CAPITOLO

5

Proporzionalità e similitudine

Stessa forma, altra misura: dalla fotocopia alla carta geografica, la geometria che cambia scala. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Distinguere grandezze commensurabili e incommensurabili e operare con rapporti e proporzioni tra grandezze.
2. Enunciare e dimostrare il teorema di Talete, i suoi corollari e il teorema della bisettrice.
3. Riconoscere poligoni simili e applicare i criteri di similitudine dei triangoli, dimostrando il primo.
4. Usare i rapporti tra perimetri, altezze e aree di figure simili.
5. Dimostrare con la similitudine i teoremi di Euclide e i teoremi delle corde, delle secanti, della tangente e della secante.
6. Costruire la sezione aurea di un segmento e risolvere problemi di misure inaccessibili e di scale.

INDICE DEL CAPITOLO

5.1 Grandezze proporzionali 2
5.2 Il teorema di Talete 4
5.3 La similitudine 8
5.4 Perimetri e aree di figure simili 10
5.5 La similitudine nel triangolo rettangolo e nella circonferenza 12
5.6 Applicazioni: la sezione aurea e le misure inaccessibili 15

Matematica 2 · Parte II · Geometria del piano · versione 1.0
Capitolo 5: Proporzionalità e similitudine · pagine 117–140 del volume completo · estratto per lo studio

Una fotocopia ingrandita, una cartina stradale, il plastico di un edificio, l'immagine capovolta dentro una camera oscura: in tutti questi casi due figure hanno **la stessa forma** ma **dimensioni diverse**. Riconoscere quando due figure hanno la stessa forma, e sapere che cosa cambia e che cosa resta uguale passando dall'una all'altra, è l'oggetto di questo capitolo: la **similitudine**.

Lo strumento che rende possibile tutto il resto è il **teorema di Talete**. In *Matematica 1* ne hai visto una versione ridotta, il piccolo teorema di Talete: un fascio di parallele che stacca segmenti congruenti su una trasversale li stacca congruenti su ogni altra. Qui lo estendiamo ai segmenti di lunghezza qualsiasi, che non sono più congruenti ma **proporzionali**. Per farlo dobbiamo prima precisare che cosa significhi il rapporto tra due segmenti, anche quando, come per il lato e la diagonale di un quadrato, non esiste un'unità di misura che li contenga entrambi un numero intero di volte. Alla fine del capitolo la similitudine ci restituirà, con una dimostrazione nuova, i teoremi di Euclide e di Pitagora del capitolo 4, e ci darà strumenti per misurare ciò che non si può raggiungere: l'altezza di un albero, di una torre, di una piramide.

5.1 Grandezze proporzionali

5.1.1 Grandezze omogenee e rapporti

Due grandezze si dicono **omogenee** quando si possono confrontare e sommare tra loro: due segmenti, due angoli, due superfici. Un segmento e un angolo non sono omogenei: non ha senso chiedersi quale dei due sia «più grande». Date due grandezze omogenee A e B, chiediamoci quante volte B è contenuta in A.

Se esiste una terza grandezza U, omogenea alle prime, che sia contenuta un numero intero di volte sia in A sia in B, per esempio $A = 7U$ e $B = 4U$, si dice che A e B sono **grandezze commensurabili** e che U è un loro *sottomultiplo comune*. Il **rapporto** tra A e B è allora il numero razionale

$$\frac{A}{B} = \frac{7}{4}.$$

Non sempre però un sottomultiplo comune esiste. Nel capitolo 4 abbiamo visto che il lato l e la diagonale $d = l\sqrt{2}$ di un quadrato non possono essere entrambi multipli interi di uno stesso segmento: se fosse $d = mU$ e $l = nU$, avremmo $d/l = m/n = \sqrt{2}$, e $\sqrt{2}$ sarebbe razionale, contro quanto dimostrato in *Matematica 1*. Grandezze omogenee prive di un sottomultiplo comune si dicono incommensurabili. Anche per esse si definisce un rapporto, che però è un **numero irrazionale**: si ottiene, come nel capitolo 1, con una successione di approssimazioni razionali per difetto e per eccesso, sempre più strette, che individuano un unico numero reale. Per il lato e la diagonale del quadrato il rapporto è $d : l = \sqrt{2}$.

Il risultato è che il rapporto tra due grandezze omogenee è sempre un **numero reale positivo**: razionale se le grandezze sono commensurabili, irrazionale se sono incommensurabili. Scelta un'unità U, la **misura** di una grandezza A è il rapporto $A : U$; il rapporto tra due grandezze è uguale al rapporto tra le loro misure (rispetto alla stessa unità). D'ora in poi scriveremo quindi indifferentemente $AB : CD$ per il rapporto tra due segmenti e per il quoziente delle loro lunghezze.

> **DA RICORDARE**
>
> Il rapporto tra due grandezze **non dipende dall'unità di misura**, purché sia la stessa per entrambe. Un segmento di 18 cm e uno di 2,4 dm stanno nel rapporto $18 : 24 = 3 : 4$, non $18 : 2{,}4$: prima di dividere, porta le misure alla stessa unità. Il rapporto è un numero puro, senza unità.

5.1.2 Proporzioni

Quattro grandezze A, B, C, D, le prime due omogenee tra loro e le ultime due omogenee tra loro, formano una **proporzione** se il rapporto tra le prime due è uguale al rapporto tra le ultime due:

$$A : B = C : D \quad \text{(si legge «}A\text{ sta a }B\text{ come }C\text{ sta a }D\text{»)}.$$

A e D sono gli *estremi*, B e C i *medi*. Poiché i rapporti sono numeri reali, una proporzione tra grandezze equivale a una proporzione tra le loro misure, e valgono le proprietà che conosci dalla scuola media e che, per i numeri, si verificano con il calcolo letterale di *Matematica 1*. Se $a : b = c : d$ con a, b, c, d positivi:

- **proprietà fondamentale**: $a \cdot d = b \cdot c$ (il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi);
- **permutare**: $a : c = b : d$ (se le quattro grandezze sono tutte omogenee) e **invertire**: $b : a = d : c$;
- **comporre**: $(a + b) : b = (c + d) : d$, e anche $(a + b) : a = (c + d) : c$;
- **scomporre**: $(a - b) : b = (c - d) : d$, se $a > b$ (e quindi $c > d$).

Una proporzione con i medi uguali, $a : b = b : c$, si dice **continua**, e b è il **medio proporzionale** tra a e c: dalla proprietà fondamentale $b^2 = a \cdot c$, cioè $b = \sqrt{ac}$. Per esempio il medio proporzionale tra 4 e 9 è 6, perché $4 : 6 = 6 : 9$. Incontreremo presto medi proporzionali nel triangolo rettangolo.

5.1.3 Classi di grandezze direttamente proporzionali

Consideriamo due insiemi (o *classi*) di grandezze, per esempio i segmenti di una retta e i segmenti di un'altra, e una corrispondenza biunivoca che a ogni grandezza A della prima classe associa una grandezza A' della seconda. Le due classi si dicono **direttamente proporzionali** se il rapporto tra due grandezze qualsiasi della prima è uguale al rapporto tra le corrispondenti della seconda:

$$A : B = A' : B' \quad \text{per ogni coppia } A, B.$$

È la stessa idea della proporzionalità diretta tra numeri di *Matematica 1* ($y = kx$): se A' è il doppio, il triplo, la metà di qualcosa, lo è anche la sua corrispondente. Verificare la definizione su *tutte* le coppie è impossibile; per fortuna basta molto meno. Ricordiamo senza dimostrazione il

IN SINTESI

Criterio di proporzionalità. Due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca sono direttamente proporzionali se e solo se a) a grandezze congruenti corrispondono grandezze congruenti, e b) alla somma di due grandezze corrisponde la somma delle grandezze corrispondenti.

Un esempio importante viene dal capitolo 4. Tra i rettangoli che hanno la stessa altezza, la corrispondenza «base ↦ rettangolo» soddisfa entrambe le condizioni: basi congruenti danno rettangoli congruenti, e se si affiancano due basi i rettangoli si affiancano. Dunque **rettangoli con la stessa altezza stanno tra loro come le basi**; allo stesso modo triangoli con la stessa altezza stanno tra loro come le basi.

5.2 Il teorema di Talete

5.2.1 Il teorema generale

Un **fascio di rette parallele** è l'insieme delle rette di un piano parallele a una retta data; una retta che le taglia tutte si dice **trasversale**. Ogni segmento AB staccato su una trasversale t da due rette del fascio ha un *corrispondente* $A'B'$, staccato dalle stesse due rette su un'altra trasversale t'.

IN SINTESI

Teorema di Talete. Un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali determina su di esse due classi di segmenti direttamente proporzionali.

Ipotesi: $a \parallel b \parallel c \parallel d$; la trasversale t le taglia in A, B, C, D, la trasversale t' in A', B', C', D'. **Tesi:** $AB : CD = A'B' : C'D'$.

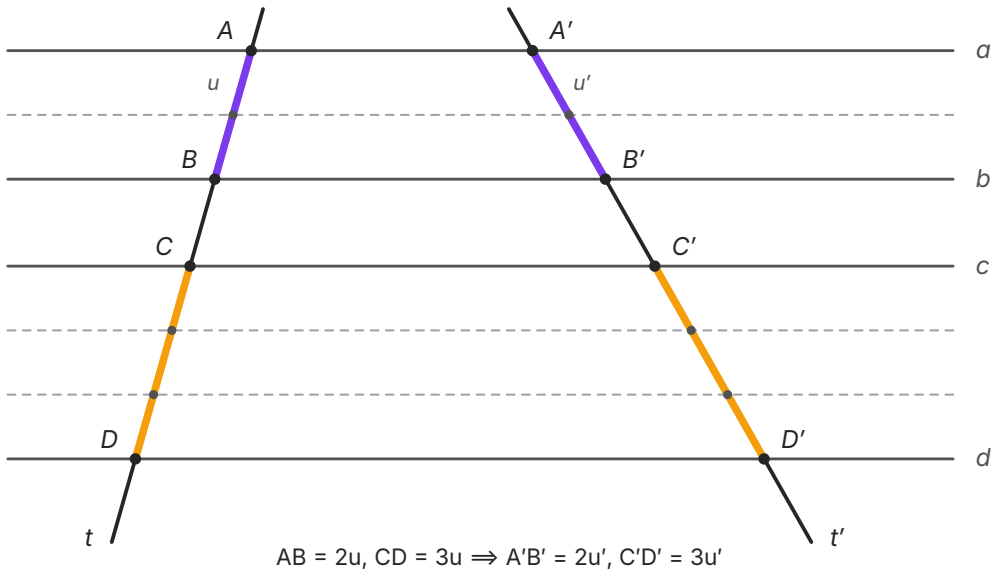


Figura 5.1 Il teorema di Talete nel caso commensurabile. Il sottomultiplo comune u è contenuto 2 volte in AB e 3 volte in CD; le parallele tratteggiate condotte per i punti di divisione staccano su t' segmenti tutti congruenti a uno stesso u' (piccolo teorema di Talete), quindi $A'B' = 2u'$ e $C'D' = 3u'$.

Dimostrazione (caso commensurabile, Figura 5.1). Supponiamo che AB e CD abbiano un sottomultiplo comune u: $AB = mu$ e $CD = nu$, con m, n naturali. Dividiamo AB in m parti e CD in n parti congruenti a u, e per ogni punto di divisione conduciamo la parallela alle rette del fascio. Tutte queste rette formano ancora un fascio di parallele, che stacca su t gli $m + n$ segmenti congruenti a u. Per il piccolo teorema di Talete (la cui dimostrazione vale anche per segmenti congruenti non consecutivi) le stesse rette staccano su t' segmenti tutti congruenti tra loro, diciamo a u': dunque $A'B' = mu'$ e $C'D' = nu'$. Allora

$$AB : CD = m : n \quad \text{e} \quad A'B' : C'D' = m : n,$$

e i due rapporti sono uguali. c.v.d.

Se AB e CD sono incommensurabili il teorema vale ancora, ma la dimostrazione richiede di approssimare il rapporto irrazionale con rapporti razionali, come nel capitolo 1: la tralasciamo. In entrambi i casi, la corrispondenza tra i segmenti di t e quelli di t' soddisfa il criterio di proporzionalità, ed è proprio questo l'enunciato del teorema. Permutando i medi si ottiene una forma equivalente, spesso comoda: $AB : A'B' = CD : C'D'$.

ERRORE FREQUENTE

Proporzionali, non congruenti. Il teorema di Talete non dice che $A'B' \cong AB$: le due trasversali possono essere inclinate in modo diverso, e i segmenti di t' possono essere tutti più lunghi o tutti più corti di quelli di t. Uguali sono soltanto i **rapporti** tra segmenti della stessa trasversale. Il caso dei segmenti congruenti ($AB \cong CD \Rightarrow A'B' \cong C'D'$) è il piccolo teorema di *Matematica 1*, che ora è un caso particolare del teorema generale (rapporto 1).

5.2.2 La parallela a un lato di un triangolo

Applichiamo il teorema a un triangolo ABC. Una retta parallela al lato BC incontri il lato AB in D e il lato AC in E. Le tre rette parallele DE, BC e la parallela a BC condotta per A formano un fascio; le trasversali sono AB e AC.

IN SINTESI

Corollario. Una retta parallela a un lato di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali: se $DE \parallel BC$, allora $AD : DB = AE : EC$, e anche $AD : AB = AE : AC$.

Teorema inverso. Se una retta divide due lati di un triangolo in parti proporzionali, $AD : DB = AE : EC$, allora è parallela al terzo lato.

Dimostrazione del teorema inverso. Per assurdo, sia DE non parallela a BC. La parallela a BC condotta per D incontra AC in un punto $E' \neq E$, e per il corollario $AD : DB = AE' : E'C$. Confrontando con l'ipotesi, $AE : EC = AE' : E'C$; componendo, $AE : AC = AE' : AC$, cioè $AE \cong AE'$. Ma su AC c'è un solo punto a distanza AE da A: $E' = E$, contro l'ipotesi. c.v.d.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Nel triangolo ABC si ha $AB = 15$ cm, $AC = 12$ cm e $BC = 10$ cm. Una parallela a BC incontra AB in D, con $AD = 6$ cm, e AC in E. Calcola AE ed EC.

Soluzione. Per il corollario $AD : AB = AE : AC$, cioè $6 : 15 = AE : 12$. La proprietà fondamentale dà $15 \cdot AE = 6 \cdot 12 = 72$, quindi $AE = 72 : 15 = 4{,}8$ cm, ed $EC = 12 - 4{,}8 = 7{,}2$ cm.

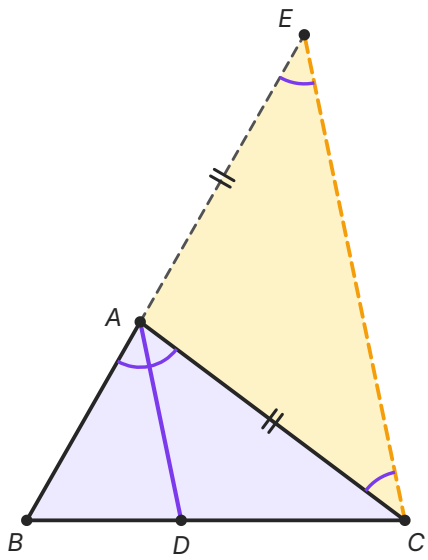
Controllo. $AD : DB = 6 : 9 = 2 : 3$ e $AE : EC = 4{,}8 : 7{,}2 = 2 : 3$: le parti sono proporzionali, come deve essere. Il lato BC non serve per questa domanda; servirà quando, nel prossimo paragrafo, calcoleremo anche DE.

5.2.3 Il teorema della bisettrice

IN SINTESI

Teorema della bisettrice. In un triangolo la bisettrice di un angolo interno divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.

Ipotesi: AD bisettrice di $\angle BAC$, D su BC. **Tesi:** $BD : DC = AB : AC$.



AD bisettrice: $\angle BAD \cong \angle DAC$

CE parallela ad AD: $\angle AEC \cong \angle BAD$, $\angle ACE \cong \angle DAC$

quindi ACE è isoscele: $AE \cong AC$

Talete (parallele AD, EC, trasversali BE, BC):

$$BD : DC = AB : AE = AB : AC$$

Figura 5.2 Il teorema della bisettrice. La parallela ad AD condotta per C incontra il prolungamento di BA in E; gli angoli marcati con un arco sono tutti congruenti, quindi il triangolo ACE è isoscele.

Dimostrazione (Figura 5.2). Da C conduciamo la parallela alla bisettrice AD; essa incontra il prolungamento del lato BA oltre A in un punto E. Gli angoli $\angle AEC$ e $\angle BAD$ sono corrispondenti rispetto alle parallele AD, EC tagliate da BE: sono congruenti. Gli angoli $\angle ACE$ e $\angle DAC$ sono alterni interni rispetto alle stesse parallele tagliate da AC: sono congruenti. Poiché $\angle BAD \cong \angle DAC$, il triangolo ACE ha due angoli congruenti, è isoscele e $AE \cong AC$. Ora le parallele AD ed EC, con la parallela a esse per B, formano un fascio tagliato dalle trasversali BE e BC; per il teorema di Talete $BD : DC = BA : AE$, e sostituendo AE con AC si ha la tesi. c.v.d.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Un triangolo ha i lati $AB = 6$ cm, $AC = 9$ cm, $BC = 10$ cm. La bisettrice dell'angolo in A incontra BC in D. Calcola BD e DC.

Soluzione. $BD : DC = 6 : 9$. Componendo, $(BD + DC) : BD = (6 + 9) : 6$, cioè $10 : BD = 15 : 6$, da cui $BD = 10 \cdot 6 : 15 = 4$ cm e $DC = 10 - 4 = 6$ cm. In pratica: il lato BC si divide in parti proporzionali a 6 e 9, cioè in $6 + 9 = 15$ «quote», di cui 6 vanno a BD.

5.3 La similitudine

5.3.1 Poligoni simili

Due poligoni con lo stesso numero di lati si dicono **simili** se si può stabilire tra i loro vertici una corrispondenza biunivoca tale che **gli angoli corrispondenti siano congruenti** e **i lati corrispondenti siano proporzionali**. Si scrive $F \sim F'$. Il rapporto costante tra un lato di F' e il lato corrispondente di F si chiama **rapporto di similitudine** e si indica con k:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \ldots = k.$$

Se $k > 1$ F' è un ingrandimento di F, se $k < 1$ una riduzione, se $k = 1$ i due poligoni sono congruenti: la congruenza è un caso particolare della similitudine. La similitudine è una relazione di equivalenza (riflessiva, simmetrica con rapporto $1/k$, transitiva con rapporto il prodotto dei rapporti).

Le due condizioni della definizione sono **indipendenti**, e servono entrambe. Un quadrato e un rettangolo di lati 1 e 2 hanno tutti gli angoli retti, ma non sono simili: i lati non sono in proporzione. Un quadrato e un rombo non quadrato con lo stesso lato hanno i lati in proporzione (rapporto 1), ma non sono simili: gli angoli sono diversi. Sono invece simili tra loro tutti i quadrati, tutti i triangoli equilateri e, più in generale, tutti i poligoni regolari con lo stesso numero di lati.

5.3.2 I criteri di similitudine dei triangoli

Per i triangoli, come per la congruenza, bastano meno informazioni. Ecco i tre **criteri di similitudine** (Figura 5.3).

IN SINTESI

Primo criterio (AA). Due triangoli che hanno due angoli rispettivamente congruenti sono simili.

Secondo criterio (LAL). Due triangoli che hanno due lati in proporzione e congruenti gli angoli tra essi compresi sono simili.

Terzo criterio (LLL). Due triangoli che hanno i tre lati in proporzione sono simili.

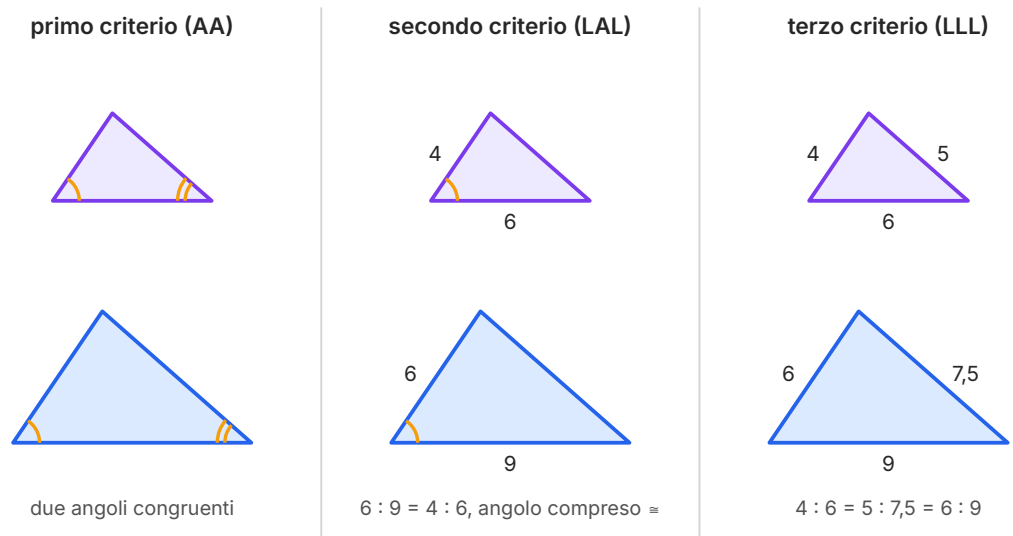


Figura 5.3 I tre criteri di similitudine, con rapporto $k = 1{,}5$. Nel primo bastano due coppie di angoli congruenti (archi); nel secondo due lati in proporzione e l'angolo compreso; nel terzo i tre lati in proporzione. I lati dei triangoli piccoli misurano 4, 5 e 6.

Nel primo criterio due angoli bastano perché il terzo, per differenza da 180°, è automaticamente congruente. Dimostriamo il primo criterio; gli altri due si dimostrano in modo analogo, usando anche il teorema inverso del paragrafo precedente (uno è proposto negli esercizi).

Dimostrazione del primo criterio. Siano ABC e $A'B'C'$ due triangoli con $\angle A \cong \angle A'$ e $\angle B \cong \angle B'$, quindi anche $\angle C \cong \angle C'$. Se $A'B' \cong AB$, i triangoli sono congruenti per il secondo criterio di congruenza, e simili con $k = 1$. Altrimenti, supponiamo $A'B' < AB$ (l'altro caso si tratta scambiando i ruoli dei triangoli).

1. Su AB prendiamo D con $AD \cong A'B'$ e su AC prendiamo E con $AE \cong A'C'$. I triangoli ADE e $A'B'C'$ sono congruenti per il primo criterio di congruenza ($\angle A \cong \angle A'$), quindi $\angle ADE \cong \angle B' \cong \angle B$ e $DE \cong B'C'$.

2. Gli angoli $\angle ADE$ e $\angle ABC$ sono corrispondenti rispetto alle rette DE, BC tagliate da AB, e sono congruenti: dunque $DE \parallel BC$. Per il corollario del teorema di Talete $AD : AB = AE : AC$.
3. Da E conduciamo la parallela ad AB, che incontra BC in F. Il quadrilatero $DBFE$ è un parallelogramma, quindi $BF \cong DE$. Per il corollario applicato alla parallela EF al lato AB, $AE : AC = BF : BC = DE : BC$.

In conclusione $A'B' : AB = A'C' : AC = B'C' : BC$: i lati sono in proporzione e gli angoli sono congruenti, quindi i triangoli sono simili. c.v.d.

Nei triangoli simili i lati in proporzione sono quelli **opposti ad angoli congruenti**: per non sbagliare la corrispondenza conviene scrivere i vertici nello stesso ordine degli angoli congruenti ($A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$). Due conseguenze del primo criterio si usano continuamente:

- **due triangoli rettangoli sono simili se hanno un angolo acuto congruente** (l'altro angolo congruente è quello retto);
- **una parallela a un lato di un triangolo stacca un triangolo simile al triangolo dato**: nel triangolo ABC, se $DE \parallel BC$, allora $ADE \sim ABC$ (angolo in A comune, angoli in D e in B corrispondenti).

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Riprendi il triangolo dell'esempio sulla parallela a un lato ($AB = 15$, $AC = 12$, $BC = 10$ cm, $AD = 6$ cm, $DE \parallel BC$). Calcola DE e il perimetro del triangolo ADE.

Soluzione. I triangoli ADE e ABC sono simili, con rapporto $k = AD : AB = 6 : 15 = 0{,}4$. Quindi $DE = 0{,}4 \cdot BC = 0{,}4 \cdot 10 = 4$ cm. Il perimetro di ABC è $15 + 12 + 10 = 37$ cm; quello di ADE è $6 + 4{,}8 + 4 = 14{,}8$ cm, e infatti $14{,}8 = 0{,}4 \cdot 37$.

ERRORE FREQUENTE

Lati corrispondenti, non lati «nella stessa posizione». Se due triangoli simili sono disegnati ruotati o ribaltati, è facile accoppiare i lati sbagliati. Nel triangolo rettangolo ABC (retto in A) con altezza AH, i triangoli HBA e ABC sono simili, ma il cateto AB del triangolo grande corrisponde all'ipotenusa AB del triangolo piccolo, non al suo cateto AH. Regola sicura: individua prima gli angoli congruenti, poi accoppia i lati opposti a essi.

5.4 Perimetri e aree di figure simili

Se due poligoni sono simili con rapporto k, ogni lato del secondo è k volte il lato corrispondente del primo. Sommando, anche il **perimetro** è moltiplicato per k: $2p' = k \cdot 2p$. Lo stesso vale per ogni altro segmento «corrispondente»: **le altezze, le mediane, le bisettrici corrispondenti** di due triangoli simili stanno nel rapporto k. Per le altezze basta osservare che l'altezza AH divide

il triangolo ABC in due triangoli rettangoli, e che $ABH \sim A'B'H'$ (rettangoli con $\angle B \cong \angle B'$): quindi $A'H' : AH = A'B' : AB = k$.

Per le **aree** le cose vanno diversamente. Se il triangolo $A'B'C'$ ha base $b' = kb$ e altezza $h' = kh$,

$$S' = \frac{b' \cdot h'}{2} = \frac{kb \cdot kh}{2} = k^2 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = k^2 \cdot S.$$

Un poligono si divide, con le diagonali uscenti da un vertice, in triangoli; nel poligono simile i triangoli corrispondenti sono simili con lo stesso rapporto k (lo si dimostra con il secondo criterio). Sommando le aree, il risultato vale per tutti i poligoni.

IN SINTESI

Se due poligoni sono simili con rapporto k: i **lati**, i **perimetri** e tutti i segmenti corrispondenti (altezze, mediane, diagonali...) stanno nel rapporto k; le **aree** stanno nel rapporto k^2. Per i solidi simili, che studierai più avanti, i **volumi** stanno nel rapporto k^3.

Raddoppiando le dimensioni di una figura, dunque, l'area diventa quattro volte più grande, non due; triplicandole, nove volte. Viceversa, se si conosce il rapporto delle aree $S' : S$, il rapporto di similitudine è la sua radice quadrata: $k = \sqrt{S' : S}$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Un triangolo ha area 50 cm² e perimetro 30 cm. Un triangolo simile ha area 72 cm². Calcola il suo perimetro.

Soluzione. Il rapporto delle aree è $72 : 50 = 1{,}44$, quindi $k = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$. Il perimetro, che è una lunghezza, si moltiplica per k, non per k^2: $2p' = 1{,}2 \cdot 30 = 36$ cm.

ERRORE FREQUENTE

«Ingrandisco una foto del 50%: l'area aumenta del 50%.» No: se i lati sono moltiplicati per $k = 1{,}5$, l'area è moltiplicata per $k^2 = 2{,}25$, cioè aumenta del 125%. Allo stesso modo una pizza di diametro 40 cm non equivale a due pizze di diametro 20 cm, ma a quattro: i cerchi sono tutti simili, e il rapporto delle aree è $2^2 = 4$.

COLLEGAMENTI

Fotocopie e formati della carta. I fogli della serie A (A3, A4, A5…) sono costruiti in modo che, piegando a metà un foglio lungo il lato maggiore, si ottenga un foglio **simile** al primo. Se i lati sono l (lungo) e w (corto), la metà ha lati w e $l/2$, e la similitudine richiede $l : w = w : (l/2)$, cioè $l^2 = 2w^2$ e $l : w = \sqrt{2}$. Infatti un A4 misura 210 mm × 297 mm e 297 : 210 ≈ 1,414. Per questo la fotocopiatrice ingrandisce da A4 ad A3 con il 141%: il rapporto di similitudine è $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, e l'area raddoppia ($k^2 = 2$). La riduzione da A4 ad A5 usa il 71% ($1/\sqrt{2} \approx 0{,}71$), e l'area si dimezza.

5.5 La similitudine nel triangolo rettangolo e nella circonferenza

5.5.1 I teoremi di Euclide, di nuovo

Nel capitolo 4 abbiamo dimostrato i teoremi di Euclide con l'equivalenza delle figure. La similitudine ne dà una dimostrazione più breve. Sia ABC un triangolo rettangolo in A, con l'altezza AH relativa all'ipotenusa; usiamo le notazioni del capitolo 4: $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $p = BH$, $q = HC$, $h = AH$ (Figura 5.4).

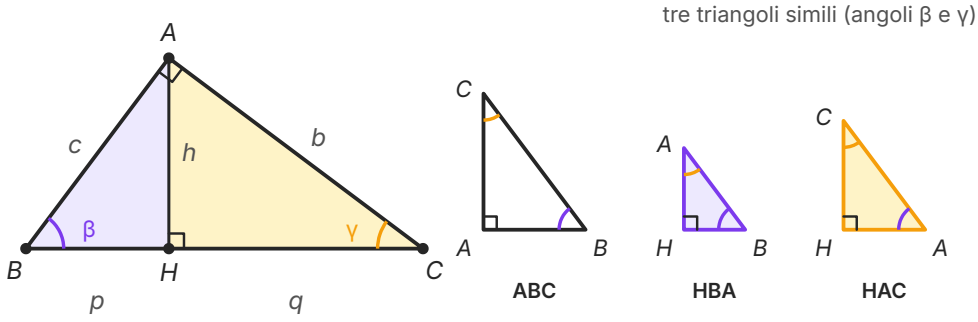


Figura 5.4 L'altezza relativa all'ipotenusa divide il triangolo rettangolo ABC in due triangoli rettangoli, HBA e HAC, simili tra loro e al triangolo dato. A destra i tre triangoli sono ridisegnati con la stessa orientazione: angolo retto in basso a sinistra, angolo β in basso a destra. Le misure sono quelle del triangolo di cateti 15 e 20: $p = 9$, $q = 16$, $h = 12$.

I triangoli HBA e ABC sono rettangoli (in H e in A) e hanno l'angolo β in B in comune: sono simili. Allo stesso modo $HAC \sim ABC$ (angolo γ in C in comune), e quindi, per la proprietà transitiva, $HBA \sim HAC$. Scriviamo le proporzioni tra lati opposti ad angoli congruenti.

- Da $HBA \sim ABC$: $BH : AB = AB : BC$, cioè $p : c = c : a$, e $c^2 = a \cdot p$: **il cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la sua proiezione** (primo teorema di Euclide). Allo stesso modo, da

$HAC \sim ABC$, $b^2 = a \cdot q$.

- Da $HBA \sim HAC$: $BH : AH = AH : HC$, cioè $p : h = h : q$, e $h^2 = p \cdot q$: **l'altezza è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti** (secondo teorema di Euclide).
- Sommando le due uguaglianze del primo punto: $b^2 + c^2 = a \cdot q + a \cdot p = a(p + q) = a \cdot a = a^2$. È il teorema di Pitagora, ottenuto questa volta con la similitudine.

Con il triangolo della Figura 5.4: $c^2 = 25 \cdot 9 = 225$, $c = 15$; $b^2 = 25 \cdot 16 = 400$, $b = 20$; $h^2 = 9 \cdot 16 = 144$, $h = 12$.

5.5.2 Corde e secanti

La similitudine, unita al teorema dell'angolo alla circonferenza del capitolo 3, produce tre teoremi «gemelli» (Figura 5.5).

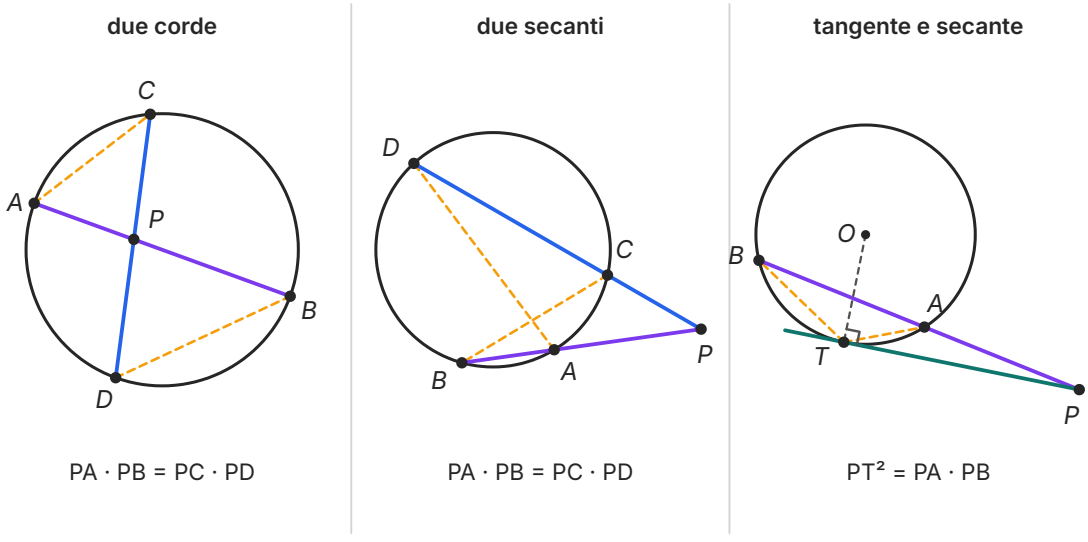


Figura 5.5 A sinistra, due corde che si incontrano in un punto P interno al cerchio; al centro, due secanti condotte da un punto P esterno; a destra, una tangente e una secante da un punto esterno. I segmenti tratteggiati formano, in ogni pannello, i due triangoli simili usati nella dimostrazione.

IN SINTESI

Teorema delle corde. Se due corde AB e CD di una circonferenza si incontrano in un punto P, i segmenti dell'una e i segmenti dell'altra formano i medi e gli estremi di una proporzione: $PA : PC = PD : PB$, cioè $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Teorema delle secanti. Se da un punto P esterno a una circonferenza si conducono due secanti, che la incontrano in A, B e in C, D, allora $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Teorema della tangente e della secante. Se da un punto P esterno si conducono una tangente, con punto di contatto T, e una secante che incontra la circonferenza in A e B, il segmento di tangente è medio proporzionale tra i segmenti di secante: $PA : PT = PT : PB$, cioè $PT^2 = PA \cdot PB$.

Dimostrazione del teorema delle corde. Congiungiamo A con C e D con B. I triangoli PAC e PDB hanno gli angoli in P congruenti, perché opposti al vertice, e $\angle CAB \cong \angle CDB$, perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco CB. Per il primo criterio sono simili, con $A \leftrightarrow D$, $C \leftrightarrow B$: quindi $PA : PD = PC : PB$ e, per la proprietà fondamentale, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. c.v.d.

Dimostrazione del teorema delle secanti. Siano A e C i punti più vicini a P. I triangoli PAD e PCB hanno l'angolo in P in comune e $\angle ADC \cong \angle ABC$, angoli alla circonferenza sull'arco AC. Sono simili, e $PA : PC = PD : PB$, cioè $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. c.v.d.

Dimostrazione del teorema della tangente e della secante. Sia A il punto della secante più vicino a P. I triangoli PTA e PBT hanno l'angolo in P in comune. Inoltre l'angolo $\angle PTA$, tra la tangente e la corda TA, è congruente agli angoli alla circonferenza che insistono sull'arco TA (capitolo 3, angolo tra tangente e corda), in particolare a $\angle TBA$. I triangoli sono simili e $PT : PB = PA : PT$, cioè $PT^2 = PA \cdot PB$. c.v.d.

Il terzo teorema si può leggere come caso limite del secondo: se la seconda secante ruota attorno a P fino a diventare tangente, i due punti C e D si avvicinano fino a coincidere in T, e $PC \cdot PD$ diventa PT^2.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Un punto P dista 13 cm dal centro O di una circonferenza di raggio 5 cm. Calcola il segmento di tangente PT in due modi diversi.

Soluzione 1 (Pitagora). La tangente è perpendicolare al raggio OT, quindi $PT^2 = PO^2 - OT^2 = 169 - 25 = 144$, $PT = 12$ cm.

Soluzione 2 (tangente e secante). La secante PO incontra la circonferenza in A, con $PA = 13 - 5 = 8$ cm, e in B, con $PB = 13 + 5 = 18$ cm. Allora $PT^2 = 8 \cdot 18 = 144$ e $PT = 12$ cm. I due risultati coincidono, come devono.

5.6 Applicazioni: la sezione aurea e le misure inaccessibili

5.6.1 La sezione aurea di un segmento

Dato un segmento AB, si chiama **sezione aurea** di AB la parte AC (con C su AB) che è media proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente:

$$AB : AC = AC : CB.$$

Il segmento intero sta alla parte maggiore come la parte maggiore sta alla minore. Euclide chiama questa divisione «in media ed estrema ragione» e la usa negli *Elementi* per costruire il pentagono regolare: in un pentagono regolare, infatti, il lato è la sezione aurea della diagonale. La sezione aurea si costruisce con riga e compasso (Figura 5.6).

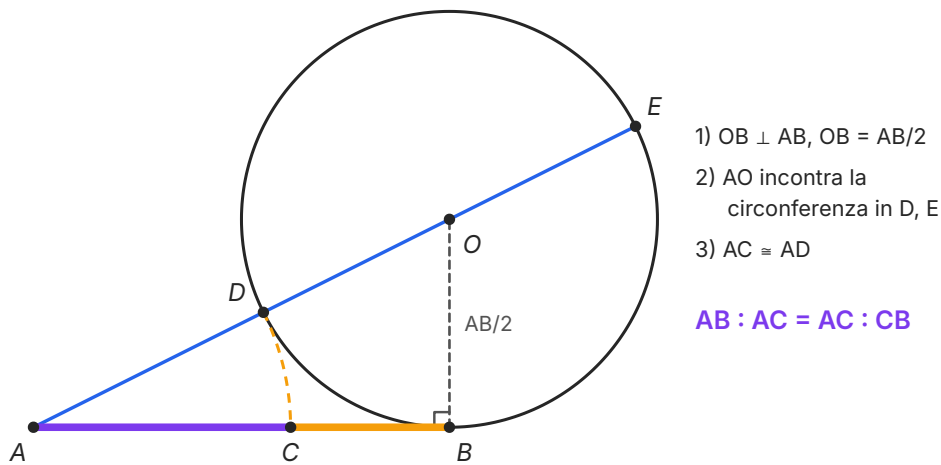


Figura 5.6 Costruzione della sezione aurea AC del segmento AB. La circonferenza di centro O e raggio $AB/2$ è tangente ad AB in B; la retta AO la incontra in D ed E, e l'arco di centro A riporta AD su AB.

1. In B si traccia la perpendicolare ad AB e su di essa si prende O con $BO \cong AB/2$.
2. Si traccia la circonferenza di centro O e raggio OB: è tangente in B alla retta AB, perché $AB \perp OB$.
3. La retta AO incontra la circonferenza in D (il punto più vicino ad A) e in E.
4. Con il compasso si riporta AD su AB: il punto C con $AC \cong AD$ è quello cercato.

Giustificazione. Per il teorema della tangente e della secante, AB è medio proporzionale tra AD e AE: $AE : AB = AB : AD$. Scomponendo, $(AE - AB) : AB = (AB - AD) : AD$. Ma DE è un diametro,

quindi $DE \cong AB$ e $AE - AB \cong AE - DE = AD \cong AC$; inoltre $AB - AD \cong AB - AC = CB$. La proporzione diventa $AC : AB = CB : AC$, e invertendo $AB : AC = AC : CB$. c.v.d.

Misurando la figura si trova che AC è circa il 61,8% di AB. Nel capitolo 8, con le equazioni di secondo grado, calcoleremo il valore esatto di questo rapporto. Sulla sezione aurea circolano molte affermazioni non dimostrate (che sia «la proporzione più bella», che la usassero sistematicamente pittori e architetti): la matematica garantisce le proprietà geometriche, non queste leggende.

5.6.2 Misure inaccessibili

Con i triangoli simili si misurano lunghezze che non si possono raggiungere con il metro. Il metodo più antico usa le ombre: in un dato istante i raggi del Sole che arrivano in un piccolo luogo sono, con ottima approssimazione, paralleli, quindi un oggetto verticale e la sua ombra formano con il raggio che passa per la sua cima un triangolo rettangolo, e tutti questi triangoli hanno lo stesso angolo α di inclinazione dei raggi: sono simili.

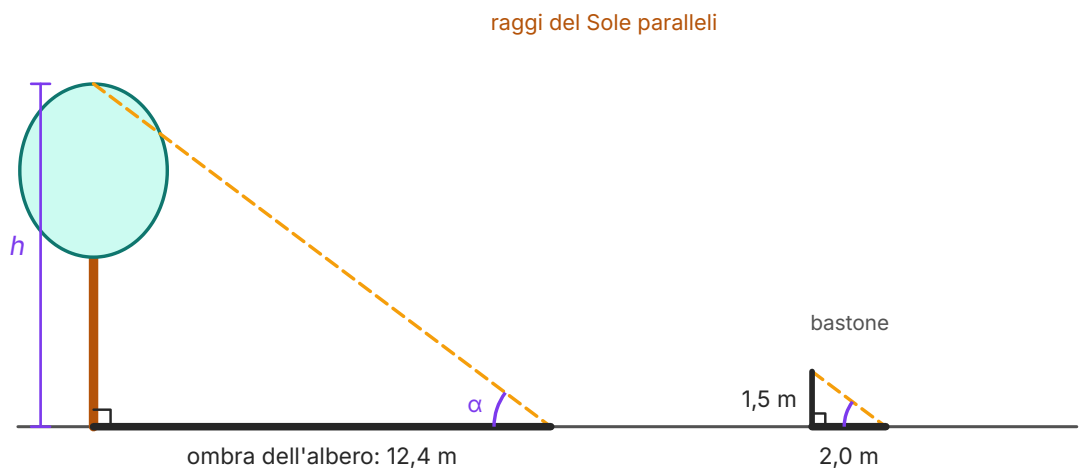


Figura 5.7 L'altezza di un albero con l'ombra. Il bastone e l'albero sono verticali, i raggi del Sole paralleli: i due triangoli rettangoli hanno lo stesso angolo α e sono simili. Con i dati dell'esempio, h = 9,3 m.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Un bastone verticale alto 1,5 m proietta un'ombra di 2,0 m. Nello stesso istante l'ombra di un albero misura 12,4 m. Quanto è alto l'albero (Figura 5.7)?

Soluzione. I due triangoli sono simili, quindi altezze e ombre sono proporzionali: $h : 12{,}4 = 1{,}5 : 2{,}0$. Da qui $h = 12{,}4 \cdot 1{,}5 : 2{,}0 = 9{,}3$ m.

Osservazione. Non serve conoscere l'angolo α, né l'ora, né la posizione del Sole: basta che le due ombre siano misurate nello stesso momento e su un terreno orizzontale.

APPROFONDIMENTO · TALETE E LA PIRAMIDE

Talete di Mileto (VI secolo a.C.) è per la tradizione greca uno dei primi filosofi e matematici, ma di lui non ci è giunto nessuno scritto: ciò che sappiamo ce lo raccontano autori vissuti secoli dopo. Si racconta che misurò l'altezza delle piramidi d'Egitto con la loro ombra. Diogene Laerzio, che scrive nel III secolo d.C., riporta che Talete attese il momento in cui l'ombra di un uomo è lunga quanto la sua altezza; Plutarco ne attribuisce a Talete una versione con un bastone piantato all'estremità dell'ombra della piramide, che è il metodo dell'esempio svolto.

Non sappiamo se l'episodio sia vero, né se Talete abbia mai enunciato il teorema che in Italia porta il suo nome. Il nome stesso varia da un paese all'altro: in inglese e in tedesco, per esempio, «teorema di Talete» indica invece il fatto che un angolo inscritto in una semicirconferenza è retto (capitolo 3). La teoria delle proporzioni tra grandezze, compresi i rapporti incommensurabili, è esposta nel libro V degli *Elementi* di Euclide; la similitudine, il teorema della bisettrice e la divisione in media ed estrema ragione si trovano nel libro VI.

COLLEGAMENTI

La camera oscura. Una scatola chiusa con un forellino su una parete: la luce che parte da ogni punto di un oggetto passa per il foro e colpisce la parete opposta, dove si forma un'immagine capovolta. I raggi che passano per il foro formano due triangoli simili, opposti al vertice nel foro: se l'oggetto è alto H e dista D dal foro, e la scatola è profonda d, l'immagine è alta $h = H \cdot d : D$. Un albero alto 6 m, a 15 m da una scatola profonda 25 cm, dà un'immagine di $6 \cdot 0{,}25 : 15 = 0{,}1$ m, cioè 10 cm. La macchina fotografica e l'occhio funzionano con lo stesso principio, con una lente al posto del foro.

Ancora la similitudine è alla base delle **scale** delle carte geografiche e dei disegni tecnici. Una carta in scala 1 : 25 000 è una figura simile al territorio con rapporto $k = 1/25\,000$: 1 cm sulla carta corrisponde a 25 000 cm = 250 m sul terreno. Le aree però stanno nel rapporto k^2: 1 cm² sulla carta corrisponde a $25\,000^2 = 625\,000\,000$ cm², cioè 62 500 m².

Con il computer

Un programma di geometria dinamica permette di «vedere» il teorema di Talete. Disegna tre rette parallele (costruisci la prima, poi le altre due con il comando «retta parallela») e due trasversali qualsiasi; segna i sei punti di intersezione e fai calcolare al programma i rapporti $AB : BC$ e $A'B' : B'C'$. Trascinando una trasversale o spostando una parallela, le lunghezze cambiano ma i due rapporti restano uguali tra loro: è l'invariante che il teorema garantisce. Allo stesso modo puoi costruire un triangolo, la bisettrice di un angolo e i rapporti del teorema della bisettrice, oppure una circonferenza, un punto esterno, due secanti e i prodotti $PA \cdot PB$ e $PC \cdot PD$.

SINTESI

- Il rapporto tra due grandezze omogenee è un numero reale positivo: razionale se sono commensurabili (hanno un sottomultiplo comune), irrazionale se sono incommensurabili, come lato e diagonale del quadrato (rapporto $\sqrt{2}$).
- In una proporzione $a : b = c : d$ il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi; valgono le proprietà del permutare, invertire, comporre e scomporre. In una proporzione continua $a : b = b : c$, b è medio proporzionale: $b^2 = ac$.
- Due classi di grandezze sono direttamente proporzionali se e solo se a grandezze congruenti corrispondono grandezze congruenti e alla somma corrisponde la somma (criterio di proporzionalità).
- Teorema di Talete: un fascio di parallele tagliato da due trasversali determina segmenti proporzionali, $AB : CD = A'B' : C'D'$. Il piccolo teorema di Talete è il caso dei segmenti congruenti.
- Una parallela a un lato di un triangolo divide gli altri due in parti proporzionali; vale anche il teorema inverso. La bisettrice di un angolo interno divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.
- Due poligoni sono simili se hanno gli angoli corrispondenti congruenti e i lati corrispondenti proporzionali; il rapporto costante è il rapporto di similitudine k. Le due condizioni sono indipendenti.
- Criteri di similitudine dei triangoli: AA (due angoli congruenti), LAL (due lati in proporzione e l'angolo compreso congruente), LLL (tre lati in proporzione).
- In figure simili i perimetri e tutti i segmenti corrispondenti stanno nel rapporto k, le aree nel rapporto k^2, i volumi dei solidi simili nel rapporto k^3.
- L'altezza relativa all'ipotenusa divide un triangolo rettangolo in due triangoli simili al dato: ne seguono $c^2 = a \cdot p$, $h^2 = p \cdot q$ e il teorema di Pitagora.
- Teoremi delle corde e delle secanti: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Teorema della tangente e della secante: $PT^2 = PA \cdot PB$.
- La sezione aurea AC di un segmento AB verifica $AB : AC = AC : CB$ e si costruisce con riga e compasso grazie al teorema della tangente e della secante.
- Con i triangoli simili si misurano altezze e distanze inaccessibili (ombre, specchi, camera oscura) e si leggono le scale delle carte.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Due triangoli hanno due angoli rispettivamente congruenti. Allora sono sicuramente:
   A. congruenti
   B. simili
   C. equivalenti
   D. isoperimetrici

2. ● Due poligoni sono simili con rapporto di similitudine 3. Il rapporto tra le loro aree è:
   A. 3
   B. 6
   C. 9
   D. 27

3. ●● Nel triangolo ABC si ha $AB = 6$, $AC = 9$, $BC = 10$. La bisettrice dell'angolo in A incontra BC in D. Allora BD misura:
   A. 4
   B. 5
   C. 6
   D. 3,6

4. ● Quale coppia di grandezze è formata da grandezze incommensurabili?
   A. il lato e il perimetro di un quadrato
   B. il raggio e il diametro di una circonferenza
   C. la base e l'altezza di un rettangolo di lati 2 cm e 3 cm
   D. il lato e la diagonale di un quadrato

5. ●● Due corde AB e CD si incontrano in P; $PA = 4$, $PB = 6$, $PC = 3$. Allora PD misura:
   A. 4,5
   B. 7
   C. 8
   D. 5

6. ●● Una fotocopiatrice ingrandisce un disegno al 150%. L'area del disegno è moltiplicata per:
   A. 1,5
   B. 2
   C. 3
   D. 2,25

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
   a) Due rettangoli sono sempre simili.
   b) Due quadrati sono sempre simili.
   c) Due triangoli isosceli con gli angoli al vertice congruenti sono simili.
   d) Due rombi con i lati in proporzione sono simili.
   e) Due triangoli equilateri sono simili.
   f) Se due triangoli sono simili con rapporto 2, le loro altezze corrispondenti stanno nel rapporto 4.

8. ● Completa.
   a) Due grandezze omogenee sono commensurabili se _____ .
   b) Il teorema di Talete afferma che un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali determina su di esse _____ .
   c) La bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali _____ .
   d) Se da un punto esterno si conducono una tangente e una secante, il segmento di tangente è _____ tra _____ .

Calcolare

9. ● Calcola il rapporto tra: a) un segmento di 18 cm e uno di 2,4 dm; b) la diagonale e il lato di un quadrato; c) l'altezza e il lato di un triangolo equilatero; d) il perimetro di un quadrato e il suo lato. Quali coppie sono di grandezze commensurabili?

10. ● Tre rette parallele a, b, c tagliano la trasversale t in A, B, C e la trasversale t' in A', B', C'. a) Se $AB = 6$ cm, $BC = 9$ cm e $A'B' = 8$ cm, quanto misura $B'C'$? b) Se $AC = 20$ cm, $A'B' = 6$ cm e $B'C' = 10$ cm, quanto misurano AB e BC?

11. ● Nel triangolo ABC la retta DE è parallela a BC, con D su AB ed E su AC. Sapendo che $AD = 4$ cm, $DB = 6$ cm, $AE = 5$ cm e $BC = 15$ cm, calcola EC e DE.

12. ●● Nel triangolo ABC il punto D sta su AB ed E su AC. Stabilisci se $DE \parallel BC$: a) $AD = 3$, $DB = 5$, $AE = 4{,}5$, $EC = 7{,}5$; b) $AD = 4$, $DB = 6$, $AE = 5$, $EC = 8$.

13. ●● Un triangolo ha i lati $AB = 12$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 15$ cm. a) La bisettrice dell'angolo in A incontra BC in D: calcola BD e DC. b) La bisettrice dell'angolo in B incontra AC in E: calcola AE ed EC.

14. ● Un triangolo ha i lati di 6 cm, 8 cm e 12 cm. Un triangolo simile ha il lato maggiore di 18 cm. Calcola il rapporto di similitudine, gli altri due lati e i due perimetri.

15. ●● Stabilisci se i due triangoli sono simili e, in caso affermativo, indica il criterio e il rapporto di similitudine. a) Lati 4, 6, 8 e lati 6, 9, 12. b) Lati 5, 7, 9 e lati 10, 14, 20. c) Un triangolo con angoli di 40° e 75°, un altro con angoli di 75° e 65°. d) $AB = 6$, $AC = 9$, $\angle A = 50°$; $A'B' = 4$, $A'C' = 6$, $\angle A' = 50°$.

16. ●● Nel triangolo ABC, rettangolo in A, l'altezza AH divide l'ipotenusa in $BH = 9$ cm e $HC = 16$ cm. Usando i triangoli simili calcola AH, AB, AC e verifica il teorema di Pitagora.

17. ●● a) Da un punto P esterno a una circonferenza una secante la incontra in A e B, con $PA = 4$ cm e $AB = 5$ cm. Calcola il segmento di tangente PT. b) Una seconda secante da P incontra la circonferenza in C e D, con $PC = 3$ cm: calcola PD e la corda CD. c) Due corde si incontrano in P; i segmenti della prima misurano 2 cm e 9 cm, quelli della seconda sono uno il doppio dell'altro. Calcola la lunghezza della seconda corda.

18. ●● a) Due poligoni simili hanno aree di 50 cm^2 e 72 cm^2; il primo ha perimetro 30 cm. Calcola il perimetro del secondo. b) Un triangolo ha area 48 cm^2. Una parallela a un lato stacca dal vertice opposto un triangolo i cui lati sono un quarto di quelli del triangolo dato. Calcola l'area del triangolo staccato e quella del trapezio che rimane.

19. ●● Disegna un segmento AB di 10 cm e costruisci con riga e compasso la sua sezione aurea AC. Misura AC e CB al millimetro e verifica, con la calcolatrice, che AC^2 e $AB \cdot CB$ sono quasi uguali. Perché non sono esattamente uguali?

Dimostrare e argomentare

20. ● Dimostra che due triangoli equilateri sono sempre simili, e che due triangoli rettangoli isosceli sono sempre simili.

21. ●● Nel trapezio $ABCD$, di basi AB e DC, le diagonali si incontrano in O. Dimostra che i triangoli ABO e CDO sono simili e che $AO : OC = BO : OD = AB : DC$.

22. ●● Siano M ed N i punti medi dei lati AB e AC del triangolo ABC. Dimostra che il triangolo AMN è simile ad ABC con rapporto ½ e che la sua area è un quarto di quella di ABC.

23. ●● Trova l'errore. a) «Due rettangoli hanno tutti gli angoli retti, quindi congruenti: per il primo criterio di similitudine sono simili.» b) «Se raddoppio il lato di un quadrato, l'area raddoppia.»

24. ●● In un triangolo ABC rettangolo in A, con l'altezza AH, dimostra con la similitudine che $AH \cdot BC = AB \cdot AC$. Che cosa rappresentano i due membri in termini di area?

25. ●● Dimostra che, se due triangoli sono simili con rapporto k, le mediane corrispondenti stanno nel rapporto k.

26. ●●● Dimostra il secondo criterio di similitudine. *Traccia:* se $A'B' : AB = A'C' : AC$ e $\angle A \cong \angle A'$, con $A'B' < AB$, prendi D su AB ed E su AC con $AD \cong A'B'$, $AE \cong A'C'$; usa il teorema inverso della parallela a un lato e poi il primo criterio.

Problemi

27. ● Un palo verticale alto 2 m proietta un'ombra di 1,6 m. Nello stesso momento l'ombra di un palazzo è lunga 14,4 m. Quanto è alto il palazzo?

28. ●● Una carta escursionistica è in scala 1 : 25 000. a) Due rifugi distano sulla carta 6,4 cm: qual è la distanza reale in linea d'aria, in km? b) Un lago occupa sulla carta 3,2 cm^2: qual è la sua area reale in km^2?

29. ●● Un foglio A4 misura 21,0 cm × 29,7 cm. a) Verifica che, tagliandolo a metà lungo il lato maggiore, si ottiene un rettangolo (A5) approssimativamente simile all'A4, e calcola il rapporto di similitudine. b) Con quale percentuale si deve ridurre una fotocopia da A4 ad A5? c) Di quanto si riduce l'area?

30. ●● Una camera oscura è profonda 30 cm. Una persona alta 1,80 m si trova a 4,5 m dal foro. Quanto è alta la sua immagine sulla parete di fondo? A quale distanza dovrebbe mettersi perché l'immagine fosse alta 9 cm?

31. ●● Per misurare l'altezza di una torre Luca appoggia uno specchietto per terra, a 45 m dalla base della torre, e si allontana dallo specchio lungo la stessa retta fino a vedervi riflessa la cima: in quel momento è a 2 m dallo specchio, e i suoi occhi sono a 1,6 m da terra. Sapendo che il raggio luminoso si riflette formando con il pavimento angoli congruenti, calcola l'altezza della torre.

32. ●●● Il plastico di un edificio è in scala 1 : 200. a) Il plastico è alto 9 cm: quanto è alto l'edificio? b) Una facciata del plastico ha un'area di 54 cm^2: qual è l'area reale, in m^2? c) Il volume del plastico è 810 cm^3: qual è il volume reale, in m^3?

Verso la verifica

33. ●● Nel triangolo ABC si ha $AB = 10$ cm, $AC = 15$ cm, $BC = 20$ cm. Sul lato AB prendi D con $AD = 4$ cm e conduci da D la parallela a BC, che incontra AC in E. Calcola AE, DE, il perimetro del triangolo ADE e il rapporto tra l'area di ADE e quella di ABC.

34. ●● Da un punto P esterno a una circonferenza si conduce la tangente PT, lunga 12 cm, e la secante che passa per il centro, il cui punto più vicino a P è A, con $PA = 8$ cm. Calcola il raggio della circonferenza e controlla il risultato con il teorema di Pitagora.

35. ●●● **Sfida.** Un triangolo ha la base di 12 cm e l'altezza relativa di 8 cm. Si vuole inscrivere nel triangolo un quadrato con un lato sulla base e gli altri due vertici sugli altri due lati. a) Dimostra che il lato superiore del quadrato stacca un triangolo simile a quello dato. b) Calcola il lato del quadrato. c) Quale frazione dell'area del triangolo occupa il quadrato?

PER APPROFONDIRE

- [EUC] Euclide, *Elementi*: il libro V (la teoria delle proporzioni tra grandezze) e il libro VI (i triangoli simili, il teorema della bisettrice, la divisione in media ed estrema ragione); il libro III per le corde e le secanti.
- [LIV] Livio, *La sezione aurea*: la storia del rapporto aureo, separando con cura i fatti matematici dalle leggende.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Talete, la scoperta delle grandezze incommensurabili e la teoria delle proporzioni di Eudosso.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: molti dei suoi esempi si risolvono cercando due triangoli simili.

Glossario del capitolo

Criteri di similitudine
Condizioni sufficienti perché due triangoli siano simili: AA, LAL, LLL.

Fascio di rette parallele
L'insieme delle rette di un piano parallele a una retta data.

Grandezze commensurabili
Grandezze omogenee che hanno un sottomultiplo comune; il loro rapporto è un numero razionale.

Grandezze direttamente proporzionali
Due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca in cui il rapporto tra due grandezze è uguale al rapporto tra le corrispondenti.

Grandezze omogenee
Grandezze che si possono confrontare e sommare tra loro, come due segmenti o due superfici.

Medio proporzionale
Il termine b della proporzione continua $a : b = b : c$; vale $b^2 = ac$.

Poligoni simili
Poligoni con gli angoli corrispondenti congruenti e i lati corrispondenti proporzionali; si scrive $F \sim F'$.

Proporzione
Uguaglianza di due rapporti, $A : B = C : D$; il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

Rapporto di similitudine
Il rapporto costante k tra i lati corrispondenti di due poligoni simili; i perimetri stanno nel rapporto k, le aree nel rapporto k^2.

Rapporto tra grandezze
Numero reale positivo che indica quante volte una grandezza contiene un'altra omogenea; è irrazionale per grandezze incommensurabili.

Scala
Il rapporto di similitudine tra una carta o un disegno e la realtà, per esempio 1 : 25 000.

Sezione aurea
La parte AC di un segmento AB media proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente: $AB : AC = AC : CB$.

Teorema della bisettrice
La bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.

Teorema della tangente e della secante
Da un punto esterno, il segmento di tangente è medio proporzionale tra una secante e la sua parte esterna: $PT^2 = PA \cdot PB$.

Teorema delle corde
Se due corde si incontrano in P, il prodotto dei segmenti dell'una è uguale al prodotto dei segmenti dell'altra.

Teorema delle secanti
Da un punto esterno, il prodotto di una secante per la sua parte esterna è lo stesso per tutte le secanti.

Teorema di Talete
Un fascio di parallele tagliato da due trasversali determina su di esse segmenti proporzionali.

Soluzioni

1. B. Per il primo criterio (AA) i triangoli sono simili; non sono necessariamente congruenti, né equivalenti.

2. C. Le aree stanno nel rapporto $k^2 = 9$.

3. A. $BD : DC = 6 : 9$; $BD = 10 \cdot 6 : 15 = 4$.

4. D. Il rapporto tra diagonale e lato è $\sqrt{2}$, irrazionale. Gli altri rapporti sono 4, 2 e 3/2 (oppure 2/3), razionali.

5. C. $PA \cdot PB = PC \cdot PD$: $24 = 3 \cdot PD$, $PD = 8$.

6. D. $k = 1{,}5$, $k^2 = 2{,}25$.

7. a) F: due rettangoli hanno gli angoli congruenti, ma i lati possono non essere in proporzione (1×2 e 1×3). b) V. c) V: gli angoli alla base sono congruenti (ciascuno è (180° − angolo al vertice) : 2), criterio AA. d) F: i lati sono in proporzione, ma gli angoli possono essere diversi. e) V. f) F: le altezze stanno nel rapporto 2, le aree nel rapporto 4.

8. a) hanno un sottomultiplo comune (una grandezza contenuta un numero intero di volte in entrambe). b) due classi di segmenti direttamente proporzionali (segmenti corrispondenti in proporzione). c) agli altri due lati. d) medio proporzionale; l'intera secante e la sua parte esterna (PA e PB).

9. a) $18 : 24 = 3/4$ (commensurabili). b) $\sqrt{2}$ (incommensurabili). c) $h : l = \sqrt{3}/2$ (incommensurabili). d) 4 (commensurabili).

10. a) $AB : BC = A'B' : B'C'$: $6 : 9 = 8 : B'C'$, $B'C' = 12$ cm. b) $A'C' = 16$ cm; $AB : AC = A'B' : A'C'$: $AB = 20 \cdot 6 : 16 = 7{,}5$ cm, $BC = 20 - 7{,}5 = 12{,}5$ cm.

11. $AD : DB = AE : EC$: $4 : 6 = 5 : EC$, $EC = 7{,}5$ cm. $ADE \sim ABC$ con $k = AD : AB = 4 : 10 = 0{,}4$: $DE = 0{,}4 \cdot 15 = 6$ cm.

12. a) $3 : 5 = 0{,}6$ e $4{,}5 : 7{,}5 = 0{,}6$: le parti sono proporzionali, quindi $DE \parallel BC$ (teorema inverso). b) $4 : 6 \approx 0{,}667$ e $5 : 8 = 0{,}625$: i rapporti sono diversi, quindi DE non è parallela a BC (se lo fosse, per il corollario i rapporti sarebbero uguali).

13. a) $BD : DC = 12 : 8$: $BD = 15 \cdot 12 : 20 = 9$ cm, $DC = 6$ cm. b) $AE : EC = BA : BC = 12 : 15$: $AE = 8 \cdot 12 : 27 = 32/9$ cm $\approx 3{,}56$ cm, $EC = 8 \cdot 15 : 27 = 40/9$ cm $\approx 4{,}44$ cm.

14. Rapporto $18 : 12 = 1{,}5$. Lati $6 \cdot 1{,}5 = 9$ cm e $8 \cdot 1{,}5 = 12$ cm. Perimetri 26 cm e 39 cm ($39 = 1{,}5 \cdot 26$).

15. a) Sì, LLL: $6/4 = 9/6 = 12/8 = 1{,}5$. b) No: $10/5 = 14/7 = 2$, ma $20/9 \neq 2$. c) Sì, AA: il terzo angolo del primo è 180° − 40° − 75° = 65°, quindi entrambi hanno angoli di 75° e 65° (e 40°); il rapporto non si può determinare senza conoscere un lato. d) Sì, LAL: $A'B' : AB = 4 : 6 = 2/3$ e $A'C' : AC = 6 : 9 = 2/3$ con angolo compreso congruente; $k = 2/3$ (oppure 3/2, dal secondo al primo).

16. Ipotenusa $BC = 25$ cm. Da $HBA \sim HAC$: $AH^2 = BH \cdot HC = 144$, $AH = 12$ cm. Da $HBA \sim ABC$: $AB^2 = BC \cdot BH = 225$, $AB = 15$ cm. Da $HAC \sim ABC$: $AC^2 = BC \cdot HC = 400$, $AC = 20$ cm. Verifica: $15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625 = 25^2$.

17. a) $PB = 4 + 5 = 9$ cm; $PT^2 = PA \cdot PB = 36$, $PT = 6$ cm. b) $PC \cdot PD = PA \cdot PB = 36$: $PD = 12$ cm, $CD = 12 - 3 = 9$ cm. c) Se i segmenti della seconda corda sono x e $2x$: $x \cdot 2x = 2 \cdot 9 = 18$, $x^2 = 9$, $x = 3$; la corda misura $3 + 6 = 9$ cm.

18. a) $k^2 = 72 : 50 = 1{,}44$, $k = 1{,}2$; perimetro $1{,}2 \cdot 30 = 36$ cm. b) $k = 1/4$, area $48 : 16 = 3$ cm^2; trapezio $48 - 3 = 45$ cm^2.

19. Dalla costruzione si misurano $AC \approx 6{,}2$ cm e $CB \approx 3{,}8$ cm (il valore esatto di AC è circa 6,18 cm). Con le misure arrotondate: $AC^2 \approx 38{,}4$ e $AB \cdot CB \approx 38$: quasi uguali. Non coincidono esattamente perché le misure fatte con il righello sono approssimate (al millimetro) e il disegno ha errori inevitabili; la proporzione $AB : AC = AC : CB$ vale per i segmenti esatti.

20. Due triangoli equilateri hanno tutti gli angoli di 60°: per il criterio AA sono simili. Due triangoli rettangoli isosceli hanno angoli di 90°, 45° e 45°: anch'essi sono simili per AA.

21. $AB \parallel DC$: $\angle OAB \cong \angle OCD$ e $\angle OBA \cong \angle ODC$ (alterni interni rispetto alle parallele tagliate dalle diagonali); inoltre gli angoli in O sono opposti al vertice. Per AA, $ABO \sim CDO$ con $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow D$. I lati opposti ad angoli congruenti sono proporzionali: $AO : CO = BO : DO = AB : CD$.

22. Per il teorema dei punti medi ($MN \parallel BC$), oppure direttamente: $AM : AB = AN : AC = 1/2$ e l'angolo in A è comune, quindi $AMN \sim ABC$ per LAL con $k = 1/2$. Le aree stanno nel rapporto $k^2 = 1/4$.

23. a) Il primo criterio vale per i **triangoli**; per i poligoni con più di tre lati gli angoli congruenti non bastano: un rettangolo 1×2 e uno 1×3 non sono simili. b) L'area si moltiplica per $k^2 = 4$: un quadrato di lato 2 ha area 4, quello di lato 1 ha area 1.

24. $HAC \sim ABC$ (angolo in C comune, entrambi rettangoli): $AH : AB = AC : BC$, quindi $AH \cdot BC = AB \cdot AC$. Entrambi i membri sono il doppio dell'area del triangolo: base BC per altezza AH, oppure cateto per cateto.

25. Siano $ABC \sim A'B'C'$ con rapporto k, e AM, $A'M'$ le mediane relative a BC e $B'C'$. Allora $B'M' = B'C'/2 = k \cdot BC/2 = k \cdot BM$, e $A'B' = k \cdot AB$; inoltre $\angle B \cong \angle B'$. Per LAL $ABM \sim A'B'M'$ con rapporto k, quindi $A'M' = k \cdot AM$.

26. Con D ed E come nella traccia, $ADE \cong A'B'C'$ per il primo criterio di congruenza ($AD \cong A'B'$, $AE \cong A'C'$, $\angle A \cong \angle A'$). L'ipotesi diventa $AD : AB = AE : AC$; scomponendo, $AD : DB = AE : EC$, e per il teorema inverso $DE \parallel BC$. Allora $\angle ADE \cong \angle ABC$ (corrispondenti) e l'angolo in A è comune: $ADE \sim ABC$ per AA. Poiché $A'B'C' \cong ADE$, anche $A'B'C' \sim ABC$.

27. $h : 14{,}4 = 2 : 1{,}6$: $h = 14{,}4 \cdot 2 : 1{,}6 = 18$ m.

28. a) $6{,}4 \cdot 25\,000 = 160\,000$ cm $= 1{,}6$ km. b) Il rapporto delle aree è $25\,000^2 = 625\,000\,000$: $3{,}2 \cdot 625\,000\,000 = 2\,000\,000\,000$ cm^2 $= 200\,000$ m^2 $= 0{,}2$ km^2.

29. a) L'A5 misura 14,85 cm × 21,0 cm. Rapporti tra i lati: $29{,}7 : 21{,}0 \approx 1{,}414$ e $21{,}0 : 14{,}85 \approx 1{,}414$: i rapporti coincidono (a meno degli arrotondamenti delle misure), quindi i rettangoli sono simili. Il rapporto di similitudine da A4 ad A5 è $21{,}0 : 29{,}7 \approx 0{,}707$ (cioè $1/\sqrt{2}$). b) Circa il 71%. c) L'area si moltiplica per $k^2 \approx 0{,}5$: si dimezza (623,7 cm^2 e 311,85 cm^2).

30. Immagine: $1{,}80 \cdot 0{,}30 : 4{,}5 = 0{,}12$ m $= 12$ cm. Per un'immagine di 9 cm: $1{,}80 \cdot 0{,}30 : D = 0{,}09$, quindi $D = 6$ m.

31. I due triangoli rettangoli (Luca–specchio e torre–specchio) hanno gli angoli in corrispondenza dello specchio congruenti: sono simili. $h : 45 = 1{,}6 : 2$, quindi $h = 45 \cdot 1{,}6 : 2 = 36$ m.

32. $k = 200$. a) $9 \cdot 200 = 1800$ cm $= 18$ m. b) $54 \cdot 200^2 = 2\,160\,000$ cm^2 $= 216$ m^2. c) $810 \cdot 200^3 = 6\,480\,000\,000$ cm^3 $= 6480$ m^3.

33. $ADE \sim ABC$ con $k = 4 : 10 = 0{,}4$. $AE = 0{,}4 \cdot 15 = 6$ cm, $DE = 0{,}4 \cdot 20 = 8$ cm. Perimetro $4 + 6 + 8 = 18$ cm ($= 0{,}4 \cdot 45$). Rapporto delle aree $k^2 = 0{,}16$.

34. $PT^2 = PA \cdot PB$: $144 = 8 \cdot PB$, $PB = 18$ cm. $AB = 18 - 8 = 10$ cm è un diametro: $r = 5$ cm. Controllo: $PO = 8 + 5 = 13$ cm e $PT^2 = PO^2 - r^2 = 169 - 25 = 144$.

35. a) Il lato superiore del quadrato è parallelo alla base, quindi stacca un triangolo simile (AA: angolo al vertice comune, angoli corrispondenti). b) Sia x il lato. Il triangolo staccato ha base x e altezza $8 - x$; le altezze stanno come le basi: $x : 12 = (8 - x) : 8$, $8x = 96 - 12x$, $x = 4{,}8$ cm. c) Area del quadrato $4{,}8^2 = 23{,}04$ cm^2, del triangolo $12 \cdot 8 : 2 = 48$ cm^2: $23{,}04 : 48 = 0{,}48$, cioè il 48% (12/25).