CAPITOLO

8

Equazioni di secondo grado

Aggiungi il pezzo che manca e il quadrato si chiude: da quel quadratino nasce una formula che risolve ogni equazione di secondo grado. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Riconoscere un'equazione di secondo grado, scriverla in forma normale e risolvere le equazioni incomplete.
2. Ricavare la formula risolutiva con il completamento del quadrato e usare il discriminante per stabilire quante sono le soluzioni reali.
3. Risolvere equazioni intere, fratte, con coefficienti irrazionali e letterali semplici, anche con la formula ridotta.
4. Usare le relazioni tra coefficienti e soluzioni per controllare i risultati, costruire equazioni, scomporre trinomi e discutere semplici equazioni parametriche.
5. Impostare e risolvere problemi di geometria, fisica ed economia, discutendo l'accettabilità delle soluzioni; calcolare il numero aureo.

INDICE DEL CAPITOLO

8.1 Equazioni di secondo grado e equazioni incomplete 2
8.2 La formula risolutiva 3
8.3 Equazioni intere, fratte e letterali 7
8.4 Relazioni tra coefficienti e soluzioni 9
8.5 Problemi di secondo grado 11

Matematica 2 · Parte IV · Il secondo grado · versione 1.0
Capitolo 8: Equazioni di secondo grado · pagine 199–218 del volume completo · estratto per lo studio

Un giardiniere ha 39 m² di prato: un'aiuola quadrata e due strisce rettangolari larghe 5 m, appoggiate a due lati consecutivi del quadrato e lunghe quanto il suo lato. Quanto è lungo il lato del quadrato? Se lo chiamiamo x, il problema diventa $x^2 + 10x = 39$: un'equazione in cui l'incognita compare *al quadrato*. Con gli strumenti di *Matematica 1* sappiamo risolverla solo se riusciamo a scomporre il polinomio; e se non ci riusciamo? In questo capitolo impariamo un metodo che funziona **sempre**, una formula che in poche righe dice se l'equazione ha soluzioni, quante sono e quanto valgono.

Le equazioni di secondo grado sono ovunque: nel moto di un sasso che cade, nelle aree di figure di cui si conosce il perimetro, nei prezzi che rendono massimo un incasso, nella costruzione della sezione aurea che abbiamo incontrato nel capitolo 5. La loro storia è lunga quasi quanto quella della matematica, e il metodo che useremo, il *completamento del quadrato*, era già spiegato con le figure più di mille anni fa.

8.1 Equazioni di secondo grado e equazioni incomplete

8.1.1 La forma normale

Un'equazione intera in una incognita è di **secondo grado** se, ridotta a forma normale, il polinomio al primo membro ha grado 2. La sua **forma normale** è

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

I numeri reali a, b, c sono i *coefficienti*: a è il coefficiente del termine di secondo grado, b quello del termine di primo grado, c il **termine noto**. La condizione $a \neq 0$ è essenziale: se $a = 0$ l'equazione è di primo grado. Per esempio $3x^2 - 5x + 2 = 0$ ha $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$; l'equazione $x^2 = 7 - 2x$, portata in forma normale, diventa $x^2 + 2x - 7 = 0$, con $a = 1$, $b = 2$, $c = -7$.

Come in *Matematica 1*, una *soluzione* (o *radice*) è un numero che, sostituito a x, rende vera l'uguaglianza. Vedremo che un'equazione di secondo grado ha al massimo due soluzioni reali: possono essere due, una sola (contata due volte) o nessuna. Se a è negativo conviene moltiplicare entrambi i membri per -1 (secondo principio di equivalenza): $-2x^2 + x + 3 = 0$ equivale a $2x^2 - x - 3 = 0$.

8.1.2 Le equazioni incomplete

Se uno dei coefficienti b o c è nullo l'equazione si dice **incompleta**, e si risolve senza formule. I casi sono tre.

Equazione pura ($b = 0$): $ax^2 + c = 0$. Un'equazione di questo tipo si dice **equazione pura**. Isolando x^2 si ottiene $x^2 = k$, con $k = -\dfrac{c}{a}$. Se $k > 0$ le soluzioni sono due, opposte: $x = \pm\sqrt{k}$. Se $k < 0$ l'equazione è **impossibile in** $\mathbb{R}$, perché il quadrato di un numero reale non è mai negativo. (Il caso $k = 0$ si ha solo con $c = 0$: è l'equazione monomia, più sotto.)

Equazione spuria ($c = 0$): $ax^2 + bx = 0$, con $b \neq 0$. Si chiama **equazione spuria** e si risolve con il raccoglimento e la legge di annullamento del prodotto: $x(ax + b) = 0$, quindi $x = 0$ oppure $x = -\dfrac{b}{a}$. Ha sempre due soluzioni distinte, una delle quali è zero.

Equazione monomia ($b = c = 0$): $ax^2 = 0$. L'**equazione monomia** ha la sola soluzione $x = 0$; poiché il primo membro è $a \cdot x \cdot x$, si dice che 0 è una soluzione *doppia*, cioè che le due soluzioni coincidono.

Esempio. Risolvi: a) $4x^2 - 9 = 0$; b) $3x^2 + 12 = 0$; c) $5x^2 = 2x$; d) $2x^2 - 6 = 0$.

a) $x^2 = \dfrac{9}{4}$, quindi $x = \pm\dfrac{3}{2}$. Verifica: $4 \cdot \dfrac{9}{4} - 9 = 0$. ✓

b) $x^2 = -4$: nessun numero reale ha quadrato negativo. L'equazione è impossibile in $\mathbb{R}$.

c) Si porta tutto al primo membro: $5x^2 - 2x = 0$, $x(5x - 2) = 0$, quindi $x = 0$ oppure $x = \dfrac{2}{5}$.

d) $x^2 = 3$, quindi $x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1{,}73$. Le soluzioni sono irrazionali: si lasciano scritte con il radicale, come nel capitolo 2.

> **ERRORE FREQUENTE**
>
> **Perdere una soluzione.** Da $x^2 = 9$ non segue $x = 3$, ma $x = 3$ *oppure* $x = -3$: anche $(-3)^2 = 9$. Ricorda il capitolo 2: $\sqrt{x^2} = |x|$, quindi $|x| = 3$. Allo stesso modo, nell'equazione $5x^2 = 2x$ non si può «dividere per x»: si perderebbe la soluzione $x = 0$. Dividere per un'espressione che può valere zero non è un'operazione lecita (secondo principio di equivalenza): si raccoglie, non si divide.

8.2 La formula risolutiva

8.2.1 Il completamento del quadrato

Per risolvere un'equazione completa l'idea è trasformarla in un'equazione pura. Consideriamo $x^2 + 6x - 7 = 0$. I primi due termini, $x^2 + 6x$, sono l'inizio del quadrato di un binomio: $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$. Manca 9. Aggiungiamolo (e togliamolo) al primo membro:

$$x^2 + 6x + 9 - 9 - 7 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x + 3)^2 = 16$$

Ora l'incognita compare solo dentro il quadrato: $x + 3 = 4$ oppure $x + 3 = -4$, quindi $x = 1$ oppure $x = -7$. Questo procedimento si chiama **completamento del quadrato**: al binomio $x^2 + bx$ si aggiunge il quadrato della *metà* del coefficiente di x, cioè $\left(\dfrac{b}{2}\right)^2$, per ottenere il quadrato $\left(x + \dfrac{b}{2}\right)^2$.

Il nome è letterale, come mostra la Figura 8.1. Nell'equazione del giardiniere, $x^2 + 10x = 39$, il termine x^2 è un quadrato di lato x e $10x$ si divide in due rettangoli $5 \times x$, appoggiati a due lati del quadrato. La figura ottenuta (uno «gnomone», a forma di L) ha area 39. Per farne un quadrato manca l'angolo: un quadratino di lato 5 e area 25. Aggiungendolo si ottiene un quadrato di area $39 + 25 = 64$, cioè di lato 8: allora $x + 5 = 8$ e $x = 3$. La soluzione negativa $x = -13$, che l'algebra trova subito, nella figura non compare: un lato non può essere negativo.

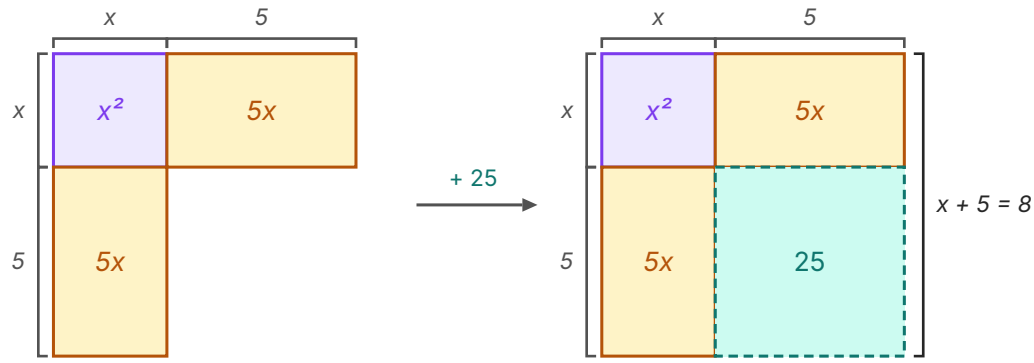


Figura 8.1 Il completamento del quadrato per $x^2 + 10x = 39$. A sinistra, il quadrato x^2 e due rettangoli di area $5x$ formano una figura di area 39. A destra, aggiungendo il quadratino di area 25 si ottiene un quadrato di lato $x + 5$ e area 64: quindi $x + 5 = 8$ e $x = 3$.

APPROFONDIMENTO · AL-KHWĀRIZMĪ E L'ALGEBRA

Nel IX secolo, a Baghdad, Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī scrisse un trattato sul calcolo per *al-jabr* e *al-muqābala*, due operazioni che oggi chiameremmo «trasportare un termine dall'altra parte cambiandolo di segno» e «ridurre i termini simili». Dalla prima viene la parola *algebra*; dal nome dell'autore, latinizzato, viene la parola *algoritmo*.

Al-Khwārizmī non usava simboli: scriveva tutto a parole, chiamando «radice» l'incognita e «quadrato» il suo quadrato. Uno dei suoi esempi è proprio «un quadrato e dieci radici uguagliano trentanove», cioè $x^2 + 10x = 39$. La regola che dava è il completamento del quadrato: dimezza le radici (5), moltiplica la metà per sé stessa (25), aggiungi a 39 (64), prendi la radice (8) e togli la metà delle radici: resta 3. E giustificava la regola con una figura geometrica simile alla Figura 8.1. Come i matematici del suo tempo, considerava soltanto le soluzioni positive.

8.2.2 Dal completamento alla formula

Ripetiamo il procedimento con coefficienti qualsiasi, nell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$. Per evitare le frazioni moltiplichiamo entrambi i membri per $4a$, che non è zero:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

I primi due termini sono l'inizio del quadrato di $2ax + b$, perché $(2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$. Aggiungiamo b^2 a entrambi i membri e portiamo $4ac$ a destra:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Il numero $b^2 - 4ac$ si chiama **discriminante** dell'equazione e si indica con la lettera greca Δ (delta maiuscola). L'equazione è diventata un'equazione pura nell'incognita $2ax + b$, e la sua risolubilità dipende soltanto dal segno di Δ.

- Se $\Delta > 0$: $2ax + b = \pm\sqrt{\Delta}$, quindi $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Le soluzioni sono **due, reali e distinte**.
- Se $\Delta = 0$: $(2ax + b)^2 = 0$, quindi $x = -\dfrac{b}{2a}$. Le due soluzioni sono **reali** e **coincidenti** (si dice anche che c'è una soluzione doppia).
- Se $\Delta < 0$: un quadrato non può essere negativo, quindi l'equazione **non ha soluzioni reali**.

IN SINTESI

Formula risolutiva. Le soluzioni reali dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ sono

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{con} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$: due soluzioni distinte; $\Delta = 0$: due soluzioni coincidenti $-\dfrac{b}{2a}$; $\Delta < 0$: nessuna soluzione reale.

La Figura 8.2 riassume i tre casi con tre esempi. La formula vale anche per le equazioni incomplete, ma per quelle i metodi del paragrafo precedente sono più rapidi.

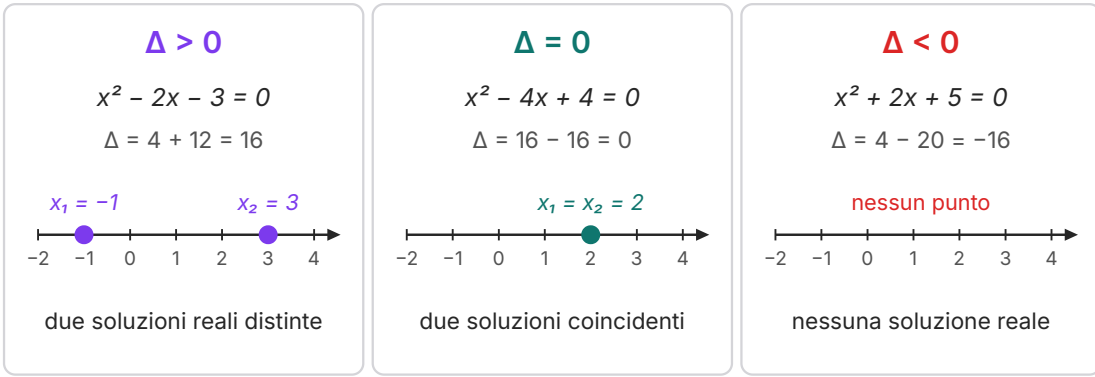


Figura 8.2 I tre casi del discriminante, con le soluzioni segnate sulla retta reale. Con $\Delta > 0$ i punti sono due; con $\Delta = 0$ le due soluzioni cadono nello stesso punto; con $\Delta < 0$ sulla retta non c'è alcun punto che risolva l'equazione.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

I coefficienti sono $a = 3$, $b = -5$, $c = -2$. Il discriminante è $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49$, positivo: le soluzioni sono due.

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

Quindi $x_1 = \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3}$ e $x_2 = \frac{5+7}{6} = 2$. **Verifica** con $x = 2$: $3 \cdot 4 - 10 - 2 = 0$. ✓

ERRORE FREQUENTE

Il segno di *b* nel discriminante. Se $b = -5$, allora $b^2 = (-5)^2 = 25$, non $-5^2 = -25$: il quadrato si scrive sempre con la parentesi. Un secondo errore tipico è dividere per $2a$ solo il radicale: nella formula la linea di frazione sta sotto *tutto* il numeratore $-b \pm \sqrt{\Delta}$. Infine, prima di applicare la formula, l'equazione va scritta in forma normale: in $x^2 = 5x - 6$ il coefficiente b è -5, non 5.

8.2.3 La formula ridotta

Quando il coefficiente b è pari, si può scrivere $b = 2k$ e semplificare. Allora $\Delta = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$, e la quantità $\frac{\Delta}{4} = k^2 - ac$ si chiama *delta quarti*. Poiché $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{\frac{\Delta}{4}}$, nella formula si può dividere tutto per 2:

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} \quad \text{con} \quad \frac{\Delta}{4} = k^2 - ac, \quad k = \frac{b}{2}$$

È la **formula ridotta**: dà gli stessi risultati con numeri più piccoli. Il segno di $\frac{\Delta}{4}$ è quello di Δ, quindi decide allo stesso modo quante sono le soluzioni. Si usa **solo** quando b è pari; se b è dispari, k non è intero e il vantaggio scompare.

Esempio. Risolvi $5x^2 - 8x - 4 = 0$ e $x^2 - 6x + 4 = 0$ con la formula ridotta.

Nella prima $b = -8$, quindi $k = -4$: $\frac{\Delta}{4} = 16 + 20 = 36$ e $x = \frac{4 \pm 6}{5}$, cioè $x_1 = -\frac{2}{5}$ e $x_2 = 2$.

Nella seconda $k = -3$: $\frac{\Delta}{4} = 9 - 4 = 5$ e $x = 3 \pm \sqrt{5}$. Le soluzioni sono irrazionali: $x_1 = 3 - \sqrt{5} \approx 0{,}76$ e $x_2 = 3 + \sqrt{5} \approx 5{,}24$. Con la formula completa avremmo calcolato $\Delta = 36 - 16 = 20$ e $\frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}$: stesso risultato, un passaggio in più.

8.3 Equazioni intere, fratte e letterali

8.3.1 Equazioni intere

Un'equazione intera che contiene prodotti, potenze o frazioni numeriche si risolve in tre passi: si eseguono i calcoli e si porta l'equazione a forma normale; si riconosce se è completa o incompleta; si risolve con il metodo più adatto. Solo dopo il primo passo si sa qual è il grado: in *Matematica 1* abbiamo incontrato equazioni che sembravano di secondo grado e si riducevano al primo.

Esempio. Risolvi $\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{x+7}{3} = \frac{x-1}{6}$.

Moltiplichiamo per il minimo comune multiplo dei denominatori, 6: $3(x+1)^2 - 2(x+7) = x - 1$. Sviluppando: $3x^2 + 6x + 3 - 2x - 14 - x + 1 = 0$, cioè $3x^2 + 3x - 10 = 0$.

Il coefficiente $b = 3$ è dispari: formula completa. $\Delta = 9 + 120 = 129$, che non è un quadrato perfetto. Le soluzioni sono $x = \frac{-3 \pm \sqrt{129}}{6}$, cioè circa 1,39 e −2,39. Non sempre le soluzioni sono numeri «belli»: la formula le dà esatte comunque.

8.3.2 Equazioni con coefficienti irrazionali

La formula vale per coefficienti reali qualsiasi, anche irrazionali; i calcoli si fanno con le regole dei radicali del capitolo 2. Risolviamo $x^2 - (\sqrt{3}+1)x + \sqrt{3} = 0$. Il discriminante è

$$\Delta = (\sqrt{3}+1)^2 - 4\sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 4\sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2$$

Poiché $\sqrt{3}-1>0$, $\sqrt{\Delta}=\sqrt{3}-1$. Allora $x=\dfrac{(\sqrt{3}+1)\pm(\sqrt{3}-1)}{2}$, cioè $x_1=1$ e $x_2=\sqrt{3}$. Il riconoscimento di Δ come quadrato non è un trucco obbligatorio: con un discriminante come $4-2\sqrt{3}$, se non si vede il quadrato, si può lasciare $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ nel risultato. Qui però si poteva notare fin dall'inizio che $1+\sqrt{3}$ e $1\cdot\sqrt{3}$ sono la somma e il prodotto di 1 e $\sqrt{3}$: più avanti, con le relazioni tra coefficienti e soluzioni, vedremo perché questo basta.

8.3.3 Equazioni fratte

Un'equazione *fratta* ha l'incognita al denominatore. Il procedimento è quello di *Matematica 1*: si scompongono i denominatori, si scrivono le **condizioni di esistenza** (C.E.), si moltiplica per il minimo comune multiplo dei denominatori e si risolve l'equazione intera ottenuta; infine si **confrontano** le soluzioni con le C.E. e si scartano quelle che annullano un denominatore. Con il secondo grado il controllo diventa ancora più importante, perché spesso una delle due soluzioni va scartata e l'altra no.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{8}{x^2-4}$.

Il denominatore x^2-4 si scompone in $(x-2)(x+2)$, che è anche il minimo comune multiplo. C.E.: $x\neq 2$ e $x\neq -2$.

Moltiplicando per $(x-2)(x+2)$: $x(x+2)+2(x-2)=8$, cioè $x^2+4x-12=0$. Con la formula ridotta ($k=2$): $\dfrac{\Delta}{4}=4+12=16$, $x=-2\pm 4$, quindi $x_1=-6$ e $x_2=2$.

Controllo. $x=2$ non rispetta le C.E. (annulla due denominatori) e va scartata. L'unica soluzione è $x=-6$. Verifica: $\dfrac{-6}{-8}+\dfrac{2}{-4}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$ e $\dfrac{8}{32}=\dfrac{1}{4}$. ✓

8.3.4 Equazioni letterali

Se nell'equazione compaiono altre lettere oltre all'incognita, queste si trattano come numeri fissati: sono i **parametri**. In casi semplici il completamento del quadrato basta. Per esempio, in $x^2-2ax+a^2-9=0$ (incognita x, parametro a) i primi tre termini formano il quadrato $(x-a)^2$: l'equazione diventa $(x-a)^2=9$, quindi $x=a\pm 3$, per ogni valore di a. In casi meno semplici occorre discutere il segno di Δ al variare del parametro: ne vediamo un esempio alla fine del prossimo paragrafo.

8.4 Relazioni tra coefficienti e soluzioni

8.4.1 Somma e prodotto delle soluzioni

Sia $\Delta \geq 0$ e siano x_1, x_2 le soluzioni di $ax^2 + bx + c = 0$. Sommandole, i radicali si cancellano:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Moltiplicandole si ottiene una differenza di quadrati:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

IN SINTESI

Relazioni tra coefficienti e soluzioni. Se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha $\Delta \geq 0$, la somma s e il prodotto p delle sue soluzioni sono

$$s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Per $a = 1$: l'equazione $x^2 - sx + p = 0$ ha per soluzioni i due numeri di somma s e prodotto p, se esistono.

Le relazioni $s = -b/a$ e $p = c/a$ valgono **solo se $\Delta \geq 0$**. L'equazione $x^2 - 2x + 5 = 0$ ha $-b/a = 2$ e $c/a = 5$, ma non esistono due numeri reali con somma 2 e prodotto 5: il suo discriminante è $4 - 20 = -16$. Prima si controlla Δ, poi si usano somma e prodotto.

Le relazioni servono a molte cose. Permettono di **controllare** le soluzioni trovate: per $3x^2 - 5x - 2 = 0$ abbiamo trovato 2 e $-\frac{1}{3}$; la somma è $\frac{5}{3} = -\frac{(-5)}{3}$ e il prodotto $-\frac{2}{3} = \frac{c}{a}$. ✓ Permettono di **risolvere a mente** molte equazioni con $a = 1$: in $x^2 - 7x + 12 = 0$ cerchiamo due numeri con somma 7 e prodotto 12, cioè 3 e 4 (è il metodo del trinomio speciale di *Matematica 1*, che ora sappiamo quando funziona). Permettono di **costruire** un'equazione con soluzioni assegnate: per le soluzioni $2 + \sqrt{3}$ e $2 - \sqrt{3}$, $s = 4$ e $p = 4 - 3 = 1$, quindi l'equazione è $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Infine permettono di conoscere il **segno** delle soluzioni senza calcolarle. Se $p < 0$ le soluzioni sono discordi; se $p > 0$ sono concordi, e il segno comune è quello di s. Si noti che $p = c/a < 0$ significa che a e c sono discordi: allora $-4ac > 0$, quindi $\Delta > 0$ e le soluzioni esistono certamente.

APPROFONDIMENTO · LA REGOLA DEI SEGNI DI CARTESIO

Scriviamo i coefficienti di $ax^2 + bx + c$ nell'ordine e guardiamo i segni di due coefficienti consecutivi: se sono uguali c'è una *permanenza*, se sono diversi una *variazione*. Per un'equazione di secondo grado completa con $\Delta \geq 0$ vale questa regola, detta **regola dei segni di Cartesio**: **a ogni variazione corrisponde una soluzione positiva, a ogni permanenza una soluzione negativa**.

Per esempio in $2x^2 - 7x + 3 = 0$ i segni sono + − +: due variazioni, quindi due soluzioni positive (sono 3 e $\frac{1}{2}$). In $x^2 + 2x - 15 = 0$ i segni sono + + −: una permanenza e una variazione, quindi una soluzione negativa e una positiva (−5 e 3). La regola segue dalle relazioni tra coefficienti e soluzioni, studiando i segni di s e p. Cartesio la enunciò nel 1637 nella *Géométrie*, in forma generale, per equazioni di grado qualsiasi.

8.4.2 La scomposizione del trinomio di secondo grado

In *Matematica 1* abbiamo scomposto trinomi come $x^2 - 7x + 12$ cercando due numeri di cui conoscevamo somma e prodotto. Quando quei numeri non sono interi la ricerca a tentativi fallisce; le relazioni appena trovate danno invece un metodo generale. Se $\Delta \geq 0$, $b = -a(x_1 + x_2)$ e $c = ax_1x_2$, quindi

$$ax^2 + bx + c = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] = a(x - x_1)(x - x_2)$$

IN SINTESI

Scomposizione del trinomio. Dato il trinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$:

- se $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;
- se $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$;
- se $\Delta < 0$: il trinomio non si scompone in fattori di primo grado con coefficienti reali (è **irriducibile** in $\mathbb{R}$).

Per esempio $6x^2 + x - 2$ ha $\Delta = 1 + 48 = 49$ e radici $\frac{-1 \pm 7}{12}$, cioè $\frac{1}{2}$ e $-\frac{2}{3}$. Allora $6x^2 + x - 2 = 6(x - \frac{1}{2})(x + \frac{2}{3}) = (2x - 1)(3x + 2)$: il fattore $6 = 2 \cdot 3$ si distribuisce tra le due parentesi per eliminare le frazioni. La scomposizione serve a semplificare le frazioni algebriche:

$$\frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4} = \frac{(2x - 1)(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{2x - 1}{x + 2} \qquad \text{C.E.: } x \neq \pm 2$$

Qui $2x^2 - 5x + 2$ ha radici 2 e $\frac{1}{2}$, quindi è uguale a $2(x - 2)(x - \frac{1}{2}) = (x - 2)(2x - 1)$. Le condizioni di esistenza si scrivono *prima* di semplificare, guardando il denominatore originale.

8.4.3 Equazioni con un parametro

Quando un coefficiente dipende da un parametro k, ci si può chiedere per quali valori di k le soluzioni hanno una certa proprietà. Le condizioni più comuni si traducono subito con gli strumenti di questo capitolo: soluzioni **reali**: $\Delta \geq 0$; **coincidenti**: $\Delta = 0$; **opposte**: $s = 0$ (con $\Delta > 0$); **reciproche**: $p = 1$ (con $\Delta \geq 0$); **una soluzione assegnata** x_0: si sostituisce x_0 a x e si ricava k. Un'equazione con un parametro si dice **equazione parametrica**.

ESEMPIO SVOLTO

Data l'equazione $x^2 - 2(k+1)x + 4k = 0$, stabilisci per quali valori di k le soluzioni sono reali, coincidenti, opposte, reciproche, e per quale valore una soluzione è 3.

Reali. Con la formula ridotta: $\frac{\Delta}{4} = (k+1)^2 - 4k = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2$, che non è mai negativo: le soluzioni sono reali per ogni k. **Coincidenti** per $k = 1$: l'equazione è $x^2 - 4x + 4 = 0$, con $x = 2$ doppia.

Opposte: $s = 2(k+1) = 0$, cioè $k = -1$; l'equazione diventa $x^2 - 4 = 0$, con soluzioni ± 2. ✓ **Reciproche:** $p = 4k = 1$, cioè $k = \frac{1}{4}$; l'equazione è $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$, con soluzioni 2 e $\frac{1}{2}$. ✓

Una soluzione uguale a 3: $9 - 6(k+1) + 4k = 0$, $3 - 2k = 0$, $k = \frac{3}{2}$. L'altra soluzione si trova con il prodotto: $p = 4k = 6$, quindi è 2.

Osservazione. Le soluzioni sono sempre 2 e $2k$: infatti $x^2 - 2(k+1)x + 4k = (x-2)(x-2k)$. Lo si poteva scoprire con somma $(2k+2)$ e prodotto $(4k)$.

8.5 Problemi di secondo grado

8.5.1 Impostare e controllare

Un problema che porta a un'equazione di secondo grado si affronta con le fasi di *Matematica 1*: scegliere l'incognita e scrivere i suoi **limiti** (una lunghezza è positiva, un numero di persone è naturale, un tempo è positivo e magari non supera la durata del fenomeno); tradurre i dati in un'equazione; risolverla; **discutere** le soluzioni. La novità è l'ultima fase: l'equazione dà spesso due soluzioni, e non è detto che siano entrambe accettabili. Una soluzione dell'equazione che rispetta i limiti del problema si dice **soluzione accettabile**.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 13 cm e un cateto supera l'altro di 7 cm. Quanto misurano i cateti? (Figura 8.3)

Incognita e limiti. Sia x il cateto minore, in centimetri: $x > 0$. L'altro cateto è $x + 7$, che deve essere minore dell'ipotenusa: $x + 7 < 13$, quindi $0 < x < 6$.

Equazione. Per il teorema di Pitagora (capitolo 4): $x^2 + (x + 7)^2 = 169$, cioè $2x^2 + 14x - 120 = 0$, e dividendo per 2: $x^2 + 7x - 60 = 0$.

Risoluzione. $\Delta = 49 + 240 = 289 = 17^2$, quindi $x = \dfrac{-7 \pm 17}{2}$: $x_1 = -12$, $x_2 = 5$.

Discussione. -12 non è una lunghezza: si scarta. $x = 5$ rispetta i limiti. I cateti misurano 5 cm e 12 cm. Verifica: $25 + 144 = 169$. ✓

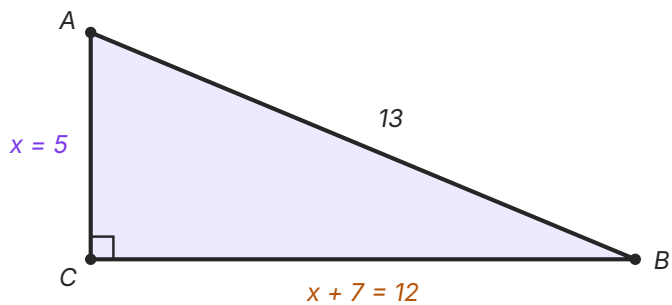


Figura 8.3 Il triangolo dell'esempio svolto: cateti x e $x + 7$, ipotenusa 13. L'equazione $x^2 + (x + 7)^2 = 169$ ha le soluzioni -12 e 5; solo $x = 5$ è una lunghezza.

Esempio. Una fotografia di 30 cm × 20 cm è circondata da una cornice di larghezza costante. L'area della cornice è uguale a quella della fotografia. Quanto è larga la cornice? (Figura 8.4)

Sia $x > 0$ la larghezza in centimetri. Il quadro con la cornice misura $(30 + 2x) \times (20 + 2x)$ e la sua area è il doppio di quella della foto, $2 \cdot 600 = 1200$ cm². Dunque $(30 + 2x)(20 + 2x) = 1200$, cioè $4x^2 + 100x - 600 = 0$, ovvero $x^2 + 25x - 150 = 0$.

$\Delta = 625 + 600 = 1225 = 35^2$, quindi $x = \dfrac{-25 \pm 35}{2}$: $x = -30$ (da scartare) oppure $x = 5$. La cornice è larga 5 cm; il quadro misura 40 cm × 30 cm = 1200 cm². ✓

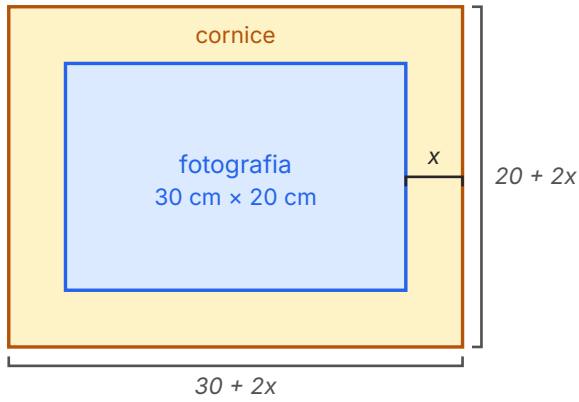


Figura 8.4 La fotografia (30 cm × 20 cm) con la cornice di larghezza x. Con $x = 5$ cm il quadro misura 40 cm × 30 cm: l'area della cornice è $1200 - 600 = 600$ cm², uguale a quella della fotografia.

8.5.2 Il numero aureo

Nel capitolo 5 abbiamo definito la *sezione aurea* di un segmento AB: è la parte AC che è media proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente, $AB : AC = AC : CB$, e l'abbiamo costruita con riga e compasso. Ora possiamo calcolarne la misura. Prendiamo $AB = 1$ e $AC = x$, con $0 < x < 1$; allora $CB = 1 - x$ e la proporzione dà $x^2 = 1 \cdot (1 - x)$, cioè

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$\Delta = 1 + 4 = 5$, quindi $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. La soluzione negativa si scarta; resta

$$AC = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618$$

La sezione aurea di un segmento è dunque circa il 61,8% del segmento, e il rapporto $AB : AC$ è un numero irrazionale che si indica con la lettera greca φ (fi) e si chiama **numero aureo**:

$$\varphi = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

(abbiamo razionalizzato il denominatore come nel capitolo 2). Poiché $x = 1/\varphi$ risolve $x^2 + x - 1 = 0$, il numero φ risolve $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, cioè $\varphi^2 = \varphi + 1$: per elevare al quadrato il numero aureo basta aggiungergli 1 ($1{,}618^2 \approx 2{,}618$). Un **rettangolo aureo** è un rettangolo con i lati in rapporto φ. Se da un rettangolo aureo di lati φ e 1 si toglie un quadrato di lato 1, resta un rettangolo

di lati 1 e $\varphi - 1$, e il rapporto dei suoi lati è $\dfrac{1}{\varphi - 1} = \varphi$, perché $\varphi(\varphi - 1) = \varphi^2 - \varphi = 1$. Il rettangolo rimasto è ancora aureo (Figura 8.5), e il procedimento si può ripetere all'infinito.

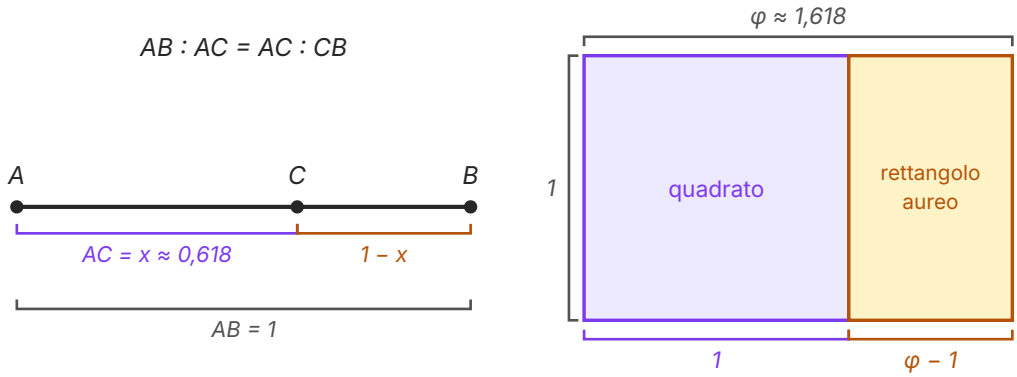


Figura 8.5 A sinistra, la sezione aurea AC del segmento $AB = 1$: $AC = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618$. A destra, un rettangolo aureo di lati φ e 1: togliendo il quadrato di lato 1 resta un rettangolo di lati 1 e $\varphi - 1$, ancora aureo.

8.5.3 Problemi dalla fisica e dall'economia

Un corpo lasciato cadere da fermo, se si trascura la resistenza dell'aria, percorre in un tempo t lo spazio $s = \dfrac{1}{2}gt^2$, dove $g \approx 9{,}8$ m/s² è l'accelerazione di gravità. Per sapere quanto impiega un sasso a cadere da 20 m si risolve l'equazione pura $4{,}9t^2 = 20$: $t = \sqrt{\dfrac{20}{4{,}9}} \approx 2{,}02$ s (la soluzione negativa non ha senso: il tempo si misura dall'istante in cui il sasso viene lasciato).

COLLEGAMENTI

Fisica: il moto uniformemente accelerato. Un'auto che passa per un semaforo alla velocità di 10 m/s e accelera con accelerazione costante $a = 2$ m/s² percorre, dopo t secondi, lo spazio $s = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2 = 10t + t^2$ (in metri). Quando avrà percorso 75 m? Da $t^2 + 10t - 75 = 0$ si ha $\dfrac{\Delta}{4} = 25 + 75 = 100$, $t = -5 \pm 10$: $t = 5$ s (la soluzione -15 si scarta). La formula di questo moto, che studi anche in fisica, è un polinomio di secondo grado nel tempo: ogni volta che ci si chiede *quando* un corpo accelerato raggiunge una certa posizione, si risolve un'equazione di secondo grado.

Anche in economia compaiono equazioni di secondo grado. Una piccola azienda stima che, vendendo un prodotto al prezzo di p euro, ne venderà $q = 1000 - 20p$ pezzi (più il prezzo è alto, meno pezzi si vendono; il modello vale per $0 \le p \le 50$). Il **ricavo** è il prezzo per la quantità ven-

duta: $R = p(1000 - 20p)$. A quale prezzo il ricavo è di 12 000 euro? Da $p(1000 - 20p) = 12\,000$ si ottiene $20p^2 - 1000p + 12\,000 = 0$, cioè $p^2 - 50p + 600 = 0$, con soluzioni $p = 20$ e $p = 30$. **Tutte e due sono accettabili**: a 20 euro si vendono 600 pezzi, a 30 euro 400 pezzi, e in entrambi i casi l'incasso è lo stesso. Quale prezzo scegliere dipende da altri dati (i costi di produzione, per esempio). Nel capitolo 9 vedremo quale prezzo rende il ricavo *massimo*.

Un'equazione è un modello del problema, non il problema. Le sue soluzioni vanno sempre confrontate con i limiti dell'incognita: si scartano le soluzioni negative quando l'incognita è una lunghezza o un tempo, le soluzioni non intere quando conta oggetti o persone, quelle che superano un valore massimo imposto dal testo. A volte resta una soluzione, a volte due, a volte nessuna: anche «il problema non ha soluzione» è una risposta.

SINTESI

- Un'equazione di secondo grado in forma normale è $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$; ha al massimo due soluzioni reali.
- Equazioni incomplete: pura $ax^2 + c = 0$ (due soluzioni opposte, oppure nessuna in $\mathbb{R}$); spuria $ax^2 + bx = 0$ (si raccoglie x: soluzioni 0 e $-b/a$); monomia $ax^2 = 0$ (soluzione doppia 0).
- Da $x^2 = k$, con $k > 0$, segue $x = \pm\sqrt{k}$: non si dimentica la soluzione negativa, e non si divide per x.
- Il completamento del quadrato trasforma l'equazione in $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ e porta alla formula risolutiva $x = (-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$.
- Il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ decide: $\Delta > 0$ due soluzioni distinte, $\Delta = 0$ due coincidenti, $\Delta < 0$ nessuna soluzione reale.
- Con $b = 2k$ pari si usa la formula ridotta $x = (-k \pm \sqrt{(\Delta/4)})/a$, con $\Delta/4 = k^2 - ac$.
- Nelle equazioni fratte si scrivono le condizioni di esistenza e si scartano le soluzioni che annullano un denominatore.
- Se $\Delta \geq 0$: $x_1 + x_2 = -b/a$ e $x_1 \cdot x_2 = c/a$. Due numeri di somma s e prodotto p sono le soluzioni di $x^2 - sx + p = 0$.
- Il trinomio si scompone in $a(x - x_1)(x - x_2)$ se $\Delta > 0$, in $a(x - x_1)^2$ se $\Delta = 0$; se $\Delta < 0$ è irriducibile in $\mathbb{R}$.
- In un'equazione parametrica le condizioni su Δ, sulla somma e sul prodotto delle soluzioni traducono le proprietà richieste in equazioni o disequazioni nel parametro.
- Nei problemi si scrivono i limiti dell'incognita e si discutono le soluzioni: non sempre sono entrambe accettabili.
- La sezione aurea di un segmento unitario misura $(\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0{,}618$; il numero aureo $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$ verifica $\varphi^2 = \varphi + 1$.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Quale delle seguenti è un'equazione spuria?
   A. $x^2 - 9 = 0$
   B. $3x^2 - 6x = 0$
   C. $x^2 + x + 1 = 0$
   D. $5x^2 = 0$

2. ● L'equazione $x^2 + 16 = 0$:
   A. ha le soluzioni ± 4
   B. ha la sola soluzione 4
   C. non ha soluzioni reali
   D. ha la sola soluzione -4

3. ● Il discriminante dell'equazione $2x^2 - 3x - 2 = 0$ vale:
   A. 25
   B. -7
   C. 7
   D. -25

4. ●● L'equazione $9x^2 - 12x + 4 = 0$ ha:
   A. due soluzioni reali distinte
   B. nessuna soluzione reale
   C. due soluzioni coincidenti, uguali a $-\frac{2}{3}$
   D. due soluzioni coincidenti, uguali a $\frac{2}{3}$

5. ●● Le soluzioni di $x^2 - 7x + 10 = 0$ hanno:
   A. somma -7 e prodotto 10
   B. somma 7 e prodotto 10
   C. somma 10 e prodotto 7
   D. somma 7 e prodotto -10

6. ●● Il trinomio $2x^2 + x - 3$ è uguale a:
   A. $(x - 1)(2x + 3)$
   B. $(x + 1)(2x - 3)$
   C. $2(x - 1)(x - 3)$
   D. $(2x - 1)(x + 3)$

7. ●● Quale equazione ha per soluzioni 3 e −5?

   A. $x^2 - 2x - 15 = 0$

   B. $x^2 + 2x + 15 = 0$

   C. $x^2 + 2x - 15 = 0$

   D. $x^2 - 8x + 15 = 0$

8. ●● **Vero o falso?** Correggi le affermazioni false. a) Ogni equazione di secondo grado ha due soluzioni reali. b) Se a e c sono discordi, l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni reali distinte. c) L'equazione $x^2 = 5x$ è equivalente a $x = 5$. d) La formula ridotta si può usare quando il coefficiente b è pari. e) Se $\Delta < 0$, il trinomio $ax^2 + bx + c$ non si scompone in fattori di primo grado con coefficienti reali. f) Le soluzioni di $x^2 - 3x - 1 = 0$ hanno prodotto 1.

9. ● **Completa.** a) Un'equazione di secondo grado si dice pura se manca il termine _____, spuria se manca il termine _____. b) Il discriminante è $\Delta =$ _____; se Δ _____ 0 l'equazione non ha soluzioni reali. c) Se x_1 e x_2 sono le soluzioni di $ax^2 + bx + c = 0$, allora $x_1 + x_2 =$ _____ e $x_1 \cdot x_2 =$ _____.

Calcolare

10. ● Risolvi le equazioni incomplete. a) $x^2 - 49 = 0$; b) $3x^2 - 12 = 0$; c) $2x^2 + 8 = 0$; d) $x^2 - 5x = 0$; e) $4x^2 + 6x = 0$; f) $5x^2 - 15 = 0$.

11. ● Risolvi con la formula risolutiva. a) $x^2 - 5x + 6 = 0$; b) $2x^2 - 5x - 3 = 0$; c) $x^2 + x + 1 = 0$; d) $3x^2 + 2x - 1 = 0$.

12. ● Risolvi con la formula ridotta. a) $x^2 - 6x + 5 = 0$; b) $x^2 + 4x - 1 = 0$; c) $3x^2 - 10x + 3 = 0$; d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

13. ●● Risolvi completando il quadrato, senza usare la formula. a) $x^2 + 8x + 7 = 0$; b) $x^2 - 2x - 4 = 0$; c) $x^2 + 3x - 10 = 0$.

14. ●● Riduci a forma normale e risolvi. a) $(x - 3)^2 = 2x - 6$; b) $(2x + 1)(x - 2) = x(x + 1) - 4$; c) $(x + 1)^2 + (x - 1)^2 = 10$.

15. ●● Risolvi le equazioni con coefficienti irrazionali. a) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$; b) $x^2 - (\sqrt{5} + 1)x + \sqrt{5} = 0$; c) $\sqrt{3}x^2 - 4x + \sqrt{3} = 0$.

16. ●● Risolvi le equazioni fratte. a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{3}{4}$; b) $\frac{x}{x-3} + \frac{2}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}$; c) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{8}{3}$.

17. ●● Senza risolvere le equazioni, verifica che $\Delta > 0$, calcola somma e prodotto delle soluzioni e stabilisci il loro segno. a) $x^2 - 9x + 14 = 0$; b) $2x^2 + 5x - 3 = 0$; c) $3x^2 + 7x + 2 = 0$.

18. ●● Trova, se esistono, due numeri reali di cui conosci la somma s e il prodotto p. a) $s = 11$, $p = 30$; b) $s = -2$, $p = -35$; c) $s = 4$, $p = 1$; d) $s = 2$, $p = 5$.

19. ●● Scomponi in fattori, se possibile. a) $x^2 - x - 12$; b) $6x^2 - x - 2$; c) $4x^2 + 4x + 1$; d) $x^2 + x + 3$; e) $-2x^2 + 5x - 2$.

20. ●● Semplifica le frazioni algebriche, indicando le condizioni di esistenza. a) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$; b) $\frac{2x^2 + 3x - 2}{4x^2 - 1}$.

Dimostrare e argomentare

21. ●● Dimostra che, se a e c sono discordi, l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni reali distinte e discordi, qualunque sia b.

22. ●● **Trova l'errore.** a) «$x^2 = 4x$; divido per x e ottengo $x = 4$: l'unica soluzione è 4.» b) «Per $x^2 - 6x + 8 = 0$: $\Delta = -6^2 - 32 = -68 < 0$, l'equazione non ha soluzioni reali.» Spiega dove sta l'errore in ciascun caso e correggilo.

23. ●● Partendo dalla formula risolutiva, ricava la formula ridotta ponendo $b = 2k$.

24. ●● Dimostra che, se $\Delta \geq 0$, $x_1^2 + x_2^2 = s^2 - 2p$. Usa il risultato per calcolare $x_1^2 + x_2^2$ per l'equazione $x^2 - 5x + 3 = 0$, senza risolverla.

25. ●●● Siano x_1 e x_2 le soluzioni (reali) di $ax^2 + bx + c = 0$, con $c \neq 0$. Dimostra che i numeri $\frac{1}{x_1}$ e $\frac{1}{x_2}$ sono le soluzioni dell'equazione $cx^2 + bx + a = 0$. Perché serve l'ipotesi $c \neq 0$?

Problemi

26. ● Il quadrato di un numero naturale, aumentato del triplo del numero, dà 70. Qual è il numero?

27. ●● Un rettangolo ha il perimetro di 34 cm e la diagonale di 13 cm. Calcola i lati e l'area.

28. ●● Un sasso viene lasciato cadere da un ponte alto 45 m. Trascurando la resistenza dell'aria e usando $g \approx 9{,}8$ m/s^2, calcola dopo quanto tempo tocca l'acqua (al centesimo di secondo). Da quale altezza dovrebbe cadere per impiegare il doppio del tempo?

29. ●● Un ciclista in discesa parte con velocità 8 m/s e accelera con accelerazione costante 2 m/s^2, così che lo spazio percorso dopo t secondi è $s = 8t + t^2$ (in metri). Dopo quanti secondi ha percorso 48 m?

30. ●● Un negozio vende al prezzo di p euro $q = 400 - 10p$ confezioni al mese ($0 \leq p \leq 40$). Per quale prezzo il ricavo mensile è di 3750 euro? Se le soluzioni sono due, quale sceglieresti per vendere più confezioni?

31. ●● Da un quadrato di cartone si tagliano agli angoli quattro quadratini di lato 3 cm e si piegano i bordi, ottenendo una scatola senza coperchio di volume 300 cm^3. Quanto misurava il lato del cartone?

Verso la verifica

32. ●● Risolvi l'equazione $\frac{x}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$, poi scomponi il trinomio che hai ottenuto nella forma normale.

33. ●● Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa di 10 cm e l'area di 24 cm^2. Calcola i cateti. (Suggerimento: trova prima la loro somma e il loro prodotto.)

34. ●●● **Sfida.** È data l'equazione $x^2 - 2(k+1)x + k^2 + 3 = 0$. a) Per quali valori di k ha soluzioni reali? b) Per quale valore sono coincidenti, e quanto valgono? c) Esiste un valore di k per cui una soluzione è 1? d) Possono le soluzioni essere opposte? E reciproche? Motiva ogni risposta.

PER APPROFONDIRE

- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: l'algebra babilonese, al-Khwārizmī e la nascita della notazione simbolica.
- [LIV] Livio, *La sezione aurea*: la storia del numero φ, e una critica documentata di molte leggende che lo circondano.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: come scegliere l'incognita, impostare l'equazione e controllare il risultato.

Glossario del capitolo

Completamento del quadrato
Procedimento che aggiunge a $x^2 + bx$ il quadrato di $b/2$ per ottenere il quadrato di un binomio, trasformando l'equazione in un'equazione pura.

Discriminante
Il numero $\Delta = b^2 - 4ac$, il cui segno stabilisce se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha due, una (doppia) o nessuna soluzione reale.

Equazione di secondo grado
Equazione che, ridotta a forma normale, si scrive $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$.

Equazione incompleta
Equazione di secondo grado in cui $b = 0$ oppure $c = 0$: pura, spuria o monomia.

Equazione monomia
Equazione $ax^2 = 0$, con la sola soluzione doppia $x = 0$.

Equazione parametrica
Equazione in cui i coefficienti dipendono da un parametro; si cercano i valori del parametro per cui le soluzioni hanno proprietà assegnate.

Equazione pura
Equazione di secondo grado senza il termine di primo grado, $ax^2 + c = 0$: ha due soluzioni opposte o nessuna soluzione reale.

Equazione spuria
Equazione di secondo grado senza termine noto, $ax^2 + bx = 0$: ha le soluzioni 0 e $-b/a$.

Forma normale
Per un'equazione di secondo grado, la scrittura $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, ottenuta portando tutti i termini al primo membro e riducendoli.

Formula ridotta
Variante della formula risolutiva per $b = 2k$ pari: $x = (-k \pm \sqrt{(\Delta/4)})/a$, con $\Delta/4 = k^2 - ac$.

Formula risolutiva
La formula $x = (-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$, che dà le soluzioni reali di $ax^2 + bx + c = 0$ quando $\Delta \geq 0$.

Numero aureo
Il numero $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$, rapporto tra un segmento e la sua sezione aurea; verifica $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Regola dei segni di Cartesio
Per un'equazione di secondo grado completa con $\Delta \geq 0$: ogni variazione di segno tra coefficienti consecutivi indica una soluzione positiva, ogni permanenza una negativa.

Rettangolo aureo
Rettangolo con i lati in rapporto φ; togliendo un quadrato costruito sul lato minore resta un rettangolo ancora aureo.

Ricavo
In economia, l'incasso di una vendita: prezzo unitario per quantità venduta.

Soluzione accettabile
In un problema, una soluzione dell'equazione risolvente che rispetta i limiti imposti all'incognita dal testo.

Soluzioni coincidenti
Le due soluzioni di un'equazione di secondo grado con $\Delta = 0$, uguali a $-b/(2a)$; si parla anche di soluzione doppia.

Somma e prodotto delle soluzioni
Se $\Delta \geq 0$, le soluzioni di $ax^2 + bx + c = 0$ hanno somma $-b/a$ e prodotto c/a.

Trinomio irriducibile
Trinomio di secondo grado con $\Delta < 0$: non si scompone in fattori di primo grado con coefficienti reali.

Soluzioni

1. B. Manca il termine noto: $3x(x-2)=0$, con soluzioni 0 e 2.

2. C. $x^2=-16$: nessun numero reale ha quadrato negativo.

3. A. $\Delta=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)=9+16=25$.

4. D. $\frac{\Delta}{4}=36-36=0$; $x=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$. Infatti $9x^2-12x+4=(3x-2)^2$.

5. B. $s=-b/a=7$, $p=c/a=10$ (le soluzioni sono 2 e 5).

6. A. $\Delta=1+24=25$, radici 1 e $-\frac{3}{2}$: $2(x-1)(x+\frac{3}{2})=(x-1)(2x+3)$.

7. C. $s=-2$, $p=-15$: l'equazione è $x^2-sx+p=x^2+2x-15=0$.

8. a) F: le soluzioni reali possono essere due, coincidenti o nessuna (dipende da Δ). b) V: $-4ac>0$, quindi $\Delta=b^2-4ac>0$. c) F: $x^2=5x$ ha le soluzioni 0 e 5; dividendo per x si perde $x=0$. d) V. e) V. f) F: il prodotto è $c/a=-1$.

9. a) di primo grado ($b=0$); noto ($c=0$). b) b^2-4ac; <. c) $-b/a$; c/a.

10. a) ± 7. b) $x^2=4$, ± 2. c) $x^2=-4$: nessuna soluzione reale. d) $x(x-5)=0$: 0 e 5. e) $2x(2x+3)=0$: 0 e $-\frac{3}{2}$. f) $x^2=3$: $\pm\sqrt{3}$.

11. a) $\Delta=1$, $x=\frac{5\pm 1}{2}$: 2 e 3. b) $\Delta=25+24=49$, $x=\frac{5\pm 7}{4}$: 3 e $-\frac{1}{2}$. c) $\Delta=1-4=-3<0$: nessuna soluzione reale. d) $\Delta=4+12=16$, $x=\frac{-2\pm 4}{6}$: $\frac{1}{3}$ e -1.

12. a) $\frac{\Delta}{4}=9-5=4$, $x=3\pm 2$: 1 e 5. b) $\frac{\Delta}{4}=4+1=5$, $x=-2\pm\sqrt{5}$. c) $\frac{\Delta}{4}=25-9=16$, $x=\frac{5\pm 4}{3}$: $\frac{1}{3}$ e 3. d) $\frac{\Delta}{4}=36-36=0$: $x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ doppia.

13. a) $x^2+8x+16=9$, $(x+4)^2=9$, $x+4=\pm 3$: -1 e -7. b) $x^2-2x+1=5$, $(x-1)^2=5$: $x=1\pm\sqrt{5}$. c) $x^2+3x+\frac{9}{4}=10+\frac{9}{4}$, $(x+\frac{3}{2})^2=\frac{49}{4}$, $x=-\frac{3}{2}\pm\frac{7}{2}$: 2 e -5.

14. a) $x^2-8x+15=0$: 3 e 5. b) $2x^2-3x-2=x^2+x-4$, $x^2-4x+2=0$: $x=2\pm\sqrt{2}$. c) $2x^2+2=10$, $x^2=4$: ± 2.

15. a) $\Delta/4=2-2=0$: $x=\sqrt{2}$ doppia (infatti $(x-\sqrt{2})^2=0$). b) somma $\sqrt{5}+1$ e prodotto $\sqrt{5}$: le soluzioni sono 1 e $\sqrt{5}$ (verifica: $\Delta=(\sqrt{5}+1)^2-4\sqrt{5}=(\sqrt{5}-1)^2$). c) $\Delta/4=4-3=1$, $x=\frac{2\pm 1}{\sqrt{3}}$: $\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ e $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16. a) C.E. $x\neq 0$, $x\neq -2$. $4(x+2)+4x=3x(x+2)$, $3x^2-2x-8=0$, $\frac{\Delta}{4}=1+24=25$, $x=\frac{1\pm 5}{3}$: 2 e $-\frac{4}{3}$, entrambe accettabili. b) C.E. $x\neq\pm 3$. $x(x+3)+2(x-3)=18$, $x^2+5x-24=0$: -8 e 3; $x=3$ non è accettabile, la soluzione è $x=-8$. c) C.E. $x\neq\pm 1$. Il primo membro è $\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{x^2-1}=\frac{4x}{x^2-1}$; $12x=8x^2-8$, $2x^2-3x-2=0$: 2 e $-\frac{1}{2}$, entrambe accettabili.

17. a) $\Delta=81-56=25$; $s=9$, $p=14$: concordi, positive (sono 2 e 7). b) $\Delta=25+24=49$; $s=-\frac{5}{2}$, $p=-\frac{3}{2}$: discordi, e la negativa ha valore assoluto maggiore (sono $\frac{1}{2}$ e -3). c) $\Delta=49-24=25$; $s=-\frac{7}{3}$, $p=\frac{2}{3}$: concordi, negative (sono $-\frac{1}{3}$ e -2).

18. a) $x^2-11x+30=0$: 5 e 6. b) $x^2+2x-35=0$: 5 e -7. c) $x^2-4x+1=0$: $2+\sqrt{3}$ e $2-\sqrt{3}$. d) $x^2-2x+5=0$ ha $\Delta=-16<0$: non esistono.

19. a) $(x-4)(x+3)$. b) $\Delta=1+48=49$, radici $\frac{2}{3}$ e $-\frac{1}{2}$: $(3x-2)(2x+1)$. c) $\Delta=0$: $(2x+1)^2$. d)

$\Delta = 1 - 12 < 0$: irriducibile in $\mathbb{R}$. e) radici 2 e $\frac{1}{2}$: $-2(x-2)(x-\frac{1}{2}) = -(x-2)(2x-1) = (2-x)(2x-1)$.

20. a) C.E. $x \neq \pm 2$: $\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-3}{x+2}$. b) C.E. $x \neq \pm\frac{1}{2}$: il numeratore ha radici $\frac{1}{2}$ e -2, quindi $\frac{(2x-1)(x+2)}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{x+2}{2x+1}$.

21. Se a e c sono discordi, $ac < 0$, quindi $-4ac > 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac \geq -4ac > 0$ (perché $b^2 \geq 0$): le soluzioni sono reali e distinte. Il loro prodotto è $c/a < 0$, quindi sono discordi.

22. a) Dividendo per x si perde la soluzione $x = 0$ (si divide per un'espressione che può valere zero). Corretto: $x^2 - 4x = 0$, $x(x-4) = 0$, soluzioni 0 e 4. b) $b = -6$, quindi $b^2 = (-6)^2 = 36$, non -36: $\Delta = 36 - 32 = 4$, soluzioni $\frac{6 \pm 2}{2}$, cioè 2 e 4.

23. Con $b = 2k$: $\Delta = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$, quindi $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{k^2 - ac}$ $(\Delta \geq 0)$. Allora $x = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2-ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2-ac}}{a}$, con $k^2 - ac = \frac{\Delta}{4}$.

24. $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, quindi $x_1^2 + x_2^2 = s^2 - 2p$. Per $x^2 - 5x + 3 = 0$ $(\Delta = 13 > 0)$: $s = 5$, $p = 3$, $x_1^2 + x_2^2 = 25 - 6 = 19$.

25. Poiché $c \neq 0$, le soluzioni non sono nulle ($x = 0$ darebbe $c = 0$) e i reciproci esistono. Se x_1 è soluzione, $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$; dividendo per x_1^2 si ha $a + b \cdot \frac{1}{x_1} + c \cdot \frac{1}{x_1^2} = 0$, cioè $\frac{1}{x_1}$ risolve $cx^2 + bx + a = 0$; lo stesso per x_2. (Se $x_1 = x_2$ anche i reciproci coincidono, e $cx^2 + bx + a$ ha lo stesso discriminante $b^2 - 4ac = 0$.) L'ipotesi $c \neq 0$ serve perché sia $x_1 \neq 0$ e perché $cx^2 + bx + a = 0$ sia ancora di secondo grado.

26. $x^2 + 3x - 70 = 0$, $\Delta = 9 + 280 = 289 = 17^2$, $x = \frac{-3 \pm 17}{2}$: 7 e -10. -10 non è naturale; il numero è 7 (verifica: $49 + 21 = 70$).

27. Semiperimetro 17: lati x e $17 - x$, con $x^2 + (17-x)^2 = 169$, cioè $x^2 - 17x + 60 = 0$: 5 e 12. I lati misurano 5 cm e 12 cm, l'area 60 cm^2.

28. $4{,}9t^2 = 45$, $t^2 \approx 9{,}184$, $t \approx 3{,}03$ s. Poiché lo spazio è proporzionale a t^2, per un tempo doppio serve un'altezza quadrupla: 180 m.

29. $t^2 + 8t - 48 = 0$, $\frac{\Delta}{4} = 16 + 48 = 64$, $t = -4 \pm 8$: 4 e -12. Dopo 4 s.

30. $p(400 - 10p) = 3750$, $p^2 - 40p + 375 = 0$, $\frac{\Delta}{4} = 400 - 375 = 25$, $p = 20 \pm 5$: 15 € e 25 €, entrambi nell'intervallo ammesso. A 15 € si vendono 250 confezioni, a 25 € soltanto 150: per vendere di più si sceglie 15 €.

31. Se l è il lato del cartone, la scatola ha base quadrata di lato $l - 6$ e altezza 3: $3(l-6)^2 = 300$, $(l-6)^2 = 100$, $l - 6 = \pm 10$. Deve essere $l - 6 > 0$, quindi $l = 16$ cm.

32. C.E. $x \neq \pm 2$. $x(x-2) - (x+2) = 8$, $x^2 - 3x - 10 = 0$, soluzioni 5 e -2; -2 non è accettabile, la soluzione è $x = 5$ (verifica: $\frac{5}{7} - \frac{1}{3} = \frac{8}{21} = \frac{8}{21}$). Il trinomio è $x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$.

33. Siano b, c i cateti: $bc = 48$ (area 24) e $b^2 + c^2 = 100$. Allora $(b+c)^2 = 100 + 96 = 196$ e $b + c = 14$ (somma positiva). I cateti sono le soluzioni di $t^2 - 14t + 48 = 0$: 6 cm e 8 cm.

34. a) $\frac{\Delta}{4} = (k+1)^2 - (k^2+3) = 2k - 2$: soluzioni reali per $k \geq 1$. b) Coincidenti per $k = 1$: $x^2 - 4x + 4 = 0$, $x = 2$ doppia. c) Sostituendo $x = 1$: $1 - 2k - 2 + k^2 + 3 = 0$, $k^2 - 2k + 2 = 0$, con discriminante $4 - 8 < 0$: nessun k, 1 non è mai soluzione. d) Opposte: $s = 2(k+1) = 0$, $k = -1$, ma per $k = -1 < 1$ le soluzioni non sono reali: no. Reciproche: $p = k^2 + 3 = 1$, $k^2 = -2$: impossibile, no.