gradi le stesse formule diventano più scomode, perché compare il fattore $\pi/180°$: è uno dei motivi per cui in matematica si preferiscono i radianti.

ESEMPIO SVOLTO

Il tergicristallo. La spazzola di un tergicristallo è fissata a un braccio che ruota di 110° attorno a un perno. Il punto più lontano della spazzola è a 45 cm dal perno, quello più vicino a 15 cm. Quanto è lungo l'arco descritto dall'estremità della spazzola? Quanta superficie di vetro viene pulita?

Soluzione. Convertiamo l'angolo: $\alpha = 110° \cdot \pi/180° = 11\pi/18 \approx 1{,}920$ rad. L'estremità descrive un arco di raggio 45 cm: $l = 45 \cdot 11\pi/18 = 27{,}5\pi$ cm $\approx 86{,}4$ cm.

La superficie pulita è la differenza tra due settori dello stesso angolo, di raggi 45 cm e 15 cm (un «settore di corona circolare»): $A = \frac{1}{2} \cdot (45^2 - 15^2) \cdot \frac{11\pi}{18} = 900 \cdot \frac{11\pi}{18} = 550\pi$ cm$^2 \approx 1728$ cm^2, cioè circa 0,17 m^2.

12.2 Seno, coseno e tangente

12.2.1 La circonferenza goniometrica

Fissiamo nel piano cartesiano la circonferenza con centro nell'origine O e raggio 1: è la **circonferenza goniometrica**. Ogni angolo orientato α con il lato origine sul semiasse positivo delle x

ha il lato termine che incontra la circonferenza in un punto P; il punto $A(1; 0)$, da cui partono le rotazioni, corrisponde all'angolo 0 (Figura 12.2).

IN SINTESI

Sia P il punto della circonferenza goniometrica associato all'angolo α.

Il **coseno** di α, $\cos\alpha$, è l'ascissa di P; il **seno** di α, $\operatorname{sen}\alpha$, è l'ordinata di P: $P(\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha)$.

La **tangente** di α è il rapporto $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, definita quando $\cos\alpha \neq 0$, cioè per $\alpha \neq 90° + k \cdot 180°$.

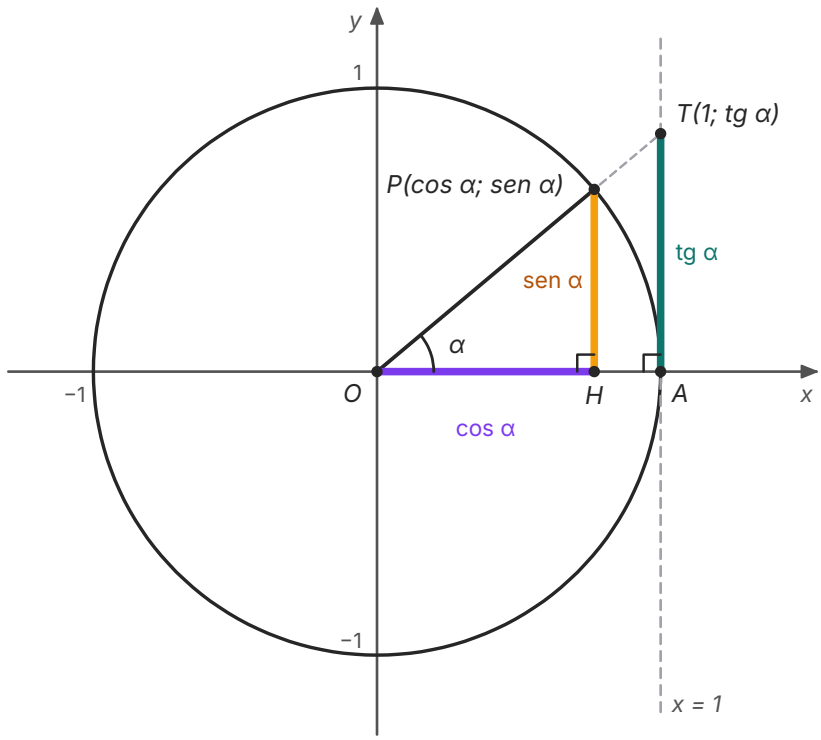


Figura 12.2 La circonferenza goniometrica. Il punto P associato all'angolo α ha coordinate $(\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha)$: il coseno è il segmento OH sull'asse x, il seno è HP. La retta OP incontra la retta tangente $x = 1$ nel punto T, la cui ordinata è $\operatorname{tg}\alpha$.

Seno e coseno sono definiti per **ogni** angolo, e poiché P sta su una circonferenza di raggio 1 le sue coordinate non possono superare 1 in valore assoluto: $-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1$, $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$. Angoli che differiscono di un multiplo di 360° individuano lo stesso punto P, e quindi hanno lo stesso seno e lo stesso coseno.

La tangente ha anch'essa un significato geometrico. Tracciamo la retta $x = 1$, tangente alla circonferenza in A, e prolunghiamo il raggio OP fino a incontrarla in T. I triangoli rettangoli OHP e OAT sono simili (hanno l'angolo α in comune), quindi $AT : OA = HP : OH$, cioè $AT = \text{sen}\,\alpha / \cos\alpha$ perché $OA = 1$. L'ordinata di T è proprio $\text{tg}\,\alpha$. Quando α si avvicina a $90°$ la retta OP diventa quasi verticale e T sale senza limite; per $\alpha = 90°$ la retta OP è parallela a $x = 1$ e T non esiste: la tangente non è definita. A differenza di seno e coseno, la tangente può assumere qualsiasi valore reale.

Il reciproco della tangente si chiama *cotangente*, $\text{cotg}\,\alpha = \cos\alpha / \text{sen}\,\alpha$; in questo libro non la useremo.

12.2.2 Le relazioni fondamentali

Il punto $P(\cos\alpha; \text{sen}\,\alpha)$ dista 1 dall'origine. Per la formula della distanza del capitolo 6 (cioè per il teorema di Pitagora nel triangolo OHP) si ha la

IN SINTESI

Relazione fondamentale: $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ per ogni angolo α.

Si scrive $\text{sen}^2\alpha$ per $(\text{sen}\,\alpha)^2$. Insieme alla definizione $\text{tg}\,\alpha = \text{sen}\,\alpha / \cos\alpha$, la relazione fondamentale permette di ricavare due delle tre funzioni conoscendo la terza e il quadrante dell'angolo.

Il **segno** di seno e coseno dipende dal quadrante in cui cade P: il coseno è positivo nel I e nel IV quadrante, il seno nel I e nel II; la tangente, quoziente dei due, è positiva nel I e nel III quadrante, dove seno e coseno hanno lo stesso segno.

Tabella 12.2 Segni delle funzioni circolari nei quattro quadranti.

	I (0°–90°)	II (90°–180°)	III (180°–270°)	IV (270°–360°)
sen α	+	+	−	−
cos α	+	−	−	+
tg α	+	−	+	−

Un esempio: sappiamo che $\text{sen}\,\alpha = 3/5$ e che $90° < \alpha < 180°$, cerchiamo $\cos\alpha$ e $\text{tg}\,\alpha$.

Dalla relazione fondamentale $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha = 1 - 9/25 = 16/25$, quindi $\cos\alpha = 4/5$ oppure $\cos\alpha = -4/5$. L'angolo è nel II quadrante, dove il coseno è negativo: $\cos\alpha = -4/5$. Infine $\text{tg}\,\alpha = (3/5) : (-4/5) = -3/4$.

Osservazione. Senza l'informazione sul quadrante avremmo avuto due risposte: esistono due angoli tra 0° e 360° con seno 3/5, uno acuto e uno ottuso.

12.2.3 I valori per gli angoli notevoli

Per alcuni angoli seno e coseno si calcolano esattamente con i triangoli del capitolo 4. Se $\alpha = 45°$, il triangolo OHP è rettangolo isoscele con ipotenusa $OP = 1$: i cateti sono $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$. Se $\alpha = 30°$, il triangolo OHP è metà di un triangolo equilatero di lato 1: il cateto HP, opposto all'angolo di 30°, è metà dell'ipotenusa, $\operatorname{sen} 30° = 1/2$, e l'altro cateto è l'altezza del triangolo equilatero, $\cos 30° = \sqrt{3}/2$. Per $\alpha = 60°$ i ruoli si scambiano. Gli angoli 0°, 90°, 180°, 270° corrispondono ai punti in cui la circonferenza incontra gli assi.

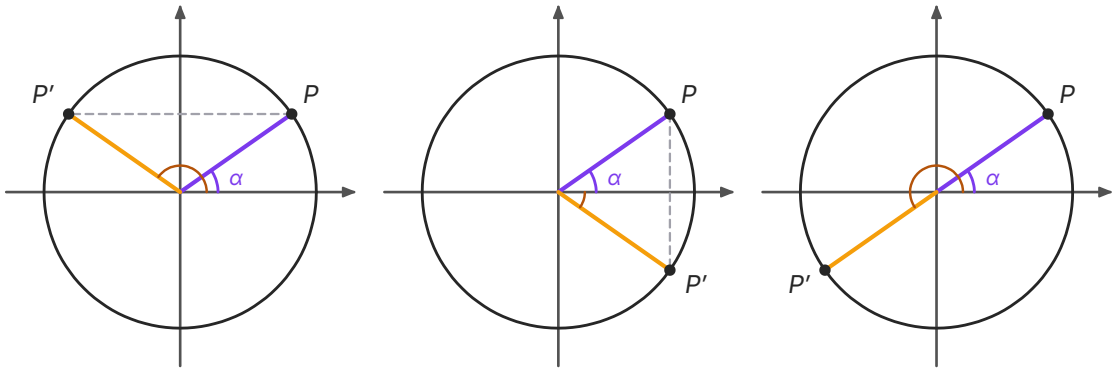
Tabella 12.3 Seno, coseno e tangente degli angoli notevoli («—»: non definita).

α	$0°$	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$	$90° = \frac{\pi}{2}$	$180° = \pi$	$270° = \frac{3\pi}{2}$	$360° = 2\pi$
$\operatorname{sen}\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0

12.2.4 Angoli associati

Conoscendo seno e coseno degli angoli del primo quadrante si ottengono quelli di tutti gli altri, grazie alle simmetrie della circonferenza goniometrica studiate nel capitolo 11. Due angoli si dicono **angoli associati** quando i loro punti sulla circonferenza goniometrica si corrispondono in una di queste simmetrie (Figura 12.3).

- **Angoli supplementari**, α e $180° - \alpha$: i punti sono simmetrici rispetto all'asse y. $\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.
- **Angoli opposti**, α e $-\alpha$: i punti sono simmetrici rispetto all'asse x. $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.
- **Angoli che differiscono di 180°**, α e $180° + \alpha$: i punti sono simmetrici rispetto all'origine. $\operatorname{sen}(180° + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$, $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180° + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$.
- **Angoli complementari**, α e $90° - \alpha$: i punti sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$, che scambia ascissa e ordinata. $\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$.



180° − α — sen uguali, cos opposti

−α — sen opposti, cos uguali

180° + α — sen e cos opposti

Figura 12.3 Angoli associati: il punto P corrisponde all'angolo α, il punto P' all'angolo associato. Supplementari: simmetria rispetto all'asse y; opposti: rispetto all'asse x; che differiscono di 180°: rispetto all'origine.

Dalla terza relazione segue che la tangente si ripete ogni 180°: due angoli che differiscono di mezzo giro hanno la stessa tangente, perché i punti P e P' stanno sulla stessa retta per l'origine. L'ultima relazione spiega il nome «coseno»: è il seno dell'angolo complementare.

Calcoliamo senza calcolatrice sen 120°, cos 135°, tg 210°, sen(−30°), cos 300°.

sen 120° = sen(180° − 60°) = sen 60° = $\sqrt{3}/2$. cos 135° = cos(180° − 45°) = −cos 45° = $-\sqrt{2}/2$. tg 210° = tg(180° + 30°) = tg 30° = $\sqrt{3}/3$. sen(−30°) = −sen 30° = −1/2. Infine 300° e −60° differiscono di un giro, quindi cos 300° = cos(−60°) = cos 60° = 1/2.

Un controllo rapido: 120° e 135° sono nel II quadrante (seno positivo, coseno negativo), 210° nel III (tangente positiva), 300° nel IV (coseno positivo). I segni ottenuti sono coerenti.

12.2.5 Il coefficiente angolare di una retta

Nel capitolo 6 abbiamo promesso un legame tra il coefficiente angolare m di una retta e l'angolo che essa forma con l'asse x. Sia $y = mx + q$ una retta non parallela agli assi e sia α l'angolo, con $0° < \alpha < 180°$, di cui bisogna ruotare in verso antiorario il semiasse positivo delle x per renderlo parallelo alla retta. La retta parallela per l'origine, $y = mx$, passa per il punto $T(1; m)$ della retta $x = 1$, e per quanto visto sopra l'ordinata di quel punto è tg α. Dunque

$$m = \operatorname{tg} \alpha.$$

Per esempio la bisettrice $y = x$ forma un angolo di 45° con l'asse x (tg 45° = 1); la retta $y = -\sqrt{3}\,x + 2$ forma un angolo di 120°, perché tg 120° = $-\sqrt{3}$. Le rette verticali formano un angolo di 90°, e infatti per esse m non è definito, come tg 90°.

12.3 I grafici delle funzioni circolari

12.3.1 Seno e coseno

Associando a ogni numero reale x, inteso come misura di un angolo in radianti, il valore sen x, otteniamo una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$: la funzione seno, $y = \text{sen } x$. Allo stesso modo si definiscono $y = \cos x$ e $y = \text{tg } x$. Usiamo i radianti perché sull'asse delle x vogliamo un numero, con la stessa unità di misura dell'asse y: un radiante sull'asse x è lungo quanto un'unità sull'asse y.

Per disegnare il grafico di $y = \text{sen } x$ basta seguire il punto P sulla circonferenza goniometrica e annotare la sua ordinata. Per x da 0 a $\pi/2$ l'ordinata sale da 0 a 1; da $\pi/2$ a π scende di nuovo a 0; da π a 2π il punto percorre la metà inferiore della circonferenza e il seno diventa negativo, raggiunge -1 per $x = 3\pi/2$ e torna a 0. Dopo un giro intero tutto si ripete. La curva che si ottiene si chiama **sinusoide** (Figura 12.4).

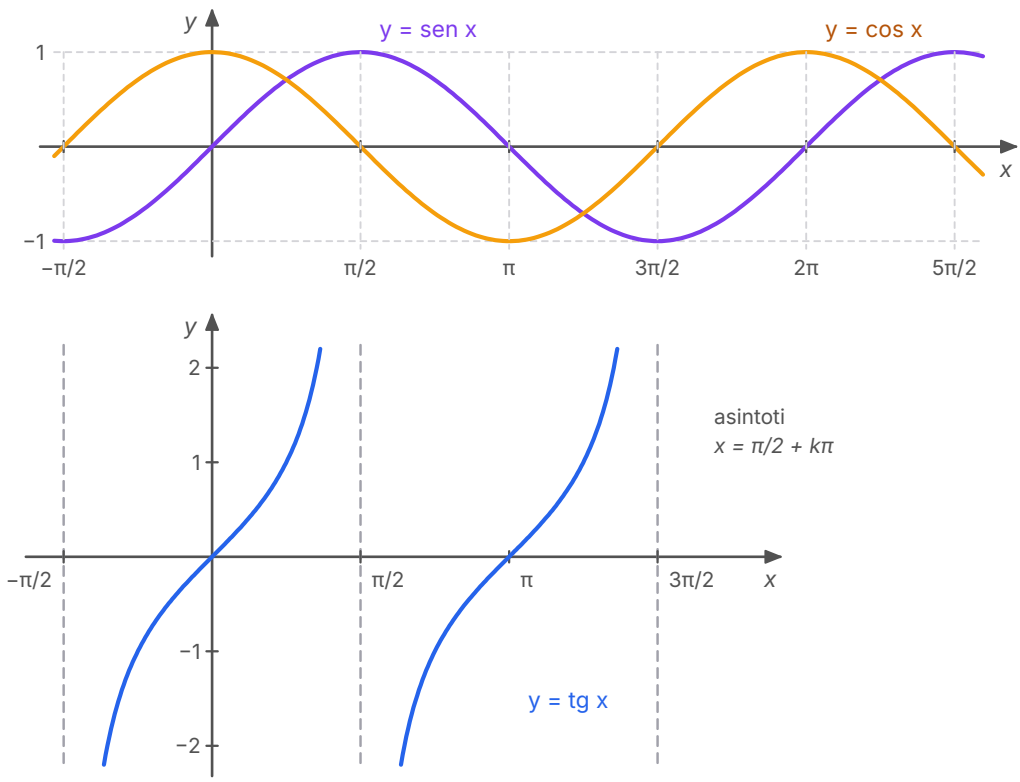


Figura 12.4 In alto, i grafici di $y = \text{sen } x$ e $y = \cos x$ nello stesso sistema di riferimento (stessa unità sui due assi). In basso, il grafico di $y = \text{tg } x$ con gli asintoti verticali $x = \pi/2 + k\pi$; i rami della curva proseguono oltre la parte disegnata.

Una funzione si dice **funzione periodica** di **periodo** $T > 0$ se $f(x + T) = f(x)$ per ogni x del dominio, e T è il più piccolo numero positivo con questa proprietà. Il grafico di una funzione periodica si ottiene ripetendo un suo tratto di lunghezza T: è invariante per la traslazione di vettore $(T; 0)$, nel linguaggio del capitolo 11.

y = sen x: dominio $\mathbb{R}$; insieme delle immagini $[-1; 1]$; periodo 2π; zeri in $x = k\pi$; massimo 1 in $x = \pi/2 + 2k\pi$, minimo -1 in $x = 3\pi/2 + 2k\pi$; grafico simmetrico rispetto all'origine, perché $\text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x$.

y = cos x: dominio $\mathbb{R}$; insieme delle immagini $[-1; 1]$; periodo 2π; zeri in $x = \pi/2 + k\pi$; massimo 1 in $x = 2k\pi$; grafico simmetrico rispetto all'asse y, perché $\cos(-x) = \cos x$.

y = tg x: dominio $x \neq \pi/2 + k\pi$; insieme delle immagini $\mathbb{R}$; periodo π; zeri in $x = k\pi$; grafico simmetrico rispetto all'origine.

(In tutte le formule k è un intero qualsiasi.)

Il grafico del coseno ha la stessa forma della sinusoide, spostata verso sinistra di $\pi/2$: osserva nella figura che il massimo del coseno in $x = 0$ anticipa di $\pi/2$ quello del seno. Il grafico della tangente è invece fatto di rami separati: in ogni intervallo $]-\pi/2; \pi/2[$ (e nei suoi traslati di $k\pi$) la funzione cresce da valori negativi grandissimi a valori positivi grandissimi, e la curva si avvicina sempre di più alle rette verticali $x = \pm\pi/2$ senza toccarle. Rette di questo tipo si chiamano **asintoti** del grafico.

12.3.2 Fenomeni periodici

Moltiplicare per un numero A tutte le ordinate del grafico di $y = \text{sen}\, x$ lo «stira» in verticale: $y = A\ \text{sen}\, x$ oscilla tra $-|A|$ e $|A|$, con lo stesso periodo 2π. Il numero $|A|$ si chiama **ampiezza** dell'oscillazione. Se A è negativo il grafico viene anche ribaltato rispetto all'asse x, come $y = -f(x)$ nel capitolo 11.

COLLEGAMENTI

Fenomeni periodici. Un punto che ruota a velocità costante su una ruota di raggio R, con il centro all'altezza dell'asse, si trova a un'altezza $h = R\ \text{sen}\, \alpha$ rispetto all'asse, dove α è l'angolo descritto: la sua altezza è una sinusoide di ampiezza R. La proiezione di un moto circolare uniforme su un diametro, studiata in fisica come *moto armonico*, segue la stessa legge; con buona approssimazione, per piccole oscillazioni, è anche il moto di un pendolo o di una massa appesa a una molla.

Molti fenomeni naturali hanno un andamento che ricorda una sinusoide: il numero di ore di luce in una località nel corso dell'anno sale e scende con regolarità, e così l'altezza della marea nell'arco di una giornata. In questi casi la sinusoide è un *modello*, nel senso del capitolo 9: descrive bene i dati entro certi limiti, ma non è una legge esatta.

12.3.3 Dal valore all'angolo: le funzioni inverse sulla calcolatrice

Spesso il problema è opposto: conosciamo il seno di un angolo e cerchiamo l'angolo. La calcolatrice ha i tasti sen^{-1}, $\cos^{-1}$, tg^{-1} (talvolta indicati con *asin*, *acos*, *atan*, o *arcsen*, *arccos*, *arctg*). Il tasto sen^{-1} applicato a 0,6 risponde «l'angolo il cui seno è 0,6», cioè circa 36,87°. Ma di angoli con seno 0,6 ce ne sono infiniti: 36,87°, il suo supplementare 143,13°, e tutti quelli che differiscono da questi di un multiplo di 360°. Una funzione deve dare **un solo** risultato, e per questo la calcolatrice sceglie sempre un angolo in un intervallo prefissato:

- sen^{-1} restituisce un angolo tra $-90°$ e $90°$ (tra $-\pi/2$ e $\pi/2$);
- $\cos^{-1}$ restituisce un angolo tra $0°$ e $180°$ (tra 0 e π);
- tg^{-1} restituisce un angolo strettamente compreso tra $-90°$ e $90°$.

In ciascuno di questi intervalli la funzione è *invertibile*, nel senso di *Matematica 1*: a valori diversi dell'angolo corrispondono valori diversi della funzione. Per esempio, nell'esempio sulla relazione fondamentale l'angolo ottuso con seno 3/5 si ottiene come $180° - \text{sen}^{-1}(0{,}6) \approx 180° - 36{,}87° = 143{,}13°$: la calcolatrice, da sola, avrebbe dato soltanto l'angolo acuto.

> **ERRORE FREQUENTE**
>
> **Gradi o radianti?** La calcolatrice lavora in una delle due modalità, indicata sul display con DEG (gradi) o RAD (radianti). In modalità RAD, sen 30 restituisce circa −0,988: è il seno di 30 *radianti*, non di 30°. Prima di ogni calcolo controlla la modalità; in un problema sui triangoli, con angoli in gradi, deve essere DEG.
>
> Nello stesso spirito: sen^{-1} restituisce un solo angolo, mai ottuso. Se il problema ammette un angolo ottuso, sei tu a dover considerare anche il supplementare.

Con il computer

In un foglio di calcolo le funzioni circolari lavorano in radianti: scrivi gli angoli in gradi in una colonna, convertili con la funzione RADIANTI e calcola SEN e COS della colonna convertita (la funzione PI.GRECO() restituisce un'approssimazione di π). Aggiungendo una colonna con $\text{sen}^2x + \cos^2x$ puoi verificare la relazione fondamentale, a meno degli errori di arrotondamento; un grafico a dispersione delle prime colonne riproduce la sinusoide. In un programma di geometria dinamica, invece, conviene creare uno *slider* A e disegnare $y = A\,\text{sen}(x)$: muovendo lo slider si vede che cambia solo l'ampiezza, mentre zeri e periodo restano gli stessi.

12.4 I triangoli rettangoli

Torniamo ai triangoli. In un triangolo rettangolo ABC con l'angolo retto in A chiamiamo a l'ipotenusa BC, b e c i cateti CA e AB, β e γ gli angoli acuti in B e in C, opposti rispettivamente a b e a c

(Figura 12.5).

Mettiamo il vertice B nell'origine di un sistema cartesiano, con il cateto c sul semiasse positivo delle x. Il triangolo ABC è simile al triangolo OHP della circonferenza goniometrica relativo all'angolo β, con rapporto di similitudine a (l'ipotenusa di OHP è 1). I lati di ABC sono quindi quelli di OHP moltiplicati per a: il cateto opposto a β è $a \operatorname{sen} \beta$, quello adiacente è $a \cos \beta$.

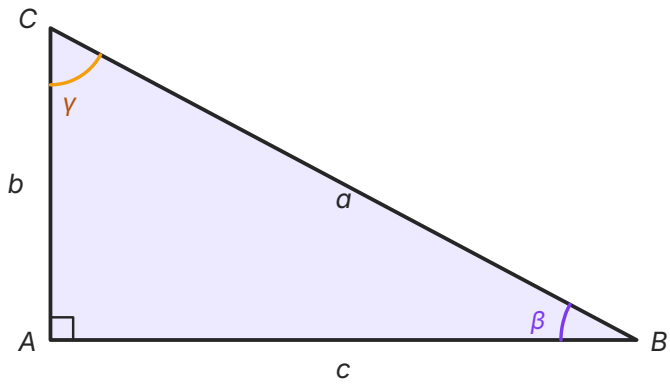


Figura 12.5 Il triangolo rettangolo ABC, retto in A: ipotenusa a, cateti b e c opposti agli angoli β e γ, e le relazioni che li legano.

IN SINTESI

Teoremi sui triangoli rettangoli. In un triangolo rettangolo:

- un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto, o per il coseno dell'angolo adiacente: $b = a \operatorname{sen} \beta = a \cos \gamma$;
- un cateto è uguale all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo: $b = c \operatorname{tg} \beta$.

Viceversa: $\operatorname{sen} \beta = b/a$ (cateto opposto su ipotenusa), $\cos \beta = c/a$ (cateto adiacente su ipotenusa), $\operatorname{tg} \beta = b/c$ (cateto opposto su cateto adiacente).

Poiché $\beta + \gamma = 90°$, gli angoli acuti sono complementari, e $\operatorname{sen} \beta = \cos \gamma$ esprime la stessa relazione vista tra gli angoli associati. **Risolvere un triangolo** significa calcolare le misure di tutti i suoi lati e di tutti i suoi angoli a partire da quelle note. Per un triangolo rettangolo bastano **due** dati oltre all'angolo retto, purché almeno uno sia un lato: con i soli angoli si determina la forma, non la grandezza.

Due casi tipici. a) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura $a = 12$ cm e un angolo acuto $\beta = 35°$. Risolviamo il triangolo. b) I cateti misurano 5 cm e 12 cm. Calcoliamo gli angoli.

a) $\gamma = 90° - 35° = 55°$; $b = a \operatorname{sen} \beta = 12 \cdot \operatorname{sen} 35° \approx 12 \cdot 0{,}5736 \approx 6{,}88$ cm; $c = a \cos \beta = 12 \cdot \cos 35° \approx 12 \cdot 0{,}8192 \approx 9{,}83$ cm. Controllo con Pitagora: $6{,}883^2 + 9{,}830^2 \approx 144{,}0 = 12^2$.

b) L'ipotenusa è $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ cm. L'angolo opposto al cateto di 5 cm ha $\operatorname{tg}\beta = 5/12$, quindi $\beta = \operatorname{tg}^{-1}(5/12) \approx 22{,}62°$, e l'altro angolo è $\gamma \approx 90° - 22{,}62° = 67{,}38°$. Il tasto tg^{-1} è qui affidabile: un angolo acuto sta sempre nel suo intervallo.

12.4.1 Misure inaccessibili

Chi misura sul campo (un geometra, un topografo, un escursionista con un clinometro) misura facilmente **angoli** e distanze orizzontali sul terreno, mentre le altezze e le distanze oltre un ostacolo sono spesso inaccessibili. L'**angolo di elevazione** di un punto è l'angolo che la retta che congiunge l'occhio dell'osservatore con il punto forma con il piano orizzontale; se il punto è più in basso dell'osservatore si parla di *angolo di depressione*. Nel capitolo 5 abbiamo misurato un albero confrontando la sua ombra con quella di un bastone; con le funzioni circolari non serve più il Sole.

ESEMPIO SVOLTO

L'altezza di una torre. Da un punto del terreno pianeggiante, a 40 m dalla base di una torre, Sara vede la cima sotto un angolo di elevazione di 28°. I suoi occhi sono a 1,60 m da terra. Quanto è alta la torre?

Soluzione. Il raggio visivo, la verticale della torre e l'orizzontale all'altezza degli occhi formano un triangolo rettangolo: il cateto orizzontale è 40 m, l'angolo opposto al cateto verticale x è 28°. Quindi $x = 40 \cdot \operatorname{tg} 28° \approx 40 \cdot 0{,}5317 \approx 21{,}27$ m. L'altezza della torre è x più l'altezza degli occhi: circa $21{,}27 + 1{,}60 \approx 22{,}9$ m.

Un errore di un grado nella misura dell'angolo (27° o 29°) cambierebbe il risultato di circa un metro: anche qui, come nel capitolo 1, ha senso dare il risultato con poche cifre significative.

COLLEGAMENTI

Componenti di un vettore. In fisica una forza di intensità F che forma un angolo α con l'asse x si scompone nelle due componenti $F_x = F\cos\alpha$ e $F_y = F\operatorname{sen}\alpha$: sono i cateti di un triangolo rettangolo che ha la forza come ipotenusa. Per esempio una forza di 50 N inclinata di 30° sull'orizzontale ha componente orizzontale $50\cos 30° = 25\sqrt{3}$ N $\approx 43{,}3$ N e componente verticale $50\operatorname{sen}30° = 25$ N. Nel capitolo 13 ritroveremo questa idea per tutti i vettori.

Il piano inclinato. Su un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale, il peso P di un corpo si scompone in una componente parallela al piano, $P_{//} = P\operatorname{sen}\theta$, che lo fa scivolare, e una perpendicolare, $P_{\perp} = P\cos\theta$, che lo preme contro il piano (l'angolo tra il peso, verticale, e la perpendicolare al piano è ancora θ, perché sono angoli con i lati perpendicolari). Per una cassa di 10 kg ($P \approx 98$ N con $g \approx 9{,}8$ m/s^2) su un piano di 20°: $P_{//} \approx 98 \cdot 0{,}342 \approx 33{,}5$ N e $P_{\perp} \approx 98 \cdot 0{,}940 \approx 92{,}1$ N.

12.5 I triangoli qualsiasi

In un triangolo qualsiasi ABC indichiamo con a, b, c i lati opposti ai vertici A, B, C e con α, β, γ gli angoli in quei vertici. Per gli angoli ottusi useremo i valori del II quadrante: seno positivo, coseno negativo.

12.5.1 L'area di un triangolo

L'altezza relativa al lato a, condotta da A, è un cateto del triangolo rettangolo che ha per ipotenusa il lato b e per angolo opposto a quel cateto l'angolo γ (o il suo supplementare, se γ è ottuso e il piede dell'altezza cade sul prolungamento di BC). In entrambi i casi l'altezza misura $b \operatorname{sen} \gamma$, perché angoli supplementari hanno lo stesso seno.

Area di un triangolo. L'area di un triangolo è uguale al semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso: $A = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \gamma$.

Per esempio i triangoli con due lati di 8 cm e 5 cm e angolo compreso di 30° o di 150° hanno la stessa area, $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 10 \text{ cm}^2$.

12.5.2 Il teorema della corda e il teorema dei seni

Sia BC una corda di una circonferenza di raggio r e α un angolo alla circonferenza che insiste su di essa (Figura 12.6). Tracciamo il diametro BD. L'angolo $\angle BDC$ insiste sullo stesso arco BC di α, quindi gli è congruente (capitolo 3); il triangolo BCD è inscritto in una semicirconferenza, quindi è retto in C. Per il teorema sui triangoli rettangoli $BC = BD \cdot \operatorname{sen} \alpha = 2r \operatorname{sen} \alpha$. Se l'angolo alla circonferenza insiste sull'altro arco, è il supplementare di α (capitolo 3, quadrilateri inscritti) e ha lo stesso seno: il risultato non cambia.

IN SINTESI

Teorema della corda. In una circonferenza di raggio r una corda è uguale al diametro per il seno di un qualsiasi angolo alla circonferenza che insiste su di essa: $BC = 2r \operatorname{sen} \alpha$.

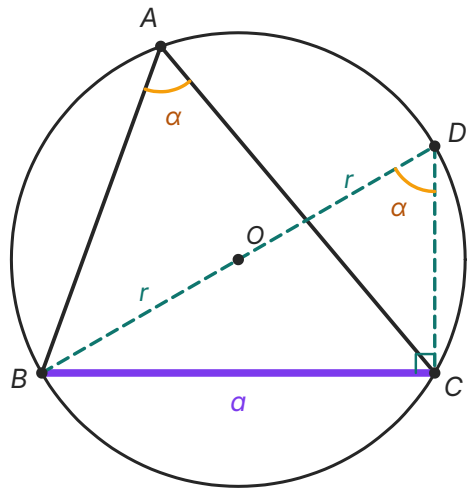


Figura 12.6 Il teorema della corda. L'angolo $\angle BDC$ e l'angolo $\angle BAC$ insistono sullo stesso arco BC; il triangolo BCD, inscritto in una semicirconferenza, è retto in C.

Ogni triangolo è inscritto in una circonferenza, quella con centro nel circocentro (capitolo 3). Applicando il teorema della corda a ciascuno dei tre lati si ottiene $a = 2r \operatorname{sen} \alpha$, $b = 2r \operatorname{sen} \beta$, $c = 2r \operatorname{sen} \gamma$, e dunque il

IN SINTESI

Teorema dei seni. In un triangolo qualsiasi i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti, e il rapporto costante è il diametro $2r$ della circonferenza circoscritta:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = 2r.$$

Il teorema dei seni serve quando si conoscono due angoli e un lato (il terzo angolo si ottiene per differenza da 180°), oppure due lati e l'angolo opposto a uno di essi. Per esempio in una circonferenza di raggio 5 cm, una corda vista da un punto della circonferenza sotto un angolo di 40° misura $10 \cdot \operatorname{sen} 40° \approx 6{,}43$ cm.

12.5.3 Il teorema del coseno

Se si conoscono due lati e l'angolo compreso, il teorema dei seni non basta: nella proporzione ci sono due incognite. Serve una generalizzazione del teorema di Pitagora. Mettiamo il vertice C nell'origine e il lato CB sul semiasse positivo delle x: allora $B(a; 0)$ e, per la definizione di seno e

coseno applicata a un segmento lungo b, $A(b\cos\gamma;\ b\,\text{sen}\,\gamma)$. Con la formula della distanza del capitolo 6:

$$c^2 = (a - b\cos\gamma)^2 + (b\,\text{sen}\,\gamma)^2 = a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2(\cos^2\gamma + \text{sen}^2\gamma) = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

La dimostrazione vale per qualunque angolo γ, acuto, retto od ottuso, perché le coordinate di A sono date dalle definizioni sulla circonferenza goniometrica.

IN SINTESI

Teorema del coseno (o *di Carnot*). In un triangolo qualsiasi il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due, diminuita del doppio prodotto di questi per il coseno dell'angolo compreso:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$; $\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$; $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Se $\alpha = 90°$, $\cos\alpha = 0$ e si ritrova il teorema di Pitagora. Il termine $-2bc\cos\alpha$ misura di quanto il triangolo si allontana dall'essere rettangolo in A: è negativo se α è acuto ($a^2 < b^2 + c^2$), positivo se α è ottuso ($a^2 > b^2 + c^2$). Ricavando il coseno, $\cos\alpha = (b^2 + c^2 - a^2)/(2bc)$, il teorema permette di calcolare gli angoli di un triangolo di cui si conoscono i tre lati.

ERRORE FREQUENTE

Il segno meno nel teorema del coseno non si cambia quando l'angolo è ottuso: è il coseno a essere negativo. Con $b = 8$, $c = 6$, $\alpha = 120°$: $a^2 = 64 + 36 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot (-1/2) = 148$, non $64 + 36 - 48 = 52$. Il lato opposto all'angolo ottuso deve risultare il più lungo del triangolo: è un controllo immediato.

12.5.4 Risolvere un triangolo

Per i criteri di congruenza di *Matematica 1*, un triangolo è determinato da tre lati (LLL), da due lati e dall'angolo compreso (LAL), da un lato e due angoli (ALA, e quindi LAA). I teoremi dei seni e del coseno permettono di calcolare gli elementi mancanti:

- **LLL**: gli angoli con il teorema del coseno (si comincia dall'angolo opposto al lato maggiore, l'unico che può essere ottuso);
- **LAL**: il terzo lato con il teorema del coseno, poi un altro angolo con il teorema del coseno o con quello dei seni;
- **ALA** e **LAA**: il terzo angolo per differenza da 180°, poi i lati con il teorema dei seni.

ESEMPIO SVOLTO

a) Risolvi il triangolo con $b = 7$, $c = 5$, $\alpha = 60°$ (LAL). b) Calcola gli angoli del triangolo di lati 4, 5, 6 (LLL).

Soluzione. a) $a^2 = 49 + 25 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos 60° = 74 - 35 = 39$, quindi $a = \sqrt{39} \approx 6{,}245$. Poi $\cos\beta = (a^2 + c^2 - b^2)/(2ac) = (39 + 25 - 49)/(10\sqrt{39}) = 15/(10\sqrt{39}) \approx 0{,}2402$, da cui $\beta \approx 76{,}10°$, e $\gamma \approx 180° - 60° - 76{,}10° = 43{,}90°$. Controllo con i seni: $\operatorname{sen}\gamma = c \operatorname{sen}\alpha / a \approx 5 \cdot 0{,}8660/6{,}245 \approx 0{,}6934$, e $\operatorname{sen}^{-1}(0{,}6934) \approx 43{,}90°$.

b) L'angolo opposto al lato 6: $\cos = (16 + 25 - 36)/(2 \cdot 4 \cdot 5) = 5/40 = 1/8$, angolo $\approx 82{,}82°$. L'angolo opposto al lato 4: $\cos = (25 + 36 - 16)/(2 \cdot 5 \cdot 6) = 45/60 = 3/4$, angolo $\approx 41{,}41°$. Il terzo angolo è $\approx 180° - 82{,}82° - 41{,}41° = 55{,}77°$; lo stesso risultato si ottiene con il teorema del coseno, $\cos = (16 + 36 - 25)/48 = 27/48$.

ESEMPIO SVOLTO

La larghezza di un fiume. Per misurare la larghezza di un fiume a sponde parallele, un gruppo di studenti fissa sulla propria riva due paletti A e B a 80 m di distanza e mira un albero C sulla riva opposta: con un goniometro misurano $\angle CAB = 62°$ e $\angle CBA = 54°$. Quanto è largo il fiume?

Soluzione (Figura 12.7). È un caso ALA. Il terzo angolo è $\angle ACB = 180° - 62° - 54° = 64°$. Per il teorema dei seni $AC : \operatorname{sen} 54° = AB : \operatorname{sen} 64°$, quindi $AC = 80 \cdot \operatorname{sen} 54° / \operatorname{sen} 64° \approx 80 \cdot 0{,}8090/0{,}8988 \approx 72{,}0$ m. La larghezza d è la distanza di C dalla retta AB, cioè un cateto del triangolo rettangolo che ha AC come ipotenusa: $d = AC \cdot \operatorname{sen} 62° \approx 72{,}0 \cdot 0{,}8829 \approx 63{,}6$ m.

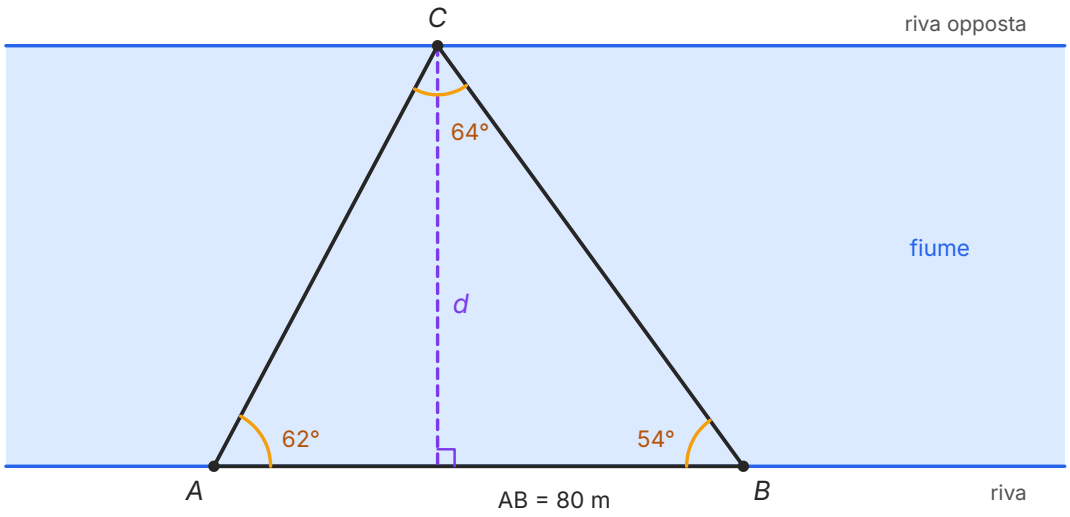


Figura 12.7 Misura della larghezza di un fiume: dalla base *AB* = 80 m e dagli angoli in *A* e in *B* si ricava *AC* con il teorema dei seni, poi la larghezza *d*, altezza del triangolo relativa ad *AB*.

12.5.5 Il caso LLA

Se si conoscono due lati e l'angolo opposto a uno di essi, il triangolo può non essere determinato: non esiste un criterio di congruenza «LLA». Supponiamo noti $\alpha = 40°$, $b = AC = 8$ e il lato opposto ad α, $a = 6$ (Figura 12.8). Il vertice B deve stare sul lato dell'angolo α e a distanza 6 da C: è un'intersezione tra una semiretta e una circonferenza di centro C, e le intersezioni possono essere due, una o nessuna.

Con il teorema dei seni: $\operatorname{sen}\beta = b \operatorname{sen}\alpha / a = 8 \cdot \operatorname{sen} 40° / 6 \approx 0{,}857$. La calcolatrice dà $\beta_1 \approx 59{,}0°$, ma anche il supplementare $\beta_2 \approx 121{,}0°$ ha lo stesso seno, e in entrambi i casi $\alpha + \beta < 180°$: ci sono **due triangoli**, con $\gamma_1 \approx 81{,}0°$ e $c_1 \approx 9{,}22$, oppure $\gamma_2 \approx 19{,}0°$ e $c_2 \approx 3{,}04$. Il caso si chiama per questo **caso ambiguo**.

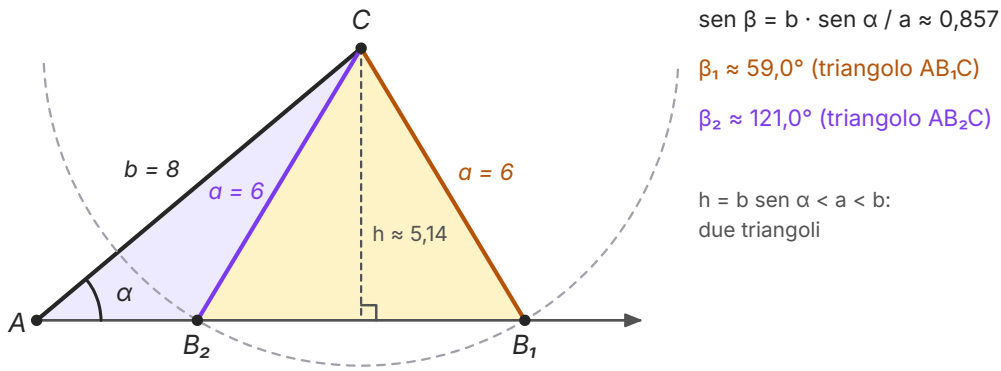


Figura 12.8 Il caso ambiguo: con α = 40°, b = 8, a = 6 la circonferenza di centro C e raggio 6 taglia il lato dell'angolo in due punti, B_1 e B_2. Poiché $h = b$ sen α ≈ 5,14 è minore di a, e a è minore di b, i triangoli possibili sono due.

In generale, con α acuto, conviene confrontare a con l'altezza $h = b$ sen α e con b: se $a < h$ nessun triangolo; se $a = h$ un triangolo rettangolo; se $h < a < b$ due triangoli; se $a \geq b$ un solo triangolo. Non serve ricordare questa casistica: basta non dimenticare il supplementare dopo aver usato sen^{-1}, e controllare che la somma degli angoli resti minore di 180°.

APPROFONDIMENTO · LA TAVOLA DELLE CORDE DI TOLOMEO

Gli astronomi greci non usavano il seno ma la **corda**: data una circonferenza, a ogni angolo al centro associavano la lunghezza della corda corrispondente. L'opera più antica che ci è giunta con una tavola di corde completa è la *Sintassi matematica* di Claudio Tolomeo (II secolo d.C.), nota con il titolo arabo di *Almagesto*. La tavola dà le corde per angoli da mezzo grado a 180°, a passi di mezzo grado, in una circonferenza di raggio 60 parti, con i valori scritti nel sistema sessagesimale ereditato dai Babilonesi.

Per il teorema della corda, la corda di un angolo al centro θ in una circonferenza di raggio r vale $2r$ sen(θ/2): la tavola di Tolomeo è, in sostanza, una tavola dei seni. Il seno come lo usiamo noi, la metà della corda dell'angolo doppio, compare nell'astronomia indiana e arriva in Europa attraverso i matematici di lingua araba; il nome latino *sinus* risale alle traduzioni medievali dall'arabo.

Prima di risolvere un triangolo chiediti quali dati hai: due angoli e un lato → teorema dei seni; due lati e l'angolo compreso, o tre lati → teorema del coseno; due lati e un angolo non compreso

→ teorema dei seni, **con attenzione al supplementare**. Alla fine controlla sempre che al lato maggiore sia opposto l'angolo maggiore.

SINTESI

- Un angolo orientato ha un lato origine e un lato termine; il verso antiorario è positivo. Gli angoli α e $\alpha + k \cdot 360°$ hanno lo stesso lato termine.
- La misura in radianti di un angolo al centro è il rapporto arco/raggio; $180° = \pi$ rad. Arco $l = r\alpha$, settore $A = \frac{1}{2} r^2\alpha$ (α in radianti).
- Sulla circonferenza goniometrica il punto associato ad α è $P(\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha)$; $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{sen}\alpha / \cos\alpha$ è l'ordinata del punto in cui la retta OP incontra la retta $x = 1$.
- Relazione fondamentale: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Seno e coseno stanno tra -1 e 1, la tangente assume ogni valore reale e non è definita per $\alpha = 90° + k \cdot 180°$.
- I valori per 30°, 45°, 60° si ricavano dai triangoli del capitolo 4; gli angoli associati (supplementari, opposti, che differiscono di 180°, complementari) corrispondono alle simmetrie della circonferenza.
- Il coefficiente angolare di una retta è la tangente dell'angolo che essa forma con l'asse x: $m = \operatorname{tg}\alpha$.
- $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ hanno dominio $\mathbb{R}$, immagini $[-1; 1]$ e periodo 2π; $y = \operatorname{tg} x$ ha periodo π e asintoti verticali in $x = \pi/2 + k\pi$.
- I tasti sen^{-1}, $\cos^{-1}$, tg^{-1} restituiscono un solo angolo, in un intervallo prefissato; controlla sempre la modalità DEG/RAD.
- Nel triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto (o per il coseno dell'angolo adiacente), o all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto.
- In un triangolo qualsiasi: area $\frac{1}{2}\, ab \operatorname{sen}\gamma$; teorema della corda $BC = 2r \operatorname{sen}\alpha$; teorema dei seni $a/\operatorname{sen}\alpha = b/\operatorname{sen}\beta = c/\operatorname{sen}\gamma = 2r$; teorema del coseno $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.
- LLL e LAL si risolvono con il teorema del coseno, ALA e LAA con il teorema dei seni; il caso LLA può avere due, una o nessuna soluzione.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Un radiante è l'ampiezza dell'angolo al centro che:
   - **A.** insiste su un arco lungo quanto il diametro
   - **B.** insiste su un arco lungo quanto il raggio
   - **C.** è la 360ª parte dell'angolo giro
   - **D.** insiste su un arco lungo π

2. ● In quale quadrante seno e coseno sono entrambi negativi?

   A. nel I

   B. nel II

   C. nel III

   D. nel IV

3. ● cos 60° vale:

   A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

   B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

   C. 1

   D. $\frac{1}{2}$

4. ●● Se sen $\alpha = 0{,}8$ e α è un angolo ottuso, allora cos α vale:

   A. $-0{,}6$

   B. $0{,}6$

   C. $0{,}2$

   D. $-0{,}2$

5. ●● Il periodo della funzione $y = \text{tg}\, x$ è:

   A. 2π

   B. π

   C. $\pi/2$

   D. la funzione non è periodica

6. ●● In un triangolo i lati misurano $a = 7$, $b = 5$, $c = 3$. Quale angolo è ottuso?

   A. nessuno

   B. β

   C. γ

   D. α

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.

   a) $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ per ogni angolo α.

   b) $\text{tg}\, 90° = 1$.

   c) $\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}\, \alpha$.

   d) $\cos(-\alpha) = -\cos \alpha$.

   e) Un angolo di 2 radianti è ottuso.

   f) Il teorema dei seni vale solo per i triangoli acutangoli.

8. ● Completa.
   a) La misura in radianti di un angolo al centro è il rapporto tra _____ e _____ .
   b) Il coseno di α è _____ del punto della circonferenza goniometrica associato ad α.
   c) In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il _____ dell'angolo opposto.
   d) Teorema del coseno: a^2 = _____ .

Calcolare

9. ● Converti in radianti: 30°, 135°, 210°, 330°, 72°. Converti in gradi: π/9, 5π/4, 7π/6, 2 rad (approssima al centesimo di grado).

10. ● a) In una circonferenza di raggio 6 cm, calcola la lunghezza dell'arco e l'area del settore che corrispondono all'angolo al centro 2π/3. b) In una circonferenza di raggio 4 cm un arco è lungo 10 cm: quanto misura l'angolo al centro, in radianti e in gradi?

11. ● Calcola senza calcolatrice.
   a) sen 30° + cos 60° b) 2 sen 45° cos 45° c) tg 60° · tg 30°
   d) $\text{sen}^2 60° - \cos^2 60°$ e) cos 180° + sen 270°

12. ●● Usando gli angoli associati, calcola: sen 150°, cos 120°, tg 135°, sen 225°, cos 330°, tg(−60°), sen(−45°).

13. ●● Sapendo che cos α = −5/13 e 180° < α < 270°, calcola sen α e tg α.

14. ●● Sapendo che tg α = 2 e che α è acuto, calcola sen α e cos α. *Suggerimento:* sen α = 2 cos α; sostituisci nella relazione fondamentale.

15. ● Risolvi il triangolo *ABC* rettangolo in *A* (lati al centesimo, angoli al centesimo di grado), con le notazioni del paragrafo sui triangoli rettangoli.
   a) a = 20 cm, β = 40° b) b = 9 cm, c = 12 cm c) c = 10 cm, β = 25°

16. ●● a) Calcola l'area di un triangolo che ha due lati di 6 cm e 10 cm e l'angolo compreso di 45°. b) Calcola l'area di un parallelogramma di lati 8 cm e 5 cm con un angolo di 120°.

17. ●● In un triangolo α = 50°, β = 70° e a = 12 cm. Calcola γ, b, c e il raggio della circonferenza circoscritta.

18. ●● a) Calcola il terzo lato di un triangolo in cui b = 8 cm, c = 6 cm e α = 120°. b) Un triangolo ha i lati di 7 cm, 8 cm e 13 cm: calcola, senza calcolatrice, l'angolo opposto al lato maggiore.

19. ●● In un triangolo α = 30° e b = 10 cm. Stabilisci quanti triangoli esistono se il lato opposto ad α misura a) 4 cm; b) 5 cm; c) 8 cm; d) 12 cm. Nel caso c) calcola i possibili valori di β.

Dimostrare e argomentare

20. ● Spiega perché per ogni angolo α si ha $-1 \le \text{sen}\,\alpha \le 1$, mentre $\text{tg}\,\alpha$ può assumere qualsiasi valore reale. Usa la circonferenza goniometrica.

21. ●● Dimostra che, per ogni α con $\cos\alpha \neq 0$, vale $1 + \text{tg}^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$.

22. ●● Trova l'errore.
a) «sen $\alpha = 0{,}5$, quindi $\alpha = 30°$.» (Si cercano gli angoli tra 0° e 360°.)
b) «Con la calcolatrice ho trovato sen $30 = -0{,}988$: dunque il seno di 30° è negativo.»

23. ●● Partendo dal teorema del coseno, dimostra che in un triangolo l'angolo α è ottuso se e solo se $a^2 > b^2 + c^2$. Che cosa ottieni per $\alpha = 90°$?

24. ●●● Dimostra che in ogni triangolo $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$ (*teorema delle proiezioni*). *Traccia:* conduci l'altezza da A e distingui il caso in cui β e γ sono acuti da quello in cui uno dei due è ottuso.

Problemi

25. ● Una rampa deve superare un dislivello di 60 cm. Supponi che la pendenza massima consentita sia dell'8% (8 cm di dislivello ogni 100 cm in orizzontale). Qual è l'angolo massimo di inclinazione della rampa? Quanto deve essere lunga, come minimo, la rampa (misurata lungo il piano inclinato)?

26. ●● Il filo di un aquilone, ben teso, è lungo 50 m e forma un angolo di 35° con il terreno; la mano che lo tiene è a 1,2 m da terra. A quale altezza vola l'aquilone?

27. ●● Un bambino tira una slitta con una corda inclinata di 25° sull'orizzontale, esercitando una forza di 80 N. Calcola la componente orizzontale e la componente verticale della forza.

28. ●● Una cassa di 25 kg è appoggiata su una rampa inclinata di 15°. Calcola le componenti del peso parallela e perpendicolare alla rampa ($g \approx 9{,}8\ \text{m/s}^2$). Per quale inclinazione la componente parallela sarebbe metà del peso?

29. ●● Due navi lasciano lo stesso porto nello stesso momento, seguendo rotte rettilinee che formano un angolo di 70°. Dopo un'ora la prima ha percorso 12 km, la seconda 18 km. Quanto distano tra loro?

30. ●●● Da un punto A del terreno la cima di un campanile si vede sotto un angolo di elevazione di 30°. Avvicinandosi di 50 m in direzione del campanile, l'angolo di elevazione diventa 45°. Calcola l'altezza del campanile in forma esatta e approssimata (trascura l'altezza dell'osservatore).

Con il computer

31. ●● In un foglio di calcolo scrivi nella colonna A gli angoli da 0° a 360° con passo 15°. Nella colonna B convertili in radianti con RADIANTI, nelle colonne C e D calcola SEN e COS, nella colonna E la somma dei quadrati di C e D. a) Quali valori trovi nella colonna E? b) Confronta i valori di C per 30°, 150°, 210° e 330° e spiega le relazioni con gli angoli associati. c) Costruisci il grafico a dispersione di C in funzione di B.

32. ●● In un programma di geometria dinamica crea uno slider A tra -3 e 3 e disegna il grafico di $y = A\ \text{sen}(x)$. Descrivi che cosa cambia e che cosa resta invariato quando muovi lo slider; che cosa succede per $A = 0$ e per A negativo? Qual è l'insieme delle immagini della funzione?

Verso la verifica

33. ●● Risolvi il triangolo in cui $a = 10$ cm, $\beta = 45°$, $\gamma = 75°$, e calcolane l'area.

34. ●● Un parallelogramma ha i lati di 6 cm e 4 cm e un angolo di 60°. Calcola le due diagonali in forma esatta e approssimata.

35. ●●● **Sfida.** a) Dimostra con il teorema della corda che il lato di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio r misura $l = 2r\ \text{sen}(180°/n)$. b) Verifica che per $n = 6$ si ottiene $l = r$. c) Calcola il rapporto tra il perimetro del poligono e il diametro per $n = 12$ e per $n = 96$. A quale numero si avvicina? Collega il risultato al metodo di Archimede del capitolo 3.

PER APPROFONDIRE

- [MAT] Maor, *Trigonometric Delights*: la storia delle funzioni circolari, dalle corde di Tolomeo alle tavole dei seni, con molte applicazioni.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: l'astronomia greca, Tolomeo e la trasmissione della trigonometria attraverso il mondo indiano e arabo.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le funzioni periodiche e il loro ruolo nella descrizione dei fenomeni.

Glossario del capitolo

Ampiezza
In $y = A \operatorname{sen} x$, il numero $|A|$: la funzione oscilla tra $-|A|$ e $|A|$.

Angoli associati
Angoli i cui punti sulla circonferenza goniometrica si corrispondono in una simmetria (supplementari, opposti, che differiscono di 180°, complementari).

Angolo di elevazione
Angolo che la retta dall'occhio dell'osservatore a un punto più in alto forma con il piano orizzontale.

Asintoto
Retta a cui un ramo del grafico si avvicina indefinitamente; $y = \operatorname{tg} x$ ha asintoti verticali $x = \pi/2 + k\pi$.

Caso ambiguo
Il caso in cui sono noti due lati e l'angolo opposto a uno di essi: i triangoli possibili possono essere due, uno o nessuno.

Circonferenza goniometrica
La circonferenza di centro l'origine e raggio 1, su cui si leggono seno, coseno e tangente di un angolo.

Coseno
Ascissa del punto della circonferenza goniometrica associato all'angolo α; si scrive $\cos \alpha$.

Funzione periodica
Funzione per cui esiste $T > 0$ con $f(x + T) = f(x)$ per ogni x; il minimo T con questa proprietà è il periodo.

Misura in radianti
Il rapporto l/r tra la lunghezza dell'arco su cui insiste un angolo al centro e il raggio.

Radiante
Unità di misura degli angoli: l'angolo al centro che insiste su un arco lungo quanto il raggio. L'angolo giro misura 2π rad.

Relazione fondamentale
L'identità $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, valida per ogni angolo α.

Risolvere un triangolo
Calcolare tutti i lati e gli angoli di un triangolo a partire da quelli noti.

Seno
Ordinata del punto della circonferenza goniometrica associato all'angolo α; si scrive $\operatorname{sen} \alpha$.

Sinusoide
Il grafico della funzione $y = \operatorname{sen} x$, e più in generale di $y = A \operatorname{sen} x$.

Tangente
Il rapporto $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sen} \alpha / \cos \alpha$, definito per $\cos \alpha \neq 0$; è l'ordinata del punto in cui la retta OP incontra la retta $x = 1$.

Teorema dei seni
In ogni triangolo $a/\operatorname{sen} \alpha = b/\operatorname{sen} \beta = c/\operatorname{sen} \gamma = 2r$, con r raggio della circonferenza circoscritta.

Teorema del coseno
In ogni triangolo $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$; generalizza il teorema di Pitagora (detto anche teorema di Carnot).

Teorema della corda
In una circonferenza di raggio r una corda è uguale a $2r$ per il seno di un angolo alla circonferenza che insiste su di essa.

Soluzioni

1. B. È la definizione di radiante: arco = raggio.

2. C. Nel III quadrante l'ascissa e l'ordinata di P sono entrambe negative.

3. D. $\cos 60° = 1/2$.

4. A. $\cos^2\alpha = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$; nel II quadrante il coseno è negativo: $\cos\alpha = -0{,}6$.

5. B. La tangente si ripete ogni π: $\text{tg}(x + \pi) = \text{tg}\, x$.

6. D. $\cos\alpha = (25 + 9 - 49)/30 = -1/2$, quindi $\alpha = 120°$: è ottuso l'angolo opposto al lato maggiore.

7. a) V. b) F: tg 90° non è definita. c) V. d) F: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. e) V: 2 rad ≈ 114,6°. f) F: vale per ogni triangolo.

8. a) la lunghezza dell'arco su cui insiste; il raggio. b) l'ascissa. c) seno. d) $b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

9. π/6, 3π/4, 7π/6, 11π/6, 2π/5; 20°, 225°, 210°, 2 rad ≈ 114,59°.

10. a) $l = 6 \cdot 2\pi/3 = 4\pi$ cm ≈ 12,57 cm; $A = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 2\pi/3 = 12\pi$ cm² ≈ 37,70 cm². b) $\alpha = 10/4 = 2{,}5$ rad ≈ 143,24°.

11. a) $1/2 + 1/2 = 1$. b) $2 \cdot (\sqrt{2}/2) \cdot (\sqrt{2}/2) = 1$. c) $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}/3) = 1$. d) $3/4 - 1/4 = 1/2$. e) $-1 + (-1) = -2$.

12. $\text{sen}\, 150° = 1/2$; $\cos 120° = -1/2$; $\text{tg}\, 135° = -1$; $\text{sen}\, 225° = -\sqrt{2}/2$; $\cos 330° = \sqrt{3}/2$; $\text{tg}(-60°) = -\sqrt{3}$; $\text{sen}(-45°) = -\sqrt{2}/2$.

13. $\text{sen}^2\alpha = 1 - 25/169 = 144/169$; nel III quadrante il seno è negativo: $\text{sen}\,\alpha = -12/13$; $\text{tg}\,\alpha = (-12/13) : (-5/13) = 12/5$.

14. $4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\cos^2\alpha = 1/5$; con α acuto $\cos\alpha = 1/\sqrt{5} = \sqrt{5}/5 \approx 0{,}447$ e $\text{sen}\,\alpha = 2\sqrt{5}/5 \approx 0{,}894$.

15. a) $\gamma = 50°$; $b = 20\,\text{sen}\,40° \approx 12{,}86$ cm; $c = 20\cos 40° \approx 15{,}32$ cm. b) $a = 15$ cm; $\text{tg}\,\beta = 9/12$, $\beta \approx 36{,}87°$, $\gamma \approx 53{,}13°$. c) $\gamma = 65°$; $b = 10\,\text{tg}\,25° \approx 4{,}66$ cm; $a = 10/\cos 25° \approx 11{,}03$ cm.

16. a) $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \text{sen}\, 45° = 15\sqrt{2}$ cm² ≈ 21,21 cm². b) Il parallelogramma è formato da due triangoli congruenti: $8 \cdot 5 \cdot \text{sen}\, 120° = 20\sqrt{3}$ cm² ≈ 34,64 cm².

17. $\gamma = 60°$; $b = 12\,\text{sen}\,70°/\text{sen}\,50° \approx 14{,}72$ cm; $c = 12\,\text{sen}\,60°/\text{sen}\,50° \approx 13{,}57$ cm; $2r = 12/\text{sen}\,50° \approx 15{,}66$ cm, $r \approx 7{,}83$ cm.

18. a) $a^2 = 64 + 36 - 96\cos 120° = 148$, $a = 2\sqrt{37} \approx 12{,}17$ cm. b) $\cos = (49 + 64 - 169)/112 = -1/2$: l'angolo è 120°.

19. L'altezza è $h = 10\,\text{sen}\,30° = 5$ cm. a) $a < h$: nessun triangolo. b) $a = h$: un triangolo, rettangolo in B. c) $h < a < b$: due triangoli; $\text{sen}\,\beta = 10 \cdot 0{,}5/8 = 0{,}625$, $\beta \approx 38{,}68°$ oppure $\beta \approx 141{,}32°$. d) $a > b$: un solo triangolo.

20. Traccia: P ha coordinate $(\cos\alpha; \text{sen}\,\alpha)$ su una circonferenza di raggio 1, quindi $|\text{sen}\,\alpha| \le \text{OP} = 1$. La tangente è l'ordinata di T, intersezione della retta OP con la retta $x = 1$: al variare di α tra −90° e 90° la retta OP ruota e T percorre tutta la retta $x = 1$, quindi la sua ordinata assume ogni valore reale.

21. $1 + \text{tg}^2\alpha = 1 + \text{sen}^2\alpha/\cos^2\alpha = (\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha)/\cos^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$, per la relazione fondamentale.

22. a) Anche $\alpha = 150°$ ha seno 0,5: le soluzioni tra 0° e 360° sono 30° e 150°. b) La calcolatrice era in modalità RAD e ha calcolato il seno di 30 radianti; in modalità DEG $\text{sen}\,30° = 0{,}5$.

23. Da $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$: $a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow \cos\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha$ è ottuso (tra 0° e 180° il coseno è negativo solo per gli angoli ottusi). Per $\alpha = 90°$ si ottiene il teorema di Pitagora.

24. Traccia: sia H il piede dell'altezza da A. Se β e γ sono acuti, H sta tra B e C, $BH = c\cos\beta$, $HC = b\cos\gamma$ e $a = BH + HC$. Se per esempio β è ottuso, H sta sul prolungamento di CB oltre B: $a = HC - HB = b\cos\gamma - c\cos(180° - \beta) = b\cos\gamma + c\cos\beta$.

25. $\text{tg}\,\alpha = 0{,}08$, $\alpha \approx 4{,}57°$. La proiezione orizzontale è $60 : 0{,}08 = 750$ cm = 7,5 m; la rampa è lunga $\sqrt{7{,}5^2 + 0{,}6^2} \approx 7{,}52$ m.

26. $50\,\text{sen}\,35° \approx 28{,}68$ m; altezza ≈ 28,68 + 1,2 ≈ 29,9 m.

27. 80 cos 25° ≈ 72,5 N (orizzontale); 80 sen 25° ≈ 33,8 N (verticale).

28. Peso ≈ 245 N. 245 sen 15° ≈ 63,4 N (parallela); 245 cos 15° ≈ 236,7 N (perpendicolare). sen θ = 1/2 per θ = 30°.

29. $d^2 = 144 + 324 - 2 \cdot 12 \cdot 18 \cdot \cos 70° \approx 320{,}25$; $d \approx$ 17,9 km.

30. Sia h l'altezza e x la distanza del secondo punto dalla base: $h = x \operatorname{tg} 45° = x$ e $h = (x + 50) \operatorname{tg} 30° = (x + 50)\sqrt{3}/3$. Quindi $h\sqrt{3} = h + 50$, $h = 50/(\sqrt{3} - 1) = 25(\sqrt{3} + 1)$ m ≈ 68,3 m.

31. a) Sempre 1 (eventualmente 0,9999... per gli arrotondamenti). b) SEN(30°) = SEN(150°) = 0,5 (angoli supplementari); SEN(210°) = SEN(330°) = −0,5 (210° = 180° + 30°, 330° = −30° + 360°). c) Si ottiene un periodo della sinusoide, tra 0 e circa 6,28.

32. Cambia l'ampiezza: la curva oscilla tra $-|A|$ e $|A|$. Restano invariati gli zeri ($x = k\pi$) e il periodo 2π. Per $A = 0$ il grafico è l'asse x; per A negativo il grafico è ribaltato rispetto all'asse x. Insieme delle immagini: $[-|A|; |A|]$.

33. α = 60°; $b = 10 \operatorname{sen} 45°/\operatorname{sen} 60° = 10\sqrt{6}/3 \approx 8{,}16$ cm; $c = 10 \operatorname{sen} 75°/\operatorname{sen} 60° \approx 11{,}15$ cm; area $\frac{1}{2}\, ab \operatorname{sen} \gamma \approx \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8{,}165 \cdot 0{,}9659 \approx 39{,}4$ cm^2.

34. Diagonale minore, opposta all'angolo di 60°: $d^2 = 36 + 16 - 48 \cos 60° = 28$, $d = 2\sqrt{7} \approx 5{,}29$ cm. Diagonale maggiore, opposta all'angolo di 120°: $D^2 = 36 + 16 + 24 = 76$, $D = 2\sqrt{19} \approx 8{,}72$ cm.

35. a) Ogni lato è una corda; il suo angolo al centro è $360°/n$, e un angolo alla circonferenza sullo stesso arco ne è la metà, $180°/n$; per il teorema della corda $l = 2r \operatorname{sen}(180°/n)$. b) $l = 2r \operatorname{sen} 30° = r$. c) Rapporto $n \cdot l / (2r) = n \operatorname{sen}(180°/n)$: per $n = 12 \approx 3{,}1058$; per $n = 96 \approx 3{,}1410$. Il rapporto si avvicina a π, come nel metodo di Archimede (96 lati).