CAPITOLO

7

Sistemi lineari

Un'equazione con due incognite lascia infinite possibilità; due equazioni insieme, quasi sempre, ne lasciano una sola.

OBIETTIVI

1. Riconoscere le soluzioni di un'equazione lineare in due incognite e di un sistema, e interpretarle come punti di rette nel piano cartesiano.
2. Risolvere un sistema lineare con i metodi di sostituzione, confronto, riduzione e Cramer, scegliendo il più conveniente.
3. Stabilire se un sistema è determinato, impossibile o indeterminato con i rapporti dei coefficienti e con i determinanti; risolvere sistemi fratti, semplici sistemi letterali e sistemi di tre equazioni in tre incognite.
4. Tradurre in un sistema problemi di numeri, prezzi, miscugli, moto, geometria e fisica.
5. Rappresentare semipiani e regioni ammissibili, e risolvere semplici problemi di programmazione lineare valutando la funzione obiettivo nei vertici.

INDICE DEL CAPITOLO

7.1 Equazioni lineari e sistemi 2
7.2 I metodi di risoluzione 4
7.3 Determinati, impossibili, indeterminati 8
7.4 Problemi che si risolvono con i sistemi 11
7.5 Disequazioni lineari in due incognite 14

Matematica 2 · Parte III · Il piano cartesiano e i sistemi lineari · versione 1.0
Capitolo 7: Sistemi lineari · pagine 171–194 del volume completo · estratto per lo studio

Al bar della scuola due cornetti e tre cappuccini costano 7,90 €, mentre tre cornetti e due cappuccini costano 7,60 €. Quanto costa un cornetto? Con una sola incognita non si va lontano: il prezzo del cornetto dipende da quello del cappuccino, e viceversa. Servono *due* incognite e *due* informazioni, da usare insieme.

Nel capitolo precedente hai visto che un'equazione di primo grado in x e y rappresenta una retta, e che il punto comune a due rette si trova risolvendo insieme le loro equazioni. In questo capitolo trasformiamo quell'osservazione in un metodo generale: i **sistemi lineari**. Impareremo quattro modi di risolverli, a capire in anticipo se hanno una soluzione, nessuna o infinite, e a usarli per problemi di prezzi, miscele, moto e fisica. Nell'ultima parte passeremo dalle uguaglianze alle disuguaglianze: le disequazioni in due incognite descrivono regioni del piano, e con esse affronteremo un primo problema di *ricerca operativa*, cioè la scelta più conveniente tra molte possibili.

7.1 Equazioni lineari e sistemi

7.1.1 Equazioni lineari in due incognite

Un'**equazione lineare in due incognite** è un'equazione di primo grado nelle incognite x e y; ridotta a **forma normale** si scrive

$$ax + by = c$$

dove a, b, c sono numeri reali e a, b non sono entrambi nulli. Una **soluzione** è una **coppia ordinata** di numeri $(x; y)$ che rende vera l'uguaglianza. Per l'equazione $2x + y = 6$ sono soluzioni $(0; 6)$, $(1; 4)$, $(3; 0)$, ma anche $(-1; 8)$ e $(0{,}5; 5)$: basta scegliere x a piacere e calcolare $y = 6 - 2x$. L'ordine conta: $(1; 4)$ è una soluzione, $(4; 1)$ no, perché $2 \cdot 4 + 1 = 9$.

Poiché x si può scegliere in infiniti modi, **un'equazione lineare in due incognite ha infinite soluzioni**. Nel piano cartesiano le coppie $(x; y)$ sono punti, e i punti che soddisfano l'equazione formano una retta: è la retta di equazione implicita $2x + y - 6 = 0$, o esplicita $y = -2x + 6$. Risolvere un'equazione in due incognite e disegnare una retta sono quindi la stessa cosa, vista con due linguaggi diversi.

7.1.2 Che cos'è un sistema

Un **sistema** di equazioni è un insieme di equazioni nelle stesse incognite, che devono essere soddisfatte *contemporaneamente*; si scrivono una sotto l'altra, unite da una parentesi graffa. Una **soluzione del sistema** è una coppia che soddisfa tutte le equazioni: l'insieme delle soluzioni è l'**intersezione** degli insiemi delle soluzioni delle singole equazioni, come per i sistemi di dise-

quazioni del primo volume. Il problema del bar, chiamati x il prezzo di un cornetto e y quello di un cappuccino, diventa

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7{,}90 \\ 3x + 2y = 7{,}60 \end{cases}$$

Il **grado di un sistema** è il prodotto dei gradi delle sue equazioni (ridotte a forma normale e intere). Se tutte le equazioni sono di primo grado il grado è 1 e il sistema si dice **lineare**. In questo capitolo studiamo soprattutto sistemi di due equazioni in due incognite, che in forma normale si scrivono

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

con a, b, c, a', b', c' numeri reali. Per *verificare* che una coppia è soluzione basta sostituirla in *ogni* equazione: (1,40; 1,70) è soluzione del sistema del bar, perché $2 \cdot 1{,}40 + 3 \cdot 1{,}70 = 7{,}90$ e $3 \cdot 1{,}40 + 2 \cdot 1{,}70 = 7{,}60$. Una coppia che soddisfa una sola delle due equazioni non è soluzione.

7.1.3 L'interpretazione grafica

Ogni equazione del sistema rappresenta una retta, e una soluzione è un punto che sta su entrambe. Due rette del piano possono trovarsi in tre sole posizioni reciproche (figura 7.1):

- **incidenti**: hanno un solo punto in comune, e il sistema ha una sola soluzione, le coordinate di quel punto; si dice **determinato**;
- **parallele distinte**: non hanno punti in comune, e il sistema non ha soluzioni; si dice **impossibile**;
- **coincidenti**: sono la stessa retta, ogni suo punto è comune alle due, e il sistema ha infinite soluzioni; si dice **indeterminato**.

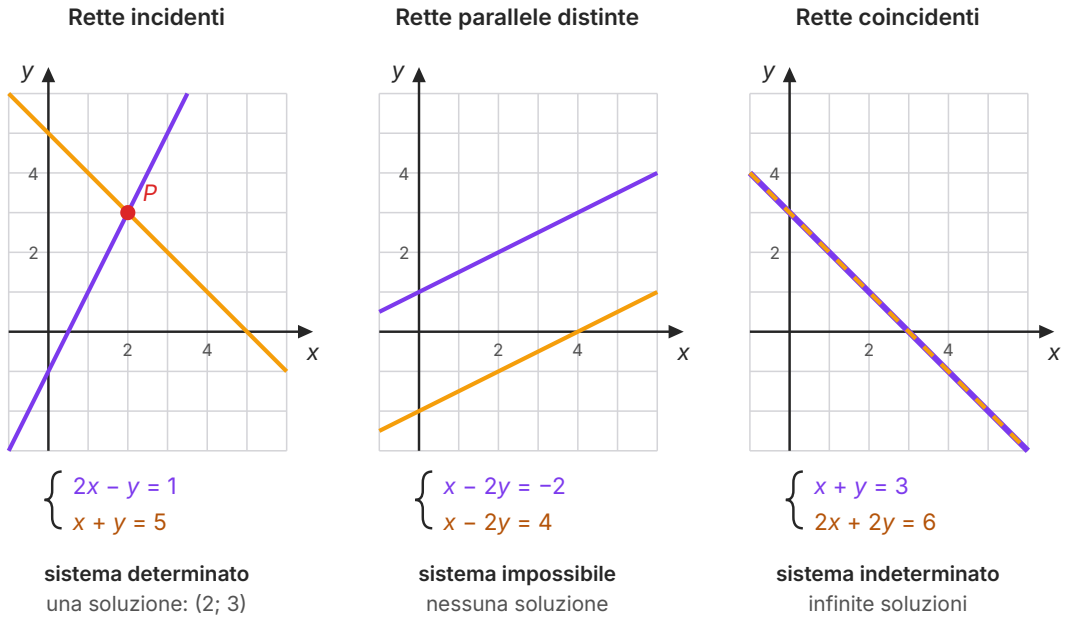


Figura 7.1 Le tre posizioni di due rette e i sistemi corrispondenti. A sinistra le rette $y = 2x - 1$ e $y = 5 - x$ si incontrano in P(2; 3). Al centro le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare ½ e ordinate all'origine diverse (1 e −2). A destra la seconda equazione è la prima moltiplicata per 2: le due rette coincidono.

Un sistema lineare non può quindi avere esattamente due, tre o cento soluzioni: o una, o nessuna, o infinite.

Il metodo grafico è prezioso per capire, ma raramente basta per calcolare: se il punto comune ha coordinate come (1,4; 1,7), o peggio $(\frac{3}{7}; \frac{11}{7})$, il disegno ci dà solo un'idea approssimata. Servono metodi algebrici, esatti.

7.2 I metodi di risoluzione

Tutti i metodi algebrici seguono la stessa idea: **eliminare un'incognita**, in modo da ottenere un'equazione in una sola incognita, che sappiamo risolvere dal primo volume. Si applicano a sistemi già in forma normale, o comunque con equazioni intere; li presentiamo sullo stesso sistema, per poterli confrontare.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

7.2.1 Il metodo di sostituzione

Nel **metodo di sostituzione** si ricava un'incognita da una delle equazioni e la si sostituisce nell'altra. Conviene scegliere l'incognita con coefficiente 1 o −1, per evitare frazioni.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi per sostituzione il sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - y = -1 \end{cases}$

1. Ricavo un'incognita. Nella seconda equazione x ha coefficiente 1: $x = y - 1$.

2. Sostituisco nell'altra equazione. $3(y - 1) + 2y = 12$, cioè $3y - 3 + 2y = 12$, $5y = 15$, $y = 3$.

3. Trovo l'altra incognita. $x = y - 1 = 3 - 1 = 2$.

4. Verifico. $3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$ ✓; $2 - 3 = -1$ ✓. La soluzione è la coppia (2; 3): le due rette si incontrano nel punto P(2; 3) della figura 7.2.

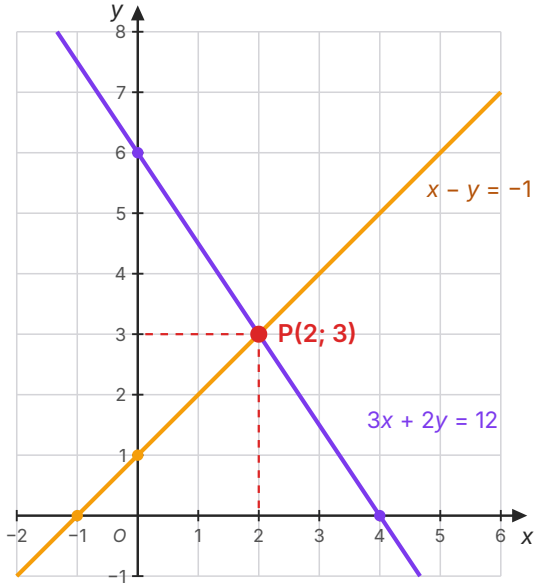


Figura 7.2 La soluzione grafica del sistema dell'esempio svolto. La retta $3x + 2y = 12$ passa per (4; 0) e (0; 6), la retta $x - y = -1$ per (−1; 0) e (0; 1): il loro punto comune P(2; 3) è la soluzione.

7.2.2 Il metodo del confronto

Nel **metodo del confronto** si ricava la stessa incognita da entrambe le equazioni e si uguagliano le due espressioni ottenute. È il metodo naturale quando le equazioni sono già in forma esplici-

ta, del tipo $y = mx + q$: in pratica stiamo cercando l'ascissa in cui le due rette hanno la stessa ordinata.

Nel nostro sistema ricaviamo y: dalla prima $y = \frac{12 - 3x}{2}$, dalla seconda $y = x + 1$. Uguagliando, $\frac{12 - 3x}{2} = x + 1$; moltiplicando per 2, $12 - 3x = 2x + 2$, da cui $5x = 10$ e $x = 2$. Sostituendo in una delle due espressioni, $y = 2 + 1 = 3$. La soluzione è di nuovo $(2; 3)$.

7.2.3 Il metodo di riduzione

Il **metodo di riduzione** (o di addizione e sottrazione) si basa su un principio: **se si sommano membro a membro due equazioni del sistema, si ottiene un'equazione soddisfatta da tutte le soluzioni del sistema**; e sostituendo una delle due equazioni con questa somma si ottiene un sistema equivalente. Lo stesso vale se prima si moltiplicano le equazioni per numeri diversi da zero. L'idea è scegliere i moltiplicatori in modo che, sommando, un'incognita sparisca.

Nel nostro sistema i coefficienti di y sono 2 e -1. Moltiplichiamo la seconda equazione per 2: $2x - 2y = -2$. Sommando alla prima, $(3x + 2y) + (2x - 2y) = 12 + (-2)$, cioè $5x = 10$, $x = 2$; poi $y = 3$ da una qualunque delle equazioni.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi per riduzione $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 6x - 5y = 17 \end{cases}$

Nessun coefficiente vale 1: la sostituzione porterebbe subito a frazioni. Eliminiamo x: il minimo comune multiplo di 4 e 6 è 12, quindi moltiplichiamo la prima equazione per 3 e la seconda per 2.

$$\begin{cases} 12x + 9y = 15 \\ 12x - 10y = 34 \end{cases}$$

Sottraendo la seconda dalla prima: $9y - (-10y) = 15 - 34$, cioè $19y = -19$ e $y = -1$.

Sostituiamo nella prima equazione: $4x - 3 = 5$, $x = 2$. **Verifica:** $4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 5$ ✓; $6 \cdot 2 - 5 \cdot (-1) = 17$ ✓. La soluzione è $(2; -1)$.

Spesso conviene usare la riduzione *due volte*, una per eliminare x e una per eliminare y: così si evitano sostituzioni con le frazioni. È l'idea da cui nasce la regola di Cramer.

7.2.4 Il metodo di Cramer

Si chiama **matrice** una tabella ordinata di numeri, disposti in righe e colonne. A una matrice quadrata con due righe e due colonne si associa un numero, il suo **determinante**: il prodotto dei numeri sulla diagonale principale meno il prodotto dei numeri sull'altra diagonale.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$$

Per esempio $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -5$. Ripetiamo ora la riduzione sul sistema generale. Moltiplicando la prima equazione per b' e la seconda per b, e sottraendo, y si elimina:

$$(ab' - a'b)x = cb' - bc'$$

Allo stesso modo, eliminando x, si trova $(ab' - a'b)y = ac' - ca'$. A sinistra c'è sempre il determinante dei coefficienti delle incognite; a destra due determinanti costruiti sostituendo, ogni volta, la colonna dell'incognita con la colonna dei termini noti. Se il determinante dei coefficienti non è zero, si può dividere.

IN SINTESI

Regola di Cramer. Dato il sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ si calcolano i tre determinanti

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' \qquad D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc' \qquad D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - ca'$$

Se $D \neq 0$ il sistema è determinato e la sua unica soluzione è $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$.

Sul nostro sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \qquad D_x = \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -12 + 2 = -10 \qquad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 12 = -15$$

Quindi $x = \frac{-10}{-5} = 2$ e $y = \frac{-15}{-5} = 3$: la stessa soluzione, con tre calcoli quasi meccanici. La regola prende il nome dal matematico svizzero Gabriel Cramer, che la pubblicò nel Settecento per sistemi con un numero qualunque di incognite.

7.2.5 Quale metodo scegliere

I quattro metodi danno sempre lo stesso risultato: la scelta è una questione di comodità. La **sostituzione** conviene quando un'incognita ha coefficiente ±1; il **confronto** quando le equazioni sono già risolte rispetto alla stessa incognita, come $y = \ldots$; la **riduzione** quando i coefficienti di un'incognita sono uguali, opposti o multipli semplici; **Cramer** quando i coefficienti sono numeri «scomodi», o quando il sistema contiene un parametro, perché dà la soluzione con una for-

mula. Qualunque sia il metodo, l'ultima riga del lavoro è sempre la **verifica** nelle equazioni di partenza, non in quelle trasformate: è lì che si scoprono gli errori di segno.

7.3 Determinati, impossibili, indeterminati

Risolvendo un sistema impossibile o indeterminato, i metodi algebrici non si «rompono»: arrivano a un'equazione senza incognite, che ci dice da sola com'è fatto il sistema. Per esempio, nel sistema $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ sottraendo le due equazioni si ottiene $0 \cdot y = -6$, cioè $0 = -6$: nessuna coppia la soddisfa, e il sistema è impossibile (le rette al centro della figura 7.1). Nel sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ invece, ricavando $x = 3 - y$ e sostituendo, si arriva a $6 = 6$: un'identità, vera per ogni y, e il sistema è indeterminato. Ma è utile saperlo *prima* di risolvere: due criteri guardano soltanto i coefficienti.

7.3.1 Il criterio dei rapporti

Supponiamo che i coefficienti a', b', c' della seconda equazione siano diversi da zero. Le due rette sono parallele (o coincidenti) quando hanno lo stesso coefficiente angolare, cioè quando i coefficienti delle incognite sono proporzionali; coincidono quando è proporzionale anche il termine noto. Si ottiene la tabella 7.1.

Tabella 7.1 Il criterio dei rapporti (con a', b', $c' \neq 0$) e il criterio dei determinanti, con la posizione delle rette.

Rapporti	Determinanti	Rette	Sistema
$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$	$D \neq 0$	incidenti	determinato
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$	$D = 0$, ma $D_x \neq 0$ oppure $D_y \neq 0$	parallele distinte	impossibile
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$	$D = D_x = D_y = 0$	coincidenti	indeterminato

Per esempio, il sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 8 \end{cases}$ ha $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{4}{8}$: tutti i rapporti valgono ½, la seconda equazione è la prima moltiplicata per 2, e il sistema è indeterminato. Se invece il secondo termine noto fosse 5, avremmo $\frac{4}{5} \neq \frac{1}{2}$ e il sistema sarebbe impossibile.

7.3.2 Il criterio dei determinanti

Il criterio dei rapporti ha un difetto: non si può usare se qualche coefficiente della seconda equazione è zero. Il determinante non ha questo problema. Infatti $D = ab' - ba' = 0$ equivale a $ab' = ba'$, cioè alla proporzionalità dei coefficienti delle incognite: **$D \neq 0$ se e solo se le rette sono incidenti**, e il sistema è determinato. Quando $D = 0$ le rette sono parallele, e decidono D_x e D_y: se almeno uno dei due è diverso da zero le rette sono distinte e il sistema è impossibile; se sono nulli entrambi le rette coincidono e il sistema è indeterminato (sempre nell'ipotesi, che facciamo in tutto il capitolo, che in ogni equazione almeno un'incognita abbia coefficiente diverso da zero).

ERRORE FREQUENTE

«$D = 0$, quindi il sistema è impossibile.» Non basta: $D = 0$ dice solo che le rette sono parallele, e possono anche coincidere. Nel sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ si ha $D = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0$, ma anche $D_x = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 6 = 0$ e $D_y = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 0$: il sistema è indeterminato.

Ed è un errore anche il contrario: con $D = 0$ la regola di Cramer **non si applica**, perché non si può dividere per zero. Scrivere $x = \frac{D_x}{0}$ non ha senso.

7.3.3 Sistemi fratti e sistemi letterali

Un sistema è **fratto** se qualche incognita compare al denominatore. Come per le equazioni fratte del primo volume, si scrivono prima le **condizioni di esistenza** (C.E.), che escludono le coppie che annullano un denominatore; poi si eliminano i denominatori, si risolve il sistema intero ottenuto e infine si controlla che la soluzione rispetti le C.E.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi a) $\begin{cases} \frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{2} \\ x + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{2x-y}{x-1} = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

a) C.E.: $y \neq -2$. Moltiplicando la prima equazione per $2(y + 2)$: $2x - 2 = y + 2$, cioè $2x - y = 4$. Sommando con $x + y = 5$: $3x = 9$, $x = 3$, $y = 2$. Poiché $2 \neq -2$, la soluzione $(3; 2)$ è accettabile.

b) C.E.: $x \neq 1$. Eliminando il denominatore: $2x - y = x - 1$, cioè $x - y = -1$. Sommando con $x + y = 3$: $2x = 2$, $x = 1$, $y = 2$. Ma $x = 1$ viola le C.E.: in $(1; 2)$ il primo membro sarebbe $\frac{0}{0}$, privo di significato. Il sistema è **impossibile**, anche se il sistema intero aveva una soluzione.

Un sistema è **letterale** se, oltre alle incognite, contiene altre lettere, dette **parametri**. Risolverlo significa **discuterlo**: dire, per ogni valore del parametro, se è determinato, impossibile o indeterminato, e in quale caso qual è la soluzione. Qui Cramer è lo strumento giusto. Nel sistema $\begin{cases} kx + y = 1 \\ x + y = k \end{cases}$ si ha $D = k - 1$, $D_x = 1 - k$, $D_y = k^2 - 1$. Se $k \neq 1$: $x = \dfrac{1-k}{k-1} = -1$ e $y = \dfrac{k^2-1}{k-1} = k + 1$. Se $k = 1$: $D = D_x = D_y = 0$, ed entrambe le equazioni diventano $x + y = 1$: il sistema è indeterminato. In questo libro i sistemi letterali restano semplici come questo.

7.3.4 Sistemi di tre equazioni in tre incognite

Un'equazione lineare in tre incognite x, y, z ha infinite soluzioni, che sono **terne ordinate** $(x; y; z)$. Per individuare una sola terna servono, in generale, tre equazioni. Il metodo è sempre lo stesso: eliminare un'incognita alla volta. Con la riduzione (o la sostituzione) si elimina la stessa incognita da due coppie di equazioni, ottenendo un sistema di due equazioni in due incognite; risolto questo, si torna indietro. Anche i sistemi 3×3 possono essere impossibili o indeterminati; la regola di Cramer per tre incognite si studia nel capitolo sulle matrici.

APPROFONDIMENTO · DALL'ELIMINAZIONE ALL'ALGORITMO

Risolvere sistemi lineari eliminando un'incognita alla volta è un'idea antica. Un testo cinese di circa duemila anni fa, i *Nove capitoli sull'arte matematica*, dedica un intero capitolo a problemi con più incognite, risolti disponendo i coefficienti in colonne su una tavola di calcolo e sottraendo una colonna dall'altra finché i coefficienti si annullano: lo stesso procedimento che oggi scriviamo per righe.

In Europa il metodo è associato al nome di Carl Friedrich Gauss (1777–1855), che lo usò in modo sistematico nei suoi calcoli astronomici, e oggi si chiama **eliminazione di Gauss**. Il suo pregio è di essere un **algoritmo**: una sequenza di passi sempre uguali, che non richiede intuizione e funziona per qualunque numero di incognite. Per questo è il metodo che usano i computer, che ogni giorno risolvono sistemi con migliaia di incognite, per esempio per calcolare le sollecitazioni nelle travi di un ponte o le previsioni del tempo. Lo ritroverai nel capitolo 15, dedicato agli algoritmi.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$

1. Elimino z. Nella terza equazione z ha coefficiente -1: sommandola alla prima si ottiene $2x+3y=8$; sommandola alla seconda, $3x+y=5$.

2. Risolvo il sistema in x e y. Dalla seconda, $y=5-3x$; sostituendo, $2x+15-9x=8$, $-7x=-7$, $x=1$, quindi $y=2$.

3. Torno alla prima equazione. $1+2+z=6$, $z=3$.

Verifica. $1+2+3=6$ ✓; $2-2+3=3$ ✓; $1+4-3=2$ ✓. La soluzione è la terna $(1;2;3)$.

7.4 Problemi che si risolvono con i sistemi

Molti problemi hanno due (o più) quantità sconosciute legate da due (o più) condizioni. Il procedimento è quello delle equazioni del primo volume, con un vantaggio: ogni condizione del testo diventa direttamente un'equazione, senza dover esprimere tutto con una sola incognita.

1. **Scegliere le incognite**, scrivendo che cosa rappresentano e con quale unità di misura.
2. Scrivere i **vincoli**: i valori accettabili (numeri positivi, interi, minori di un certo valore...).
3. **Tradurre** ogni condizione del testo in un'equazione e risolvere il sistema.
4. **Controllare** che la soluzione rispetti i vincoli e rispondere alla domanda, con le unità.

7.4.1 Numeri, età, prezzi

Oggi la madre di Sara ha 26 anni più di lei; tra 4 anni avrà il triplo degli anni di Sara. Quanti anni hanno? Chiamiamo s e m le età di oggi di Sara e della madre (numeri naturali). La prima condizione è $m=s+26$; tra 4 anni le età saranno $s+4$ e $m+4$, quindi la seconda è $m+4=3(s+4)$. Sostituendo la prima nella seconda: $s+30=3s+12$, $2s=18$, $s=9$, $m=35$. Controllo: tra 4 anni Sara avrà 13 anni e la madre 39, che è proprio il triplo.

Il problema del bar con cui si è aperto il capitolo si risolve bene per riduzione: sommando le due equazioni si ottiene $5x+5y=15{,}50$, cioè $x+y=3{,}10$; sottraendole, $y-x=0{,}30$. Da qui $y=1{,}70$ e $x=1{,}40$: un cornetto costa 1,40 € e un cappuccino 1,70 €.

7.4.2 Miscugli e leghe

Nei problemi di miscugli si mescolano due ingredienti con caratteristiche diverse (prezzo, concentrazione, titolo di un metallo prezioso) e si conservano due quantità: la massa totale e la quantità della sostanza che interessa. *Un orafo deve preparare 300 g di una lega d'argento con titolo*

900 ‰ (cioè 900 parti di argento su 1000) fondendo una lega con titolo 925 ‰ e una con titolo 800 ‰. Quanti grammi di ciascuna deve usare?

Siano x e y le masse in grammi delle due leghe ($x, y \geq 0$). La massa totale dà $x + y = 300$; l'argento contenuto dà $0{,}925x + 0{,}800y = 0{,}900 \cdot 300 = 270$. Sostituendo $y = 300 - x$: $0{,}925x + 240 - 0{,}8x = 270$, $0{,}125x = 30$, $x = 240$ e $y = 60$. Servono 240 g della lega più pregiata e 60 g dell'altra. Il risultato è ragionevole: 900 è più vicino a 925 che a 800, e infatti la lega da 925 ‰ è la parte maggiore.

7.4.3 Problemi di moto

In un moto uniforme la posizione s di un corpo cresce (o diminuisce) linearmente con il tempo t: $s = s_0 + vt$, come hai visto nel capitolo precedente. Due corpi si incontrano quando, nello stesso istante, occupano la stessa posizione: il punto d'incontro è la soluzione di un sistema, e graficamente è il punto comune di due rette nel piano $(t; s)$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Due paesi A e B distano 45 km lungo una pista ciclabile. Alle 9:00 Luca parte da A verso B in bicicletta, a 18 km/h. Marta parte da B verso A mezz'ora dopo, a 12 km/h. Quando e dove si incontrano?

Incognite. Misuriamo il tempo t in ore a partire dalle 9:00 e la posizione s in kilometri a partire da A, verso B.

Equazioni. Luca: $s = 18t$. Marta parte da $s = 45$ all'istante $t = 0{,}5$ e la sua posizione diminuisce di 12 km ogni ora: $s = 45 - 12(t - 0{,}5) = 51 - 12t$, per $t \geq 0{,}5$.

Soluzione. Per confronto: $18t = 51 - 12t$, $30t = 51$, $t = 1{,}7$ h; $s = 18 \cdot 1{,}7 = 30{,}6$ km. Il valore $t = 1{,}7$ rispetta il vincolo $t \geq 0{,}5$.

Risposta. 1,7 h sono 1 h e 42 min: i due si incontrano alle 10:42, a 30,6 km da A (e quindi a 14,4 km da B). Controllo: Marta ha pedalato 1,2 h a 12 km/h, cioè 14,4 km ✓. Il diagramma orario è nella figura 7.3.

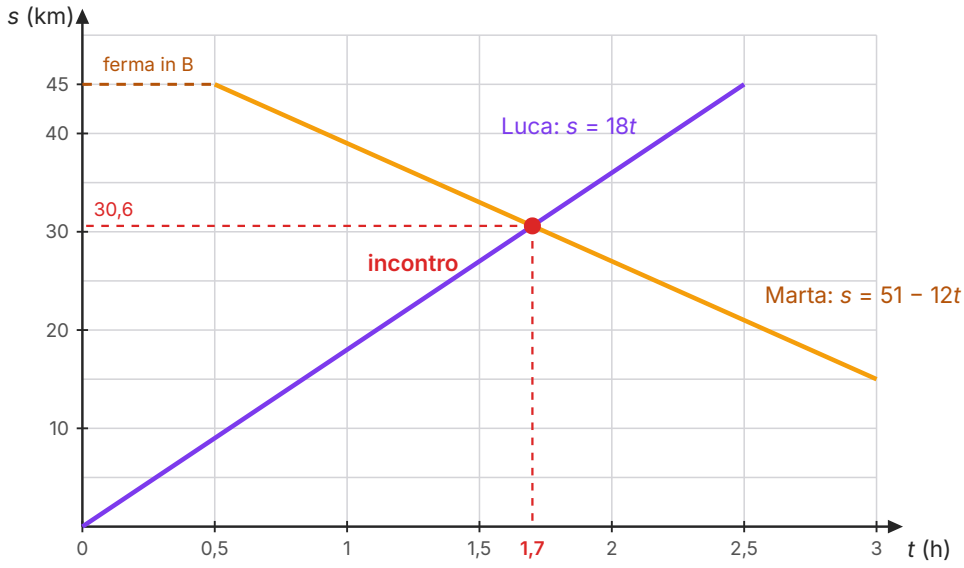


Figura 7.3 Diagramma orario del problema di incontro: in ascissa il tempo dalle 9:00, in ordinata la distanza da A. Le due rette si incontrano nel punto (1,7; 30,6): alle 10:42, a 30,6 km da A. Fino a $t = 0{,}5$ Marta è ancora ferma in B (tratto tratteggiato).

7.4.4 Geometria e fisica

Anche la geometria offre problemi a due incognite. *Un rettangolo ha perimetro 46 cm e la base supera di 2 cm il doppio dell'altezza.* Con base b e altezza h in cm: $2(b + h) = 46$ e $b = 2h + 2$; sostituendo, $3h + 2 = 23$, $h = 7$ cm e $b = 16$ cm.

In fisica, una **leva** è in equilibrio quando i momenti delle due forze rispetto al fulcro sono uguali: $F_1 b_1 = F_2 b_2$, dove b_1 e b_2 sono i bracci, le distanze delle forze dal fulcro. Due bambini che pesano 300 N e 500 N si siedono agli estremi di un'altalena a bilico lunga 3,2 m, di peso trascurabile. Dove deve stare il fulcro? Il sistema è

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 3{,}2 \\ 300 b_1 = 500 b_2 \end{cases}$$

Dalla seconda $b_1 = \frac{5}{3} b_2$, e sostituendo $\frac{8}{3} b_2 = 3{,}2$: $b_2 = 1{,}2$ m, $b_1 = 2$ m. Il bambino più pesante sta più vicino al fulcro.

COLLEGAMENTI

Bilanciare una reazione chimica. In una reazione chimica gli atomi non si creano né si distruggono: ogni elemento deve comparire lo stesso numero di volte a sinistra e a destra della freccia. Per la combustione del metano scriviamo i coefficienti incogniti:

$$a\,CH_4 + b\,O_2 \to c\,CO_2 + d\,H_2O$$

Il carbonio dà $a = c$, l'idrogeno $4a = 2d$, l'ossigeno $2b = 2c + d$: un sistema lineare di tre equazioni in quattro incognite, indeterminato, perché moltiplicando tutti i coefficienti per lo stesso numero la reazione resta bilanciata. Si sceglie allora il valore più semplice di un'incognita: con $a = 1$ si ottiene $c = 1$, $d = 2$, $b = 2$, cioè $CH_4 + 2\,O_2 \to CO_2 + 2\,H_2O$. Contare gli atomi conferma: 1 C, 4 H e 4 O per parte.

7.5 Disequazioni lineari in due incognite

7.5.1 Semipiani

Che cosa succede se nell'equazione $y = 2x - 1$ il segno = diventa >? Per ogni ascissa x, i punti della retta hanno ordinata esattamente $2x - 1$; i punti che soddisfano $y > 2x - 1$ hanno, a parità di ascissa, ordinata maggiore: stanno **sopra** la retta. L'insieme delle soluzioni è quindi un **semipiano**, una delle due parti in cui la retta divide il piano (figura 7.4). La retta si chiama **retta di confine**; si disegna **tratteggiata** se la disuguaglianza è stretta (<, >), perché i suoi punti non sono soluzioni, e **continua** se è larga (≤, ≥).

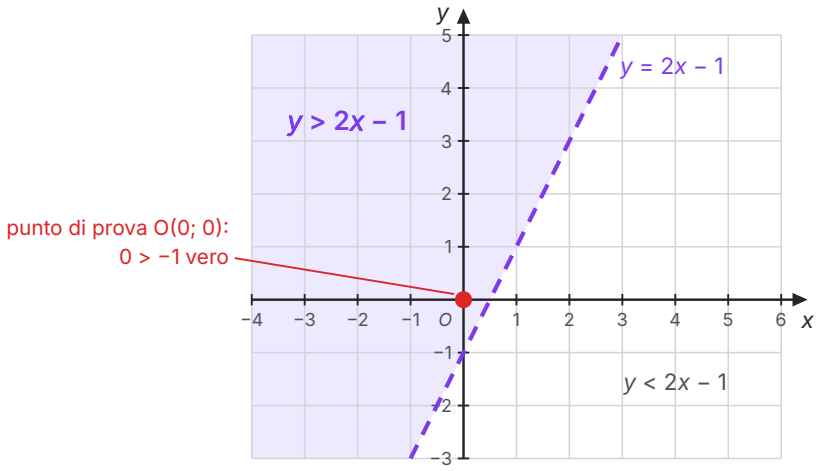


Figura 7.4 Il semipiano $y > 2x - 1$ (in colore). La retta di confine è tratteggiata perché i suoi punti non soddisfano la disequazione. Il punto di prova O(0; 0) soddisfa la disequazione, quindi il semipiano è quello che contiene l'origine.

Per una **disequazione lineare in due incognite** $ax + by + c > 0$ (o con $<$, $\geq$, $\leq$) ci sono due modi per scegliere il semipiano. Il primo è ricavare y, come sopra: $y > \ldots$ indica il semipiano sopra la retta, $y < \ldots$ quello sotto. Il secondo è il **punto di prova**: si disegna la retta, si sceglie un punto che non le appartiene (l'origine, se la retta non passa per O) e si sostituiscono le sue coordinate. Se la disuguaglianza è vera, il semipiano è quello che contiene il punto; altrimenti è l'altro. Funziona perché il primo membro $ax + by + c$ è zero sulla retta e ha lo stesso segno in tutti i punti di uno stesso semipiano.

ERRORE FREQUENTE

Dimenticare di cambiare il verso. Per rappresentare $2x - 3y > 6$ Chiara scrive $-3y > -2x + 6$ e poi $y > \frac{2}{3}x - 2$, «sopra la retta». Ma dividendo per -3 il verso si rovescia, come nelle disequazioni del primo volume: la forma corretta è $y < \frac{2}{3}x - 2$, il semipiano *sotto* la retta.

Il punto di prova smaschera l'errore: per O(0; 0) la disequazione di partenza dà $0 > 6$, falso. Il semipiano non contiene l'origine, che sta sopra la retta (la retta passa per $(0; -2)$): è quello sotto.

7.5.2 Sistemi di disequazioni e regione ammissibile

Un sistema di disequazioni lineari in due incognite chiede i punti che soddisfano *tutte* le disequazioni: è l'intersezione di più semipiani. Se è limitata, questa regione è un **poligono conves-**

so (un poligono che contiene per intero il segmento che congiunge due qualunque dei suoi punti), perché ogni semipiano è convesso e l'intersezione di figure convesse è convessa. Si disegnano tutte le rette di confine, si colora la parte comune e si calcolano i **vertici** come intersezioni delle rette che li formano, risolvendo un sistema per ciascun vertice.

Per esempio, il sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 16 \\ x + 2y \leq 14 \end{cases}$$

descrive il quadrilatero colorato della figura 7.5. Le prime due condizioni lo chiudono nel primo quadrante; il vertice sull'asse x è (8; 0), quello sull'asse y è (0; 7), e il vertice B è il punto comune alle rette $2x + y = 16$ e $x + 2y = 14$. Per riduzione, moltiplicando la seconda equazione per 2 e sottraendo la prima, $3y = 12$: $y = 4$, $x = 6$, B(6; 4).

7.5.3 Problemi di scelta: la programmazione lineare

Nei problemi di scelta si cerca, tra molte soluzioni possibili, quella che rende massimo un guadagno o minimo un costo. La **ricerca operativa** è la parte della matematica che studia questi problemi; quando i vincoli sono disequazioni lineari e la quantità da ottimizzare, detta **funzione obiettivo**, è lineare, si parla di **programmazione lineare**. Le soluzioni che rispettano i vincoli formano la **regione ammissibile**. Vale una proprietà, che qui ci limitiamo a enunciare e a controllare sugli esempi:

IN SINTESI

Programmazione lineare. Se la regione ammissibile è un poligono convesso, una funzione lineare $G = ax + by$ vi raggiunge il valore massimo e il valore minimo **in un vertice** (eventualmente in due vertici consecutivi e in tutti i punti del lato che li unisce).

Basta quindi calcolare G nei vertici e confrontare i valori.

Il motivo si vede nel grafico. I punti in cui $G = ax + by$ ha un valore fissato k formano una retta, detta **retta di livello**; al variare di k si ottengono rette tutte parallele tra loro, che si spostano in una direzione quando k cresce. Il valore più alto raggiungibile si ha con l'ultima retta del fascio che tocca ancora il poligono: e l'ultimo punto toccato è un vertice (o un lato intero, se la retta di livello è parallela a quel lato).

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Un laboratorio di ceramica produce vasi e piatti. Ogni vaso richiede 2 ore di lavoro al tornio e 1 ora di decorazione; ogni piatto 1 ora al tornio e 2 ore di decorazione. Ogni settimana sono disponibili al massimo 16 ore di tornio e 14 ore di decorazione. Il guadagno è di 40 € per vaso e di 30 € per piatto. Quanti vasi e quanti piatti conviene produrre ogni settimana, se si vende tutto?

Incognite e vincoli. Siano x il numero di vasi e y il numero di piatti prodotti in una settimana. Le ore di tornio sono $2x + y$, quelle di decorazione $x + 2y$:

$$\begin{cases} x \geq 0, \ \ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 16 \\ x + 2y \leq 14 \end{cases}$$

Funzione obiettivo. $G = 40x + 30y$ (in euro).

Regione ammissibile. È il quadrilatero OABC della figura 7.5, con O(0; 0), A(8; 0), B(6; 4), C(0; 7).

Valori nei vertici. $G(\text{O}) = 0$; $G(\text{A}) = 320$; $G(\text{B}) = 240 + 120 = 360$; $G(\text{C}) = 210$. Il massimo è nel vertice B.

Risposta. Conviene produrre 6 vasi e 4 piatti, con un guadagno di 360 € a settimana; tornio e decorazione sono usati per tutte le ore disponibili ($12 + 4 = 16$ e $6 + 8 = 14$). Il vertice ha coordinate intere, come serve per oggetti che si contano; se non le avesse, bisognerebbe cercare il punto a coordinate intere migliore all'interno della regione, un problema più difficile.

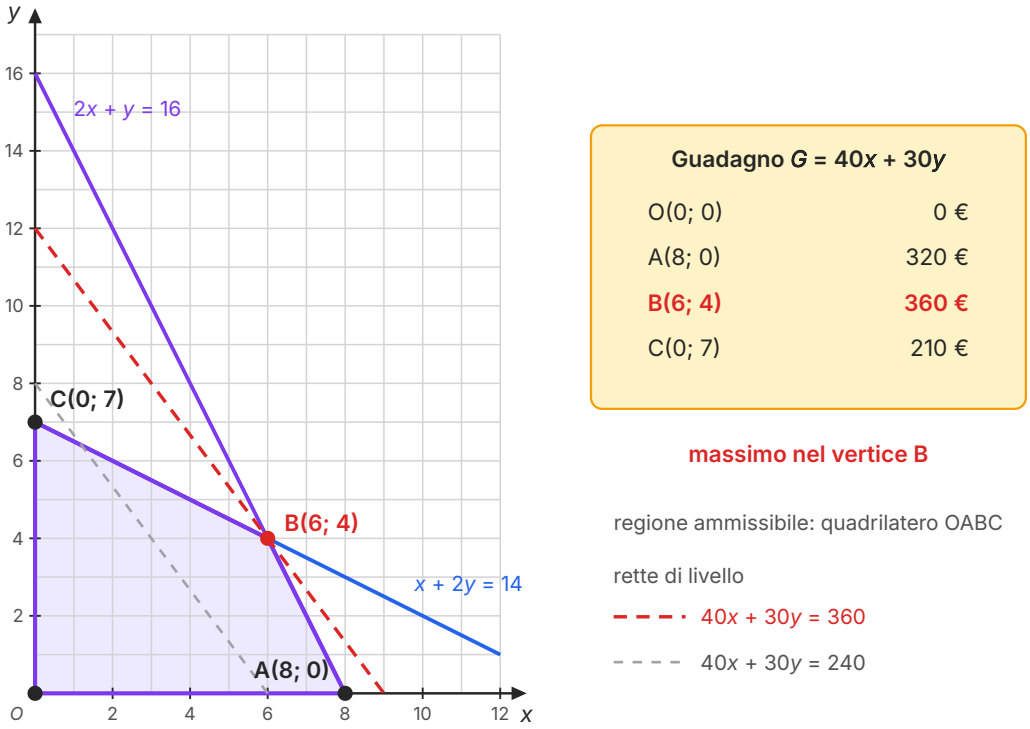


Figura 7.5 La regione ammissibile del problema del laboratorio (in colore) e i suoi vertici. La retta di livello $40x + 30y = 360$ (rossa, tratteggiata) tocca la regione solo nel vertice B; quella grigia, $40x + 30y = 240$, la attraversa: un guadagno di 240 € si può ottenere in molti modi, ma non è il massimo.

7.5.4 Con il computer: grafici e regioni

Un software di geometria dinamica è il compagno ideale di questo capitolo. Se scrivi nella barra di inserimento due equazioni, per esempio $3x + 2y = 12$ e $x - y = -1$, il programma disegna le rette; il comando che interseca due oggetti restituisce il punto comune, $(2; 3)$: hai risolto il sistema graficamente, con la precisione del calcolo del programma. Sostituendo un coefficiente con uno *slider* (un cursore che fa variare un numero, per esempio $kx + 2y = 12$ con k da -5 a 5) vedrai il punto d'intersezione muoversi, allontanarsi e sparire quando le rette diventano parallele: è il caso $D = 0$.

Molti di questi programmi accettano anche disuguaglianze: scrivendo $y > 2x - 1$ si colora il semipiano, e scrivendo più condizioni unite da «e» (in molti software con il simbolo && o $\wedge$) si ottiene la regione ammissibile. Disegnando poi una retta di livello con un parametro, e trascinandolo, si vede l'ultima retta del fascio che tocca la regione: il vertice ottimale.

SINTESI

- Un'equazione lineare in due incognite $ax + by = c$ ha infinite soluzioni, coppie ordinate che nel piano formano una retta.
- Un sistema chiede le soluzioni comuni a tutte le sue equazioni; il suo grado è il prodotto dei gradi delle equazioni. Un sistema di grado 1 è lineare.
- Un sistema lineare 2×2 è determinato (rette incidenti, una soluzione), impossibile (rette parallele distinte, nessuna soluzione) o indeterminato (rette coincidenti, infinite soluzioni).
- I metodi algebrici eliminano un'incognita: sostituzione, confronto, riduzione. La soluzione si verifica sempre nelle equazioni di partenza.
- Regola di Cramer: se $D \neq 0$, allora $x = \frac{D_x}{D}$ e $y = \frac{D_y}{D}$, dove D_x e D_y si ottengono sostituendo la colonna dei termini noti a quella dell'incognita.
- Se $D = 0$: con D_x o D_y diverso da zero il sistema è impossibile; con $D_x = D_y = 0$ è indeterminato. Con i rapporti: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ determinato; $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ impossibile; tre rapporti uguali, indeterminato.
- Nei sistemi fratti si scrivono le condizioni di esistenza e si scartano le soluzioni che le violano; i sistemi letterali si discutono al variare del parametro, di solito con i determinanti.
- Un sistema di tre equazioni in tre incognite si risolve eliminando un'incognita alla volta (eliminazione di Gauss) e ha come soluzioni terne ordinate.
- Nei problemi: incognite con unità, vincoli, un'equazione per ogni condizione, controllo dei vincoli e risposta.
- Una disequazione lineare in due incognite rappresenta un semipiano: retta di confine tratteggiata per $<$ e $>$, continua per $\leq$ e $\geq$; il semipiano si sceglie ricavando y o con un punto di prova.
- Un sistema di disequazioni lineari rappresenta l'intersezione di semipiani; se è limitata, è un poligono convesso.
- Programmazione lineare: il massimo e il minimo di una funzione obiettivo lineare su un poligono convesso si raggiungono in un vertice; si calcola la funzione nei vertici e si confronta.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Quale equazione ha tra le sue soluzioni la coppia $(2; -1)$?

   A. $x + 2y = 1$

   B. $3x + y = 5$

   C. $2x - y = 3$

   D. $x - y = 1$

2. ● Il sistema $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$ è:

   A. determinato
   B. determinato, con soluzione (1; 1)
   C. indeterminato
   D. impossibile

3. ● Due rette incidenti rappresentano un sistema:

   A. determinato
   B. impossibile
   C. indeterminato
   D. di secondo grado

4. ● Il determinante $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ vale:

   A. -5
   B. 5
   C. 11
   D. -11

5. ●● In un sistema lineare di due equazioni in due incognite risulta $D = 0$ e $D_x = 4$. Il sistema è:

   A. determinato, con $x = 0$
   B. impossibile
   C. indeterminato
   D. impossibile solo se anche $D_y \neq 0$

6. ●● Quale punto appartiene al semipiano $2x - y > 3$?

   A. (0; 0)
   B. (1; 0)
   C. (2; 1)
   D. (3; 2)

7. ● **Vero o falso?** Correggi le affermazioni false. a) Un'equazione lineare in due incognite ha infinite soluzioni. b) Se $D = 0$ il sistema è impossibile. c) Il sistema $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ è determinato. d) Nella regola di Cramer $x = \dfrac{D}{D_x}$. e) In un problema di programmazione lineare con regione ammissibile poligonale, il massimo della funzione obiettivo si raggiunge in un vertice.

8. ● **Completa.** a) Un sistema con infinite soluzioni si dice _____ . b) Nel metodo di _____ si ricava un'incognita da un'equazione e la si sostituisce nell'altra. c) Se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ le due rette sono _____ e il sistema è _____ . d) Se la disequazione è stretta, la retta di confine si disegna _____ .

Calcolare

9. ● Risolvi per sostituzione: a) $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y=2x-1 \\ 3x+y=9 \end{cases}$

10. ● Risolvi per confronto: $\begin{cases} y=3x-4 \\ y=-x+8 \end{cases}$

11. ● Risolvi per riduzione: a) $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+2y=4 \\ 3x-4y=18 \end{cases}$

12. ●● Risolvi con la regola di Cramer: a) $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ x+4y=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 4x-3y=15 \end{cases}$

13. ●● Riduci a forma normale e risolvi: $\begin{cases} 2(x-y)+3=x+4 \\ \frac{x+1}{3} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$

14. ●● Senza risolverli, stabilisci se i sistemi sono determinati, impossibili o indeterminati; risolvi quello determinato. a) $\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 4x-6y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+3y=2 \\ 2x+6y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x+2y=3 \end{cases}$

15. ●● Risolvi i sistemi fratti: a) $\begin{cases} \frac{x+2}{y-1}=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x+2y-4}{y-2}=1 \\ x-y=-2 \end{cases}$

16. ●● Risolvi: $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+2z=9 \\ 2x+y-z=-3 \end{cases}$

17. ●●● Discuti al variare del parametro k il sistema $\begin{cases} kx+2y=4 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ e, quando è determinato, risolvilo.

18. ● Rappresenta nel piano cartesiano le due rette e risolvi graficamente il sistema $\begin{cases} y=x+2 \\ x+y=4 \end{cases}$; controlla poi algebricamente.

19. ●● a) Rappresenta il semipiano $x - 2y \le 4$. b) Rappresenta la regione $\begin{cases} x \ge 0, \ y \ge 0 \\ x + 2y \le 8 \\ 3x + y \le 9 \end{cases}$ e calcola le coordinate dei suoi vertici.

Dimostrare e argomentare

20. ●● Spiega perché un sistema lineare di due equazioni in due incognite non può avere esattamente due soluzioni.

21. ●● **Trova l'errore.** Marco risolve per riduzione $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ e scrive: «Sommo: $2x = 6$, $x = 3$. Sottraggo: $2y = 6$, $y = 3$.» Dove sbaglia? Qual è la soluzione corretta?

22. ●●● Verifica, sostituendo, che se $D \neq 0$ la coppia $\left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D}\right)$ soddisfa la prima equazione $ax + by = c$ del sistema generale.

23. ●● a) Spiega con l'interpretazione grafica perché il sistema $\begin{cases} y = 2x + q \\ y = 2x + q' \end{cases}$ con $q \neq q'$ è impossibile.
b) Per quali valori di m il sistema $\begin{cases} y = mx + 1 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$ è determinato?

24. ●● Per stabilire quale semipiano rappresenta $3x - 2y > 0$, Giulia usa come punto di prova O(0; 0). Perché la prova non funziona? Quale punto conviene usare, e qual è il semipiano?

Problemi

25. ● La somma di due numeri è 47 e la loro differenza è 13. Trova i due numeri.

26. ●● Una famiglia compra 4 biglietti per il museo, 2 interi e 2 ridotti, e spende 36 €; un'altra spende 34 € per 1 intero e 3 ridotti. Quanto costano i due biglietti?

27. ●● Un torrefattore vuole ottenere 10 kg di una miscela di caffè da vendere a 16 €/kg, mescolando una qualità da 12 €/kg e una da 22 €/kg. Quanti kilogrammi di ciascuna deve usare?

28. ●● Un ciclista parte da A alle 8:00 a 20 km/h. Alle 9:00 parte da A, sulla stessa strada e nello stesso verso, uno scooter a 45 km/h. A che ora e a che distanza da A lo scooter raggiunge il ciclista? Disegna il diagramma orario.

29. ●● Un rettangolo ha perimetro 54 cm e la base supera di 3 cm il doppio dell'altezza. Calcola l'area e la diagonale.

30. ●● Su un'altalena a bilico lunga 3 m, di peso trascurabile, Anna (350 N) e suo fratello (250 N) si siedono agli estremi. A che distanza da Anna va messo il fulcro perché l'altalena sia in equilibrio?

Con il computer

31. ●● Con un software di geometria dinamica disegna le rette $2x - y = 1$ e $kx + y = 5$, con uno slider per k da -5 a 5, e il loro punto d'intersezione. a) Per quale valore di k il punto sparisce? Perché? b) Ricava con Cramer la soluzione in funzione di k e confrontala con lo schermo per $k = 1$ e $k = 3$.

Verso la verifica

32. ●● Risolvi con il metodo che preferisci e verifica: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{y+1}{3} = 2 \\ 3x - 2(y-1) = 13 \end{cases}$

33. ●● Un'azienda agricola ha 12 ettari da coltivare a grano e a mais. Ogni ettaro a grano richiede 2 giornate di lavoro, ogni ettaro a mais 4, e sono disponibili al massimo 36 giornate. Il guadagno è di 300 € per ettaro di grano e 500 € per ettaro di mais. Scrivi i vincoli, disegna la regione ammissibile e trova la scelta più conveniente.

34. ●●● **Sfida.** In un salvadanaio ci sono 30 monete da 10, 20 e 50 centesimi, per un valore totale di 6,50 €. Le monete da 10 centesimi sono il doppio di quelle da 50. Quante monete ci sono di ciascun tipo?

PER APPROFONDIRE

- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: come si passa dal testo di un problema alle equazioni, scegliendo le incognite e controllando il risultato.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: la matematica cinese antica e il metodo di eliminazione dei *Nove capitoli*.
- [CR] Courant e Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le rette e i semipiani nel piano cartesiano, e la geometria delle figure convesse.

Glossario del capitolo

Coppia ordinata
Coppia di numeri $(x; y)$ in cui conta l'ordine; soluzione di un'equazione in due incognite e coordinate di un punto del piano.

Determinante
Numero associato a una matrice quadrata; per una matrice 2×2 è $ab' - ba'$, il prodotto della diagonale principale meno quello dell'altra diagonale.

Eliminazione di Gauss
Algoritmo che risolve un sistema lineare eliminando un'incognita alla volta con il metodo di riduzione.

Equazione lineare in due incognite
Equazione di primo grado in x e y, riducibile alla forma $ax + by = c$; ha infinite soluzioni, che formano una retta.

Funzione obiettivo
In un problema di scelta, la quantità (guadagno, costo...) da rendere massima o minima.

Grado di un sistema
Prodotto dei gradi delle equazioni del sistema, ridotte a forma normale.

Matrice
Tabella ordinata di numeri disposti in righe e colonne.

Programmazione lineare
Ricerca del massimo o del minimo di una funzione obiettivo lineare in una regione definita da disequazioni lineari.

Regione ammissibile
Insieme dei punti che soddisfano tutti i vincoli di un problema di scelta; con vincoli lineari è un'intersezione di semipiani.

Regola di Cramer
Se $D \neq 0$, la soluzione di un sistema lineare 2×2 è $x = D_x/D$, $y = D_y/D$.

Retta di confine
Retta che separa i due semipiani di una disequazione lineare in due incognite; tratteggiata se la disuguaglianza è stretta.

Retta di livello
Insieme dei punti in cui una funzione lineare di x e y assume un valore fissato.

Semipiano
Ciascuna delle due parti in cui una retta divide il piano; insieme delle soluzioni di una disequazione lineare in due incognite.

Sistema
Insieme di equazioni (o disequazioni) nelle stesse incognite, di cui si cercano le soluzioni comuni.

Sistema determinato
Sistema con un numero finito di soluzioni; un sistema lineare determinato ne ha una sola.

Sistema impossibile
Sistema che non ha soluzioni; per due equazioni lineari, rette parallele distinte.

Sistema indeterminato
Sistema con infinite soluzioni; per due equazioni lineari, rette coincidenti.

Sistema letterale
Sistema che contiene, oltre alle incognite, uno o più parametri; si discute al variare dei parametri.

Soluzioni

1. B. $3 \cdot 2 + (-1) = 5$. Nelle altre: $2 - 2 = 0 \neq 1$; $4 + 1 = 5 \neq 3$; $2 + 1 = 3 \neq 1$.

2. D. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \neq \frac{3}{5}$: le rette sono parallele distinte. (1; 1) soddisfa solo la prima equazione: $2 + 4 = 6 \neq 5$.

3. A. Il loro unico punto comune è l'unica soluzione.

4. C. $3 \cdot 1 - (-2) \cdot 4 = 3 + 8 = 11$.

5. B. $D = 0$: le rette sono parallele; $D_x \neq 0$: sono distinte. Basta che uno tra D_x e D_y sia diverso da zero.

6. D. $6 - 2 = 4 > 3$. Per (0; 0): $0 > 3$ falso; per (1; 0): $2 > 3$ falso; (2; 1) dà $4 - 1 = 3$: sta sulla retta di confine, che con $>$ non fa parte del semipiano.

7. a) V. b) F: con $D = 0$ il sistema è impossibile oppure indeterminato (indeterminato se $D_x = D_y = 0$). c) V: le rette $x = 2$ e $y = -1$ sono incidenti in (2; −1). d) F: $x = \frac{D_x}{D}$. e) V.

8. a) indeterminato. b) sostituzione. c) parallele distinte; impossibile. d) tratteggiata.

9. a) $x = 7 - y$; $7 - 2y = 3$, $y = 2$, $x = 5$: (5; 2). b) $3x + 2x - 1 = 9$, $x = 2$, $y = 3$: (2; 3).

10. $3x - 4 = -x + 8$, $4x = 12$, $x = 3$, $y = 5$: (3; 5).

11. a) Sottraendo: $4y = 12$, $y = 3$; $2x = 4$, $x = 2$: (2; 3). b) Prima equazione per 2 e somma: $13x = 26$, $x = 2$; $2y = 4 - 10$, $y = -3$: (2; −3).

12. a) $D = 12 + 2 = 14$, $D_x = 32 - 4 = 28$, $D_y = -6 - 8 = -14$: (2; −1). b) $D = -6 - 20 = -26$, $D_x = -3 - 75 = -78$, $D_y = 30 - 4 = 26$: (3; −1).

13. Prima: $x - 2y = 1$. Seconda (per 6): $2x + 2 - 3y = 6$, $2x - 3y = 4$. Da $x = 1 + 2y$: $2 + 4y - 3y = 4$, $y = 2$, $x = 5$: (5; 2).

14. a) Rapporti tutti uguali a ½: indeterminato. b) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \neq \frac{2}{1}$: impossibile. c) $D = 6 + 1 = 7 \neq 0$: determinato; $D_x = 4 + 3 = 7$, $D_y = 9 - 2 = 7$: (1; 1).

15. a) C.E. $y \neq 1$. $x + 2 = 3y - 3$, cioè $x - 3y = -5$; sottraendo da $x - y = 1$: $2y = 6$, $y = 3$, $x = 4$: (4; 3), accettabile. b) C.E. $y \neq 2$. $x + 2y - 4 = y - 2$, cioè $x + y = 2$; con $x - y = -2$: $x = 0$, $y = 2$, che viola le C.E.: sistema impossibile.

16. Prima + seconda: $2x + 3z = 11$; seconda + terza: $3x + z = 6$, da cui $z = 6 - 3x$; $2x + 18 - 9x = 11$, $x = 1$, $z = 3$; dalla prima $y = 2 - 1 - 3 = -2$. Soluzione (1; −2; 3).

17. $D = k - 4$, $D_x = 4 - 6 = -2$, $D_y = 3k - 8$. Se $k \neq 4$: determinato, $x = \frac{2}{4 - k}$, $y = \frac{3k - 8}{k - 4}$. Se $k = 4$: $D = 0$ e $D_x = -2 \neq 0$, impossibile (le equazioni diventano $2x + y = 2$ e $2x + y = 3$). Il sistema non è mai indeterminato.

18. La prima retta passa per (0; 2) e (−2; 0), la seconda per (0; 4) e (4; 0); si incontrano in (1; 3). Controllo: $x + x + 2 = 4$, $x = 1$, $y = 3$.

19. a) Retta di confine continua per (0; −2) e (4; 0); O(0; 0) dà $0 \leq 4$, vero: è il semipiano che contiene l'origine, cioè $y \geq \frac{1}{2}x - 2$ (sopra la retta). b) Quadrilatero di vertici (0; 0), (3; 0), (2; 3), (0; 4); (2; 3) risolve $x + 2y = 8$, $3x + y = 9$.

20. *Traccia.* Ogni equazione rappresenta una retta. Se due rette hanno due punti distinti in comune, coincidono, perché per due punti passa una sola retta: allora tutti i punti della retta sono soluzioni, e le soluzioni sono infinite. Quindi le soluzioni sono 0, 1 oppure infinite.

21. Sottraendo i secondi membri si ottiene $5 - 1 = 4$, non 6: $(x + y) - (x - y) = 2y = 4$, quindi $y = 2$. La soluzione è (3; 2); (3; 3) non soddisfa la seconda equazione ($3 - 3 = 0 \neq 1$): la verifica avrebbe scoperto l'errore.

22. $aD_x + bD_y = a(cb' - bc') + b(ac' - ca')$ $= acb' - abc' + abc' - bca' = c(ab' - ba') = cD$. Dividendo

per $D \neq 0$: $a\frac{D_x}{D} + b\frac{D_y}{D} = c$. c.v.d.

23. a) Le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare 2, quindi sono parallele, e ordinate all'origine diverse, quindi distinte: nessun punto comune. b) Per $m \neq 3$: le rette hanno coefficienti angolari diversi e sono incidenti. Per $m = 3$ sono parallele distinte ($1 \neq -2$) e il sistema è impossibile.

24. La retta di confine $3x - 2y = 0$ passa per l'origine: O dà $0 > 0$, falso, ma non perché O stia nell'altro semipiano, bensì perché sta sulla retta. Si usa un punto fuori dalla retta, per esempio (1; 0): $3 > 0$, vero. Il semipiano è quello che contiene (1; 0), cioè $y < \frac{3}{2}x$, sotto la retta (tratteggiata).

25. $x + y = 47$, $x - y = 13$: sommando $2x = 60$, $x = 30$, $y = 17$.

26. $2x + 2y = 36$, cioè $x + y = 18$; $x + 3y = 34$. Sottraendo: $2y = 16$, $y = 8$, $x = 10$: l'intero costa 10 €, il ridotto 8 €.

27. $x + y = 10$, $12x + 22y = 160$. Sostituendo $y = 10 - x$: $-10x = -60$, $x = 6$, $y = 4$: 6 kg da 12 €/kg e 4 kg da 22 €/kg.

28. Con t in ore dalle 8:00 e s in km da A: ciclista $s = 20t$, scooter $s = 45(t - 1)$ per $t \geq 1$. $20t = 45t - 45$, $t = 1{,}8$ h = 1 h 48 min: alle 9:48, a $20 \cdot 1{,}8 = 36$ km da A.

29. $b + h = 27$, $b = 2h + 3$: $3h + 3 = 27$, $h = 8$ cm, $b = 19$ cm. Area $19 \cdot 8 = 152$ cm^2; diagonale $\sqrt{361 + 64} = \sqrt{425} = 5\sqrt{17} \approx 20{,}6$ cm.

30. $b_1 + b_2 = 3$, $350b_1 = 250b_2$. Da $b_2 = 1{,}4b_1$: $2{,}4b_1 = 3$, $b_1 = 1{,}25$ m. Il fulcro va a 1,25 m da Anna (e 1,75 m dal fratello).

31. a) Per $k = -2$: la seconda retta diventa $y = 2x + 5$, parallela alla prima ($y = 2x - 1$); il sistema è impossibile. b) $D = 2 + k$, $D_x = 1 + 5 = 6$, $D_y = 10 - k$: $x = \frac{6}{2 + k}$, $y = \frac{10 - k}{2 + k}$. Per $k = 1$: (2; 3); per $k = 3$: (1,2; 1,4).

32. Prima (per 6): $3x - 3 + 2y + 2 = 12$, $3x + 2y = 13$. Seconda: $3x - 2y = 11$. Sommando: $6x = 24$, $x = 4$; $2y = 1$, $y = \frac{1}{2}$. Verifica: $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ ✓; $12 + 1 = 13$ ✓. Soluzione $(4; \frac{1}{2})$.

33. x ettari a grano, y a mais: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 12$, $2x + 4y \leq 36$. Vertici (0; 0), (12; 0), (6; 6), (0; 9). $G = 300x + 500y$: 0; 3600; 4800; 4500. Conviene coltivare 6 ettari a grano e 6 a mais, guadagnando 4800 €.

34. $x + y + z = 30$, $10x + 20y + 50z = 650$, $x = 2z$. Sostituendo: $y + 3z = 30$ e $20y + 70z = 650$, cioè $2y + 7z = 65$. Da $y = 30 - 3z$: $60 + z = 65$, $z = 5$, $y = 15$, $x = 10$. Controllo: $100 + 300 + 250 = 650$ centesimi ✓.