CAPITOLO

10

Equazioni, disequazioni e sistemi di grado superiore

Un polinomio scomposto in fattori è un problema grande diviso in problemi piccoli: ognuno si risolve da solo. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Risolvere equazioni di grado superiore al secondo con la scomposizione e la legge di annullamento del prodotto; risolvere equazioni binomie, trinomie e biquadratiche.
2. Risolvere disequazioni prodotto e fratte con fattori di primo e di secondo grado, e sistemi di disequazioni.
3. Risolvere equazioni e disequazioni con il valore assoluto, interpretandole come distanze e con il grafico di $y = |f(x)|$.
4. Risolvere sistemi di secondo grado per sostituzione e interpretarli come intersezioni tra retta e parabola; riconoscere e risolvere i sistemi simmetrici.
5. Impostare problemi di geometria, fisica ed economia con equazioni, disequazioni e sistemi, controllando l'accettabilità delle soluzioni.

INDICE DEL CAPITOLO

10.1 Equazioni di grado superiore al secondo 2
10.2 Disequazioni di grado superiore, fratte e sistemi 7
10.3 Equazioni e disequazioni con valore assoluto 10
10.4 Sistemi di secondo grado 13
10.5 Problemi di secondo grado e di grado superiore 16

Matematica 2 · Parte IV · Il secondo grado · versione 1.0
Capitolo 10: Equazioni, disequazioni e sistemi di grado superiore · pagine 243–262 del volume completo · estratto per lo studio

Un'azienda vuole costruire scatole a base quadrata alte 2 cm più del lato di base, con un volume di 45 cm^3. Se il lato è x, il volume è $x^2(x+2)$, e il problema diventa $x^3 + 2x^2 - 45 = 0$: un'equazione di *terzo* grado. Nel capitolo 8 abbiamo trovato una formula per il secondo grado; per il terzo grado una formula esiste, ma è complicata, e dal quinto grado in poi una formula generale con le radici non esiste affatto. Eppure molte equazioni di grado superiore si risolvono in poche righe, se si riesce a **scomporre** il polinomio.

In questo capitolo mettiamo insieme tutto ciò che sappiamo sul secondo grado: la formula risolutiva e la scomposizione del trinomio (capitolo 8), il segno del trinomio letto sulla parabola (capitolo 9), la tabella dei segni e la legge di annullamento del prodotto di *Matematica 1*. Con questi strumenti risolviamo equazioni e disequazioni di grado superiore, disequazioni fratte e sistemi di disequazioni, equazioni e disequazioni con il valore assoluto e, infine, sistemi di secondo grado, che hanno un significato geometrico molto chiaro: le intersezioni tra una retta e una parabola.

10.1 Equazioni di grado superiore al secondo

10.1.1 Scomporre e annullare i fattori

Un'equazione intera si dice di **grado superiore** al secondo se, ridotta a forma normale $P(x) = 0$, il polinomio $P(x)$ ha grado maggiore di 2. Per questo tipo di equazioni non useremo formule: il metodo è sempre lo stesso, e lo conosci da *Matematica 1*.

1. Si porta l'equazione nella forma $P(x) = 0$.
2. Si scompone il polinomio in fattori di primo e di secondo grado: raccoglimento totale o parziale, prodotti notevoli, regola di Ruffini (vedi *Matematica 1*), scomposizione del trinomio con le sue soluzioni (capitolo 8).
3. Si applica la legge di annullamento del prodotto: un prodotto è nullo se e solo se almeno un fattore è nullo. Si uguaglia a zero ogni fattore e si risolvono le equazioni di primo e di secondo grado che si ottengono.

Un esempio semplice: $x^3 - 4x = 0$. Raccogliendo x e usando la differenza di quadrati si ha $x(x-2)(x+2) = 0$, quindi $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$. Le tre soluzioni sono i punti in cui il grafico della funzione $y = x^3 - 4x$ incontra l'asse x (Figura 10.1): gli *zeri* della funzione, come per la parabola nel capitolo 9.

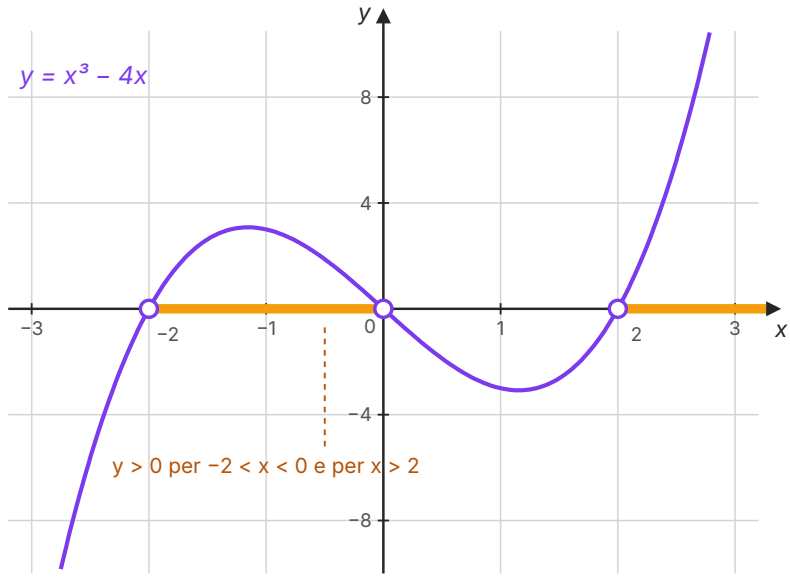


Figura 10.1 Il grafico di $y = x^3 - 4x$, disegnato punto per punto dall'equazione. Incontra l'asse x nei tre zeri -2, 0, 2, le soluzioni di $x^3 - 4x = 0$. In arancio i tratti dell'asse in cui la curva sta sopra l'asse: le soluzioni della disequazione $x^3 - 4x > 0$, che risolveremo più avanti. Le scale sui due assi sono diverse.

ERRORE FREQUENTE

Dividere per l'incognita. Davanti a $x^3 = 4x$ viene la tentazione di dividere entrambi i membri per x e scrivere $x^2 = 4$, cioè $x = \pm 2$. Così si perde la soluzione $x = 0$! Dividere per x è lecito solo se $x \neq 0$, e questo non lo sappiamo. Si porta invece tutto al primo membro e si raccoglie: $x^3 - 4x = 0$, $x(x^2 - 4) = 0$, con le tre soluzioni 0, 2, -2.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.

Ricerca di uno zero. Il raccoglimento non funziona; proviamo con la regola di Ruffini. Gli eventuali zeri interi vanno cercati tra i divisori del termine noto 6: ±1, ±2, ±3, ±6. Per $x = 1$: $1 - 2 - 5 + 6 = 0$. Quindi il polinomio è divisibile per $x - 1$.

Divisione. Con Ruffini si trova il quoziente $x^2 - x - 6$ (con resto 0), cioè $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6)$.

Annullamento. $x - 1 = 0$ dà $x = 1$; $x^2 - x - 6 = 0$ ha $\Delta = 1 + 24 = 25$ e soluzioni $x = \frac{1 \pm 5}{2}$, cioè $x = 3$ e $x = -2$.

Soluzioni. $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$. **Controllo:** per $x = 3$: $27 - 18 - 15 + 6 = 0$ ✓; per $x = -2$: $-8 - 8 + 10 + 6 = 0$ ✓.

Si può dimostrare che un'equazione di grado n ha **al massimo *n* soluzioni reali**: ogni soluzione a fa comparire nella scomposizione un fattore $x - a$, e il grado del polinomio limita il numero dei fattori di primo grado. Le soluzioni possono anche essere meno di n, perché un fattore di secondo grado con $\Delta < 0$ non si annulla mai, oppure perché un fattore compare più volte. Per esempio $(x - 1)^2(x + 2) = 0$ ha due sole soluzioni distinte, 1 e −2; si dice che 1 è una **soluzione doppia** (in generale, una soluzione multipla), perché il fattore $x - 1$ compare due volte.

10.1.2 Le equazioni binomie

Un'**equazione binomia** è un'equazione che si può scrivere nella forma $x^n = k$, con n intero maggiore di 1 e k numero reale. Per risolverla basta il significato di radice studiato nel capitolo 2, ma bisogna distinguere l'indice pari dall'indice dispari.

IN SINTESI

Equazione binomia $x^n = k$.

***n* dispari:** per ogni k reale c'è una e una sola soluzione, $x = \sqrt[n]{k}$. Per esempio $x^3 = -27$ ha la soluzione $x = -3$.

***n* pari:** se $k > 0$ ci sono due soluzioni opposte, $x = \pm\sqrt[n]{k}$; se $k = 0$ la sola soluzione $x = 0$; se $k < 0$ nessuna soluzione reale, perché una potenza di esponente pari non è mai negativa.

Esempi. $x^4 = 16$: $x = \pm 2$. $2x^5 + 64 = 0$: $x^5 = -32$, $x = -2$. $x^6 = -1$: nessuna soluzione reale. $x^4 = 5$: $x = \pm\sqrt[4]{5}$, due numeri irrazionali. Come per la radice quadrata, il simbolo $\sqrt[n]{k}$ indica sempre il numero *non negativo* quando l'indice è pari: per questo, con n pari, il segno ± va scritto esplicitamente.

Anche le binomie si possono risolvere con la scomposizione: $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$; il fattore $x^2 + 4$ non si annulla mai, e restano le soluzioni ± 2. È un buon modo per controllare il risultato.

10.1.3 Le equazioni trinomie e biquadratiche

Un'**equazione trinomia** ha la forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ (con $a \neq 0$): compaiono solo una potenza dell'incognita, il suo quadrato e un termine noto. Il caso più frequente è $n = 2$, l'**equazione biquadratica**

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

L'idea è cambiare il nome all'incognita. Ponendo $t = x^2$ si ha $x^4 = t^2$, e l'equazione diventa di secondo grado nell'**incognita ausiliaria** t: $at^2 + bt + c = 0$. Trovate le soluzioni in t, si torna a x risolvendo le binomie $x^2 = t$: ogni valore $t > 0$ dà due soluzioni $x = \pm\sqrt{t}$, il valore $t = 0$ dà $x = 0$, ogni valore $t < 0$ non dà soluzioni.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi: a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; b) $x^4 + x^2 - 6 = 0$; c) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

a) Con $t = x^2$: $t^2 - 5t + 4 = 0$, $\Delta = 25 - 16 = 9$, $t = \dfrac{5 \pm 3}{2}$, cioè $t = 1$ e $t = 4$. Da $x^2 = 1$: $x = \pm 1$; da $x^2 = 4$: $x = \pm 2$. Quattro soluzioni: $-2, -1, 1, 2$ (Figura 10.2).

b) $t^2 + t - 6 = 0$, $\Delta = 1 + 24 = 25$, $t = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$: $t = 2$ e $t = -3$. Da $x^2 = 2$: $x = \pm\sqrt{2}$; $x^2 = -3$ non ha soluzioni reali. Le soluzioni sono solo due: $\pm\sqrt{2}$.

c) È una trinomia con $n = 3$: si pone $t = x^3$. $t^2 - 9t + 8 = 0$ ha le soluzioni $t = 1$ e $t = 8$; da $x^3 = 1$ si ottiene $x = 1$, da $x^3 = 8$ si ottiene $x = 2$. L'indice è dispari: una sola soluzione per ogni valore di t, anche se fosse negativo.

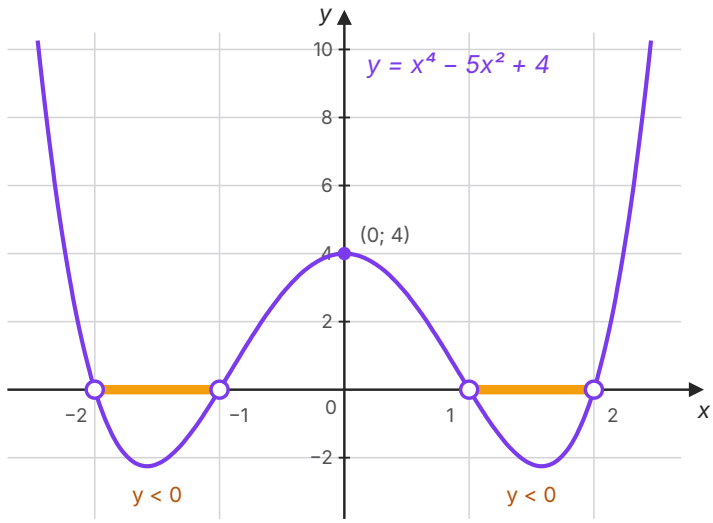


Figura 10.2 Il grafico di $y = x^4 - 5x^2 + 4$, calcolato dall'equazione. È simmetrico rispetto all'asse y (compaiono solo potenze pari di x) e incontra l'asse x nei quattro zeri -2, -1, 1, 2. In arancio i tratti in cui la curva sta sotto l'asse: le soluzioni di $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$. Le scale sui due assi sono diverse.

Osserva che la biquadratica dell'esempio a) si può anche scomporre: $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$. In generale, se t_1 e t_2 sono le soluzioni dell'equazione in t, vale $ax^4 + bx^2 + c = a(x^2 - t_1)(x^2 - t_2)$: è la scomposizione del trinomio del capitolo 8, con x^2 al posto di x. Ci servirà per le disequazioni.

APPROFONDIMENTO · TARTAGLIA, CARDANO E LE EQUAZIONI DI TERZO GRADO

Per il secondo grado la formula risolutiva era nota, in forma geometrica, da molti secoli. Per il terzo grado la svolta arrivò in Italia, nel Cinquecento. Scipione del Ferro, professore a Bologna, trovò nei primi decenni del secolo il modo di risolvere le equazioni del tipo «cubo e cose uguale a numero», cioè $x^3 + px = q$; Niccolò Tartaglia ritrovò il metodo in modo indipendente e nel 1539 lo comunicò a Gerolamo Cardano, che gli aveva promesso di non divulgarlo. Cardano lo pubblicò invece nel 1545 nell'*Ars Magna*, citando sia del Ferro sia Tartaglia, insieme al metodo per il quarto grado trovato dal suo allievo Ludovico Ferrari. Ne nacque una celebre disputa pubblica, a colpi di cartelli di sfida, tra Tartaglia e Ferrari.

La formula esprime la soluzione con radici quadrate e cubiche dei coefficienti. Per $x^3 + 6x = 20$ dà $x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$, un numero che sembra irrazionale e invece vale esattamente 2: si può verificare che $10 + \sqrt{108} = (1 + \sqrt{3})^3$ e $\sqrt{108} - 10 = (\sqrt{3} - 1)^3$. Per le equazioni di grado cinque o superiore una formula generale di questo tipo non esiste: lo dimostrarono Paolo Ruffini (1799, con una lacuna) e Niels Henrik Abel (1824). Lo stesso Ruffini della regola che usi per dividere i polinomi.

10.2 Disequazioni di grado superiore, fratte e sistemi

10.2.1 Disequazioni prodotto

In *Matematica 1* hai risolto le disequazioni prodotto con fattori di primo grado, usando lo studio del segno e la tabella dei segni. Ora possiamo ammettere anche fattori di secondo grado, perché del trinomio di secondo grado sappiamo studiare il segno (capitolo 9). Riassumiamo quello che serve.

Segno del trinomio $ax^2 + bx + c$. Se $\Delta > 0$ e $x_1 < x_2$ sono le soluzioni, il trinomio ha il segno di a all'esterno dell'intervallo $[x_1; x_2]$ e il segno opposto all'interno. Se $\Delta = 0$ ha il segno di a per ogni x diverso dalla soluzione doppia, dove si annulla. Se $\Delta < 0$ ha sempre il segno di a.

Tabella dei segni (vedi *Matematica 1*): per ogni fattore si studia «fattore > 0»; linea continua dove è positivo, tratteggiata dove è negativo, 0 dove si annulla; la riga finale si ottiene con la regola dei segni, e solo lì si sceglie il segno richiesto.

Torniamo alla disequazione $x^3 - 4x > 0$. Scomposta, è $x(x - 2)(x + 2) > 0$: tre fattori di primo grado, con zeri -2, 0, 2. Il prodotto è positivo per $-2 < x < 0$ e per $x > 2$, esattamente dove il grafico di Figura 10.1 sta sopra l'asse x. Il grafico è una conferma visiva, ma la soluzione si trova con l'algebra.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi $(x-2)(x^2-2x-3)<0$.

Segno dei fattori. $x-2>0$ per $x>2$. Il trinomio x^2-2x-3 ha $\Delta=4+12=16$ e soluzioni $x=-1$ e $x=3$; con $a=1>0$ è positivo per $x<-1$ e per $x>3$, negativo tra -1 e 3.

Tabella dei segni. Gli zeri -1, 2, 3 dividono la retta in quattro intervalli:

	$x<-1$	$-1<x<2$	$2<x<3$	$x>3$
$x-2$	−	−	+	+
x^2-2x-3	+	−	−	+
prodotto	**−**	**+**	**−**	**+**

Soluzioni. Il prodotto è negativo nel primo e nel terzo intervallo; gli zeri sono esclusi perché la disequazione è stretta: $x<-1$ oppure $2<x<3$.

Controllo. Per $x=0$: $(-2)(-3)=6$, positivo, e infatti 0 non è soluzione. Per $x=2{,}5$: $0{,}5\cdot(-1{,}75)<0$ ✓.

Due osservazioni rendono il lavoro più rapido. Un fattore che è **sempre positivo**, come x^2+x+1 ($\Delta=-3<0$, $a>0$) o x^2+4, non cambia il segno del prodotto e si può ignorare: $(x^2+x+1)(x-5)\geq 0$ equivale a $x-5\geq 0$, cioè $x\geq 5$. Un **quadrato** come $(x-3)^2$ è positivo tranne in 3, dove si annulla: basta ricordare di includere o escludere quel punto.

Le disequazioni biquadratiche si trattano con la stessa incognita ausiliaria. Per $x^4-5x^2+4<0$, con $t=x^2$ si ha $t^2-5t+4<0$, vera per $1<t<4$; quindi $1<x^2<4$, cioè $-2<x<-1$ oppure $1<x<2$. Lo stesso risultato si ottiene dalla scomposizione $(x^2-1)(x^2-4)<0$ con la tabella dei segni, e si legge sul grafico di Figura 10.2.

10.2.2 Disequazioni fratte

Una disequazione fratta si risolve come in *Matematica 1*: condizioni di esistenza, tutto al primo membro, un'unica frazione $\dfrac{N(x)}{D(x)}>0$ (o con $<$, $\geq$, $\leq$), studio del segno di **ogni** fattore del numeratore e del denominatore. Ora i fattori possono essere di secondo grado. Gli zeri del denominatore sono sempre esclusi, anche quando la disequazione è larga.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} \leq 0$.

C.E. $x^2 - 1 \neq 0$, cioè $x \neq \pm 1$.

Numeratore. $x^2 - x - 6 > 0$: $\Delta = 25$, soluzioni -2 e 3; positivo per $x < -2$ oppure $x > 3$.

Denominatore. $x^2 - 1 > 0$ per $x < -1$ oppure $x > 1$.

Tabella dei segni (Figura 10.3). Gli zeri -2, -1, 1, 3 dividono la retta in cinque intervalli; la frazione è negativa in $]-2; -1[$ e in $]1; 3[$. La disequazione è larga, quindi si includono gli zeri del numeratore, -2 e 3, ma non quelli del denominatore.

Soluzioni. $-2 \leq x < -1$ oppure $1 < x \leq 3$. **Controllo:** per $x = 0$ la frazione vale $\dfrac{-6}{-1} = 6 > 0$, e infatti 0 non è soluzione; per $x = 2$ vale $\dfrac{-4}{3} < 0$ ✓.

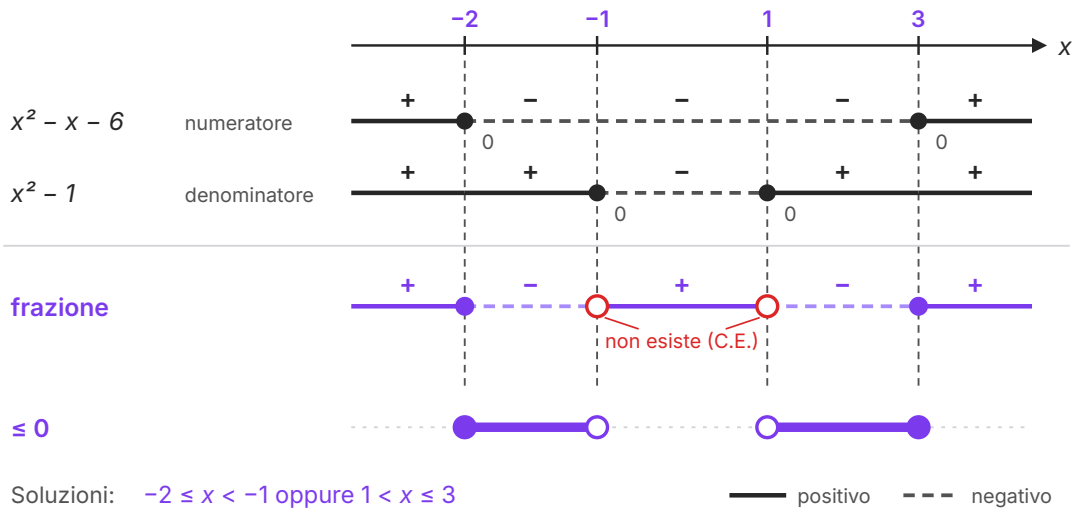


Figura 10.3 La tabella dei segni della frazione $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1}$. Linea continua: fattore positivo; linea tratteggiata: fattore negativo; 0: zero del fattore. Nell'ultima riga le soluzioni di $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} \leq 0$: -1 e 1, esclusi dalle C.E., hanno il pallino vuoto anche se la disequazione è larga.

Attenzione a non «semplificare» un fattore del denominatore senza pensarci. In $\dfrac{x^2 - 3x}{(x-2)^2} \leq 0$ il denominatore è un quadrato, positivo per ogni $x \neq 2$: si può trascurare nello studio del segno,

ma la condizione $x \neq 2$ resta. Il numeratore $x(x-3)$ è negativo o nullo per $0 \le x \le 3$, e le soluzioni sono $0 \le x \le 3$ con $x \neq 2$.

10.2.3 Sistemi di disequazioni

Un sistema di disequazioni chiede i valori di x che soddisfano **contemporaneamente** tutte le disequazioni: si risolve ciascuna disequazione separatamente e si prende l'**intersezione** degli insiemi delle soluzioni, come in *Matematica 1*. Lo schema grafico con una riga per disequazione resta il modo più sicuro per non sbagliare.

Per esempio, nel sistema formato da $x^2 - 5x + 4 \le 0$ e $x^2 - 4 > 0$ la prima disequazione ha soluzioni $1 \le x \le 4$ (il trinomio ha zeri 1 e 4 ed è negativo tra di essi), la seconda $x < -2$ oppure $x > 2$. Sulla retta, l'unica parte comune è $2 < x \le 4$: è la soluzione del sistema. Il valore 2 è escluso perché non soddisfa la seconda disequazione, 4 è incluso perché le soddisfa entrambe ($0 \le 0$ e $12 > 0$).

10.3 Equazioni e disequazioni con valore assoluto

10.3.1 Il valore assoluto come distanza

Nel capitolo 1 hai visto che il valore assoluto $|a|$ è la distanza del numero a dall'origine della retta reale, e che $|a - b|$ è la distanza tra i punti a e b. In termini algebrici:

$$|A| = A \quad \text{se} \quad A \ge 0, \qquad |A| = -A \quad \text{se} \quad A < 0$$

Quando dentro il valore assoluto c'è un'espressione $A(x)$ che contiene l'incognita, si parla di **equazione con valore assoluto** o di **disequazione con valore assoluto**. Il metodo generale consiste nel distinguere i casi $A(x) \ge 0$ e $A(x) < 0$, togliendo il modulo in ciascuno; ma per le forme più frequenti ci sono scorciatoie sicure, che nascono dall'idea di distanza.

10.3.2 Equazioni

$|A(x)| = k$, con k numero. Se $k < 0$ l'equazione è impossibile (una distanza non è negativa); se $k = 0$ equivale ad $A(x) = 0$; se $k > 0$ equivale a $A(x) = k$ oppure $A(x) = -k$: i numeri a distanza k dall'origine sono due. Per esempio $|2x - 3| = 5$ dà $2x - 3 = 5$, $x = 4$, oppure $2x - 3 = -5$, $x = -1$. E $|x^2 - 5| = 4$ dà $x^2 = 9$ oppure $x^2 = 1$: quattro soluzioni, ± 3 e ± 1.

$|A(x)| = |B(x)|$. Due numeri hanno lo stesso valore assoluto se e solo se sono uguali oppure opposti: l'equazione equivale ad $A(x) = B(x)$ oppure $A(x) = -B(x)$. Per $|x - 1| = |2x + 4|$: $x - 1 = 2x + 4$ dà $x = -5$; $x - 1 = -2x - 4$ dà $x = -1$. Controllo: $|-6| = |-6|$ e $|-2| = |2|$ ✓.

$|A(x)| = B(x)$. Qui il secondo membro dipende da x e può essere negativo. Si risolvono i due casi come due sistemi misti e si uniscono le soluzioni: se $A(x) \ge 0$, l'equazione è $A(x) = B(x)$; se $A(x) < 0$, è $-A(x) = B(x)$. Ogni soluzione trovata va confrontata con la condizione del suo caso.

ERRORE FREQUENTE

Togliere il modulo senza condizioni. Per risolvere $|x-3| = 2x$ uno studente scrive «$x - 3 = \pm 2x$» e trova $x = -3$ e $x = 1$. Ma per $x = -3$ il primo membro vale $|-6| = 6$ e il secondo -6: non è una soluzione. Lavorando per casi: se $x \geq 3$, $x - 3 = 2x$ dà $x = -3$, che non soddisfa $x \geq 3$; se $x < 3$, $3 - x = 2x$ dà $x = 1$, accettabile. L'unica soluzione è $x = 1$: infatti $|1 - 3| = 2 = 2 \cdot 1$ ✓. In alternativa si può tenere la scorciatoia «$A = \pm B$» aggiungendo la condizione $B(x) \geq 0$, cioè qui $x \geq 0$, che scarta -3.

10.3.3 Disequazioni

Anche per le disequazioni la distanza suggerisce la regola. I punti che distano da 2 meno di 3 sono quelli tra -1 e 5: $|x - 2| < 3$ equivale a $-3 < x - 2 < 3$, cioè $-1 < x < 5$. Sul grafico (Figura 10.4) sono le ascisse dei punti in cui la curva $y = |x - 2|$ sta sotto la retta $y = 3$. Invece i punti che distano da 2 *più* di 3 stanno fuori da quell'intervallo: $|x - 2| > 3$ equivale a $x < -1$ oppure $x > 5$.

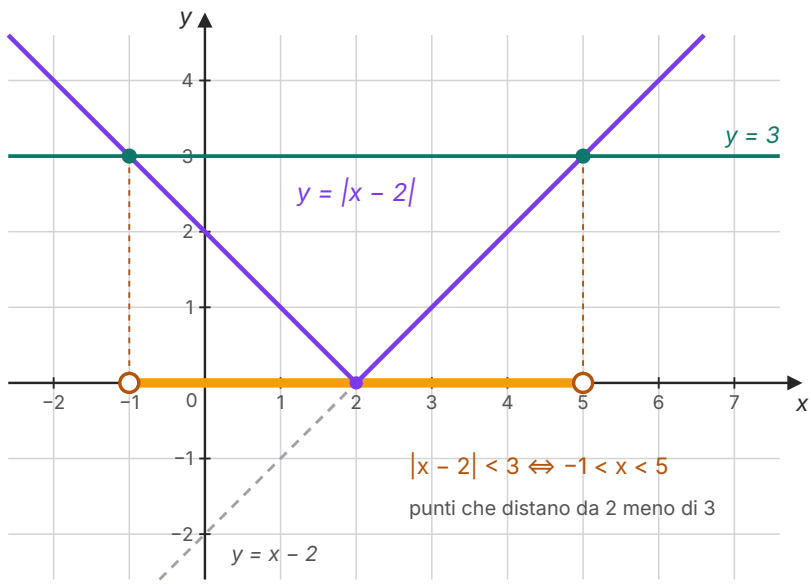


Figura 10.4 Il grafico di $y = |x - 2|$ (viola) si ottiene dalla retta $y = x - 2$ ribaltando rispetto all'asse x la parte che sta sotto l'asse (tratteggio grigio). Incontra la retta $y = 3$ nei punti di ascissa -1 e 5: tra questi valori la curva sta sotto la retta, e infatti le soluzioni di $|x - 2| < 3$ sono $-1 < x < 5$ (in arancio). Stessa scala sui due assi.

IN SINTESI

Disequazioni con valore assoluto. Con $k > 0$:

$|A(x)| < k \Leftrightarrow -k < A(x) < k$ $\qquad$ $|A(x)| > k \Leftrightarrow A(x) < -k$ oppure $A(x) > k$

(e lo stesso con $\leq$ e $\geq$). Se $k < 0$: $|A(x)| < k$ è impossibile, $|A(x)| > k$ è vera ovunque $A(x)$ è definita. Se $k = 0$: $|A(x)| \leq 0$ equivale ad $A(x) = 0$, $|A(x)| > 0$ ad $A(x) \neq 0$.

Le stesse equivalenze valgono anche con un secondo membro $B(x)$ variabile: $|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$; $|A| > B \Leftrightarrow A < -B$ oppure $A > B$.

Esempio. Risolvi: a) $|2x - 1| \geq 3$; b) $|x^2 - 2x| < 3$.

a) $2x - 1 \leq -3$ oppure $2x - 1 \geq 3$, cioè $x \leq -1$ oppure $x \geq 2$.

b) La disequazione equivale al sistema $-3 < x^2 - 2x < 3$, cioè alle due disequazioni $x^2 - 2x + 3 > 0$ e $x^2 - 2x - 3 < 0$. La prima ha $\frac{\Delta}{4} = 1 - 3 = -2 < 0$ e $a > 0$: è vera per ogni x. La seconda ha zeri -1 e 3 ed è vera per $-1 < x < 3$. Intersezione: $-1 < x < 3$.

Controllo. Per $x = 2{,}5$: $|6{,}25 - 5| = 1{,}25 < 3$ ✓. Per $x = 3$: $|9 - 6| = 3$, non minore di 3: escluso, come previsto.

Il grafico di $y = |f(x)|$. L'esempio di Figura 10.4 contiene un'idea generale: dove $f(x) \geq 0$ il grafico di $y = |f(x)|$ coincide con quello di $y = f(x)$; dove $f(x) < 0$ si ottiene ribaltando il grafico rispetto all'asse x. Così da una retta si ottiene una «V», come $y = |x|$ di *Matematica 1*, e da una parabola una curva con un tratto capovolto (Figura 10.5). Il grafico non sta mai sotto l'asse x, e questo spiega a colpo d'occhio perché $|f(x)| = k$ con $k < 0$ non ha soluzioni.

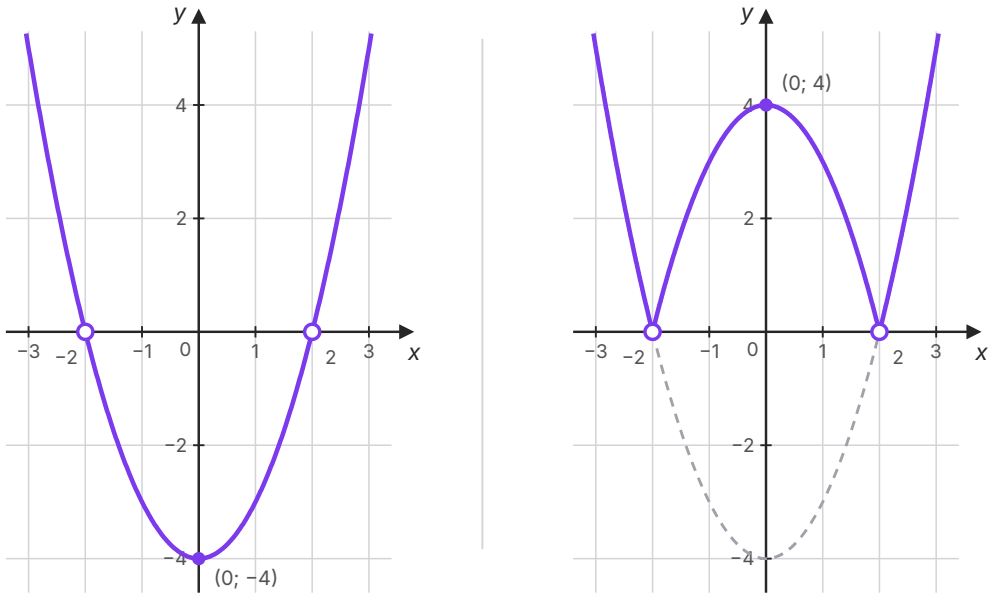


Figura 10.5 A sinistra la parabola $y = x^2 - 4$; a destra $y = |x^2 - 4|$, ottenuta ribaltando rispetto all'asse x l'arco compreso tra gli zeri -2 e 2 (tratteggio grigio: la parte originale). Il vertice $(0; -4)$ diventa il punto $(0; 4)$. Stessa scala sui due assi.

COLLEGAMENTI

Tolleranze e incertezze. Un pezzo meccanico progettato per misurare 50 mm «con una tolleranza di 0,2 mm» è accettato se la sua lunghezza L soddisfa $|L - 50| \le 0{,}2$, cioè $49{,}8 \le L \le 50{,}2$ (in mm). Allo stesso modo, in fisica una misura scritta come $(12{,}4 \pm 0{,}1)$ cm dice che il valore della grandezza x soddisfa, con buona fiducia, $|x - 12{,}4| \le 0{,}1$: l'errore assoluto del capitolo 1 è proprio un raggio attorno al valore misurato.

10.4 Sistemi di secondo grado

10.4.1 Il metodo di sostituzione

Nel capitolo 7 hai visto che il grado di un sistema intero è il prodotto dei gradi delle sue equazioni. Un **sistema di secondo grado** in due incognite è quindi formato da un'equazione di primo grado e una di secondo grado. Si risolve con il **metodo di sostituzione**: dall'equazione di primo grado si ricava un'incognita e la si sostituisce nell'altra. Si ottiene un'equazione di secondo grado in una sola incognita, l'**equazione risolvente**; per ogni sua soluzione si calcola l'altra incognita.

Esempio. Risolvi il sistema formato da $y = x^2 - 4x + 3$ e $y = x - 1$.

Sostituzione. L'incognita y è già ricavata: $x^2 - 4x + 3 = x - 1$, cioè l'equazione risolvente $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Risoluzione. $\Delta = 25 - 16 = 9$, $x = \dfrac{5 \pm 3}{2}$: $x = 1$ e $x = 4$. Dalla seconda equazione: per $x = 1$, $y = 0$; per $x = 4$, $y = 3$.

Soluzioni. Le coppie (1; 0) e (4; 3). **Controllo** nella prima equazione: $1 - 4 + 3 = 0$ ✓; $16 - 16 + 3 = 3$ ✓.

10.4.2 Retta e parabola

Ogni equazione del sistema precedente ha un grafico: la prima è una parabola, la seconda una retta. Una soluzione del sistema è una coppia che soddisfa entrambe le equazioni, cioè un punto che sta su entrambe le curve: le soluzioni sono le coordinate dei **punti di intersezione**. Una retta e una parabola possono avere due punti comuni, uno solo o nessuno; e il numero dei punti comuni si legge sul discriminante dell'equazione risolvente (Figura 10.6).

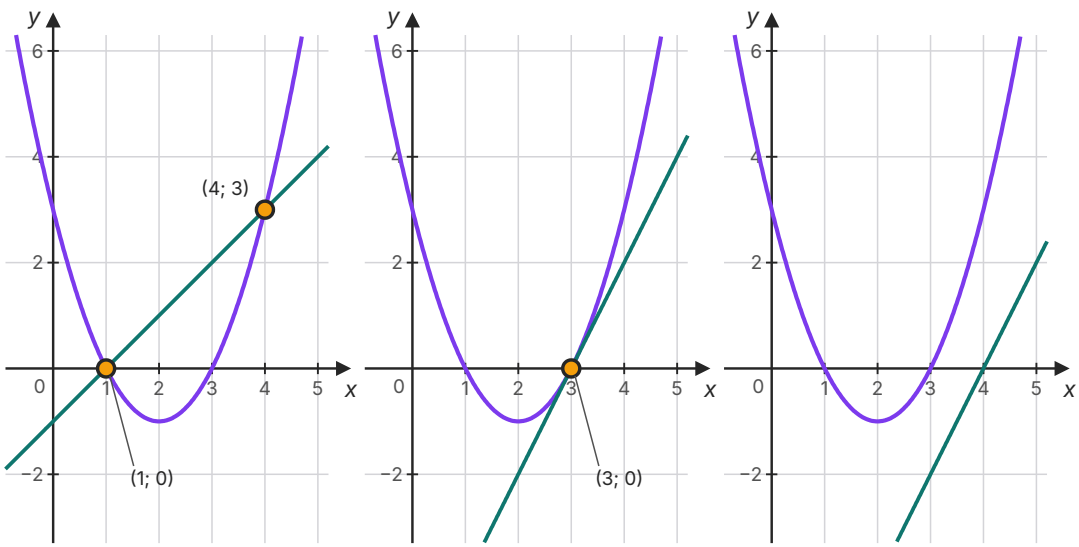


Figura 10.6 La parabola $y = x^2 - 4x + 3$ e tre rette, calcolate. A sinistra $y = x - 1$ la taglia in (1; 0) e (4; 3); al centro $y = 2x - 6$ la tocca solo in (3; 0); a destra $y = 2x - 8$ non la incontra. In ciascun caso Δ è il discriminante dell'equazione risolvente del sistema. Stessa scala sui due assi.

IN SINTESI

Posizione di una retta rispetto a una parabola (retta non parallela all'asse y). Sia Δ il discriminante dell'equazione risolvente del sistema retta-parabola.

- $\Delta > 0$: due soluzioni distinte, la retta è **secante** la parabola (due punti comuni);
- $\Delta = 0$: due soluzioni coincidenti, la retta è **tangente** alla parabola (un solo punto comune, contato due volte);
- $\Delta < 0$: nessuna soluzione reale, la retta è **esterna** alla parabola.

Questo collegamento tra algebra e geometria permette di risolvere problemi che a prima vista sono solo geometrici. Fra tutte le rette parallele $y = 2x + q$ (un fascio improprio, capitolo 6), quale è tangente alla parabola $y = x^2 - 4x + 3$? La risolvente è $x^2 - 4x + 3 = 2x + q$, cioè $x^2 - 6x + 3 - q = 0$, con $\frac{\Delta}{4} = 9 - (3 - q) = 6 + q$. La retta è tangente se $6 + q = 0$, cioè per $q = -6$: è la retta $y = 2x - 6$ della figura, che tocca la parabola nel punto di ascissa $x = 3$ (la soluzione doppia di $x^2 - 6x + 9 = 0$) e ordinata $y = 0$. Per $q > -6$ le rette sono secanti, per $q < -6$ esterne, come $y = 2x - 8$.

Attenzione: una retta parallela all'asse della parabola, cioè una retta verticale $x = k$, incontra la parabola sempre in un solo punto, ma non è tangente. Il criterio con Δ riguarda le rette che danno una risolvente di secondo grado.

10.4.3 Sistemi simmetrici e sistemi di grado superiore

Un sistema si dice **simmetrico** se non cambia scambiando x con y: se la coppia $(a; b)$ è una soluzione, lo è anche $(b; a)$. Il più semplice è il sistema che assegna la somma e il prodotto: $x + y = s$, $xy = p$. Nel capitolo 8 hai visto che due numeri con somma s e prodotto p sono le soluzioni dell'equazione $t^2 - st + p = 0$. Se t_1 e t_2 sono le soluzioni, il sistema ha le soluzioni $(t_1; t_2)$ e $(t_2; t_1)$; se l'equazione in t non ha soluzioni reali, neppure il sistema ne ha.

Per esempio, $x + y = 7$ e $xy = 12$: $t^2 - 7t + 12 = 0$ ha le soluzioni 3 e 4, e il sistema ha le soluzioni (3; 4) e (4; 3). Molti sistemi simmetrici si riconducono a questo grazie all'identità $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$: il sistema $x + y = 7$, $x^2 + y^2 = 25$ diventa $49 - 2xy = 25$, cioè $xy = 12$, e ha le stesse soluzioni.

Con due equazioni di secondo grado si ottiene un **sistema di grado superiore**, di quarto grado. Alcuni si risolvono facilmente: nel sistema $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 - y^2 = 7$, sommando membro a membro si ha $2x^2 = 32$, cioè $x^2 = 16$, e quindi $y^2 = 9$. Le soluzioni sono quattro: (4; 3), (4; −3), (−4; 3), (−4; −3). Si può dimostrare che un sistema di due equazioni, se ha un numero finito di soluzioni, non ne ha più del suo grado: qui il grado è 4, e le soluzioni sono proprio 4.

10.5 Problemi di secondo grado e di grado superiore

Risolvere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema richiede le stesse fasi che conosci: scegliere le incognite, scrivere le relazioni, risolvere, e infine **controllare l'accettabilità** delle soluzioni rispetto al significato concreto (una lunghezza è positiva, un tempo non è negativo, un numero di pezzi è intero). Nei problemi di secondo grado e di grado superiore questo ultimo passaggio è spesso decisivo, perché le soluzioni algebriche sono più d'una.

Problema 1 (geometria). Un rettangolo ha perimetro 34 cm e diagonale 13 cm. Quanto misurano i lati?

Siano x e y i lati in cm ($x > 0$, $y > 0$). Il semiperimetro dà $x + y = 17$, il teorema di Pitagora $x^2 + y^2 = 169$. È un sistema simmetrico: $(x + y)^2 - 2xy = 169$, quindi $289 - 2xy = 169$ e $xy = 60$. I lati sono le soluzioni di $t^2 - 17t + 60 = 0$: $\Delta = 289 - 240 = 49$, $t = \dfrac{17 \pm 7}{2}$, cioè 12 e 5. Il rettangolo ha i lati di 5 cm e 12 cm. Controllo: $5 + 12 = 17$, $25 + 144 = 169$ ✓.

Problema 2 (fisica). Una palla è lanciata verso l'alto con velocità di 19,6 m/s; trascurando l'attrito dell'aria, la sua altezza rispetto al punto di lancio dopo t secondi è $h = 19{,}6t - 4{,}9t^2$ (in metri, con $g \approx 9{,}8$ m/s^2). Per quanto tempo la palla si trova a più di 14,7 m di altezza?

Si risolve $19{,}6t - 4{,}9t^2 > 14{,}7$ con $t \geq 0$. Dividendo per 4,9 si ha $4t - t^2 > 3$, cioè $t^2 - 4t + 3 < 0$, vera tra le soluzioni 1 e 3 dell'equazione associata: $1 < t < 3$. La palla resta sopra 14,7 m per 2 secondi, da $t = 1$ s a $t = 3$ s. Il momento centrale, $t = 2$ s, è quello dell'altezza massima, $19{,}6 \cdot 2 - 4{,}9 \cdot 4 = 19{,}6$ m: è il vertice della parabola, come nel capitolo 9.

Un problema di grado superiore. Riprendiamo la scatola dell'introduzione: base quadrata di lato x cm, altezza $x + 2$ cm, volume 45 cm^3. L'equazione $x^3 + 2x^2 - 45 = 0$ ha uno zero intero tra i divisori di 45: per $x = 3$ si ha $27 + 18 - 45 = 0$. Con Ruffini, $x^3 + 2x^2 - 45 = (x - 3)(x^2 + 5x + 15)$, e il secondo fattore ha $\Delta = 25 - 60 < 0$, quindi non si annulla mai. L'unica soluzione è $x = 3$: la scatola ha la base di 3 cm di lato ed è alta 5 cm ($9 \cdot 5 = 45$ ✓).

Un problema di scelta. Un piccolo laboratorio artigiano stima che, producendo e vendendo x pezzi al giorno, il suo guadagno giornaliero in euro sia $G(x) = -x^2 + 14x - 40$ (un modello valido per $0 \leq x \leq 15$). Per quali produzioni il laboratorio non è in perdita? Si chiede $G(x) \geq 0$, cioè $x^2 - 14x + 40 \leq 0$: le soluzioni dell'equazione associata sono 4 e 10, e la disequazione è vera per $4 \leq x \leq 10$. Poiché x è un numero di pezzi, le produzioni accettabili sono gli interi da 4 a 10. La disequazione non dice quale scegliere: questo dipende da altre informazioni (il guadagno massimo, per esempio, si ha nel vertice, a $x = 7$, con $G(7) = 9$ euro).

APPROFONDIMENTO · EQUAZIONI IRRAZIONALI

Un'equazione si dice **irrazionale** se l'incognita compare sotto il segno di radice, come $\sqrt{x+7} = x+1$. Le studierai in modo sistematico negli anni successivi; ecco l'idea. Elevando al quadrato entrambi i membri si ottiene $x+7 = x^2+2x+1$, cioè $x^2+x-6=0$, con soluzioni $x=2$ e $x=-3$. Ma elevare al quadrato non è un'operazione che conserva le soluzioni: da $a=b$ segue $a^2=b^2$, non il contrario. Bisogna quindi **verificare**: per $x=2$, $\sqrt{9}=3=2+1$ ✓; per $x=-3$, $\sqrt{4}=2$, mentre $-3+1=-2$ ✗. L'unica soluzione è $x=2$. In alternativa si impone fin dall'inizio la condizione che il secondo membro sia non negativo, $x+1\geq 0$, che scarta -3.

SINTESI

- Un'equazione di grado superiore al secondo si risolve scomponendo il polinomio (raccoglimento, prodotti notevoli, Ruffini, trinomio) e applicando la legge di annullamento del prodotto. Un'equazione di grado n ha al massimo n soluzioni reali.
- Mai dividere per un fattore che contiene l'incognita: si perdono soluzioni. Si porta tutto al primo membro e si raccoglie.
- Equazione binomia $x^n=k$: con n dispari una sola soluzione $\sqrt[n]{k}$; con n pari due soluzioni $\pm\sqrt[n]{k}$ se $k>0$, $x=0$ se $k=0$, nessuna se $k<0$.
- Equazione biquadratica $ax^4+bx^2+c=0$: si pone $t=x^2$; ogni $t>0$ dà due soluzioni opposte, $t<0$ nessuna. Le trinomie $ax^{2n}+bx^n+c=0$ si trattano con $t=x^n$.
- Disequazioni prodotto e fratte: segno di ogni fattore (anche di secondo grado, dal segno del trinomio), tabella dei segni, scelta finale; gli zeri del denominatore sono sempre esclusi. Un fattore sempre positivo si può trascurare.
- Un sistema di disequazioni ha per soluzioni l'intersezione delle soluzioni delle singole disequazioni.
- $|A|=k$ con $k>0$: $A=\pm k$; $|A|=|B|$: $A=\pm B$; $|A|=B$: due casi secondo il segno di A, oppure $A=\pm B$ con $B\geq 0$.
- $|A|<k \Leftrightarrow -k<A<k$; $|A|>k \Leftrightarrow A<-k$ oppure $A>k$; $|x-c|<r$ sono i punti che distano da c meno di r.
- Il grafico di $y=|f(x)|$ si ottiene ribaltando rispetto all'asse x le parti del grafico di $y=f(x)$ che stanno sotto l'asse.
- Un sistema di secondo grado si risolve per sostituzione; le soluzioni sono i punti comuni dei grafici. Retta e parabola: $\Delta>0$ secante, $\Delta=0$ tangente, $\Delta<0$ esterna.
- Sistema simmetrico $x+y=s$, $xy=p$: le soluzioni sono le coppie formate dalle soluzioni di $t^2-st+p=0$; $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$.
- Nei problemi si controlla sempre l'accettabilità delle soluzioni rispetto al loro significato concreto.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Le soluzioni reali dell'equazione $x^3 = -64$ sono:
   - **A.** $x = \pm 4$
   - **B.** $x = -4$
   - **C.** nessuna
   - **D.** $x = 4$

2. ● L'equazione $x^4 = 81$ ha:
   - **A.** una sola soluzione, 3
   - **B.** nessuna soluzione reale
   - **C.** quattro soluzioni reali
   - **D.** due soluzioni reali, 3 e −3

3. ● Con la sostituzione $t = x^2$ l'equazione $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ diventa:
   - **A.** $t^2 - 10t + 9 = 0$
   - **B.** $t^4 - 10t + 9 = 0$
   - **C.** $t^2 + 10t + 9 = 0$
   - **D.** $t^2 - 10\sqrt{t} + 9 = 0$

4. ●● La disequazione $|x + 2| < 5$ ha per soluzioni:
   - **A.** $x < 3$
   - **B.** $x < -7$ oppure $x > 3$
   - **C.** $-7 < x < 3$
   - **D.** $-3 < x < 7$

5. ●● Il sistema formato da $y = x^2$ e $y = 2x - 1$:
   - **A.** ha due soluzioni distinte
   - **B.** non ha soluzioni reali
   - **C.** ha infinite soluzioni
   - **D.** ha una sola soluzione, (1; 1): la retta è tangente alla parabola

6. ●● La disequazione $(x^2 + 1)(x - 3) \le 0$ ha per soluzioni:
   - **A.** $x \le 3$
   - **B.** $x \ge 3$
   - **C.** $-1 \le x \le 3$
   - **D.** tutti i numeri reali

7. ●● **Vero o falso?** Correggi le affermazioni false. a) L'equazione $x^6 = -64$ ha due soluzioni reali. b) Un'equazione di quarto grado ha sempre quattro soluzioni reali. c) L'equazione $|x - 1| = -1$ è impossibile. d) Per ogni a e b reali, $|a + b| = |a| + |b|$. e) Per risolvere una disequazione fratta si possono sempre moltiplicare i due membri per il denominatore.

8. ● **Completa.** L'equazione $ax^4 + bx^2 + c = 0$ si dice _____; ponendo $t = x^2$ si ottiene un'equazione di _____ grado in t. Ogni soluzione $t > 0$ dà _____ soluzioni in x, la soluzione $t = 0$ dà _____, una soluzione $t < 0$ _____.

9. ●● Spiega con il concetto di distanza che cosa significa $|x - 5| \leq 2$, disegna le soluzioni sulla retta reale e scrivile come intervallo.

Calcolare

10. ● Risolvi scomponendo in fattori. a) $x^3 - 9x = 0$; b) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$; c) $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$.

11. ●● Risolvi con la regola di Ruffini. a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$; b) $x^3 - 3x - 2 = 0$.

12. ● Risolvi le equazioni binomie. a) $x^3 + 125 = 0$; b) $3x^4 - 48 = 0$; c) $x^6 + 1 = 0$; d) $2x^5 = 64$; e) $x^4 = 5$.

13. ●● Risolvi le equazioni biquadratiche e trinomie. a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; c) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$; d) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$; e) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$.

14. ●● Risolvi le disequazioni. a) $x^3 - x^2 - 6x > 0$; b) $(x^2 - 1)(x^2 - 3x) \leq 0$; c) $x^4 - 10x^2 + 9 < 0$.

15. ●● Risolvi le disequazioni fratte. a) $\frac{x^2 - 4}{x - 1} \geq 0$; b) $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 9} < 0$; c) $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4x + 4} \leq 0$.

16. ●● Risolvi i sistemi di disequazioni. a) $x^2 - 4x - 5 < 0$ e $x^2 \geq 4$; b) $x^2 - 9 \leq 0$ e $x^2 - x > 0$.

17. ● Risolvi le equazioni. a) $|3x - 1| = 5$; b) $|x^2 - 8| = 1$; c) $|2x + 1| = |x - 4|$; d) $|x + 3| = -2$.

18. ●● Risolvi distinguendo i casi. a) $|x - 4| = 3x$; b) $|x^2 - 4| = 3x$.

19. ●● Risolvi le disequazioni. a) $|2x - 3| \leq 7$; b) $|x + 1| > 4$; c) $|x^2 - 5| < 4$; d) $|x - 2| \geq -3$.

20. ●● Risolvi i sistemi. a) $y = x^2 - 2x$ e $y = x + 4$; b) $x - y = 1$ e $x^2 + y^2 = 13$; c) $x + y = 9$ e $xy = 20$.

21. ●●● Determina per quale valore di q la retta $y = 3x + q$ è tangente alla parabola $y = x^2 - x + 2$ e trova il punto di tangenza. Per quali q la retta è secante?

Dimostrare e argomentare

22. ●● Spiega perché l'equazione $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ non ha soluzioni reali, senza risolverla. Poi controlla risolvendola con $t = x^2$.

23. ●● **Trova l'errore.** Per risolvere $\frac{x - 3}{x + 1} > 2$ Luca moltiplica per $x + 1$ e scrive $x - 3 > 2x + 2$, da cui $x < -5$. Spiega l'errore e risolvi correttamente.

24. ●● Dimostra che, per ogni a e b reali, $|a| = |b|$ se e solo se $a^2 = b^2$. Usa poi questo fatto per risolvere $|x - 1| = |x + 3|$.

25. ●●● Dimostra che se x_0 è una soluzione dell'equazione biquadratica $ax^4 + bx^2 + c = 0$, anche $-x_0$ lo è. Deduci che le soluzioni reali non nulle di una biquadratica sono in numero pari, e spiega in quale caso il numero totale delle soluzioni è dispari.

26. ●● Considera la parabola $y = x^2$ e le rette $y = mx - 1$. Spiega perché la retta è tangente alla parabola se e solo se $m = 2$ o $m = -2$, e trova i punti di tangenza. Che cosa succede per $m = 0$?

Problemi

27. ●● Un rettangolo ha perimetro 46 cm e diagonale 17 cm. Calcola le misure dei lati e l'area.

28. ●● Un oggetto è lanciato verso l'alto con velocità di 24,5 m/s; la sua altezza dopo t secondi è $h = 24{,}5t - 4{,}9t^2$ (in metri). Per quanto tempo si trova a più di 29,4 m di altezza?

29. ●● Una scatola a forma di parallelepipedo ha base quadrata; l'altezza supera di 4 cm il lato di base e il volume è 63 cm^3. Imposta l'equazione e trova le dimensioni con la regola di Ruffini.

30. ●● Il guadagno giornaliero di un'officina, in euro, è $G(x) = -2x^2 + 40x - 150$, dove x è il numero di pezzi prodotti ($0 \le x \le 25$). a) Per quali valori di x l'officina non è in perdita? b) Per quali il guadagno è almeno 32 euro?

31. ●●● Trova i numeri reali la cui distanza da 3 è minore del doppio della loro distanza da 0, cioè risolvi $|x - 3| < 2|x|$. (Suggerimento: i due membri sono non negativi, quindi si possono confrontare i quadrati.)

Verso la verifica

32. ●● Risolvi $(x^2 - 2x - 3)(4 - x^2) \ge 0$.

33. ●● Risolvi $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 6} < 0$.

34. ●● Risolvi il sistema $x^2 + y^2 = 10$, $xy = 3$. Quante soluzioni ha? È in accordo con il grado del sistema?

35. ●●● **Sfida.** Risolvi $|x^2 - 1| < x + 1$.

PER APPROFONDIRE

- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: l'algebra italiana del Cinquecento, la soluzione delle equazioni di terzo e quarto grado e la disputa tra Tartaglia e Cardano.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le equazioni algebriche, le loro soluzioni e i limiti delle formule con i radicali.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: scegliere le incognite, separare i casi e controllare il risultato.

Glossario del capitolo

Disequazione con valore assoluto
disequazione in cui l'incognita compare dentro un valore assoluto; con $k > 0$, $|A| < k$ equivale a $-k < A < k$ e $|A| > k$ ad $A < -k$ oppure $A > k$.

Equazione binomia
equazione riconducibile alla forma $x^n = k$; con n dispari ha una sola soluzione, con n pari due soluzioni opposte se $k > 0$, la sola $x = 0$ se $k = 0$, nessuna se $k < 0$.

Equazione biquadratica
equazione trinomia di quarto grado $ax^4 + bx^2 + c = 0$; si risolve ponendo $t = x^2$.

Equazione con valore assoluto
equazione in cui l'incognita compare dentro un valore assoluto; si risolve distinguendo i casi secondo il segno dell'argomento o con le forme $|A| = k$ e $|A| = |B|$.

Equazione di grado superiore
equazione intera che, ridotta a forma normale $P(x) = 0$, ha il polinomio $P(x)$ di grado maggiore di 2; si risolve di solito scomponendo $P(x)$ in fattori.

Equazione irrazionale
equazione in cui l'incognita compare sotto il segno di radice; elevando al quadrato si possono introdurre soluzioni estranee, che vanno scartate con la verifica.

Equazione risolvente
equazione in una sola incognita che si ottiene da un sistema con il metodo di sostituzione.

Equazione trinomia
equazione della forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, che con l'incognita ausiliaria $t = x^n$ diventa di secondo grado.

Incognita ausiliaria
nuova incognita introdotta per semplificare un'equazione (per esempio $t = x^2$ in una biquadratica); trovati i suoi valori, si torna all'incognita originaria.

Retta esterna a una parabola
retta che non ha punti in comune con una parabola; corrisponde a $\Delta < 0$ nell'equazione risolvente.

Retta secante a una parabola
retta che ha due punti in comune con una parabola; corrisponde a $\Delta > 0$ nell'equazione risolvente.

Retta tangente a una parabola
retta, non parallela all'asse della parabola, che ha con essa un solo punto comune; corrisponde a $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente.

Sistema di grado superiore
sistema il cui grado supera 2, per esempio due equazioni di secondo grado (grado 4); se ha un numero finito di soluzioni, non ne ha più del suo grado.

Sistema di secondo grado
sistema di due equazioni in due incognite il cui grado, prodotto dei gradi delle equazioni, è 2: un'equazione di primo grado e una di secondo.

Sistema simmetrico
sistema che non cambia scambiando x con y; se (a; b) è una soluzione lo è anche (b; a). Il caso tipico assegna somma e prodotto delle incognite.

Soluzione doppia
soluzione che corrisponde a un fattore che compare due volte nella scomposizione del polinomio, come 1 in $(x - 1)^2(x + 2) = 0$; più in generale si parla di soluzione multipla.

Soluzioni

1. B. L'indice è dispari: $x = \sqrt[3]{-64} = -4$, l'unica soluzione.

2. D. Indice pari e $k = 81 > 0$: $x = \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3$.

3. A. $x^4 = (x^2)^2 = t^2$ e $x^2 = t$. Le soluzioni sono $t = 1$ e $t = 9$, quindi $x = \pm 1$ e $x = \pm 3$.

4. C. $-5 < x + 2 < 5$, cioè $-7 < x < 3$: i punti che distano da -2 meno di 5.

5. D. Risolvente $x^2 - 2x + 1 = 0$, $\Delta = 0$: soluzione doppia $x = 1$, $y = 1$.

6. A. Il fattore $x^2 + 1$ è sempre positivo e si può trascurare: $x - 3 \le 0$.

7. a) F: esponente pari e secondo membro negativo, nessuna soluzione reale. b) F: ne ha *al massimo* quattro (per esempio $x^4 + 1 = 0$ non ne ha). c) V: un valore assoluto non è mai negativo. d) F: per $a = 1$, $b = -1$ si ha $0 \neq 2$; in generale vale solo $|a + b| \le |a| + |b|$. e) F: il denominatore può essere negativo, e allora il verso cambierebbe; si porta tutto al primo membro e si studia il segno.

8. Biquadratica; secondo; due (opposte, $\pm\sqrt{t}$); la sola soluzione $x = 0$; nessuna soluzione reale.

9. Sono i punti che distano da 5 al più 2: da 3 a 7, estremi compresi. $-2 \le x - 5 \le 2$, cioè $x \in [3; 7]$.

10. a) $x(x - 3)(x + 3) = 0$: $x = 0$, $x = \pm 3$. b) $x^2(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(x - 1)(x + 1)$: $x = -2$, $x = \pm 1$. c) $x^2(2x - 1) - 4(2x - 1) = (2x - 1)(x - 2)(x + 2)$: $x = \frac{1}{2}$, $x = \pm 2$.

11. a) $x = 1$ annulla il polinomio: $(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$; soluzioni 1, 2, 3. b) $x = -1$ lo annulla: $(x + 1)(x^2 - x - 2) = (x + 1)^2(x - 2)$; soluzioni $x = -1$ (doppia) e $x = 2$.

12. a) $x^3 = -125$, $x = -5$. b) $x^4 = 16$, $x = \pm 2$. c) $x^6 = -1$: nessuna soluzione reale. d) $x^5 = 32$, $x = 2$. e) $x = \pm\sqrt[4]{5}$.

13. a) $t^2 - 13t + 36 = 0$: $t = 4$, $t = 9$; $x = \pm 2$, $x = \pm 3$. b) $t = 4$, $t = -1$ (non accettabile): $x = \pm 2$. c) $4t^2 - 5t + 1 = 0$: $t = 1$, $t = \frac{1}{4}$; $x = \pm 1$, $x = \pm\frac{1}{2}$. d) $t = -2$, $t = -3$: nessuna soluzione reale. e) $t = x^3$: $t^2 - 7t - 8 = 0$, $t = 8$, $t = -1$; $x = 2$, $x = -1$.

14. a) $x(x - 3)(x + 2) > 0$: zeri -2, 0, 3; segni $-$, $+$, $-$, $+$: $-2 < x < 0$ oppure $x > 3$. b) $x^2 - 1$ positivo fuori da $[-1; 1]$, $x^2 - 3x$ positivo fuori da $[0; 3]$; zeri -1, 0, 1, 3; segni del prodotto $+$, $-$, $+$, $-$, $+$: $-1 \le x \le 0$ oppure $1 \le x \le 3$. c) $(x^2 - 1)(x^2 - 9) < 0$, cioè $1 < x^2 < 9$: $-3 < x < -1$ oppure $1 < x < 3$.

15. a) C.E. $x \neq 1$. Zeri -2, 2 (numeratore) e 1 (denominatore); segni della frazione $-$, $+$, $-$, $+$: $-2 \le x < 1$ oppure $x \ge 2$. b) Il numeratore ha $\Delta = -3 < 0$ ed è sempre positivo: basta $x^2 - 9 < 0$, cioè $-3 < x < 3$. c) Il denominatore è $(x - 2)^2$, positivo per $x \neq 2$; $x(x - 3) \le 0$ per $0 \le x \le 3$; soluzioni $0 \le x \le 3$ con $x \neq 2$.

16. a) La prima: $-1 < x < 5$; la seconda: $x \le -2$ oppure $x \ge 2$. Intersezione: $2 \le x < 5$. b) La prima: $-3 \le x \le 3$; la seconda: $x < 0$ oppure $x > 1$. Intersezione: $-3 \le x < 0$ oppure $1 < x \le 3$.

17. a) $3x - 1 = \pm 5$: $x = 2$, $x = -\frac{4}{3}$. b) $x^2 - 8 = \pm 1$: $x^2 = 9$ oppure $x^2 = 7$; $x = \pm 3$, $x = \pm\sqrt{7}$. c) $2x + 1 = x - 4$ dà $x = -5$; $2x + 1 = -x + 4$ dà $x = 1$. Controllo: $|-9| = |-9|$, $|3| = |-3|$ ✓. d) Impossibile.

18. a) Se $x \ge 4$: $x - 4 = 3x$, $x = -2$, non accettabile. Se $x < 4$: $4 - x = 3x$, $x = 1$, accettabile. Soluzione $x = 1$ ($|-3| = 3$ ✓). b) Se $x^2 \ge 4$: $x^2 - 3x - 4 = 0$, $x = 4$ (accettabile) o $x = -1$ (non accettabile, $1 < 4$). Se $x^2 < 4$: $-x^2 + 4 = 3x$, $x^2 + 3x - 4 = 0$, $x = 1$ (accettabile) o $x = -4$ (non accettabile). Soluzioni $x = 1$ e $x = 4$. Controllo: $|1 - 4| = 3$, $|16 - 4| = 12$ ✓.

19. a) $-7 \le 2x - 3 \le 7$: $-2 \le x \le 5$. b) $x + 1 < -4$ oppure $x + 1 > 4$: $x < -5$ oppure $x > 3$. c) $-4 < x^2 - 5 < 4$, cioè $1 < x^2 < 9$: $-3 < x < -1$ oppure $1 < x < 3$. d) Vera per

ogni x reale: un valore assoluto è sempre maggiore di -3.

20. a) $x^2 - 3x - 4 = 0$: $x = 4$, $x = -1$; soluzioni $(4; 8)$, $(-1; 3)$. b) $x = y + 1$: $2y^2 + 2y - 12 = 0$, $y^2 + y - 6 = 0$, $y = 2$ o $y = -3$; soluzioni $(3; 2)$, $(-2; -3)$. c) $t^2 - 9t + 20 = 0$: $t = 4$, $t = 5$; soluzioni $(4; 5)$, $(5; 4)$.

21. Risolvente $x^2 - 4x + 2 - q = 0$; $\frac{\Delta}{4} = 4 - 2 + q = 2 + q$. Tangente per $q = -2$: $x^2 - 4x + 4 = 0$, $x = 2$, $y = 4$; punto $(2; 4)$ (sulla parabola: $4 - 2 + 2 = 4$ ✓). Secante per $q > -2$.

22. Per ogni x reale $x^4 \geq 0$ e $x^2 \geq 0$, quindi il primo membro è almeno 2: non può essere zero. Con $t = x^2$: $t^2 + 3t + 2 = 0$, $t = -1$, $t = -2$, entrambe negative: nessuna soluzione.

23. Luca ha moltiplicato per $x + 1$ senza conoscerne il segno: se $x + 1 < 0$ il verso andrebbe cambiato. Correttamente: $\frac{x - 3 - 2x - 2}{x + 1} > 0$, cioè $\frac{-x - 5}{x + 1} > 0$, ovvero $\frac{x + 5}{x + 1} < 0$: $-5 < x < -1$. La sua risposta non contiene neppure una soluzione: per $x = -6$ la frazione vale $\frac{9}{5}$, non maggiore di 2.

24. Se $|a| = |b|$, elevando al quadrato $a^2 = |a|^2 = |b|^2 = b^2$. Viceversa, se $a^2 = b^2$ allora $(a - b)(a + b) = 0$, quindi $a = b$ oppure $a = -b$, e in entrambi i casi $|a| = |b|$. Applicazione: $(x - 1)^2 = (x + 3)^2$, $-2x + 1 = 6x + 9$, $x = -1$; controllo $|-2| = |2|$ ✓.

25. Nel polinomio compaiono solo potenze pari: $(-x_0)^4 = {x_0}^4$ e $(-x_0)^2 = {x_0}^2$, quindi il primo membro assume lo stesso valore in x_0 e in $-x_0$. Le soluzioni non nulle si presentano a coppie di opposti distinti, perciò sono in numero pari. Il totale è dispari solo se 0 è soluzione, cioè se $c = 0$ (per esempio $x^4 - x^2 = 0$: soluzioni $0, \pm 1$).

26. Risolvente $x^2 - mx + 1 = 0$, $\Delta = m^2 - 4$. Tangenza se e solo se $\Delta = 0$, cioè $m = \pm 2$. Per $m = 2$: $(x - 1)^2 = 0$, punto $(1; 1)$; per $m = -2$: punto $(-1; 1)$. Per $m = 0$, $\Delta = -4 < 0$: la retta $y = -1$ è esterna (la parabola sta tutta sopra l'asse x).

27. $x + y = 23$, $x^2 + y^2 = 289$; $2xy = 529 - 289 = 240$, $xy = 120$. $t^2 - 23t + 120 = 0$: $\Delta = 529 - 480 = 49$, $t = 8$, $t = 15$. Lati 8 cm e 15 cm, area 120 cm^2.

28. $24{,}5t - 4{,}9t^2 > 29{,}4$; dividendo per 4,9: $5t - t^2 > 6$, cioè $t^2 - 5t + 6 < 0$: $2 < t < 3$. Per 1 secondo.

29. $x^2(x + 4) = 63$, cioè $x^3 + 4x^2 - 63 = 0$. Tra i divisori di 63, $x = 3$: $27 + 36 - 63 = 0$. $(x - 3)(x^2 + 7x + 21) = 0$; il secondo fattore ha $\Delta = 49 - 84 < 0$. Lato 3 cm, altezza 7 cm ($9 \cdot 7 = 63$ ✓).

30. a) $-2x^2 + 40x - 150 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 75 \leq 0$; zeri 5 e 15: $5 \leq x \leq 15$. b) $-2x^2 + 40x - 182 \geq 0 \Leftrightarrow$ $x^2 - 20x + 91 \leq 0$; $\frac{\Delta}{4} = 100 - 91 = 9$, zeri 7 e 13: da 7 a 13 pezzi.

31. Per numeri non negativi $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$: $x^2 - 6x + 9 < 4x^2$, $3x^2 + 6x - 9 > 0$, $x^2 + 2x - 3 > 0$: $x < -3$ oppure $x > 1$. Controllo: $x = 2$: $1 < 4$ ✓; $x = 0$: $3 < 0$ ✗.

32. $x^2 - 2x - 3$: zeri -1, 3, positivo all'esterno. $4 - x^2$: zeri ± 2, positivo per $-2 < x < 2$. Zeri ordinati -2, -1, 2, 3; segni del prodotto $-$, $+$, $-$, $+$, $-$. Soluzioni $-2 \leq x \leq -1$ oppure $2 \leq x \leq 3$.

33. C.E. $x \neq -3$, $x \neq 2$. Numeratore positivo fuori da $[-1; 1]$; denominatore $(x + 3)(x - 2)$ positivo fuori da $[-3; 2]$. Zeri -3, -1, 1, 2; segni $+$, $-$, $+$, $-$, $+$. Soluzioni $-3 < x < -1$ oppure $1 < x < 2$.

34. $(x + y)^2 = 10 + 6 = 16$, quindi $x + y = 4$ oppure $x + y = -4$. Con $xy = 3$: $t^2 - 4t + 3 = 0$ dà $(1; 3)$, $(3; 1)$; $t^2 + 4t + 3 = 0$ dà $(-1; -3)$, $(-3; -1)$. Quattro soluzioni; il sistema ha grado $2 \cdot 2 = 4$: in accordo.

35. $|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$: $x^2 - 1 < x + 1$ e $x^2 - 1 > -x - 1$. La prima: $x^2 - x - 2 < 0$, $-1 < x < 2$. La seconda: $x^2 + x > 0$, $x < -1$ oppure $x > 0$. Intersezione: $0 < x < 2$. Controllo: $x = 1$: $0 < 2$ ✓; $x = 0$: $1 < 1$ ✗.