CAPITOLO

6

Il piano cartesiano e la retta

Un punto è una coppia di numeri, una retta è un'equazione: da quando Cartesio lo ha scoperto, disegnare e calcolare sono diventati la stessa cosa.

OBIETTIVI

1. Calcolare distanze, punti medi, baricentri, perimetri e aree a partire dalle coordinate dei punti.
2. Riconoscere e scrivere l'equazione di una retta in forma esplicita e implicita, e passare dall'una all'altra.
3. Interpretare il coefficiente angolare come rapporto $\Delta y/\Delta x$ e scrivere la retta per un punto e per due punti.
4. Usare le condizioni di parallelismo e di perpendicolarità, trovare il punto comune a due rette e calcolare la distanza di un punto da una retta.
5. Descrivere fasci propri e impropri di rette e scegliere in un fascio la retta che soddisfa una condizione.
6. Costruire e usare modelli lineari, leggendo il coefficiente angolare come tasso di variazione.

INDICE DEL CAPITOLO

6.1 Punti e segmenti nel piano cartesiano 2
6.2 L'equazione di una retta 6
6.3 Il coefficiente angolare 9
6.4 Parallelismo, perpendicolarità e distanze 12
6.5 I fasci di rette 16
6.6 Modelli lineari 18

Matematica 2 · Parte III · Il piano cartesiano e i sistemi lineari · versione 1.0
Capitolo 6: Il piano cartesiano e la retta · pagine 145–170 del volume completo · estratto per lo studio

Su una mappa digitale tocchi due punti e il telefono ti dice subito quanto distano in linea d'aria; un videogioco calcola in ogni istante se un proiettile colpirà un bersaglio; un programma di grafica traccia una linea perfettamente dritta tra due clic. In tutti questi casi il computer non «vede» il disegno: lavora con coppie di numeri. È l'idea della **geometria analitica**: descrivere punti, segmenti e rette con le coordinate e trasformare ogni domanda geometrica in un calcolo.

In *Matematica 1* hai usato il piano cartesiano per disegnare i grafici delle funzioni, e hai visto che il grafico di $y = mx + q$ è una retta. In questo capitolo facciamo il percorso inverso: partiamo dalla retta come oggetto geometrico e scopriamo che ogni retta del piano ha un'equazione, e che ogni equazione di primo grado in x e y rappresenta una retta. Con i teoremi di Pitagora (capitolo 4) e di Talete e della similitudine (capitolo 5) ricaveremo le formule per la distanza tra due punti, il punto medio, il parallelismo e la perpendicolarità, la distanza di un punto da una retta. Alla fine useremo le rette per costruire i primi **modelli lineari** di fenomeni reali.

6.1 Punti e segmenti nel piano cartesiano

6.1.1 Che cosa sappiamo già

Un sistema di riferimento cartesiano ortogonale è formato da due rette perpendicolari orientate, l'**asse x** (delle ascisse) e l'**asse y** (delle ordinate), che si incontrano nell'origine O, e da un'unità di misura, che in questo libro è la stessa sui due assi. A ogni punto P del piano corrisponde una e una sola coppia ordinata di numeri reali $P(x; y)$, le sue **coordinate**, e viceversa: il piano «è» l'insieme delle coppie di numeri reali, come la retta reale del capitolo 1 «è» l'insieme dei numeri reali. Gli assi dividono il piano in quattro quadranti, numerati in senso antiorario a partire da quello in cui $x > 0$ e $y > 0$. I punti dell'asse x hanno ordinata nulla, $(a; 0)$; quelli dell'asse y hanno ascissa nulla, $(0; b)$ (vedi *Matematica 1*, capitolo 6).

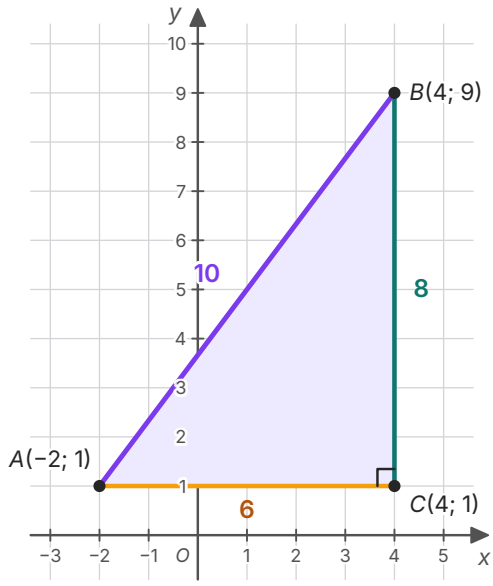
Scriviamo le coordinate separate da un punto e virgola, $A(2; -3)$, perché la virgola serve già come separatore decimale: (2,5; 1) è il punto di ascissa 2,5 e ordinata 1.

6.1.2 La distanza tra due punti

Cominciamo dal caso più semplice. Se due punti hanno la stessa ordinata, come $A(-2; 1)$ e $C(4; 1)$, il segmento AC è parallelo all'asse x e la sua lunghezza è la distanza tra le ascisse sulla retta reale: $AC = |4 - (-2)| = 6$. Allo stesso modo, se due punti hanno la stessa ascissa, la loro distanza è il valore assoluto della differenza delle ordinate. Il valore assoluto ci libera dall'ordine: $|4 - (-2)| = |-2 - 4|$.

Se invece il segmento AB è obliquo, costruiamo il punto C che ha l'ascissa di B e l'ordinata di A (Figura 6.1). Il triangolo ACB è rettangolo in C, perché AC è parallelo all'asse x e CB all'asse y. I

suoi cateti misurano $|x_2 - x_1|$ e $|y_2 - y_1|$ e, per il teorema di Pitagora, l'ipotenusa AB misura la radice quadrata della somma dei loro quadrati. Poiché il quadrato di un numero è uguale al quadrato del suo valore assoluto, i valori assoluti possono sparire.



$AC = |4 - (-2)| = 6$

$CB = |9 - 1| = 8$

Teorema di Pitagora nel triangolo rettangolo ACB:

$AB = \sqrt{(6^2 + 8^2)} = \sqrt{100} = 10$

Figura 6.1 La distanza tra $A(-2; 1)$ e $B(4; 9)$. Il punto $C(4; 1)$ forma con A e B un triangolo rettangolo i cui cateti sono paralleli agli assi: la distanza AB è la sua ipotenusa.

IN SINTESI

Distanza tra due punti. La **distanza tra due punti** $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ è

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Se $y_1 = y_2$ la formula si riduce a $AB = |x_2 - x_1|$; se $x_1 = x_2$ a $AB = |y_2 - y_1|$. In particolare la distanza di $P(x; y)$ dall'origine è $\sqrt{x^2 + y^2}$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola la distanza tra $A(-2; 1)$ e $B(4; 9)$, e quella tra $D(3; -5)$ ed $E(3; 2)$.

Soluzione. Per AB: $x_2 - x_1 = 4 - (-2) = 6$ e $y_2 - y_1 = 9 - 1 = 8$, quindi $AB = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$. È la terna pitagorica (6; 8; 10) del capitolo 4.

Per DE le ascisse sono uguali: il segmento è parallelo all'asse y e $DE = |2 - (-5)| = 7$. La formula generale dà lo stesso risultato: $\sqrt{0^2 + 7^2} = 7$.

6.1.3 Il punto medio di un segmento

Il **punto medio** M di un segmento AB è il punto del segmento che lo divide in due parti congruenti. Per trovarne le coordinate proiettiamo A, M e B sull'asse x con rette parallele all'asse y (Figura 6.2, a sinistra). Per il teorema di Talete (capitolo 5) un fascio di rette parallele trasforma segmenti congruenti su una trasversale in segmenti congruenti sull'altra: la proiezione di M è quindi il punto medio delle proiezioni di A e B, cioè il punto della retta reale che sta a metà tra x_1 e x_2. Quel punto ha ascissa uguale alla media aritmetica $(x_1 + x_2) : 2$: infatti dista $|x_2 - x_1| : 2$ da ciascuno dei due estremi. Lo stesso ragionamento sull'asse y dà l'ordinata.

IN SINTESI

Punto medio. Il punto medio del segmento di estremi $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ è

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Le coordinate del punto medio sono le medie aritmetiche delle coordinate degli estremi.

Per il segmento di Figura 6.1 troviamo $M\left(\frac{-2+4}{2}; \frac{1+9}{2}\right) = M(1; 5)$. La formula si può anche usare «al contrario»: se $M(1; 5)$ è il punto medio di AB e $A(-2; 1)$, allora $x_B = 2 \cdot 1 - (-2) = 4$ e $y_B = 2 \cdot 5 - 1 = 9$. È il modo di trovare il **simmetrico** di un punto rispetto a un altro, che ritroverai nel capitolo 11.

6.1.4 Il baricentro di un triangolo

Nel capitolo 3 hai dimostrato che le tre mediane di un triangolo si incontrano nel **baricentro** G, che divide ciascuna mediana in due parti, quella che contiene il vertice doppia dell'altra. Sia M il punto medio di BC: allora AG è i due terzi di AM. Proiettando sull'asse x come prima, per il teorema di Talete anche la proiezione di G sta ai due terzi del segmento che va da x_A a x_M, quindi

$$x_G = x_A + \frac{2}{3}(x_M - x_A) = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3} \cdot \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

e lo stesso vale per l'ordinata.

IN SINTESI

Baricentro. Il baricentro del triangolo di vertici $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ è

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Le coordinate del baricentro sono le medie aritmetiche delle coordinate dei vertici.

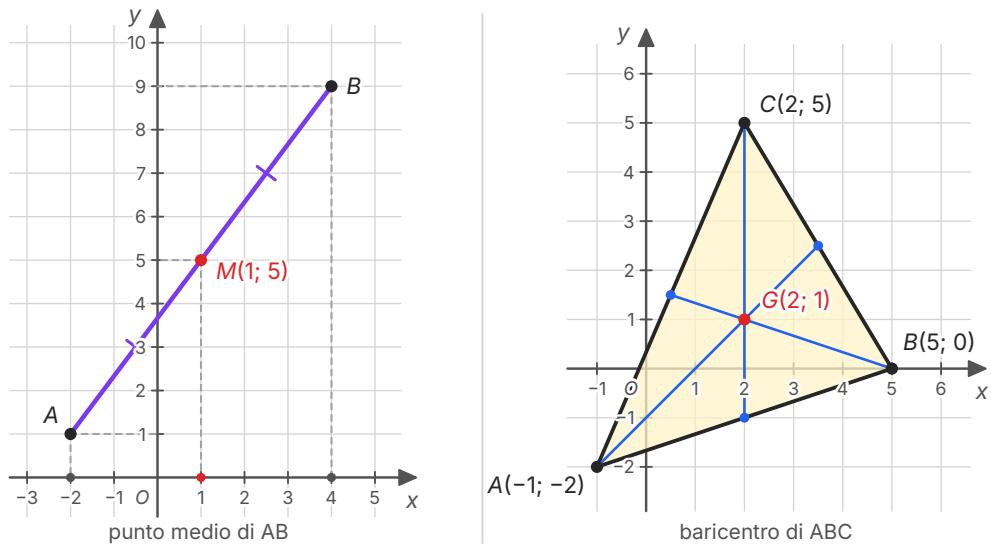


Figura 6.2 A sinistra, il punto medio M del segmento di estremi $A(-2; 1)$ e $B(4; 9)$: le sue proiezioni sugli assi sono i punti medi delle proiezioni degli estremi. A destra, le tre mediane del triangolo di vertici $A(-1; -2)$, $B(5; 0)$, $C(2; 5)$ si incontrano nel baricentro $G(2; 1)$.

6.1.5 Perimetri e aree

Con la formula della distanza possiamo calcolare i lati, e quindi il perimetro, di qualunque poligono di cui conosciamo i vertici, e riconoscere che tipo di triangolo o di quadrilatero abbiamo davanti. Per l'area la strada più semplice dipende dalla figura: se ha un lato parallelo a un asse, la base e l'altezza si leggono direttamente sulle coordinate; altrimenti si può **inscrivere** il poligono in un rettangolo con i lati paralleli agli assi e sottrarre i triangoli rettangoli che avanzano.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Dati $A(1;\,1)$, $B(5;\,4)$ e $C(2;\,8)$, stabilisci che tipo di triangolo è ABC e calcolane perimetro, area e baricentro.

Soluzione. Calcoliamo i quadrati dei lati: $AB^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, $BC^2 = (-3)^2 + 4^2 = 25$, $AC^2 = 1^2 + 7^2 = 50$. Dunque $AB = BC = 5$ e $AC = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$: il triangolo è **isoscele** sulla base AC. Inoltre $AB^2 + BC^2 = 25 + 25 = 50 = AC^2$: per l'inverso del teorema di Pitagora il triangolo è anche **rettangolo**, con l'angolo retto in B.

Perimetro: $5 + 5 + 5\sqrt{2} = 10 + 5\sqrt{2} \approx 17{,}07$. Area: i cateti sono AB e BC, quindi $A = 5 \cdot 5 : 2 = \dfrac{25}{2}$. Baricentro: $G\left(\dfrac{1+5+2}{3};\ \dfrac{1+4+8}{3}\right) = G\left(\dfrac{8}{3};\ \dfrac{13}{3}\right)$.

Osserva. Conviene lavorare con i quadrati dei lati: si evitano le radici e si applica subito l'inverso del teorema di Pitagora.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola l'area del triangolo di vertici $A(-1;\,-2)$, $B(5;\,0)$, $C(2;\,5)$ (Figura 6.2, a destra).

Soluzione. Nessun lato è parallelo a un asse. Il rettangolo con i lati paralleli agli assi che contiene il triangolo va da $x = -1$ a $x = 5$ e da $y = -2$ a $y = 5$: ha lati 6 e 7 e area 42. Ogni vertice del triangolo sta su un lato del rettangolo, e ciò che avanza sono tre triangoli rettangoli con i cateti paralleli agli assi:

- sotto AB: cateti 6 e 2, area 6;
- a destra di BC: cateti 3 e 5, area 7,5;
- a sinistra di CA: cateti 3 e 7, area 10,5.

Quindi Area$(ABC) = 42 - (6 + 7{,}5 + 10{,}5) = 18$. Più avanti, studiando la distanza di un punto da una retta, ritroveremo lo stesso risultato in un altro modo.

6.2 L'equazione di una retta

Una curva del piano è un insieme di punti, cioè un insieme di coppie di numeri. Diciamo che un'equazione in x e y è l'**equazione di una curva** quando le coppie $(x;\,y)$ che la soddisfano sono **esattamente** le coordinate dei punti della curva: ogni punto della curva soddisfa l'equazione, e ogni soluzione dell'equazione è un punto della curva. Vediamo che equazione hanno le rette, partendo dalle più semplici.

6.2.1 Rette parallele agli assi

I punti che hanno ordinata 3 sono (0; 3), (1; 3), (−2,5; 3) e così via: formano la retta parallela all'asse x che passa per (0; 3). Un punto sta su quella retta se e solo se la sua ordinata è 3, quindi la sua equazione è $y = 3$: la x non compare perché può assumere qualunque valore. In generale:

- la retta parallela all'asse x (orizzontale) che passa per $(0; k)$ ha equazione $y = k$; l'asse x stesso ha equazione $y = 0$;
- la retta parallela all'asse y (verticale) che passa per $(h; 0)$ ha equazione $x = h$; l'asse y ha equazione $x = 0$.

6.2.2 Rette passanti per l'origine

Sia r una retta per l'origine diversa dall'asse y, e sia $A(1; m)$ il suo punto di ascissa 1. Prendiamo un altro punto $P(x; y)$ di r, con $x \neq 0$, e proiettiamo A e P sull'asse x nei punti $A'(1; 0)$ e $P'(x; 0)$. I triangoli rettangoli $OA'A$ e $OP'P$ hanno l'angolo in O in comune (o opposto al vertice, se P sta dall'altra parte di O), quindi sono simili per il primo criterio di similitudine (capitolo 5). I lati corrispondenti sono in proporzione: $|y| : |x| = |m| : 1$. Inoltre x e y hanno segni concordi esattamente quando m è positivo, perché la retta attraversa il primo e il terzo quadrante se sale, il secondo e il quarto se scende. Ne segue $y : x = m$, cioè $y = mx$, un'uguaglianza vera anche per O. Viceversa, in *Matematica 1* hai visto che i punti che soddisfano $y = mx$ stanno tutti su una retta per l'origine: quella che passa per $(1; m)$.

6.2.3 La forma esplicita

Ora una retta r qualsiasi, purché non verticale. La parallela a r condotta per l'origine ha equazione $y = mx$. Sia $(0; q)$ il punto in cui r taglia l'asse y: la retta r si ottiene spostando ogni punto della parallela per l'origine di q unità in verticale (verso l'alto se $q > 0$, verso il basso se $q < 0$). Quindi il punto di r di ascissa x ha ordinata $mx + q$, e l'equazione di r è

$$y = mx + q$$

Questa è la **forma esplicita** dell'equazione della retta, «esplicita» perché è risolta rispetto a y. Il numero m si chiama **coefficiente angolare** e il numero q **ordinata all'origine**: è l'ordinata del punto in cui la retta incontra l'asse y. Per esempio $y = -2x + 3$ è la retta parallela a $y = -2x$ che passa per (0; 3). Una retta verticale non ha forma esplicita: tutti i suoi punti hanno la stessa ascissa, ma ordinate diverse, e nessuna equazione del tipo $y = mx + q$ può descriverla.

6.2.4 La forma implicita

Un'equazione di primo grado nelle due incognite x e y si può sempre scrivere nella forma

$$ax + by + c = 0 \quad (a \text{ e } b \text{ non entrambi nulli})$$

che si chiama **forma implicita** (o forma generale) dell'equazione della retta. Il motivo del nome è il risultato seguente.

IN SINTESI

Teorema. Ogni retta del piano ha un'equazione di primo grado in x e y; viceversa, ogni equazione $ax + by + c = 0$ con a e b non entrambi nulli rappresenta una retta.

- Se $b \neq 0$, si ricava y: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, una retta non verticale con $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$.
- Se $b = 0$ (e quindi $a \neq 0$), resta $x = -\frac{c}{a}$: una retta verticale.

Viceversa, $y = mx + q$ equivale a $mx - y + q = 0$ e $x = h$ equivale a $x - h = 0$.

Moltiplicando un'equazione per un numero diverso da zero si ottiene un'equazione equivalente, cioè con le stesse soluzioni: $2x - 4y + 6 = 0$ e $x - 2y + 3 = 0$ rappresentano la stessa retta. Di solito si sceglie la forma con i coefficienti interi più piccoli. Per passare dalla forma implicita a quella esplicita basta risolvere rispetto a y: da $3x - 2y + 6 = 0$ si ottiene $2y = 3x + 6$, cioè $y = \frac{3}{2}x + 3$; la retta ha $m = \frac{3}{2}$ e taglia l'asse y in $(0; 3)$. Per disegnarla bastano due punti: per $x = 0$ si ha $y = 3$, per $y = 0$ si ha $x = -2$.

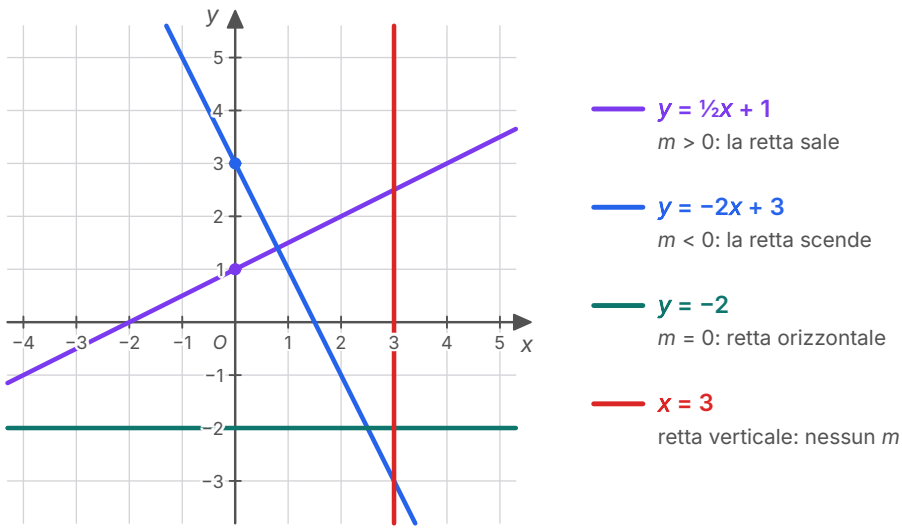


Figura 6.3 Quattro rette e il segno del loro coefficiente angolare. La retta $y = \frac{1}{2}x + 1$ sale da sinistra a destra, $y = -2x + 3$ scende, $y = -2$ è orizzontale; la retta verticale $x = 3$ non ha coefficiente angolare.

ERRORE FREQUENTE

«Ogni retta ha un'equazione $y = mx + q$.» **Falso**: le rette verticali, come $x = 3$ in Figura 6.3, non hanno forma esplicita né coefficiente angolare. Non si deve dire che una retta verticale ha «m infinito»: semplicemente m non esiste. Ecco perché, quando bisogna considerare *tutte* le rette, si usa la forma implicita $ax + by + c = 0$, che le comprende tutte.

APPROFONDIMENTO · CARTESIO, FERMAT E LA GEOMETRIA ANALITICA

Il metodo delle coordinate prende il nome da René Descartes (Cartesio, 1596–1650), che nel 1637 pubblicò *La Géométrie* come appendice del *Discorso sul metodo*. L'opera mostra come tradurre un problema geometrico in equazioni e risolverlo con l'algebra. Negli stessi anni Pierre de Fermat giunse a idee simili, in un breve scritto sui luoghi geometrici che circolò manoscritto e fu stampato solo dopo la sua morte: vi si legge, in sostanza, che un'equazione di primo grado in due incognite descrive una retta.

Né Cartesio né Fermat disegnavano il sistema di due assi perpendicolari e graduati che usiamo oggi, con le coordinate negative trattate come quelle positive: questa forma si è affermata più tardi. Ma l'idea centrale, ogni curva un'equazione e ogni equazione una curva, è loro, e ha reso possibile lo sviluppo della matematica moderna.

6.3 Il coefficiente angolare

6.3.1 La pendenza come rapporto

Siano $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ due punti distinti della retta non verticale $y = mx + q$, e quindi $x_1 \neq x_2$. Le loro coordinate soddisfano l'equazione: $y_1 = mx_1 + q$ e $y_2 = mx_2 + q$. Sottraendo membro a membro la prima uguaglianza dalla seconda, q si elimina:

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \quad \Rightarrow \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Il simbolo Δ (la lettera greca delta maiuscola) indica una **variazione**: $\Delta x = x_2 - x_1$ è di quanto cambia l'ascissa passando da A a B, $\Delta y = y_2 - y_1$ di quanto cambia l'ordinata. Il coefficiente angolare è il rapporto tra le due variazioni, e non dipende dalla coppia di punti scelta. Lo stesso fatto ha un'interpretazione geometrica (Figura 6.4): i «triangoli di pendenza» costruiti su due coppie diverse di punti della retta, con i cateti paralleli agli assi, hanno gli angoli congruenti (l'angolo retto e due angoli corrispondenti formati da rette parallele), quindi sono simili e i rapporti tra i cateti verticali e orizzontali coincidono.

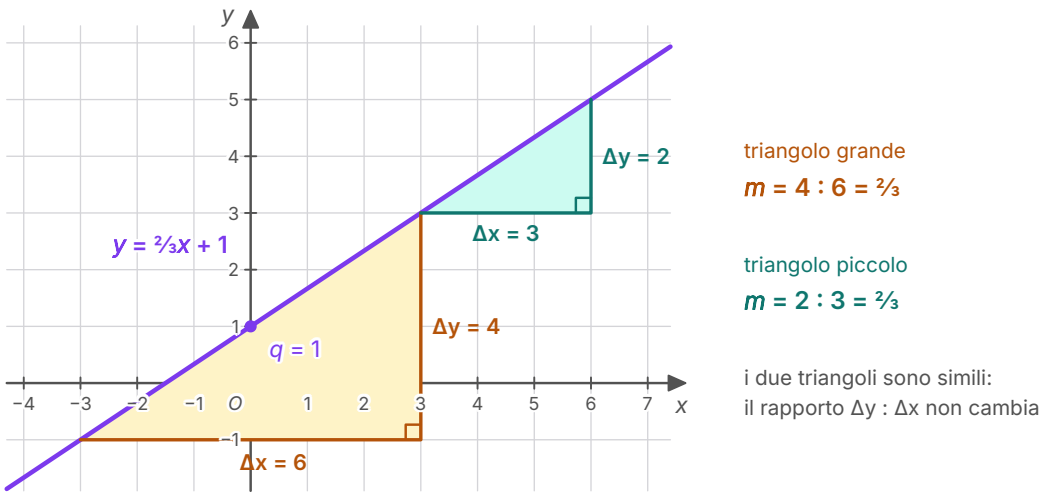


Figura 6.4 Il coefficiente angolare della retta $y = \frac{2}{3}x + 1$. Il triangolo grande ($\Delta x = 6$, $\Delta y = 4$) e quello piccolo ($\Delta x = 3$, $\Delta y = 2$) sono simili: il rapporto $\Delta y : \Delta x$ vale $\frac{2}{3}$ in entrambi. La retta taglia l'asse y nel punto di ordinata $q = 1$.

6.3.2 Il significato di *m* e di *q*

Prendendo $\Delta x = 1$ si ottiene $\Delta y = m$: il coefficiente angolare è **di quanto cresce *y* quando *x* aumenta di 1**. Da qui le sue proprietà, che in parte conosci già:

- se $m > 0$ la retta sale da sinistra verso destra (all'aumentare di x aumenta anche y); se $m < 0$ scende; se $m = 0$ è orizzontale;
- più $|m|$ è grande, più la retta è ripida: $y = 5x$ è più ripida di $y = \frac{1}{2}x$, e $y = -5x$ è ripida quanto $y = 5x$, ma scende;
- $m = 1$ corrisponde alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, $y = x$, che forma un angolo di 45° con l'asse x; $m = -1$ alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante, $y = -x$;
- q è il valore di y per $x = 0$: la retta passa per l'origine se e solo se $q = 0$.

Il nome «coefficiente angolare» ricorda che m determina l'angolo che la retta forma con l'asse x: a coefficienti uguali corrispondono angoli uguali. Il legame preciso tra m e l'ampiezza dell'angolo lo troverai nel capitolo 12.

6.3.3 La retta per un punto con coefficiente angolare dato

Cerchiamo la retta che passa per $P_0(x_0; y_0)$ e ha coefficiente angolare m. Un punto $P(x; y)$ diverso da P_0 sta su questa retta se e solo se il rapporto $(y - y_0) : (x - x_0)$ è uguale a m, cioè se $y - y_0 = m(x - x_0)$; e anche P_0 soddisfa questa uguaglianza, perché dà $0 = 0$.

IN SINTESI

Retta per un punto. La retta per $P_0(x_0; y_0)$ con coefficiente angolare m ha equazione

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Retta per due punti. Se $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ hanno $x_1 \neq x_2$, si calcola $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e si usa la formula precedente con $P_0 = A$. Se $x_1 = x_2$ la retta è verticale: $x = x_1$. Quando anche $y_1 \neq y_2$, la retta per A e B si può scrivere direttamente come

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Scrivi l'equazione della retta che passa per $A(-1; 5)$ e $B(3; -3)$, in forma esplicita e implicita.

Soluzione. Le ascisse sono diverse, quindi la retta non è verticale e $m = \dfrac{-3 - 5}{3 - (-1)} = \dfrac{-8}{4} = -2$. Con il punto A: $y - 5 = -2(x + 1)$, cioè $y = -2x + 3$. In forma implicita: $2x + y - 3 = 0$.

Verifica. Sostituendo le coordinate di B: $-2 \cdot 3 + 3 = -3$. ✓ Con la formula della retta per due punti si arriva allo stesso risultato: $\dfrac{y - 5}{-8} = \dfrac{x + 1}{4}$ dà $y - 5 = -2(x + 1)$.

ERRORE FREQUENTE

Nel calcolo di m le due differenze vanno fatte **nello stesso ordine**. Con $A(1; 3)$ e $B(4; 9)$ è corretto $\dfrac{9 - 3}{4 - 1} = 2$, ed è corretto anche $\dfrac{3 - 9}{1 - 4} = 2$; è sbagliato $\dfrac{9 - 3}{1 - 4} = -2$, che mescola i punti e cambia il segno. Un controllo rapido: se nel disegno la retta sale, m deve essere positivo.

6.3.4 Tre punti allineati

Tre punti A, B, C sono **allineati** se appartengono a una stessa retta. Se non hanno tutti la stessa ascissa, ciò accade se e solo se la retta AB e la retta AC hanno lo stesso coefficiente angolare: due rette per A con la stessa pendenza coincidono. Per esempio $A(1; 2)$, $B(3; 5)$, $C(7; 11)$ sono allineati perché $m_{AB} = \dfrac{3}{2}$ e $m_{AC} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$. Eliminando i denominatori si ottiene una condizione che vale in tutti i casi, anche per punti su una retta verticale:

$$(y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)$$

Nell'esempio: $(5-2)(7-1)=18$ e $(11-2)(3-1)=18$.

6.4 Parallelismo, perpendicolarità e distanze

6.4.1 Rette parallele

Due rette non verticali $y=mx+q$ e $y=m'x+q'$ sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare. Infatti, se $m=m'$, le due rette hanno la stessa parallela per l'origine, $y=mx$, e due rette parallele a una terza sono parallele tra loro; viceversa, se sono parallele, la parallela per l'origine è la stessa e quindi $m=m'$. Se anche $q=q'$ le rette coincidono; se $q\neq q'$ sono parallele e distinte. Le rette verticali sono tutte parallele tra loro.

Per esempio $y=3x+1$ e $6x-2y+5=0$ sono parallele: la seconda, in forma esplicita, è $y=3x+\dfrac{5}{2}$, con lo stesso $m=3$ e un'ordinata all'origine diversa.

6.4.2 Rette perpendicolari

IN SINTESI

Teorema. Due rette $r\colon y=mx+q$ e $s\colon y=m'x+q'$, entrambe non parallele agli assi, sono perpendicolari se e solo se

$$m\cdot m'=-1 \quad \text{cioè} \quad m'=-\frac{1}{m}$$

Ipotesi: $m\neq 0$, $m'\neq 0$. **Tesi:** $r\perp s \Leftrightarrow mm'=-1$.

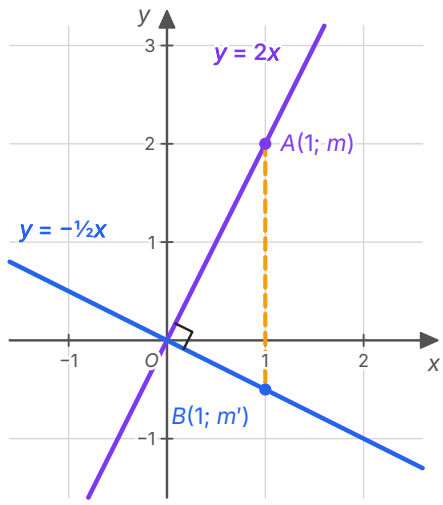
Dimostrazione. Due rette formano gli stessi angoli delle loro parallele per l'origine, $y=mx$ e $y=m'x$, quindi basta studiare queste. Se $m=m'$ le rette sono parallele e non perpendicolari, e infatti $m\cdot m=m^2$ non può valere -1: possiamo supporre $m\neq m'$. Consideriamo i punti di ascissa 1 delle due rette, $A(1;m)$ e $B(1;m')$ (Figura 6.5). Per la formula della distanza:

$$OA^2=1+m^2,\quad OB^2=1+m'^2,\quad AB^2=(m-m')^2.$$

Per il teorema di Pitagora e per il suo inverso (capitolo 4), l'angolo AOB è retto se e solo se $OA^2+OB^2=AB^2$, cioè

$$2+m^2+m'^2=m^2-2mm'+m'^2 \quad\Leftrightarrow\quad 2=-2mm' \quad\Leftrightarrow\quad mm'=-1.$$

c.v.d.



$OA^2 = 1 + m^2$

$OB^2 = 1 + m'^2$

$AB^2 = (m - m')^2$

angolo in O retto $\Leftrightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2$

$\Leftrightarrow 2 + m^2 + m'^2 = m^2 - 2mm' + m'^2$

$\Leftrightarrow \mathbf{m \cdot m' = -1}$

qui: $m = 2$, $m' = -\frac{1}{2}$, $2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$

Figura 6.5 La dimostrazione della condizione di perpendicolarità, con $m = 2$ e $m' = -\frac{1}{2}$. Il triangolo OAB è rettangolo in O esattamente quando $OA^2 + OB^2 = AB^2$, e questa uguaglianza equivale a $mm' = -1$.

L'ipotesi «non parallele agli assi» è essenziale. Una retta orizzontale $y = k$ e una verticale $x = h$ sono perpendicolari, ma la verticale non ha coefficiente angolare e la formula non si può applicare. Con la forma implicita c'è una condizione che vale sempre: le rette $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ sono parallele se $ab' - a'b = 0$ e perpendicolari se $aa' + bb' = 0$ (lo verificherai negli esercizi).

DA RICORDARE

Per scrivere la perpendicolare a una retta di coefficiente angolare $m \neq 0$ si prende l'**antireciproco** $-1/m$: si inverte la frazione e si cambia il segno. La perpendicolare a $y = \frac{2}{3}x - 1$ ha $m' = -\frac{3}{2}$; la perpendicolare a $y = -4x$ ha $m' = \frac{1}{4}$. La perpendicolare a una retta orizzontale è verticale, e viceversa.

6.4.3 Il punto d'intersezione di due rette

Un punto appartiene a due rette se le sue coordinate soddisfano entrambe le equazioni. Per trovare il punto comune a due rette non parallele si risolve quindi il **sistema** delle loro equazioni; il metodo più rapido, quando una delle due è in forma esplicita, è sostituire l'espressione di y nell'altra. Due rette non verticali con $m \neq m'$ hanno sempre uno e un solo punto in comune; i sistemi di equazioni di primo grado e i metodi per risolverli saranno l'argomento del capitolo 7.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Data la retta r: $y = 2x - 1$ e il punto $P(3; 1)$, scrivi la parallela e la perpendicolare a r per P, e trova il punto H in cui la perpendicolare incontra r.

Soluzione. Parallela: $m = 2$, quindi $y - 1 = 2(x - 3)$, cioè $y = 2x - 5$. Perpendicolare: $m' = -\frac{1}{2}$, quindi $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 3)$, cioè $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Intersezione: sostituiamo $y = 2x - 1$ nell'equazione della perpendicolare: $2x - 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. Moltiplicando per 2: $4x - 2 = -x + 5$, quindi $5x = 7$, $x = \frac{7}{5}$, e $y = 2 \cdot \frac{7}{5} - 1 = \frac{9}{5}$. Il punto è $H(\frac{7}{5}; \frac{9}{5})$.

6.4.4 La distanza di un punto da una retta

La **distanza di un punto da una retta** è la lunghezza del segmento di perpendicolare condotto dal punto alla retta. È la più corta tra le distanze del punto dai punti della retta: se H è il piede della perpendicolare da P a r e Q è un altro punto di r, nel triangolo rettangolo PHQ l'ipotenusa PQ è maggiore del cateto PH. Nell'esempio precedente H è proprio il piede della perpendicolare da $P(3; 1)$ a r, quindi la distanza è

$$PH = \sqrt{(3 - \frac{7}{5})^2 + (1 - \frac{9}{5})^2} = \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{80}{25}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \approx 1{,}79$$

Questo procedimento funziona sempre, ma è lungo. Ripetendolo con lettere al posto dei numeri si ottiene una formula diretta, di cui omettiamo la dimostrazione.

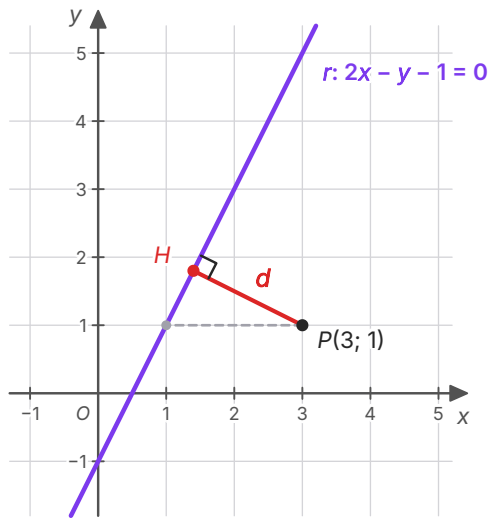
IN SINTESI

Distanza punto-retta. La distanza del punto $P(x_0; y_0)$ dalla retta r: $ax + by + c = 0$ è

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

La retta deve essere scritta in **forma implicita**. Il numeratore è nullo se e solo se P sta su r.

Verifichiamola sull'esempio: $y = 2x - 1$ in forma implicita è $2x - y - 1 = 0$, e $d = |2 \cdot 3 - 1 - 1| : \sqrt{4 + 1} = 4 : \sqrt{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, come prima (Figura 6.6). La formula permette anche di calcolare la distanza tra due rette parallele: è la distanza di un punto qualsiasi di una delle due dall'altra.



$d = |2 \cdot 3 - 1 - 1| \,/\, \sqrt{(2^2 + (-1)^2)}$

$= 4/\sqrt{5} = 4\sqrt{5}/5 \approx 1{,}79$

$H(7/5;\ 9/5)$ è il piede della perpendicolare da P a r: PH è più corto di ogni altro segmento che unisce P a un punto di r (in grigio, tratteggiato).

Figura 6.6 La distanza di $P(3;\ 1)$ dalla retta r: $2x - y - 1 = 0$ è la lunghezza del segmento di perpendicolare PH, con $H(7/5;\ 9/5)$.

ERRORE FREQUENTE

La formula della distanza vuole la forma **implicita**. Per la distanza di $P(1;\ 1)$ dalla retta $y = 2x + 3$ non si può scrivere $|2 \cdot 1 + 3| : \sqrt{4}$: bisogna prima portare tutto a un membro, $2x - y + 3 = 0$, e solo allora $d = |2 - 1 + 3| : \sqrt{5} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. Il denominatore contiene **entrambi** i coefficienti di x e di y.

6.4.5 L'asse di un segmento e l'altezza di un triangolo

In *Matematica 1* hai visto che l'**asse di un segmento** AB è la retta perpendicolare ad AB nel suo punto medio, ed è il luogo dei punti equidistanti da A e da B. Le due descrizioni danno due modi per scriverne l'equazione.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Scrivi l'equazione dell'asse del segmento di estremi $A(1; 2)$ e $B(5; 4)$.

Primo metodo (perpendicolare nel punto medio). $M(3; 3)$; la retta AB ha $m = \frac{4-2}{5-1} = ½$, quindi l'asse ha $m' = -2$: $y - 3 = -2(x - 3)$, cioè $y = -2x + 9$.

Secondo metodo (luogo geometrico). $P(x; y)$ è equidistante da A e B se e solo se $PA^2 = PB^2$:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-5)^2 + (y-4)^2$$

Sviluppando, i termini x^2 e y^2 si cancellano: $-2x + 1 - 4y + 4 = -10x + 25 - 8y + 16$, cioè $8x + 4y - 36 = 0$, ovvero $2x + y - 9 = 0$: la stessa retta. Che i quadrati si cancellino non è un caso: è la conferma algebrica che il luogo è una retta.

Allo stesso modo si ottengono le **altezze** di un triangolo nel piano. Torniamo al triangolo $A(-1; -2)$, $B(5; 0)$, $C(2; 5)$, di cui abbiamo calcolato l'area con il rettangolo. La retta AB ha $m = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ed equazione $y + 2 = \frac{1}{3}(x + 1)$, cioè $x - 3y - 5 = 0$. L'altezza relativa ad AB sta sulla retta per C con coefficiente angolare -3, $y = -3x + 11$, e la sua lunghezza è la distanza di C da AB:

$$h = \frac{|2 - 15 - 5|}{\sqrt{1+9}} = \frac{18}{\sqrt{10}} \qquad AB = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10} \qquad \text{Area} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{18}{\sqrt{10}} = 18$$

Ritroviamo l'area 18 ottenuta prima con un metodo completamente diverso: un buon controllo dei calcoli.

6.5 I fasci di rette

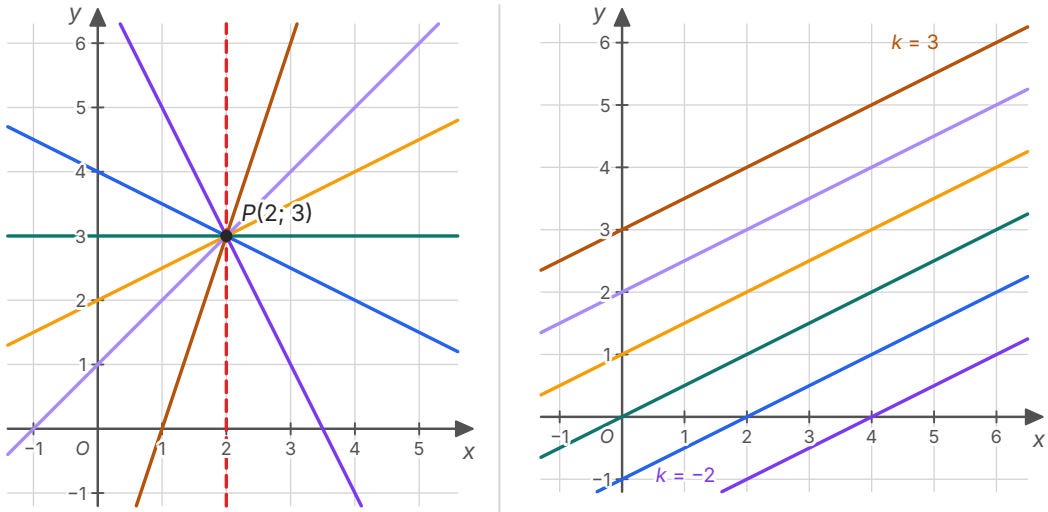
Spesso un problema non individua subito una retta, ma un'intera famiglia di rette tra cui scegliere: tutte quelle che passano per un punto, o tutte quelle con una certa direzione. Una famiglia di questo tipo si chiama **fascio** e si descrive con un'equazione che contiene, oltre a x e y, un **parametro**: a ogni valore del parametro corrisponde una retta del fascio.

6.5.1 Il fascio improprio

Il **fascio improprio** di rette è l'insieme di tutte le rette parallele a una retta data. Le rette parallele a $y = ½x$ hanno tutte coefficiente angolare ½ e differiscono per l'ordinata all'origine: il fascio ha equazione $y = ½x + k$, con k numero reale qualsiasi (Figura 6.7, a destra). In generale $y = mx + k$, con m fisso e k variabile; il fascio delle rette verticali è $x = k$. Per trovare la retta del fascio $y = 3x + k$ che passa per $(1; 1)$ si sostituiscono le coordinate: $1 = 3 + k$, $k = -2$, e la retta è $y = 3x - 2$.

6.5.2 Il fascio proprio

Il **fascio proprio** di rette è l'insieme di tutte le rette che passano per un punto $P_0(x_0; y_0)$, detto **centro del fascio**. Le rette non verticali per P_0 sono $y - y_0 = m(x - x_0)$, al variare di m; a queste va aggiunta la retta verticale $x = x_0$, che non si ottiene per nessun valore di m (Figura 6.7, a sinistra).



fascio proprio di centro P — fascio improprio $y = \frac{1}{2}x + k$

Figura 6.7 A sinistra, sei rette del fascio proprio di centro $P(2; 3)$, con $m = -2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 3$, e la retta verticale $x = 2$ (tratteggiata), che appartiene al fascio ma non ha coefficiente angolare. A destra, sei rette del fascio improprio $y = \frac{1}{2}x + k$, con k da -2 a 3.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Nel fascio di centro $P(2; 3)$ trova: a) la retta che passa per $Q(4; 7)$; b) la retta perpendicolare a $y = 3x$; c) la retta parallela all'asse x.

Soluzione. Il fascio è $y - 3 = m(x - 2)$. a) Imponiamo il passaggio per Q: $7 - 3 = m(4 - 2)$, $m = 2$, e la retta è $y = 2x - 1$. b) Serve $m = -\frac{1}{3}$: $y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 2)$, cioè $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$. c) Serve $m = 0$: $y = 3$.

Osserva. La retta verticale $x = 2$ del fascio non ha coefficiente angolare: se un problema chiedesse, per esempio, la retta del fascio che passa per $(2; -5)$, la formula darebbe $-8 = m \cdot 0$, impossibile, e la risposta sarebbe proprio $x = 2$.

6.5.3 Il fascio generato da due rette

Un fascio si può descrivere anche a partire da due sue rette, dette **generatrici**. Se r: $ax + by + c = 0$ e s: $a'x + b'y + c' = 0$ si incontrano in un punto, l'equazione

$$(ax + by + c) + k(a'x + b'y + c') = 0$$

è, per ogni k, di primo grado, e rappresenta una retta che passa per il punto d'intersezione di r e s: in quel punto le due parentesi sono entrambe nulle. Si ottiene così il fascio proprio che ha per centro il punto comune, tranne la retta s, che non corrisponde a nessun valore di k. Per esempio $(x - y + 1) + k(x + y - 3) = 0$ è il fascio di centro $(1; 2)$; la sua retta per l'origine si trova sostituendo $(0; 0)$: $1 - 3k = 0$, $k = \frac{1}{3}$, da cui $3(x - y + 1) + (x + y - 3) = 0$, cioè $y = 2x$. Se invece le generatrici sono parallele, l'equazione descrive rette parallele a entrambe (escluso il valore di k per cui x e y spariscono): un fascio improprio.

6.6 Modelli lineari

Una grandezza y che dipende da un'altra grandezza x secondo una legge $y = mx + q$ si dice che varia **linearmente**; un **modello lineare** è la descrizione di un fenomeno con una legge di questo tipo. In un modello lineare il coefficiente angolare ha un significato concreto: è il **tasso di variazione** di y rispetto a x, cioè di quanto cambia y per ogni unità di x, e si misura in «unità di y per unità di x» (metri al secondo, euro al mese, gradi all'ora). Il termine noto q è il valore di y quando $x = 0$, spesso il «valore di partenza».

6.6.1 Il moto uniforme

In *Matematica 1* hai incontrato la legge oraria del moto rettilineo uniforme, $s = s_0 + vt$: la posizione s è una funzione lineare del tempo t, la velocità v è il coefficiente angolare e la posizione iniziale s_0 è l'ordinata all'origine. Con gli strumenti di questo capitolo possiamo ricavare la legge da due sole osservazioni.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Una ciclista percorre una pista rettilinea a velocità costante. Il cronometro segna 10 s quando lei passa davanti al cartello dei 240 m, e 40 s quando passa davanti a quello dei 360 m. Scrivi la legge oraria e calcola quando raggiungerà il traguardo, posto a 500 m.

Soluzione. I punti (10; 240) e (40; 360) del piano $(t; s)$ stanno sulla retta che rappresenta il moto. La velocità è il coefficiente angolare: $v = \dfrac{360 - 240}{40 - 10} = \dfrac{120}{30} = 4$ m/s. Con il primo punto: $s - 240 = 4(t - 10)$, cioè $s = 200 + 4t$: all'istante $t = 0$ la ciclista si trovava a 200 m dall'inizio della pista.

Traguardo: $200 + 4t = 500$, $t = 75$ s. **Verifica:** $200 + 4 \cdot 40 = 360$. ✓

6.6.2 Quota fissa e consumo: scegliere un'offerta

Molte tariffe hanno la forma «quota fissa più consumo», $C = F + pn$: il prezzo unitario p è il coefficiente angolare, la quota fissa F l'ordinata all'origine. Confrontare due offerte significa confrontare due rette, e il loro punto d'intersezione è il **punto di pareggio**, in cui le offerte costano lo stesso. È un primo esempio di **problema di decisione**.

Una palestra propone due abbonamenti: il primo con 40 € di iscrizione e 25 € al mese, il secondo senza iscrizione a 35 € al mese. Dopo n mesi si spende $C_1 = 40 + 25n$ con il primo e $C_2 = 35n$ con il secondo. Le due spese sono uguali quando $40 + 25n = 35n$, cioè per $n = 4$ (140 € in entrambi i casi). La retta di C_2 è più ripida: prima del pareggio conviene il secondo abbonamento, dopo il primo. Chi pensa di frequentare la palestra per più di quattro mesi sceglierà il primo. Osserva che qui n è un numero naturale: i grafici sono formati da punti allineati, e la retta serve a leggerli tutti insieme.

6.6.3 Interpolazione ed estrapolazione

Spesso di un fenomeno conosciamo solo due misure. Se nell'intervallo tra le due il fenomeno varia in modo abbastanza regolare, possiamo approssimarlo con la retta che passa per i due punti e usarla per stimare i valori intermedi: è l'**interpolazione lineare**. Supponiamo che alle 8 il termometro segni 12 °C e alle 12 segni 20 °C. Il tasso di variazione è $(20 - 12) : (12 - 8) = 2$ °C all'ora, e la retta è $T = 12 + 2(h - 8)$, dove h è l'ora del giorno. Alle 10:30, cioè per $h = 10{,}5$, stimiamo $T = 12 + 2 \cdot 2{,}5 = 17$ °C.

Usare la stessa retta **fuori** dall'intervallo dei dati si chiama **estrapolazione**, ed è molto più rischioso: per le 20 la retta prevede $12 + 2 \cdot 12 = 36$ °C, mentre di sera la temperatura di solito scende. Un modello lineare è valido solo nell'intervallo in cui è stato controllato: è una lezione che vale per ogni modello matematico.

COLLEGAMENTI

Fisica. In un grafico spazio-tempo di un moto uniforme la pendenza della retta è la velocità; in un grafico velocità-tempo di un moto uniformemente accelerato, la pendenza è l'accelerazione. Leggere un coefficiente angolare con le sue unità di misura (m/s, m/s^2) è uno dei gesti più frequenti nel laboratorio di fisica.

Strade. Il cartello stradale «pendenza 10%» indica che la strada sale (o scende) di 10 m ogni 100 m percorsi in orizzontale: è un coefficiente angolare $m = 0{,}1$ scritto come percentuale. Una pendenza del 100% corrisponde a $m = 1$, cioè a un angolo di 45°, non a una parete verticale.

6.6.4 Con il computer

Un programma di geometria dinamica è il laboratorio ideale per questo capitolo. Disegna due punti liberi A e B e la retta che li congiunge: il programma ne mostra l'equazione e, se lo chiedi, il coefficiente angolare. Trascinando B osserva come cambia m: diventa 0 quando A e B hanno la stessa ordinata e non è più definito quando hanno la stessa ascissa, mentre l'equazione passa alla forma $x = h$.

Poi crea due **slider** (cursori) m e q e scrivi l'equazione $y = mx + q$: muovendo q la retta trasla in verticale restando parallela a sé stessa (un fascio improprio), muovendo m ruota attorno al punto $(0; q)$ (un fascio proprio). Aggiungi infine la retta $y = -x/m + q$: qualunque valore dai a $m \neq 0$, le due rette restano perpendicolari, e puoi verificarlo misurando l'angolo con lo strumento apposito.

SINTESI

- Distanza tra $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (teorema di Pitagora); se i punti sono su una parallela a un asse basta il valore assoluto della differenza delle coordinate che cambiano.
- Il punto medio di AB ha per coordinate le medie delle coordinate degli estremi; il baricentro di un triangolo le medie delle coordinate dei tre vertici.
- Ogni retta ha un'equazione di primo grado $ax + by + c = 0$ (forma implicita) e ogni equazione di questo tipo rappresenta una retta. Le rette non verticali hanno anche la forma esplicita $y = mx + q$; le rette verticali $x = h$ no.
- Il coefficiente angolare $m = \Delta y/\Delta x$ non dipende dai due punti scelti (triangoli simili); q è l'ordinata del punto della retta sull'asse y. Dalla forma implicita: $m = -a/b$.
- Retta per un punto con pendenza data: $y - y_0 = m(x - x_0)$. Retta per due punti: si calcola m e si usa la formula precedente (o $x = x_1$ se le ascisse sono uguali).
- Tre punti sono allineati se e solo se $(y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)$.
- Rette non verticali: parallele se e solo se $m = m'$; perpendicolari, se non parallele agli assi, se e solo se $m \cdot m' = -1$ (dimostrazione con Pitagora e il suo inverso).
- Il punto comune a due rette si trova risolvendo il sistema delle loro equazioni.
- Distanza di $P(x_0; y_0)$ da $ax + by + c = 0$: $|ax_0 + by_0 + c| : \sqrt{a^2 + b^2}$, con la retta in forma implicita.
- L'asse di un segmento è la perpendicolare nel punto medio, e il luogo dei punti equidistanti dagli estremi: le due vie danno la stessa equazione.
- Fascio improprio: $y = mx + k$ (rette parallele). Fascio proprio di centro P_0: $y - y_0 = m(x - x_0)$ più la retta $x = x_0$.
- In un modello lineare il coefficiente angolare è il tasso di variazione; la retta per due misure serve a interpolare, molto meno a estrapolare.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● La distanza tra i punti $A(1; -2)$ e $B(4; 2)$ è:

   A. 7

   B. 5

   C. $\sqrt{7}$

   D. 25

2. ● Il punto medio del segmento di estremi $A(-3; 4)$ e $B(5; -2)$ è:

   A. $(4; -3)$
   B. $(2; 2)$
   C. $(1; 1)$
   D. $(1; 3)$

3. ● Il coefficiente angolare della retta $3x - 2y + 6 = 0$ è:

   A. $\frac{3}{2}$
   B. $-\frac{3}{2}$
   C. 3
   D. $\frac{2}{3}$

4. ● Quale retta è perpendicolare a $y = 4x - 1$?

   A. $y = 4x + 1$
   B. $y = -4x$
   C. $y = \frac{1}{4}x$
   D. $y = -\frac{1}{4}x + 3$

5. ●● Quale di queste rette **non** ha coefficiente angolare?

   A. $y = 0$
   B. $x = -2$
   C. $y = x$
   D. $x + y = 0$

6. ●● I punti $A(0; 1)$, $B(2; 5)$ e $C(k; 9)$ sono allineati per:

   A. $k = 3$
   B. $k = 5$
   C. $k = 4$
   D. $k = 6$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
   a) Ogni retta del piano ha un'equazione della forma $y = mx + q$.
   b) Le rette $y = 3x + 1$ e $6x - 2y + 5 = 0$ sono parallele.
   c) Se due rette hanno coefficienti angolari con prodotto -1, sono perpendicolari.
   d) La retta $x = 5$ è parallela all'asse x.
   e) Le equazioni $2x + 4y - 6 = 0$ e $x + 2y - 3 = 0$ rappresentano la stessa retta.
   f) La distanza di un punto P da una retta r è la lunghezza di un qualunque segmento che unisce P a un punto di r.

8. ● Completa.
   a) Il coefficiente angolare della retta per $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$, con $x_1 \neq x_2$, è _____ .
   b) Due rette non parallele agli assi sono perpendicolari se e solo se _____ .
   c) L'insieme di tutte le rette che passano per un punto si chiama _____ ; il punto si chiama _____ .
   d) Nell'equazione $y = mx + q$, il numero q è l'ordinata del punto in cui la retta incontra _____ .
   e) La retta di equazione $ax + by + c = 0$ è verticale quando _____ .

Calcolare

9. ● Calcola la distanza tra i due punti e le coordinate del punto medio del segmento che li unisce: a) $A(2; 3)$, $B(8; 11)$; b) $C(-1; 4)$, $D(-1; -6)$; c) $E(-3; -2)$, $F(1; 1)$.

10. ● Il triangolo ha vertici $A(1; -1)$, $B(7; -1)$, $C(4; 3)$. Calcola le lunghezze dei lati, il perimetro, l'area e le coordinate del baricentro. Che tipo di triangolo è?

11. ●● Verifica che il triangolo di vertici $A(-2; 0)$, $B(2; 2)$, $C(1; 4)$ è rettangolo e indica il vertice dell'angolo retto. Calcola perimetro e area.

12. ●● Trova il punto P dell'asse x che è equidistante da $A(1; 3)$ e da $B(5; 1)$.

13. ●● a) Verifica che $A(0; 0)$, $B(6; 0)$, $C(8; 5)$, $D(2; 5)$ sono i vertici di un parallelogramma e calcolane l'area. b) Calcola l'area del quadrilatero di vertici $A(-2; -1)$, $B(4; -3)$, $C(5; 3)$, $D(0; 4)$ con il metodo del rettangolo.

14. ● Scrivi l'equazione della retta: a) per $P(2; -3)$ con coefficiente angolare 4; b) per l'origine e per $(3; -6)$; c) parallela all'asse x per $(5; -2)$; d) parallela all'asse y per $(5; -2)$.

15. ● Per ciascuna retta trova, se esistono, il coefficiente angolare e l'ordinata all'origine: a) $2x + y - 5 = 0$; b) $3x - 4y + 8 = 0$; c) $x - 3 = 0$. d) Scrivi in forma implicita, con coefficienti interi, la retta $y = \frac{2}{3}x - 1$.

16. ●● Scrivi l'equazione della retta che passa per i due punti: a) $A(1; 2)$, $B(3; 8)$; b) $A(-2; 5)$, $B(4; 5)$; c) $A(3; -1)$, $B(3; 6)$; d) $A(-1; -3)$, $B(2; 3)$.

17. ●● Data la retta r: $2x - 3y + 6 = 0$ e il punto $P(3; -1)$, scrivi le equazioni della parallela e della perpendicolare a r passanti per P.

18. ●● Trova il punto d'intersezione delle rette r: $y = 3x - 2$ e s: $x + 2y - 10 = 0$. Le due rette sono perpendicolari?

19. ●● Calcola la distanza: a) di $P(1; 2)$ dalla retta $3x + 4y - 1 = 0$; b) di $Q(-2; 3)$ dalla retta $y = 2x + 3$; c) dell'origine dalla retta $5x - 12y + 26 = 0$.

20. ●● Scrivi l'equazione dell'asse del segmento di estremi $A(-1; 4)$ e $B(3; 0)$ in due modi: come perpendicolare nel punto medio e come luogo dei punti equidistanti dagli estremi.

Dimostrare e argomentare

21. ● Spiega perché una retta verticale non ha né forma esplicita né coefficiente angolare. Che cosa succede alla formula $m = (y_2 - y_1) : (x_2 - x_1)$ se i due punti hanno la stessa ascissa?

22. ●● Dimostra con le coordinate che in un triangolo rettangolo il punto medio dell'ipotenusa è equidistante dai tre vertici. *Suggerimento:* metti i cateti sugli assi, con vertici $O(0; 0)$, $A(a; 0)$, $B(0; b)$.

23. ●● Dimostra con le coordinate che le diagonali di un parallelogramma si tagliano scambievolmente a metà. *Suggerimento:* usa i vertici $O(0; 0)$, $A(a; 0)$, $B(a + b; c)$, $C(b; c)$, e confronta i punti medi di OB e di AC.

24. ●● Trova l'errore. a) «La retta per $A(1; 3)$ e $B(4; -3)$ ha coefficiente angolare $m = (-3 - 3) : (1 - 4) = 2$.» b) «La distanza di $P(1; 1)$ dalla retta $y = 2x + 3$ è $|2 \cdot 1 + 3| : \sqrt{4} = \frac{5}{2}$.»

25. ●●● Dimostra che, per ogni a, b non entrambi nulli e per ogni c, c', le rette $ax + by + c = 0$ e $bx - ay + c' = 0$ sono perpendicolari. Distingui i casi $a \neq 0$ e $b \neq 0$, $a = 0$, $b = 0$.

Problemi

26. ● Un taxi applica una tariffa di 4 € alla partenza più 1,20 € per ogni chilometro. Scrivi il costo C in funzione dei chilometri x e spiega il significato di coefficiente angolare e ordinata all'origine. Quanto costa una corsa di 7,5 km? Quanti chilometri si percorrono con 22 €?

27. ●● Per noleggiare un'auto per un giorno l'agenzia A chiede 50 € più 0,20 € al chilometro, l'agenzia B 30 € più 0,30 € al chilometro. Per quale percorrenza le due offerte costano lo stesso? Quale agenzia conviene per un viaggio di 150 km? E per uno di 300 km?

28. ●● Una candela, accesa da un'ora, è alta 24 cm; dopo 4 ore dall'accensione è alta 18 cm. Supponendo che si consumi a ritmo costante, scrivi l'altezza h in funzione del tempo t (in ore) trascorso dall'accensione. Quanto era alta la candela nuova? Dopo quanto tempo si spegnerà? Qual è un dominio sensato per il modello?

29. ●● Un treno viaggia a velocità costante su una linea rettilinea. Alle 9:00 si trova al chilometro 20, alle 11:00 al chilometro 200. Scrivi la legge oraria $s = s_0 + vt$, con t in ore a partire dalle 9:00, e calcola a che ora il treno passerà dal chilometro 290.

30. ●● In una mappa con unità di misura 100 m una strada rettilinea ha equazione $x - 2y + 4 = 0$ e una casa si trova nel punto $P(6; 2)$. Qual è il percorso più breve dalla casa alla strada? Calcola la sua lunghezza in metri (al metro) e il punto della strada in cui arriva.

Con il computer

31. ● Con un programma di geometria dinamica disegna due punti liberi A e B e la retta AB, e fai mostrare il suo coefficiente angolare. a) Trascina B finché m vale 0, poi finché non è più definito: dove si trova B in ciascun caso? b) Costruisci la perpendicolare ad AB per A, fai mostrare il suo coefficiente angolare e fai calcolare al programma il prodotto dei due coefficienti. Che cosa osservi trascinando i punti?

32. ●● In un foglio di calcolo scrivi in due celle i valori di m e di q, in una colonna i valori di x da -3 a 3 e nella colonna accanto i corrispondenti valori di $y = mx + q$. In una terza colonna calcola la differenza tra ogni valore di y e il precedente. Che cosa trovi? Spiega perché, cambiando m e q, il risultato resta sempre lo stesso tipo di numero.

Verso la verifica

33. ●● Il triangolo ha vertici $A(-2; -1)$, $B(4; 2)$, $C(0; 6)$. a) Scrivi l'equazione della retta AB. b) Scrivi l'equazione della retta che contiene l'altezza relativa al lato AB e trova il suo piede H. c) Calcola la lunghezza dell'altezza e l'area del triangolo, e controlla l'area con il metodo del rettangolo. d) Trova il baricentro.

34. ●● Considera il fascio di rette di centro $P(2; 1)$. Trova le rette del fascio che: a) passano per l'origine; b) sono parallele alla retta $3x + y = 0$; c) sono perpendicolari alla retta $y = \frac{1}{4}x$; d) sono parallele all'asse y.

35. ●●● **Sfida.** Dati $A(1; 0)$ e $B(5; 2)$, trova i punti C della retta $y = x$ tali che il triangolo ABC abbia area 6.

PER APPROFONDIRE

- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: i capitoli su Cartesio e Fermat e la nascita della geometria analitica.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: la geometria analitica e il rapporto tra equazioni e luoghi geometrici.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: come scegliere le coordinate per semplificare un problema geometrico, utile per gli esercizi di dimostrazione con le coordinate.

Glossario del capitolo

Asse di un segmento
Retta perpendicolare al segmento nel suo punto medio; è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi.

Centro del fascio
Punto per cui passano tutte le rette di un fascio proprio.

Coefficiente angolare
Il numero m nell'equazione $y = mx + q$; è il rapporto $\Delta y/\Delta x$ tra le variazioni di ordinata e di ascissa di due punti qualsiasi della retta.

Distanza di un punto da una retta
Lunghezza del segmento di perpendicolare condotto dal punto alla retta; per $P(x_0; y_0)$ e $ax + by + c = 0$ vale $|ax_0 + by_0 + c| / \sqrt{(a^2 + b^2)}$.

Distanza tra due punti
Lunghezza del segmento che li unisce: $\sqrt{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)}$.

Equazione di una curva
Equazione in x e y le cui soluzioni sono esattamente le coppie di coordinate dei punti della curva.

Estrapolazione
Uso di un modello, ricavato da alcuni dati, fuori dall'intervallo di quei dati; è molto meno affidabile dell'interpolazione.

Fascio improprio
Insieme di tutte le rette parallele a una retta data: $y = mx + k$ con m fisso, oppure $x = k$.

Fascio proprio
Insieme di tutte le rette che passano per un punto $P_0(x_0; y_0)$: $y - y_0 = m(x - x_0)$ e la retta $x = x_0$.

Forma esplicita
Equazione di una retta non verticale risolta rispetto a y: $y = mx + q$.

Forma implicita
Equazione di una retta nella forma $ax + by + c = 0$, con a e b non entrambi nulli; descrive tutte le rette, anche quelle verticali.

Interpolazione lineare
Stima dei valori di una grandezza tra due misure note, sostituendo il fenomeno con la retta che passa per i due punti.

Modello lineare
Descrizione di un fenomeno con una legge del tipo $y = mx + q$.

Ordinata all'origine
Il numero q nell'equazione $y = mx + q$: l'ordinata del punto in cui la retta incontra l'asse y.

Punti allineati
Punti che appartengono a una stessa retta.

Punto medio
Punto che divide un segmento in due parti congruenti; le sue coordinate sono le medie delle coordinate degli estremi.

Tasso di variazione
In un modello lineare, la variazione di y per ogni unità di x: è il coefficiente angolare, con le sue unità di misura.

Soluzioni

1. B. $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

2. C. $M(\frac{-3+5}{2}; \frac{4-2}{2}) = (1; 1)$.

3. A. $2y = 3x + 6$, $y = \frac{3}{2}x + 3$; oppure $m = -a/b = -3/(-2) = 3/2$.

4. D. Serve $m' = -1/4$.

5. B. $x = -2$ è verticale.

6. C. La retta AB ha $m = 4/2 = 2$ ed equazione $y = 2x + 1$; $9 = 2k + 1$ dà $k = 4$.

7. a) F: le rette verticali $x = h$ non hanno forma esplicita. b) V: entrambe hanno $m = 3$ (la seconda è $y = 3x + 5/2$), con q diverso. c) V (rette non parallele agli assi). d) F: è parallela all'asse y. e) V: la prima è il doppio della seconda. f) F: è la lunghezza del segmento di *perpendicolare*, il più corto di tutti.

8. a) $(y_2 - y_1) : (x_2 - x_1)$; b) $m \cdot m' = -1$; c) fascio proprio; centro del fascio; d) l'asse y; e) $b = 0$ (e $a \neq 0$).

9. a) $AB = \sqrt{36 + 64} = 10$, $M(5; 7)$. b) Stessa ascissa: $CD = |-6 - 4| = 10$, $M(-1; -1)$. c) $EF = \sqrt{16 + 9} = 5$, $M(-1; -½)$.

10. $AB = 6$, $AC = BC = \sqrt{9 + 16} = 5$; perimetro 16; base AB parallela all'asse x, altezza $3 - (-1) = 4$, area 12; $G(4; \frac{1}{3})$. Triangolo isoscele sulla base AB.

11. $AB^2 = 16 + 4 = 20$, $BC^2 = 1 + 4 = 5$, $AC^2 = 9 + 16 = 25$: $AB^2 + BC^2 = AC^2$, rettangolo in B. Perimetro $2\sqrt{5} + \sqrt{5} + 5 = 3\sqrt{5} + 5 \approx 11{,}71$; area $2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} : 2 = 5$.

12. $P(x; 0)$: $(x - 1)^2 + 9 = (x - 5)^2 + 1$, $-2x + 10 = -10x + 26$, $x = 2$. $P(2; 0)$ ($PA = PB = \sqrt{10}$).

13. a) AB e DC sono orizzontali e lunghi 6; AD e BC hanno entrambi $m = 5/2$: i lati opposti sono paralleli. Area = base · altezza = $6 \cdot 5 = 30$. b) Rettangolo da $x = -2$ a $x = 5$ e da $y = -3$ a $y = 4$: area 49. Triangoli da togliere: 6 (cateti 6 e 2), 3 (1 e 6), 2,5 (5 e 1), 5 (2 e 5). Area $49 - 16{,}5 = 32{,}5$.

14. a) $y + 3 = 4(x - 2)$, $y = 4x - 11$; b) $y = -2x$; c) $y = -2$; d) $x = 5$.

15. a) $y = -2x + 5$: $m = -2$, $q = 5$. b) $y = ¾x + 2$: $m = ¾$, $q = 2$. c) $x = 3$, retta verticale: né m né q. d) $2x - 3y - 3 = 0$.

16. a) $m = 3$, $y = 3x - 1$; b) $y = 5$ (orizzontale); c) $x = 3$ (verticale); d) $m = 2$, $y = 2x - 1$.

17. r ha $m = \frac{2}{3}$. Parallela: $y + 1 = \frac{2}{3}(x - 3)$, $y = \frac{2}{3}x - 3$ ($2x - 3y - 9 = 0$). Perpendicolare: $y + 1 = -\frac{3}{2}(x - 3)$, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$ ($3x + 2y - 7 = 0$).

18. $x + 2(3x - 2) = 10$, $7x = 14$, $x = 2$, $y = 4$: punto $(2; 4)$. Non sono perpendicolari: $3 \cdot (-½) = -\frac{3}{2} \neq -1$.

19. a) $|3 + 8 - 1| : 5 = 2$. b) $2x - y + 3 = 0$: $|-4 - 3 + 3| : \sqrt{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \approx 1{,}79$. c) $26 : \sqrt{25 + 144} = 26 : 13 = 2$.

20. $M(1; 2)$; la retta AB ha $m = -1$, quindi l'asse ha $m' = 1$: $y = x + 1$. Come luogo: $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = (x - 3)^2 + y^2$ dà $8x - 8y + 8 = 0$, cioè $x - y + 1 = 0$: la stessa retta.

21. Tutti i punti di una retta verticale hanno la stessa ascissa h e ordinate qualsiasi: nessuna formula $y = mx + q$, che assegna una sola y a ogni x, può descriverla. Nella formula di m il denominatore $x_2 - x_1$ vale 0 e il rapporto non esiste.

22. Il punto medio dell'ipotenusa AB è $M(a/2; b/2)$. $MO^2 = a^2/4 + b^2/4$; $MA^2 = (a - a/2)^2 + (b/2)^2 = a^2/4 + b^2/4$; $MB^2 = (a/2)^2 + (b/2 - b)^2 = a^2/4 + b^2/4$. Le tre distanze sono uguali. c.v.d.

23. $OABC$ è un parallelogramma perché OA e CB sono orizzontali e lunghi a. Punto medio di OB: $((a + b)/2; c/2)$; punto medio di AC: $((a + b)/2; c/2)$. Coincidono, quindi le diagonali si incontrano nel punto medio di ciascuna. c.v.d.

24. a) Le differenze sono fatte in ordine diverso ($y_B - y_A$ sopra, $x_A - x_B$ sotto): corretto $m = (-3 - 3) : (4 - 1) = -2$. b) La retta non è in forma implicita e nel denominatore manca il coefficiente di y: con $2x - y + 3 = 0$, $d = |2 - 1 + 3| : \sqrt{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

25. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$: $m = -a/b$ e $m' = b/a$, prodotto -1, e nessuna delle due è parallela agli assi. Se $a = 0$ (quindi $b \neq 0$): la prima è $by + c = 0$, orizzontale, la seconda $bx + c' = 0$, verticale: perpendicolari. Se $b = 0$ (quindi $a \neq 0$): la prima è $ax + c = 0$, verticale, la seconda $-ay + c' = 0$, orizzontale. c.v.d.

26. $C = 4 + 1{,}2x$: 1,20 €/km (coefficiente angolare) è il costo di ogni chilometro in più, 4 € (ordinata all'origine) è lo scatto alla partenza. 7,5 km: $4 + 9 = 13$ €. $4 + 1{,}2x = 22$: $x = 15$ km.

27. $50 + 0{,}2x = 30 + 0{,}3x$: $x = 200$ km (90 € con entrambe). 150 km: A 80 €, B 75 €, conviene B. 300 km: A 110 €, B 120 €, conviene A. In generale B conviene sotto i 200 km, A sopra.

28. Tasso: $(18 - 24) : (4 - 1) = -2$ cm/h. $h - 24 = -2(t - 1)$, $h = 26 - 2t$. Nuova: 26 cm. Si spegne quando $h = 0$: $t = 13$ h. Dominio sensato: $0 \leq t \leq 13$.

29. $v = (200 - 20) : 2 = 90$ km/h, $s = 20 + 90t$. $20 + 90t = 290$: $t = 3$, cioè alle 12:00.

30. Il percorso più breve è il segmento di perpendicolare. $d = |6 - 4 + 4| : \sqrt{5} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \approx 2{,}683$ unità, cioè circa 268 m. Perpendicolare per P: $m = -2$, $y = -2x + 14$; con la strada: $x - 2(-2x + 14) + 4 = 0$, $x = 24/5$, $y = 22/5$. Punto $H(4{,}8;\ 4{,}4)$.

31. a) $m = 0$ quando B ha la stessa ordinata di A (retta orizzontale); m non è definito quando B ha la stessa ascissa di A (retta verticale). b) Il prodotto vale sempre -1, finché nessuna delle due rette è parallela a un asse; quando lo diventano il programma non può più calcolarlo.

32. Le differenze sono tutte uguali a m: aumentando x di 1, y aumenta di $m(x + 1) + q - (mx + q) = m$. Cambiando m e q le differenze restano costanti (uguali al nuovo m): è la caratteristica delle funzioni lineari.

33. a) $m = 3/6 = \frac{1}{2}$, $y + 1 = \frac{1}{2}(x + 2)$, cioè $y = \frac{1}{2}x$ $(x - 2y = 0)$. b) $y - 6 = -2x$, $y = -2x + 6$; $x = 2(-2x + 6)$ dà $x = 12/5$, $H(\frac{12}{5};\ \frac{6}{5})$. c) $h = |0 - 12| : \sqrt{5} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$; $AB = \sqrt{\overline{36 + 9}} = 3\sqrt{5}$; area $\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{12\sqrt{5}}{5} = 18$. Rettangolo $6 \times 7 = 42$ meno $9 + 8 + 7 = 24$: 18. ✓ d) $G(\frac{2}{3};\ \frac{7}{3})$.

34. Fascio $y - 1 = m(x - 2)$. a) $-1 = -2m$, $m = \frac{1}{2}$: $y = \frac{1}{2}x$. b) $m = -3$: $y = -3x + 7$. c) $m = -4$: $y = -4x + 9$. d) $x = 2$.

35. La retta AB ha $m = \frac{1}{2}$: $x - 2y - 1 = 0$; $AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Per $C(t;\ t)$: altezza $|t - 2t - 1| : \sqrt{5} = |t + 1| : \sqrt{5}$, area $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot |t + 1| : \sqrt{5} = |t + 1|$. $|t + 1| = 6$ dà $t + 1 = 6$ oppure $t + 1 = -6$: $C(5;\ 5)$ oppure $C(-7;\ -7)$.