CAPITOLO

3

La circonferenza

Tre punti bastano: dal frammento di un arco si ritrova il cerchio intero. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Riconoscere gli elementi di una circonferenza e di un cerchio e dimostrare i teoremi sulle corde.
2. Classificare le posizioni di una retta e di due circonferenze e usare la perpendicolarità tra tangente e raggio.
3. Dimostrare e applicare il teorema dell'angolo alla circonferenza e i suoi corollari.
4. Riconoscere quadrilateri e poligoni inscrivibili e circoscrivibili.
5. Dimostrare l'esistenza dei punti notevoli del triangolo e stabilirne la posizione.
6. Eseguire e giustificare le costruzioni fondamentali con riga e compasso, anche con un software di geometria.

INDICE DEL CAPITOLO

3.1 La circonferenza e le corde 2
3.2 Rette e circonferenze 6
3.3 Angoli alla circonferenza 9
3.4 Poligoni inscritti e circoscritti 12
3.5 I punti notevoli del triangolo 15
3.6 Costruzioni con riga e compasso 19

Matematica 2 · Parte II · Geometria del piano · versione 1.0
Capitolo 3: La circonferenza · pagine 67–92 del volume completo · estratto per lo studio

Un archeologo trova il frammento di un piatto romano: un pezzo di bordo curvo, grande quanto una mano. Gli basta questo per sapere quanto era largo il piatto intero, perché il bordo è un arco di circonferenza e tre punti di un arco bastano per ritrovarne il centro. Una ruota, il quadrante di un orologio, l'orbita (quasi circolare) di un satellite, la sezione di un tubo: la circonferenza è la figura curva più semplice, ed è anche quella con le proprietà più sorprendenti.

In *Matematica 1* abbiamo usato il compasso e incontrato i primi luoghi geometrici, l'asse di un segmento e la bisettrice di un angolo. Ora studiamo la circonferenza in sé: corde, tangenti, angoli inscritti, poligoni inscritti e circoscritti. Scopriremo che i quattro «punti notevoli» di un triangolo esistono proprio grazie a questi risultati, dimostrati con gli strumenti del primo anno: criteri di congruenza, triangolo isoscele, angolo esterno, parallele.

3.1 La circonferenza e le corde

3.1.1 Circonferenza e cerchio

Fissiamo nel piano un punto O e un segmento di lunghezza r. Si chiama **circonferenza** di centro O e raggio r il luogo geometrico dei punti del piano che hanno distanza r da O. Ricorda che cosa significa «luogo» (*Matematica 1*): la circonferenza contiene *tutti e soli* i punti P per cui $OP = r$. Il punto O è il **centro**; il **raggio** è sia la lunghezza r sia ciascun segmento che unisce il centro a un punto della circonferenza.

Un punto P è **interno** alla circonferenza se $OP < r$, **esterno** se $OP > r$. Il **cerchio** è la figura formata dalla circonferenza e dai suoi punti interni: la circonferenza è il «bordo», il cerchio è la «superficie». Due circonferenze con raggi congruenti sono congruenti: basta un movimento rigido che porti un centro sull'altro.

3.1.2 Corde, archi e angoli al centro

Dati due punti A e B di una circonferenza:

- il segmento AB si chiama **corda**; una corda che passa per il centro è un **diametro**, e la sua lunghezza è $2r$;
- i punti A e B dividono la circonferenza in due parti, ciascuna delle quali è un **arco** di estremi A e B; se AB è un diametro, i due archi sono **semicirconferenze**;
- un angolo con il vertice nel centro si chiama **angolo al centro**; l'angolo al centro $\angle AOB$ **insiste** sull'arco AB che contiene (e viceversa l'arco **sottende** l'angolo).

Anche le parti di cerchio hanno un nome. Un **settore circolare** è la parte di cerchio delimitata da due raggi e dall'arco compreso tra loro; un **segmento circolare** a una base è la parte di cer-

chio delimitata da una corda e da uno dei due archi che essa stacca (tra due corde parallele si ha un segmento circolare a due basi). Una **corona circolare**, infine, è la parte di piano compresa tra due circonferenze concentriche, cioè con lo stesso centro e raggi diversi. Tutti questi elementi sono nella Figura 3.1.

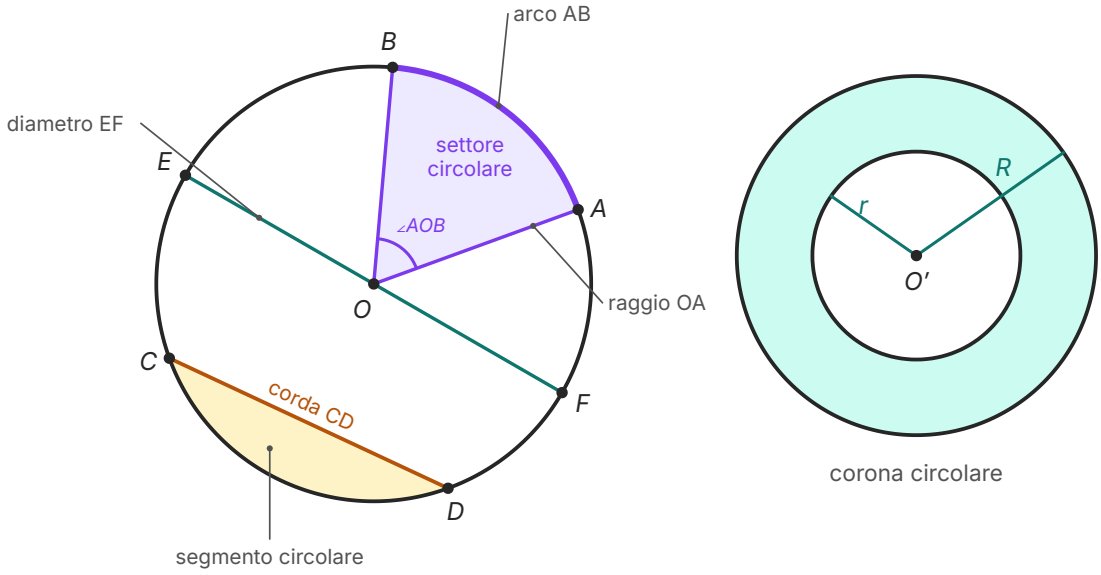


Figura 3.1 Gli elementi di una circonferenza di centro O. Il settore circolare (in viola) è delimitato dai raggi OA, OB e dall'arco AB, sul quale insiste l'angolo al centro $\angle AOB$; il segmento circolare (in giallo) è delimitato dalla corda CD e dall'arco minore CD; EF è un diametro. A destra, una corona circolare tra due circonferenze concentriche di raggi r e R.

In una stessa circonferenza (o in circonferenze congruenti) **ad angoli al centro congruenti corrispondono archi congruenti e corde congruenti, e viceversa**. Lo accettiamo come evidente: ruotando la figura attorno al centro, un angolo al centro si sovrappone all'altro, e con esso l'arco e la corda.

3.1.3 Il diametro e l'asse di una corda

IN SINTESI

Teorema 1 (il diametro). Il diametro è la corda di lunghezza massima: ogni corda che non passa per il centro è minore del diametro.

Dimostrazione. Sia AB una corda che non passa per O. Allora A, O, B non sono allineati e formano un triangolo. Per la disuguaglianza triangolare $AB < AO + OB = r + r = 2r$, cioè la corda è mino-

re del diametro. c.v.d.

Il secondo teorema usa l'asse di un segmento, luogo dei punti equidistanti dagli estremi.

IN SINTESI

Teorema 2 (perpendicolare dal centro a una corda). In una circonferenza la perpendicolare condotta dal centro a una corda la divide a metà. Di conseguenza l'asse di una corda passa sempre per il centro.

Ipotesi: AB corda della circonferenza di centro O (non diametro); $OH \perp AB$, $H \in AB$. **Tesi:** $AH \cong HB$; il centro O appartiene all'asse di AB.

Dimostrazione. Il triangolo AOB è isoscele sulla base AB, perché $OA \cong OB$ (sono raggi). In un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base è anche mediana (*Matematica 1*): dunque OH cade nel punto medio di AB, e $AH \cong HB$. Inoltre O è equidistante da A e da B, quindi appartiene al luogo dei punti equidistanti dagli estremi di AB, cioè al suo asse. c.v.d.

La Figura 3.2 mostra la situazione. La distanza del centro da una corda è la lunghezza del segmento OH; per un diametro è zero. Il triangolo OHA è rettangolo in H, con ipotenusa $OA = r$: questo triangolo è la chiave di quasi tutti i calcoli sulle corde. Il teorema di Pitagora, che conosci dalla scuola media, sarà dimostrato nel capitolo 4; qui lo usiamo per i calcoli.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. In una circonferenza di raggio 10 cm una corda AB è lunga 12 cm. Quanto dista dal centro? E quanto è lunga una corda che dista 6 cm dal centro?

Soluzione. Sia H il piede della perpendicolare da O ad AB. Per il teorema 2, $AH = 12 : 2 = 6$ cm. Nel triangolo rettangolo OHA l'ipotenusa è $OA = 10$ cm, quindi

$$OH = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}.$$

Per la seconda domanda si ragiona al contrario: se $OK = 6$ cm è la distanza di una corda CD, la semicorda è $CK = \sqrt{100 - 36} = 8$ cm, quindi $CD = 16$ cm. La corda più vicina al centro è la più lunga.

3.1.4 Corde e distanza dal centro

L'osservazione con cui si chiude l'esempio è generale.

IN SINTESI

Teorema 3 (corde e distanze). In una circonferenza due corde sono congruenti se e solo se sono equidistanti dal centro.

Ipotesi: AB, CD corde; $OH \perp AB$, $OK \perp CD$. **Tesi:** $AB \cong CD \Leftrightarrow OH \cong OK$.

Dimostrazione. I triangoli OHA e OKC sono rettangoli in H e in K e hanno le ipotenuse OA e OC congruenti (raggi). Se $AB \cong CD$, anche le loro metà AH e CK sono congruenti (teorema 2): i due triangoli rettangoli hanno ipotenusa e un cateto congruenti, quindi sono congruenti (criterio dei triangoli rettangoli, *Matematica 1*), e $OH \cong OK$. Viceversa, se $OH \cong OK$, i triangoli sono congruenti per lo stesso criterio, quindi $AH \cong CK$ e, raddoppiando, $AB \cong CD$. c.v.d.

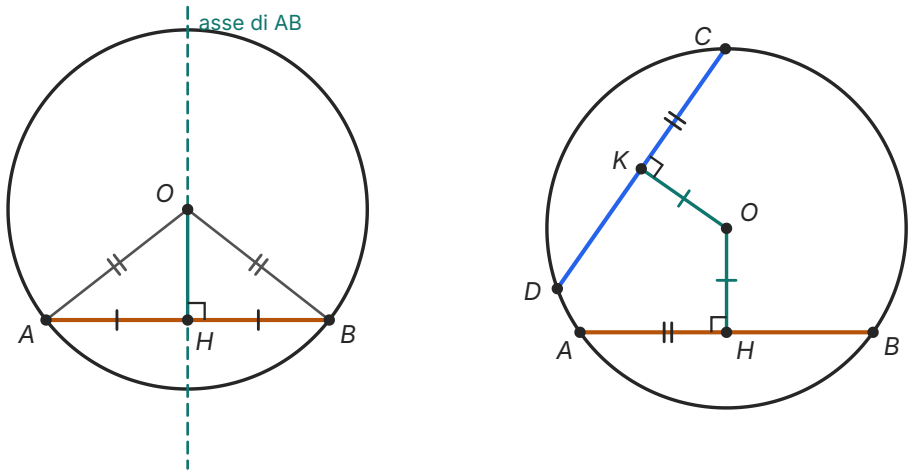


Figura 3.2 A sinistra, il teorema 2: il triangolo AOB è isoscele, quindi la perpendicolare OH dimezza la corda e la retta OH è l'asse di AB. A destra, il teorema 3: le corde congruenti AB e CD hanno la stessa distanza dal centro, $OH \cong OK$.

DA RICORDARE

Con lo stesso ragionamento si dimostra che, tra due corde di una circonferenza, **la maggiore è quella più vicina al centro**. Il diametro, che dista zero dal centro, è la corda più lunga di tutte, come dice il teorema 1.

3.1.5 Una circonferenza per tre punti

Per due punti A e B passano infinite circonferenze, con il centro in un punto qualsiasi dell'asse di AB. Tre punti, invece, bastano.

IN SINTESI

Teorema 4 (circonferenza per tre punti). Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza.

Dimostrazione. Siano A, B, C non allineati. Il centro di una circonferenza per A e B è equidistante da A e B, quindi sta sull'asse a di AB; se passa anche per C, sta pure sull'asse b di BC. Le rette a e

b non sono parallele, altrimenti lo sarebbero anche AB e BC, che hanno in comune B senza coincidere. Si incontrano quindi in un solo punto O, equidistante da A, B e C: la circonferenza di centro O e raggio OA passa per i tre punti, ed è l'unica, perché ogni altra avrebbe il centro su a e su b, cioè in O. c.v.d.

Per tre punti allineati, invece, non passa alcuna circonferenza: gli assi di AB e di BC sono paralleli. Una conseguenza immediata del teorema 4: **due circonferenze distinte hanno al massimo due punti in comune**; se ne avessero tre, coinciderebbero.

COLLEGAMENTI

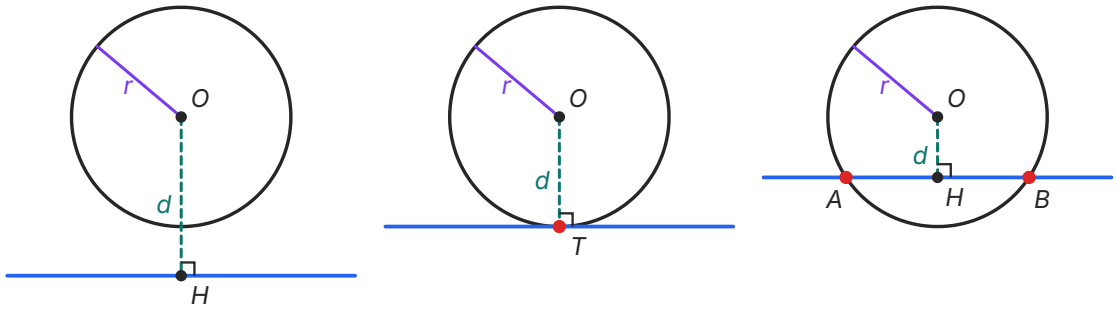
Il piatto dell'archeologo. Per stimare il diametro di un piatto da un frammento del bordo si scelgono tre punti sull'arco e si tracciano gli assi di due corde: il loro punto d'incontro è il centro. È la dimostrazione del teorema 4 trasformata in una costruzione. Più il frammento è piccolo, più gli assi sono quasi paralleli, e un piccolo errore nel disegno sposta molto il centro.

3.2 Rette e circonferenze

3.2.1 Retta esterna, tangente, secante

Sia d la distanza del centro O da una retta s, cioè la lunghezza del segmento OH perpendicolare a s (*Matematica 1*). Il confronto tra d e il raggio r decide quanti punti hanno in comune la retta e la circonferenza (Figura 3.3).

- Se $d > r$ la retta è **esterna**: ogni suo punto P ha $OP \geq OH = d > r$.
- Se $d = r$ la retta è **tangente**: ha in comune con la circonferenza il solo **punto di contatto** H, perché per ogni altro punto P di s il segmento OP è ipotenusa del triangolo rettangolo OHP, quindi $OP > r$.
- Se $d < r$ la retta è **secante**: taglia la circonferenza in due punti A e B (lo accettiamo dall'intuizione), simmetrici rispetto a H per il teorema 2.



retta esterna
d > r
nessun punto comune

retta tangente
d = r
un punto comune

retta secante
d < r
due punti comuni

Figura 3.3 Le tre posizioni di una retta rispetto a una circonferenza di raggio r, secondo la distanza $d = OH$ del centro dalla retta. La tangente ha un solo punto comune T con la circonferenza ed è perpendicolare al raggio OT.

Dal secondo caso segue il teorema più usato sulle tangenti.

IN SINTESI

Teorema 5 (tangente e raggio). La tangente a una circonferenza in un suo punto T è perpendicolare al raggio OT. Viceversa, la retta perpendicolare al raggio OT nel suo estremo T è tangente alla circonferenza.

Dimostrazione. Se s è tangente in T, la distanza d di O da s non può essere minore di r (la retta sarebbe secante) né maggiore (sarebbe esterna): quindi $d = r$. Il piede H della perpendicolare da O a s dista allora r da O, cioè sta sulla circonferenza; ma l'unico punto comune è T, dunque $H = T$ e $OT \perp s$. Viceversa, se $s \perp OT$ in T, la distanza di O da s è $OT = r$, e la retta è tangente. c.v.d.

Per ogni punto di una circonferenza passa dunque una e una sola tangente: la perpendicolare al raggio in quel punto.

COLLEGAMENTI

La fionda e il moto circolare. Quando la corda di una fionda viene lasciata, il sasso non prosegue lungo la circonferenza ma parte lungo la tangente nel punto in cui si trovava. In fisica si dice che nel moto circolare la velocità è in ogni istante tangente alla traiettoria, cioè perpendicolare al raggio.

3.2.2 Tangenti da un punto esterno

Da un punto interno non passa alcuna tangente, da un punto della circonferenza ne passa una; da un punto esterno ne passano due (lo vedremo con la costruzione nell'ultimo paragrafo).

IN SINTESI

Teorema 6 (segmenti di tangente). Se da un punto P esterno a una circonferenza di centro O si conducono le due tangenti, che toccano la circonferenza in A e in B, allora i **segmenti di tangente** PA e PB sono congruenti e la retta PO è bisettrice sia dell'angolo $\angle APB$ sia dell'angolo $\angle AOB$.

Ipotesi: PA, PB tangenti in A e B. **Tesi:** $PA \cong PB$; $\angle APO \cong \angle OPB$; $\angle AOP \cong \angle POB$.

Dimostrazione. Per il teorema 5 i triangoli OAP e OBP sono rettangoli in A e in B. Hanno l'ipotenusa OP in comune e i cateti OA e OB congruenti (raggi): sono congruenti per il criterio dei triangoli rettangoli. Ne seguono $PA \cong PB$ e la congruenza degli angoli corrispondenti, $\angle APO \cong \angle OPB$ e $\angle AOP \cong \angle POB$. c.v.d.

Poiché $PA \cong PB$ e $OA \cong OB$, sia P sia O sono equidistanti da A e da B: la retta OP è l'**asse** della corda AB, che unisce i due punti di contatto. Nel quadrilatero $OAPB$ gli angoli in A e in B sono retti, quindi $\angle APB + \angle AOB = 360° - 180° = 180°$: **l'angolo tra le due tangenti e l'angolo al centro tra i raggi di contatto sono supplementari**.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Un punto P dista 13 cm dal centro di una circonferenza di raggio 5 cm. Calcola la lunghezza dei segmenti di tangente condotti da P e il perimetro del quadrilatero $OAPB$, dove A e B sono i punti di contatto. Se l'angolo tra le tangenti è $\angle APB = 46°$, quanto misura $\angle AOB$?

Soluzione. Il triangolo OAP è rettangolo in A (teorema 5), con ipotenusa $OP = 13$ cm e cateto $OA = 5$ cm. Quindi

$$PA = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm},$$

e $PB = PA = 12$ cm per il teorema 6. Il perimetro di $OAPB$ è $5 + 12 + 12 + 5 = 34$ cm. Infine gli angoli $\angle APB$ e $\angle AOB$ sono supplementari: $\angle AOB = 180° - 46° = 134°$.

3.2.3 Posizioni reciproche di due circonferenze

Per due circonferenze di centri O, O' e raggi $r \geq r'$ conta la distanza dei centri $d = OO'$. Le sei situazioni possibili sono nella Tabella 3.1; le accettiamo senza dimostrazione. Se due circonferenze sono tangenti, il punto di contatto sta sulla retta dei centri.

Tabella 3.1 Posizioni reciproche di due circonferenze di raggi $r \geq r'$ e distanza dei centri d.

Posizione	Condizione	Punti comuni
esterne l'una all'altra	$d > r + r'$	0
tangenti esternamente	$d = r + r'$	1
secanti	$r - r' < d < r + r'$	2
tangenti internamente ($r \neq r'$)	$d = r - r'$	1
una interna all'altra	$0 < d < r - r'$	0
concentriche	$d = 0$	0 (o tutti, se $r = r'$)

Per esempio, due circonferenze di raggi 5 cm e 3 cm con i centri a 6 cm di distanza sono secanti, perché $5 - 3 < 6 < 5 + 3$. Se due circonferenze sono secanti nei punti A e B, entrambi i centri sono equidistanti da A e da B: la retta dei centri è l'asse della corda comune AB.

3.3 Angoli alla circonferenza

3.3.1 Angolo alla circonferenza e angolo al centro

Si chiama **angolo alla circonferenza** (o angolo inscritto) un angolo con il vertice sulla circonferenza e i due lati secanti, oppure un lato secante e l'altro tangente. L'angolo $\angle AVB$, con V, A, B sulla circonferenza, **insiste** sull'arco AB che non contiene V; l'angolo al centro $\angle AOB$ che insiste sullo stesso arco si dice **corrispondente**. Su uno stesso arco insistono infiniti angoli alla circonferenza, uno per ogni posizione del vertice sull'altro arco.

IN SINTESI

Teorema 7 (angolo alla circonferenza). Un angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro corrispondente, cioè dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco.

Ipotesi: $\angle AVB$ angolo alla circonferenza; $\angle AOB$ angolo al centro sullo stesso arco AB. **Tesi:** $\angle AOB = 2 \cdot \angle AVB$.

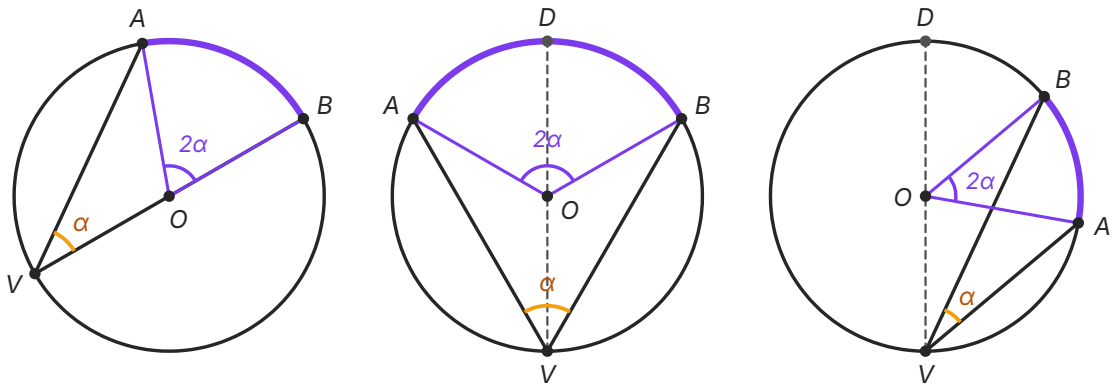
Dimostrazione. Il centro O può stare su un lato dell'angolo, al suo interno o al suo esterno: sono i tre casi della Figura 3.4. Chiamiamo α l'ampiezza di $\angle AVB$.

1° caso: O su un lato. Supponiamo che il lato VB sia un diametro. Il triangolo VOA è isoscele ($OV \cong OA$, raggi), quindi $\angle OAV \cong \angle OVA = \alpha$. L'angolo $\angle AOB$ è esterno al triangolo VOA nel vertice O; per il teorema dell'angolo esterno (nella forma «l'angolo esterno è la somma dei due interni

non adiacenti», conseguenza della somma degli angoli di un triangolo) si ha $\angle AOB = \angle OVA + \angle OAV = 2\alpha$.

2° caso: *O* interno all'angolo. Tracciamo il diametro VD. Esso divide $\angle AVB$ in due angoli $\angle AVD$ e $\angle DVB$, e $\angle AOB$ nei due angoli $\angle AOD$ e $\angle DOB$. A ciascuna coppia si applica il 1° caso: $\angle AOD = 2 \cdot \angle AVD$ e $\angle DOB = 2 \cdot \angle DVB$. Sommando, $\angle AOB = 2(\angle AVD + \angle DVB) = 2\alpha$.

3° caso: *O* esterno all'angolo. Tracciamo ancora il diametro VD. Ora l'angolo $\angle AVB$ è la *differenza* $\angle AVD - \angle BVD$ (oppure $\angle BVD - \angle AVD$, secondo la posizione dei punti), e allo stesso modo $\angle AOB = \angle AOD - \angle BOD$. Per il 1° caso $\angle AOD = 2 \cdot \angle AVD$ e $\angle BOD = 2 \cdot \angle BVD$; sottraendo si ottiene $\angle AOB = 2\alpha$. c.v.d.



1° caso: O su un lato — 2° caso: O interno all'angolo — 3° caso: O esterno all'angolo

Figura 3.4 I tre casi della dimostrazione del teorema 7. In ogni pannello l'angolo alla circonferenza $\angle AVB = \alpha$ e l'angolo al centro $\angle AOB = 2\alpha$ insistono sullo stesso arco AB, evidenziato in viola. Nel 2° e nel 3° caso si traccia il diametro VD.

Il teorema vale anche quando l'arco AB è maggiore di una semicirconferenza: in quel caso l'angolo al centro corrispondente è concavo (maggiore di 180°) e l'angolo alla circonferenza è ottuso. Per esempio, se $\angle AOB = 100°$, l'angolo alla circonferenza che insiste sull'arco minore misura 50°, mentre quello che insiste sull'arco maggiore, il cui angolo al centro è $360° - 100° = 260°$, misura 130°. Osserva che $50° + 130° = 180°$: lo ritroveremo nei quadrilateri inscritti.

ERRORE FREQUENTE

«L'angolo alla circonferenza è la metà di un angolo al centro» è vero solo se i due angoli insistono **sullo stesso arco**. Se V e O stanno da parti opposte rispetto alla corda AB, l'angolo $\angle AVB$ insiste sull'arco maggiore: è la metà dell'angolo al centro concavo, non di quello convesso $\angle AOB$. Prima di dividere per 2, individua sempre l'arco su cui insiste l'angolo.

3.3.2 Conseguenze

Dal teorema 7 discendono tre corollari di uso continuo.

IN SINTESI

Corollario 1. Gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco (o su archi congruenti) sono congruenti: sono tutti la metà dello stesso angolo al centro.

Corollario 2. Ogni angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza è retto. Infatti il suo angolo al centro corrispondente è un angolo piatto, e $180° : 2 = 90°$.

Corollario 3 (tangente e corda). L'angolo formato da una corda AB e dalla tangente in A è congruente agli angoli alla circonferenza che insistono sull'arco AB compreso nell'angolo.

Dimostrazione del corollario 3 (nel caso in cui l'angolo β tra la tangente t e la corda AB sia acuto). Per il teorema 5, $t \perp OA$, quindi $\angle OAB = 90° - \beta$. Il triangolo AOB è isoscele, dunque anche $\angle OBA = 90° - \beta$, e $\angle AOB = 180° - 2(90° - \beta) = 2\beta$. L'angolo al centro sull'arco AB è perciò il doppio di β, come accade per gli angoli alla circonferenza su quell'arco: β è congruente a ciascuno di essi. c.v.d.

Vale anche il viceversa del corollario 2: **in un triangolo rettangolo il punto medio dell'ipotenusa è equidistante dai tre vertici**, e l'ipotenusa è un diametro della circonferenza circoscritta (lo dimostrerai nell'esercizio di sfida).

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Il triangolo ABC è inscritto in una circonferenza di centro O, con $\angle A = 50°$ e $\angle B = 70°$. Calcola gli angoli al centro $\angle BOC$, $\angle COA$, $\angle AOB$.

Soluzione. Il terzo angolo è $\angle C = 180° - 50° - 70° = 60°$. Il triangolo ha tre angoli acuti, quindi ogni angolo $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ insiste sull'arco minore opposto, e l'angolo al centro corrispondente ne è il doppio:

$$\angle BOC = 2 \cdot 50° = 100°, \qquad \angle COA = 2 \cdot 70° = 140°, \qquad \angle AOB = 2 \cdot 60° = 120°.$$

Controllo: $100° + 140° + 120° = 360°$, l'angolo giro attorno a O.

APPROFONDIMENTO · IL LIBRO III DEGLI ELEMENTI

Il libro III degli *Elementi* di Euclide è dedicato alla circonferenza. La proposizione 1 è la costruzione del centro di una circonferenza data; la 20 è il teorema 7; la 22 è il teorema dei quadrilateri inscritti del prossimo paragrafo; la 31 afferma che l'angolo in una semicirconferenza è retto. La tradizione attribuisce quest'ultimo risultato a Talete di Mileto, ma non abbiamo testi di Talete: è una notizia riferita da autori molto più tardi. Il libro IV tratta i poligoni inscritti e circoscritti.

3.4 Poligoni inscritti e circoscritti

3.4.1 Definizioni

Un poligono è **inscritto** in una circonferenza se tutti i suoi vertici stanno sulla circonferenza; la circonferenza si dice allora **circoscritta** al poligono. Un poligono è **circoscritto** a una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza, che si dice **inscritta** nel poligono. Un poligono che ammette una circonferenza circoscritta si dice **inscrivibile**; uno che ammette una circonferenza inscritta, **circoscrivibile**.

Per il teorema 4 **ogni triangolo è inscrivibile**: i suoi tre vertici non sono allineati. Nel prossimo paragrafo vedremo che ogni triangolo è anche circoscrivibile. Per i poligoni con più lati non è così: un rombo che non sia un quadrato, per esempio, non è inscrivibile.

3.4.2 Quadrilateri inscrivibili

IN SINTESI

Teorema 8 (quadrilatero inscrivibile). Un quadrilatero convesso è inscrivibile in una circonferenza se e solo se ha gli angoli opposti supplementari.

Ipotesi: $ABCD$ quadrilatero convesso. **Tesi:** $ABCD$ inscrivibile $\Leftrightarrow \angle A + \angle C = 180°$ e $\angle B + \angle D = 180°$.

Dimostrazione (condizione necessaria). Sia $ABCD$ inscritto in una circonferenza di centro O (Figura 3.5). Gli angoli opposti $\angle A = \angle DAB$ e $\angle C = \angle BCD$ sono angoli alla circonferenza che insistono sui due archi BD, uno contenente C e l'altro contenente A. Gli angoli al centro corrispondenti a questi due archi formano insieme un angolo giro. Per il teorema 7, quindi, $\angle A + \angle C = 360° : 2 = 180°$. Poiché la somma degli angoli di un quadrilatero è 360°, anche $\angle B + \angle D = 180°$. c.v.d.

Idea della condizione sufficiente. Supponiamo $\angle B + \angle D = 180°$ e consideriamo la circonferenza per A, B, C (teorema 4). Se D non vi appartenesse, la retta AD taglierebbe la circonferenza in un

punto $D' \neq D$; il quadrilatero $ABCD'$ sarebbe inscritto, e per la parte già dimostrata $\angle AD'C = 180° - \angle B = \angle ADC$. Ma nel triangolo CDD' uno dei due angoli $\angle ADC$, $\angle AD'C$ è esterno e l'altro è interno non adiacente: per il teorema dell'angolo esterno non possono essere congruenti. L'assurdo prova che D sta sulla circonferenza.

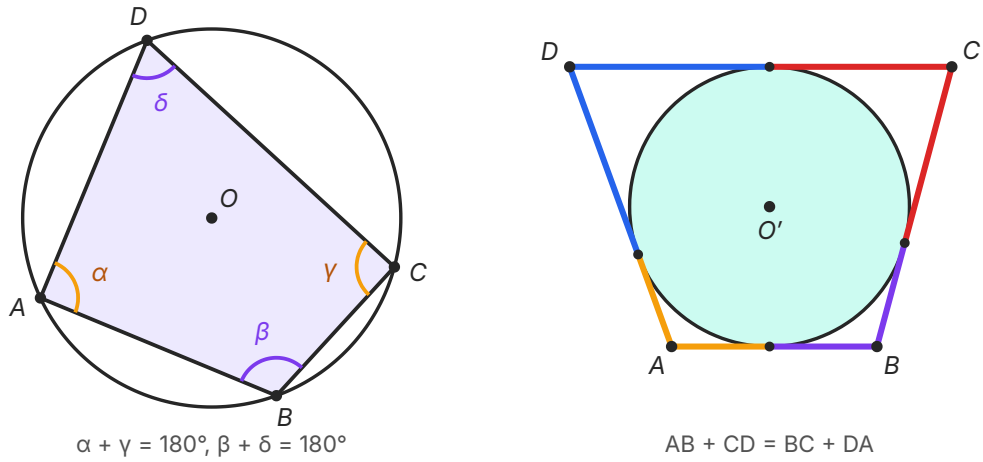


Figura 3.5 A sinistra, un quadrilatero inscritto: gli angoli opposti sono supplementari. A destra, un quadrilatero circoscritto a una circonferenza di centro O': i due segmenti di tangente che partono da uno stesso vertice, disegnati con lo stesso colore, sono congruenti; per questo le somme dei lati opposti sono uguali.

Ne segue che ogni **rettangolo** e ogni **trapezio isoscele** sono inscrivibili, mentre un parallelogramma che non sia un rettangolo non lo è: i suoi angoli opposti sono congruenti ma non supplementari.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Il quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza; gli angoli misurano $\angle A = (3x + 10)°$, $\angle C = (2x + 20)°$, $\angle B = 75°$. Calcola x e gli angoli.

Soluzione. Gli angoli opposti $\angle A$ e $\angle C$ sono supplementari:

$$(3x + 10) + (2x + 20) = 180 \quad \Rightarrow \quad 5x + 30 = 180 \quad \Rightarrow \quad x = 30.$$

Quindi $\angle A = 100°$, $\angle C = 80°$; inoltre $\angle D = 180° - 75° = 105°$. Controllo: $100° + 75° + 80° + 105° = 360°$.

3.4.3 Quadrilateri circoscrivibili

IN SINTESI

Teorema 9 (quadrilatero circoscrivibile). Un quadrilatero convesso è circoscrivibile a una circonferenza se e solo se le somme dei lati opposti sono congruenti: $AB + CD = BC + DA$.

Dimostrazione (condizione necessaria). Se i lati di $ABCD$ sono tangenti a una circonferenza, ogni vertice è un punto esterno da cui partono due segmenti di tangente congruenti (teorema 6). Siano a, b, c, d le lunghezze dei segmenti di tangente uscenti da A, B, C, D (stesso colore in figura 3.5). Allora $AB = a + b$, $BC = b + c$, $CD = c + d$, $DA = d + a$. Allora $AB + CD = a + b + c + d = BC + DA$. c.v.d.

La condizione sufficiente, che qui non dimostriamo, garantisce il viceversa. Ne segue, per esempio, che ogni **rombo** è circoscrivibile (i quattro lati sono congruenti), mentre un rettangolo che non sia un quadrato non lo è. Il quadrato è sia inscrivibile sia circoscrivibile.

3.4.4 Poligoni regolari

Un poligono regolare è sempre **sia inscrivibile sia circoscrivibile**, e le due circonferenze hanno lo stesso centro, il **centro del poligono**. Idea: le bisettrici di due angoli consecutivi si incontrano in un punto O; i triangoli isosceli che O forma con i lati sono congruenti uno dopo l'altro (criterio ALA), quindi O è equidistante da tutti i vertici e da tutti i lati. La distanza del centro dai lati, raggio della circonferenza inscritta, si chiama **apotema**.

Il caso più notevole è l'esagono regolare. I sei angoli al centro che insistono sui lati sono congruenti, e misurano $360° : 6 = 60°$. Ciascun triangolo AOB formato dal centro con un lato è isoscele (due lati sono raggi) con l'angolo al vertice di 60°, quindi anche gli angoli alla base misurano $(180° - 60°) : 2 = 60°$: il triangolo è equilatero. Dunque **il lato dell'esagono regolare inscritto è congruente al raggio**. Unendo i vertici dell'esagono a due a due, alternati, si ottiene il triangolo equilatero inscritto nella stessa circonferenza.

3.4.5 Lunghezza della circonferenza e area del cerchio

Dalla scuola media conosci le formule

$$C = 2\pi r, \qquad A = \pi r^2,$$

dove $\pi \approx 3{,}14159$ è il rapporto, uguale per tutte le circonferenze, tra la lunghezza e il diametro; le usiamo come note (una trattazione rigorosa verrà negli anni successivi). Si può però capire da dove vengono le stime di π: il perimetro dell'esagono regolare inscritto è $6r$ ed è minore della circonferenza, quindi $2\pi r > 6r$, cioè $\pi > 3$. Raddoppiando il numero dei lati, poligoni inscritti e circoscritti stringono la circonferenza da dentro e da fuori.

APPROFONDIMENTO · ARCHIMEDE E π

Archimede di Siracusa (III secolo a.C.), nell'opera *La misura del cerchio*, applicò questa idea ai poligoni regolari inscritti e circoscritti, raddoppiando i lati a partire dall'esagono fino a 96 (6, 12, 24, 48, 96). Ottenne che il rapporto tra circonferenza e diametro è compreso tra 3 + 10/71 e 3 + 1/7, cioè tra 3,1408... e 3,1428...; per i calcoli approssimò alcune radici con frazioni, sempre nel verso che conserva le disuguaglianze. Da qui viene l'approssimazione 22/7.

3.5 I punti notevoli del triangolo

Le bisettrici, le mediane, le altezze di un triangolo e gli assi dei suoi lati (*Matematica 1*) formano quattro famiglie di tre rette. In ogni triangolo le tre rette di ciascuna famiglia passano per uno stesso punto (sono **concorrenti**), il che non è affatto ovvio: tre rette prese a caso formano di solito un triangolo. I quattro punti sono i **punti notevoli** del triangolo (Figura 3.6).

3.5.1 Il circocentro

IN SINTESI

Teorema 10 (circocentro). I tre assi dei lati di un triangolo passano per uno stesso punto, il **circocentro**, che è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo.

Dimostrazione. È la dimostrazione del teorema 4: l'asse di AB e quello di BC si incontrano in un punto O equidistante da A, B e C. Poiché $OA \cong OC$, il punto O appartiene anche all'asse di AC, luogo dei punti equidistanti da A e da C. c.v.d.

La posizione del circocentro dipende dagli angoli del triangolo. Se il triangolo è **acutangolo**, il circocentro è interno; se è **rettangolo**, coincide con il punto medio dell'ipotenusa (corollario 2); se è **ottusangolo**, è esterno, dalla parte del lato opposto all'angolo ottuso. (L'angolo ottuso insiste su un arco maggiore di una semicirconferenza: il centro sta quindi dalla parte opposta del lato rispetto al vertice dell'angolo ottuso.)

3.5.2 L'incentro

IN SINTESI

Teorema 11 (incentro). Le tre bisettrici degli angoli di un triangolo passano per uno stesso punto, l'**incentro**, che è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo.

Dimostrazione. La bisettrice di un angolo convesso è il luogo dei punti dell'angolo equidistanti dai lati (*Matematica 1*). Le bisettrici degli angoli in A e in B si incontrano in un punto I interno al triangolo, equidistante da AB e AC e da AB e BC, quindi anche da AC e BC: I sta sulla bisettrice dell'angolo in C. La circonferenza di centro I e raggio uguale a quella distanza è tangente ai tre lati (teorema 5). c.v.d.

L'incentro è **sempre interno** al triangolo. Dunque ogni triangolo è circoscrivibile. Le bisettrici degli angoli esterni individuano invece tre punti esterni, gli **excentri**, centri delle circonferenze tangenti a un lato e ai prolungamenti degli altri due: li nominiamo soltanto.

3.5.3 L'ortocentro

IN SINTESI

Teorema 12 (ortocentro). Le tre rette delle altezze di un triangolo passano per uno stesso punto, l'**ortocentro**.

Dimostrazione. Da ciascun vertice di ABC conduciamo la parallela al lato opposto: le tre parallele formano un triangolo $A'B'C'$. I quadrilateri $ABCB'$ e $AC'BC$ hanno i lati opposti paralleli, quindi sono parallelogrammi, e $AB' \cong BC \cong AC'$: il punto A è il punto medio di $B'C'$. L'altezza di ABC uscente da A è perpendicolare a BC, quindi anche a $B'C'$, e passa per il suo punto medio: è l'asse di $B'C'$. Così le tre altezze di ABC sono gli assi dei lati di $A'B'C'$, che concorrono (teorema 10). c.v.d.

Anche l'ortocentro può stare dentro o fuori: è **interno** nel triangolo acutangolo, coincide con il **vertice dell'angolo retto** nel triangolo rettangolo (i due cateti sono altezze), è **esterno** nel triangolo ottusangolo, dove due altezze cadono sui prolungamenti dei lati.

3.5.4 Il baricentro

IN SINTESI

Teorema 13 (baricentro). Le tre mediane di un triangolo passano per uno stesso punto, il **baricentro**, che divide ciascuna mediana in due parti, delle quali quella che contiene il vertice è doppia dell'altra.

Ipotesi: BM, CN mediane di ABC (M medio di AC, N medio di AB); $G = BM \cap CN$. **Tesi:** $BG \cong 2 \cdot GM$, $CG \cong 2 \cdot GN$; la terza mediana passa per G.

Dimostrazione. Siano D ed E i punti medi di GB e di GC. Per il teorema dei punti medi (*Matematica 1*) nel triangolo ABC il segmento NM è parallelo a BC e ne è la metà; nel triangolo GBC anche DE è parallelo a BC e ne è la metà. Quindi NM e DE sono paralleli e congruenti: il quadrilatero $NMED$ è un parallelogramma, e le sue diagonali DM ed NE si tagliano a metà nel punto G. Ne

segue $GM \cong GD \cong DB$, cioè $BG = 2 \cdot GM$; allo stesso modo $CG = 2 \cdot GN$. Ripetendo il ragionamento con le mediane da A e da B, anche la mediana da A taglia BM nel punto che la divide nel rapporto $2 : 1$ da B, cioè in G. c.v.d.

Il baricentro è **sempre interno** al triangolo, perché le mediane sono segmenti interni. Nel triangolo equilatero ogni asse è anche mediana, altezza e bisettrice: **i quattro punti notevoli coincidono**. In un triangolo isoscele non equilatero sono quattro punti distinti, tutti allineati sull'asse della base.

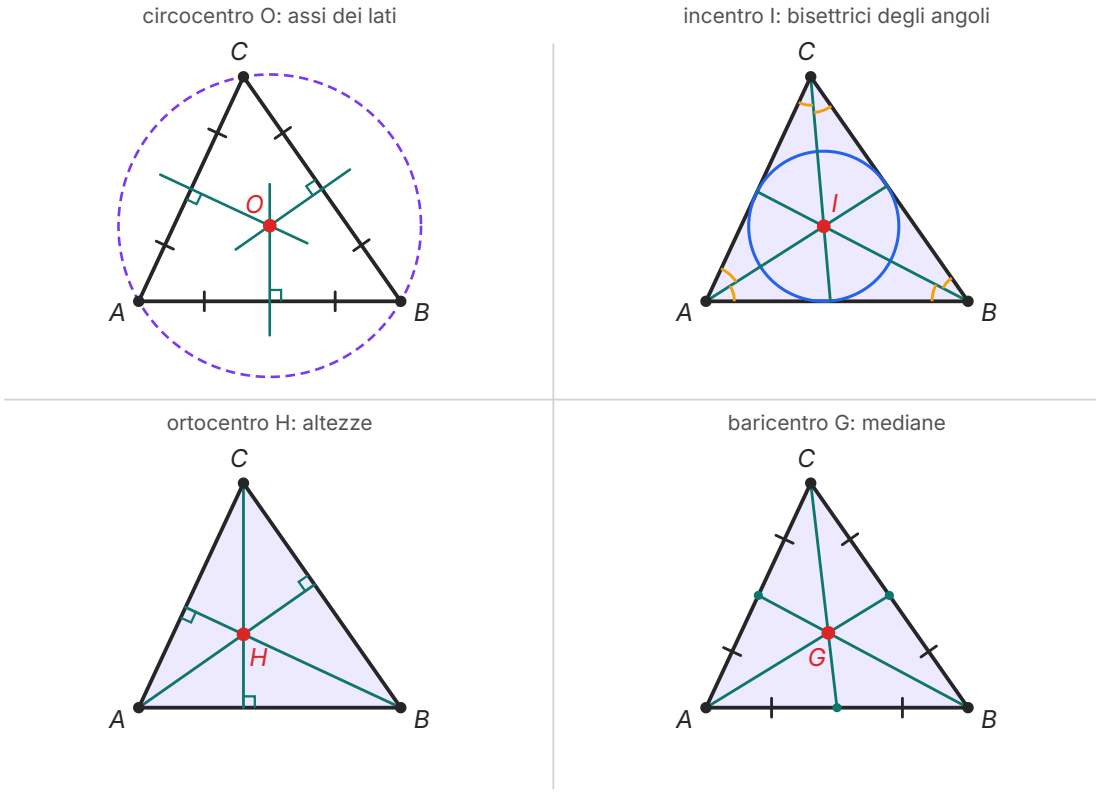


Figura 3.6 I quattro punti notevoli dello stesso triangolo acutangolo ABC (angoli di 65°, 55° e 60°). In alto: il circocentro O, centro della circonferenza circoscritta (tratteggiata); l'incentro I, centro della circonferenza inscritta. In basso: l'ortocentro H, dove si incontrano le altezze; il baricentro G, dove si incontrano le mediane. In un triangolo acutangolo sono tutti interni.

Tabella 3.2 I punti notevoli del triangolo e la loro posizione.

Punto	Rette che vi concorrono	Proprietà	Posizione
circocentro O	assi dei lati	equidistante dai vertici; centro della circonferenza circoscritta	interno (acutangolo), punto medio dell'ipotenusa (rettangolo), esterno (ottusangolo)
incentro I	bisettrici degli angoli	equidistante dai lati; centro della circonferenza inscritta	sempre interno
ortocentro H	altezze	—	interno (acutangolo), vertice dell'angolo retto (rettangolo), esterno (ottusangolo)
baricentro G	mediane	divide ogni mediana nel rapporto 2 : 1 dal vertice	sempre interno

ERRORE FREQUENTE

Non confondere gli **assi dei lati** con le **bisettrici**, né le **mediane** con le **altezze**: l'asse passa per il punto medio di un lato ma in generale non per il vertice opposto; la mediana passa per il vertice ma in generale non è perpendicolare al lato. Il punto equidistante dai *vertici* è il circocentro, quello equidistante dai *lati* è l'incentro.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Un triangolo rettangolo ha i cateti di 6 cm e 8 cm. Calcola il raggio della circonferenza circoscritta e le distanze del baricentro dal vertice C dell'angolo retto e dal punto medio M dell'ipotenusa.

Soluzione. L'ipotenusa misura $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ cm. Il circocentro è il punto medio M dell'ipotenusa, che è un diametro: $R = 5$ cm. Poiché C sta sulla circonferenza, la mediana CM è un raggio: $CM = 5$ cm. Il baricentro G la divide nel rapporto 2 : 1 a partire dal vertice:

$$CG = \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3} \approx 3{,}33 \text{ cm}, \qquad GM = \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3} \approx 1{,}67 \text{ cm}.$$

COLLEGAMENTI

Il baricentro in fisica. Un triangolo ritagliato da un cartoncino omogeneo resta in equilibrio sulla punta di una matita posta nel baricentro (dal greco *barýs*, «pesante»): per una lamina triangolare omogenea il centro di massa coincide con il baricentro geometrico. Appendendo il cartoncino da due vertici diversi e tracciando ogni volta la verticale con un filo a piombo si ottengono due mediane.

3.6 Costruzioni con riga e compasso

Come in *Matematica 1*, la riga (non graduata) traccia la retta per due punti e il compasso le circonferenze di centro e raggio dati. Ogni costruzione è un teorema in forma di procedura, e va giustificata; l'asse, la perpendicolare e la bisettrice sono già noti.

3.6.1 Centro di una circonferenza e circonferenza per tre punti

- **Centro di una circonferenza data.** Si tracciano due corde non parallele AB e BC e i loro assi: si incontrano nel centro (teorema 2).
- **Circonferenza per tre punti non allineati** A, B, C (circonferenza circoscritta a un triangolo). Si costruiscono gli assi di AB e di BC; il loro punto d'incontro O è il centro, OA il raggio (teorema 4).
- **Circonferenza inscritta in un triangolo.** Si costruiscono le bisettrici di due angoli: si incontrano nell'incentro I. Dalla perpendicolare condotta da I a un lato si ottiene il raggio (teorema 11).

3.6.2 Tangenti da un punto esterno

Dati la circonferenza di centro O e il punto esterno P (Figura 3.7):

1. si costruisce il punto medio M del segmento OP (con l'asse di OP);
2. si traccia la circonferenza di centro M e raggio MO, che ha OP come diametro;
3. le due circonferenze si incontrano in due punti A e B; le rette PA e PB sono le tangenti cercate.

Perché funziona. L'angolo $\angle OAP$ è inscritto nella semicirconferenza di diametro OP, quindi è retto (corollario 2). La retta PA è perciò perpendicolare al raggio OA nel suo estremo A, ed è tangente per il teorema 5. Lo stesso vale per PB. Poiché le due circonferenze si incontrano in due punti esattamente, le tangenti da un punto esterno sono due.

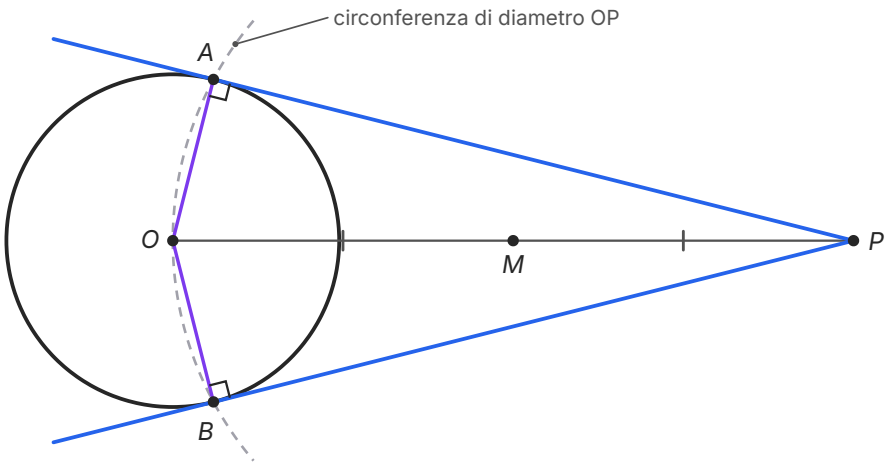


Figura 3.7 Costruzione delle tangenti da un punto esterno P. La circonferenza di diametro OP (tratteggiata, ne è disegnato un arco) taglia quella data nei punti di contatto A e B; gli angoli $\angle OAP$ e $\angle OBP$ sono retti perché inscritti in una semicirconferenza.

3.6.3 Esagono, triangolo equilatero e quadrato inscritti

- **Esagono regolare.** Con apertura uguale al raggio si punta il compasso in un punto A della circonferenza e si segna B; poi si punta in B, e così via: dopo sei passi si torna in A, perché il lato dell'esagono regolare inscritto è uguale al raggio.
- **Triangolo equilatero.** Si costruisce l'esagono $ABCDEF$ e si uniscono i vertici alternati A, C, E: i lati AC, CE, EA sono corde che insistono su angoli al centro di 120°, quindi sono congruenti.
- **Quadrato.** Si tracciano un diametro AC e il diametro BD perpendicolare a esso (l'asse di AC). Le diagonali AC e BD del quadrilatero $ABCD$ sono congruenti, perpendicolari e si tagliano a metà: $ABCD$ è un quadrato (*Matematica 1*).

Non tutti i poligoni regolari si costruiscono con riga e compasso: l'ettagono regolare (7 lati), per esempio, non si costruisce, come fu dimostrato nell'Ottocento.

Con il computer

Un programma di geometria dinamica offre gli strumenti di Euclide (retta, circonferenza, intersezione) e in più punto medio, asse, perpendicolare e bisettrice già pronti. Rifai le costruzioni di questo paragrafo e **trascina** i punti di partenza: una costruzione corretta resta corretta. Trascinando un vertice del triangolo, la circonferenza circoscritta continua a passare per i tre vertici, e il circocentro attraversa il lato quando l'angolo opposto passa da acuto a ottuso. Misura

un angolo alla circonferenza e il corrispondente angolo al centro, poi sposta il vertice: il rapporto resta 1 : 2. Ciò che non cambia quando la figura si deforma è ciò che un teorema afferma.

SINTESI

- La **circonferenza** di centro O e raggio r è il luogo dei punti a distanza r da O; il **cerchio** comprende anche i punti interni. Corde, archi, angoli al centro, settori e segmenti circolari ne sono le parti.
- Il diametro è la corda massima; la perpendicolare dal centro a una corda la dimezza, e l'asse di una corda passa per il centro. Corde congruenti $\Leftrightarrow$ equidistanti dal centro.
- Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza; due circonferenze distinte hanno al massimo due punti comuni.
- Una retta a distanza d dal centro è esterna ($d > r$), tangente ($d = r$) o secante ($d < r$). La tangente è perpendicolare al raggio nel punto di contatto.
- Da un punto esterno partono due tangenti con segmenti di tangente congruenti; la retta che unisce il punto al centro è bisettrice e asse della corda dei contatti.
- Un angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco. Angoli alla circonferenza sullo stesso arco sono congruenti; l'angolo inscritto in una semicirconferenza è retto.
- Un quadrilatero convesso è inscrivibile $\Leftrightarrow$ ha gli angoli opposti supplementari; è circoscrivibile $\Leftrightarrow$ le somme dei lati opposti sono uguali.
- Ogni poligono regolare è inscrivibile e circoscrivibile; il lato dell'esagono regolare inscritto è uguale al raggio. $C = 2\pi r$, $A = \pi r^2$.
- Assi, bisettrici, altezze e mediane di un triangolo concorrono nel circocentro, nell'incentro, nell'ortocentro e nel baricentro; il baricentro divide ogni mediana nel rapporto 2 : 1 dal vertice.
- Le costruzioni con riga e compasso (centro, circonferenza per tre punti, tangenti, esagono, triangolo equilatero, quadrato) sono teoremi trasformati in procedure.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● La corda più lunga di una circonferenza è:

   A. il raggio

   B. il diametro

   C. qualunque corda che passa per un punto della circonferenza

   D. la corda perpendicolare a un raggio

2. ● Una retta dista 5 cm dal centro di una circonferenza di raggio 4 cm. La retta è:

   A. secante
   B. tangente
   C. esterna
   D. un diametro

3. ● Un angolo alla circonferenza misura 35°. L'angolo al centro che insiste sullo stesso arco misura:

   A. 70°
   B. 17,5°
   C. 35°
   D. 145°

4. ●● Un quadrilatero convesso ha, nell'ordine, gli angoli di 70°, 95°, 110° e 85°. È inscrivibile in una circonferenza?

   A. no, perché nessun angolo è retto
   B. sì, perché la somma degli angoli è 360°
   C. no, perché i lati non sono congruenti
   D. sì, perché gli angoli opposti sono supplementari

5. ●● Il circocentro di un triangolo rettangolo:

   A. coincide con il vertice dell'angolo retto
   B. è il punto medio dell'ipotenusa
   C. è sempre esterno al triangolo
   D. coincide con il baricentro

6. ●● Il punto equidistante dai tre lati di un triangolo è:

   A. il baricentro
   B. l'ortocentro
   C. l'incentro
   D. il circocentro

7. ●● Due circonferenze di raggi 7 cm e 3 cm hanno i centri a 4 cm di distanza. Le circonferenze sono:

   A. tangenti internamente
   B. secanti
   C. tangenti esternamente
   D. esterne l'una all'altra

8. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
   a) Per due punti distinti passa una sola circonferenza. b) Ogni triangolo è inscrivibile in una circonferenza. c) Ogni rettangolo è inscrivibile in una circonferenza. d) Ogni rombo è inscrivibile in una circonferenza. e) Il baricentro di un triangolo ottusangolo è esterno al triangolo. f) La tangente a una circonferenza in un punto è perpendicolare al raggio che passa per quel punto.

9. ● Completa.
a) Una corda che passa per il centro si chiama _____. b) La parte di cerchio delimitata da una corda e da un arco si chiama _____. c) Un angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza è _____. d) Il baricentro divide ogni mediana in due parti, di cui quella che contiene il vertice è _____ dell'altra. e) Un poligono è circoscritto a una circonferenza se _____.

Calcolare

10. ● In una circonferenza di raggio 13 cm una corda misura 24 cm. Calcola la distanza della corda dal centro.

11. ● Una corda dista 6 cm dal centro di una circonferenza di raggio 10 cm. Calcola la lunghezza della corda.

12. ● a) Un angolo al centro misura 128°: quanto misura un angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco? b) E un angolo alla circonferenza che insiste sull'altro arco (quello maggiore)?

13. ●● Il triangolo ABC è inscritto in una circonferenza di centro O; $\angle A = 40°$, $\angle B = 75°$. Calcola $\angle C$ e gli angoli al centro $\angle BOC$, $\angle COA$, $\angle AOB$.

14. ●● Il quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza; $\angle A = (2x + 14)°$, $\angle C = (4x - 2)°$, $\angle D = 2\angle B$. Calcola i quattro angoli.

15. ●● Un quadrilatero è circoscritto a una circonferenza; tre lati consecutivi misurano $AB = 9$ cm, $BC = 7$ cm, $CD = 5$ cm. Calcola DA e il perimetro.

16. ●● Da un punto P esterno si conducono le tangenti PA e PB a una circonferenza di centro O, con $\angle APB = 50°$. Calcola $\angle AOB$, gli angoli del triangolo PAB e un angolo alla circonferenza che insiste sull'arco minore AB.

17. ●● Un punto P dista 17 cm dal centro di una circonferenza di raggio 8 cm. Calcola la lunghezza dei segmenti di tangente condotti da P e il perimetro del quadrilatero $OAPB$ (A, B punti di contatto).

18. ●● a) In un triangolo la mediana AM misura 12 cm: calcola AG e GM, dove G è il baricentro. b) In un altro triangolo $GM = 2{,}5$ cm: quanto è lunga la mediana?

19. ●● Due circonferenze hanno raggi 5 cm e 3 cm. Stabilisci la loro posizione reciproca se la distanza dei centri è: a) 10 cm; b) 8 cm; c) 5 cm; d) 2 cm; e) 1 cm.

20. ●● Un esagono regolare è inscritto in una circonferenza di raggio 5 cm. Calcola il perimetro dell'esagono e la lunghezza della circonferenza (con $\pi \approx 3{,}14$), e verifica che il primo è minore della seconda. Calcola poi l'area del cerchio.

Dimostrare e argomentare

21. ●● Dimostra che un trapezio inscritto in una circonferenza è isoscele.

22. ●● Dimostra che un parallelogramma inscritto in una circonferenza è un rettangolo.

23. ●● Due circonferenze di centri O e O' sono secanti nei punti A e B. Dimostra che la retta OO' è l'asse del segmento AB.

24. ●● **Trova l'errore.** «Il punto equidistante dai tre vertici di un triangolo è sempre interno al triangolo, perché è il punto d'incontro delle bisettrici.» Individua gli errori e correggi l'affermazione.

25. ●●● Dimostra che ogni rombo è circoscrivibile a una circonferenza e che un rombo inscrivibile in una circonferenza è un quadrato.

26. ●●● Le corde AB e CD di una circonferenza di centro O si tagliano in un punto P interno al cerchio. Dimostra che $\angle APC = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOD)$, dove gli angoli al centro insistono sugli archi AC e BD che non contengono gli altri estremi. (Suggerimento: traccia la corda BC e usa il teorema dell'angolo esterno.)

Problemi

27. ● La ruota di una bicicletta ha il diametro di 70 cm. Quanto spazio percorre la bicicletta per ogni giro completo della ruota? Quanti giri compie la ruota in 1 km? (Usa $\pi \approx 3{,}1416$ e arrotonda all'unità.)

28. ●● Una galleria ha la sezione a forma di segmento circolare: la larghezza al suolo (la corda) è 12 m e l'altezza massima è 4 m. Calcola il raggio della circonferenza a cui appartiene l'arco della volta. (Suggerimento: chiama r il raggio e scrivi il teorema di Pitagora nel triangolo formato dal centro, dal punto medio della corda e da un estremo.)

29. ●● Tre paesi A, B, C sono collegati da due strade rettilinee perpendicolari: $AB = 6$ km e $BC = 8$ km. Si vuole installare un ripetitore alla stessa distanza dai tre paesi. Dove va collocato? A che distanza si trova da ciascun paese?

30. ●● In un campo da calcio un giocatore vede la porta AB sotto un certo angolo. Il centro O di una circonferenza che passa per i pali A e B è tale che $\angle AOB = 30°$. Sotto quale angolo vede la porta un giocatore che si trova sull'arco maggiore di questa circonferenza? Cambia qualcosa se si sposta lungo quell'arco? Motiva la risposta.

31. ●●● **Sulle orme di Archimede.** In una circonferenza di raggio 1 sono inscritto e circoscritto un esagono regolare. a) Calcola il perimetro dell'esagono inscritto. b) L'apotema dell'esagono circoscritto è uguale al raggio, cioè 1; sapendo che l'altezza di un triangolo equilatero di lato l è $l\sqrt{3}/2$, calcola il lato e il perimetro dell'esagono circoscritto. c) Deduci che $3 < \pi < 2\sqrt{3}$ e scrivi l'approssimazione decimale di $2\sqrt{3}$ alla seconda cifra decimale.

Con il computer

32. ●● In un programma di geometria dinamica disegna un triangolo ABC e costruisci, ciascuno in un colore diverso, il circocentro O, l'ortocentro H e il baricentro G. a) Trascina il vertice C: in quali triangoli O e H escono dal triangolo? In quale posizione di C il circocentro sta su un lato? b) Traccia la retta per O e H: che cosa osservi sul punto G? Misura GH e GO e calcola il loro rapporto mentre deformi il triangolo. c) Che cosa succede ai tre punti quando il triangolo diventa equilatero?

Verso la verifica

33. ●● Il triangolo ABC è inscritto in una circonferenza di centro O e il lato AB è un diametro; $\angle ABC = 32°$. Calcola $\angle ACB$, $\angle BAC$, $\angle AOC$ e $\angle BOC$, giustificando ogni passaggio.

34. ●● La retta t è tangente in A a una circonferenza di centro O; la corda AB forma con t un angolo di 40°. Sia C un punto dell'arco maggiore AB e D un punto dell'arco minore. Calcola $\angle ACB$, $\angle AOB$ e $\angle ADB$.

35. ●●● **Sfida.** a) Dimostra che in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è congruente a metà dell'ipotenusa. b) Dimostra il viceversa: se in un triangolo ABC la mediana CM è congruente a metà del lato AB, allora il triangolo è rettangolo in C.

PER APPROFONDIRE

- [EUC] Euclide, *Elementi*, libri III e IV: la circonferenza, gli angoli inscritti, i poligoni inscritti e circoscritti, nella forma originale.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Archimede e la misura del cerchio.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il capitolo sulle costruzioni geometriche, e perché alcune non si possono eseguire con riga e compasso.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: tracciare un raggio, un diametro o una corda ausiliaria come strategia di dimostrazione.

Glossario del capitolo

Angolo al centro
Angolo con il vertice nel centro di una circonferenza; insiste sull'arco che contiene.

Angolo alla circonferenza
Angolo con il vertice sulla circonferenza e i lati secanti (o uno secante e uno tangente); è la metà dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco.

Apotema
In un poligono regolare, la distanza del centro dai lati, cioè il raggio della circonferenza inscritta.

Arco
Ciascuna delle due parti in cui due punti dividono una circonferenza.

Baricentro
Punto d'incontro delle mediane di un triangolo; divide ciascuna mediana nel rapporto 2 : 1 a partire dal vertice.

Cerchio
Figura formata da una circonferenza e dai suoi punti interni.

Circocentro
Punto d'incontro degli assi dei lati di un triangolo; centro della circonferenza circoscritta.

Circonferenza
Luogo dei punti del piano che hanno distanza assegnata (il raggio) da un punto fisso (il centro).

Corda
Segmento che unisce due punti di una circonferenza.

Corona circolare
Parte di piano compresa tra due circonferenze concentriche di raggi diversi.

Diametro
Corda che passa per il centro; è lunga il doppio del raggio ed è la corda massima.

Incentro
Punto d'incontro delle bisettrici degli angoli di un triangolo; centro della circonferenza inscritta.

Ortocentro
Punto d'incontro delle rette delle altezze di un triangolo.

Poligono circoscritto
Poligono con tutti i lati tangenti a una circonferenza, detta inscritta nel poligono.

Poligono inscritto
Poligono con tutti i vertici su una circonferenza, detta circoscritta al poligono.

Retta secante
Retta che taglia una circonferenza in due punti; la sua distanza dal centro è minore del raggio.

Retta tangente
Retta che ha un solo punto in comune con una circonferenza; è perpendicolare al raggio nel punto di contatto.

Segmento circolare
Parte di cerchio delimitata da una corda e da uno dei due archi che essa stacca (a due basi se delimitata da due corde parallele).

Settore circolare
Parte di cerchio delimitata da due raggi e dall'arco compreso tra loro.

Soluzioni

1. B. Il diametro è la corda massima (teorema 1).

2. C. $d = 5$ cm $> r = 4$ cm: la retta è esterna.

3. A. L'angolo al centro è il doppio: $2 \cdot 35° = 70°$.

4. D. $70° + 110° = 180°$ e $95° + 85° = 180°$: gli angoli opposti sono supplementari (teorema 8).

5. B. L'angolo retto è inscritto in una semicirconferenza: l'ipotenusa è un diametro e il suo punto medio è il centro.

6. C. L'incentro, punto d'incontro delle bisettrici.

7. A. $d = 4 = 7 - 3 = r - r'$: tangenti internamente.

8. a) F: ne passano infinite, con il centro sull'asse del segmento. b) V (teorema 4). c) V: gli angoli opposti sono supplementari. d) F: è inscrivibile solo se è un quadrato. e) F: il baricentro è sempre interno (è l'ortocentro, e il circocentro, a essere esterni nel triangolo ottusangolo). f) V (teorema 5).

9. a) diametro; b) segmento circolare; c) retto; d) doppia; e) tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza.

10. Semicorda 12 cm; $d = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$ cm.

11. Semicorda $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm; corda 16 cm.

12. a) $128° : 2 = 64°$. b) L'angolo al centro sull'arco maggiore è $360° - 128° = 232°$, quindi l'angolo alla circonferenza è 116° (e infatti $64° + 116° = 180°$).

13. $\angle C = 180° - 40° - 75° = 65°$. Il triangolo è acutangolo, quindi $\angle BOC = 80°$, $\angle COA = 150°$, $\angle AOB = 130°$ (somma 360°).

14. $\angle A + \angle C = 180°$: $6x + 12 = 180$, $x = 28$; $\angle A = 70°$, $\angle C = 110°$. $\angle B + \angle D = 3\angle B = 180°$: $\angle B = 60°$, $\angle D = 120°$. Controllo: somma 360°.

15. $AB + CD = BC + DA$: $DA = 9 + 5 - 7 = 7$ cm; perimetro $2 \cdot (9 + 5) = 28$ cm.

16. $\angle AOB = 180° - 50° = 130°$. Il triangolo PAB è isoscele ($PA \cong PB$): $\angle PAB = \angle PBA = (180° - 50°) : 2 = 65°$. Un angolo alla circonferenza sull'arco minore AB misura $130° : 2 = 65°$, uguale all'angolo tra la tangente PA e la corda AB (corollario 3).

17. $PA = PB = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15$ cm; perimetro di $OAPB$: $8 + 15 + 15 + 8 = 46$ cm.

18. a) $AG = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$ cm, $GM = 4$ cm. b) La mediana è $3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$ cm.

19. $r + r' = 8$, $r - r' = 2$. a) $10 > 8$: esterne. b) $d = 8$: tangenti esternamente. c) $2 < 5 < 8$: secanti. d) $d = 2$: tangenti internamente. e) $0 < 1 < 2$: una interna all'altra.

20. Perimetro dell'esagono $6 \cdot 5 = 30$ cm (lato = raggio); circonferenza $2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4$ cm > 30 cm. Area del cerchio $3{,}14 \cdot 25 = 78{,}5$ cm^2.

21. Traccia: in un trapezio $ABCD$ di basi AB e CD gli angoli adiacenti al lato obliquo AD sono supplementari: $\angle A + \angle D = 180°$. Essendo inscritto, $\angle A + \angle C = 180°$ (teorema 8). Quindi $\angle C \cong \angle D$: gli angoli adiacenti alla base CD sono congruenti, e il trapezio è isoscele (*Matematica 1*).

22. Traccia: nel parallelogramma gli angoli opposti sono congruenti; nel quadrilatero inscritto sono supplementari (teorema 8). Due angoli congruenti e supplementari sono retti: il parallelogramma ha un angolo retto, quindi è un rettangolo.

23. Traccia: $OA \cong OB$ (raggi della prima circonferenza), quindi O appartiene all'asse di AB; per lo stesso motivo $O'A \cong O'B$ e anche O' vi appartiene. Per due punti distinti passa una sola retta: la retta OO' è l'asse di AB.

24. Due errori: il punto equidistante dai vertici è il circocentro, punto d'incontro degli **assi** dei lati (le bisettrici concorrono nell'incentro, equidistante dai lati); inoltre il circocentro è interno solo nel triangolo acutangolo, sta sull'ipotenusa nel rettangolo ed è esterno nell'ottusangolo. Correzione: «Il punto equidistante dai tre vertici è il punto d'incontro

degli assi dei lati; è interno al triangolo solo se il triangolo è acutangolo.»

25. Traccia: nel rombo i quattro lati sono congruenti, quindi $AB + CD = BC + DA$, e per il teorema 9 il rombo è circoscrivibile (in alternativa: le diagonali sono bisettrici degli angoli e si incontrano in un punto equidistante dai quattro lati). Se il rombo è anche inscrivibile, i suoi angoli opposti, congruenti perché il rombo è un parallelogramma, sono anche supplementari: sono retti, e un rombo con gli angoli retti è un quadrato.

26. Traccia: l'angolo $\angle APC$ è esterno al triangolo PBC nel vertice P (con P tra A e B e tra C e D), quindi $\angle APC = \angle PBC + \angle PCB = \angle ABC + \angle DCB$. Ma $\angle ABC$ è un angolo alla circonferenza che insiste sull'arco AC, quindi vale $\frac{1}{2}\angle AOC$; $\angle DCB$ insiste sull'arco BD e vale $\frac{1}{2}\angle BOD$. Sommando si ottiene la tesi.

27. Un giro: $C = \pi \cdot 70 \approx 219{,}9$ cm $\approx 2{,}2$ m. Giri in 1 km: $100\,000 : 219{,}91 \approx 454{,}7$, cioè circa 455 giri.

28. Il centro O sta sulla verticale per il punto medio H della corda; se r è il raggio, $OH = r - 4$ e $AH = 6$. Quindi $r^2 = 6^2 + (r-4)^2$, cioè $0 = 36 - 8r + 16$, da cui $r = 6{,}5$ m.

29. Il triangolo ABC è rettangolo in B; il punto equidistante dai tre vertici è il circocentro, cioè il punto medio dell'ipotenusa AC. Poiché $AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ km, il ripetitore va nel punto medio della congiungente AC, a 5 km da ciascun paese.

30. Sull'arco maggiore il giocatore vede la porta sotto un angolo alla circonferenza che insiste sull'arco minore AB: $30° : 2 = 15°$. Spostandosi lungo l'arco l'angolo non cambia, perché tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono congruenti (corollario 1).

31. a) Il lato dell'esagono inscritto è uguale al raggio: perimetro 6. b) L'apotema 1 è l'altezza di un triangolo equilatero di lato l: $l\sqrt{3}/2 = 1$, $l = 2/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}/3 \approx 1{,}155$; perimetro $6l = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$. c) La circonferenza, lunga 2π, è compresa tra i due perimetri: $6 < 2\pi < 4\sqrt{3}$, quindi $3 < \pi < 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$.

32. a) Il circocentro e l'ortocentro sono esterni quando il triangolo è ottusangolo; il circocentro sta su un lato quando l'angolo opposto a quel lato è retto (e allora l'ortocentro è nel vertice dell'angolo retto). b) G sta sempre sulla retta OH (è la **retta di Eulero**, la cui dimostrazione esula dal programma), e il rapporto $GH : GO$ resta uguale a 2. c) Nel triangolo equilatero i tre punti, insieme all'incentro, coincidono.

33. $\angle ACB = 90°$, angolo inscritto in una semicirconferenza. $\angle BAC = 180° - 90° - 32° = 58°$. $\angle AOC = 2 \cdot \angle ABC = 64°$ (angolo al centro sull'arco AC, su cui insiste $\angle ABC$). $\angle BOC = 180° - 64° = 116°$, perché $\angle AOC$ e $\angle BOC$ sono adiacenti (A, O, B allineati); oppure $\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC = 116°$.

34. Per il corollario 3 l'angolo tra t e AB è congruente agli angoli alla circonferenza sull'arco AB compreso nell'angolo, cioè sull'arco minore: $\angle ACB = 40°$. $\angle AOB = 2 \cdot 40° = 80°$. Il quadrilatero $ACBD$ è inscritto, quindi $\angle ADB = 180° - 40° = 140°$.

35. a) Il triangolo rettangolo in C è inscritto in una circonferenza che ha per diametro l'ipotenusa AB (corollario 2): il punto medio M di AB è il centro, quindi $MC \cong MA \cong MB = AB/2$. b) Se $MC \cong MA \cong MB$, la circonferenza di centro M e raggio MA passa per A, B e C, e AB ne è un diametro; l'angolo $\angle ACB$ è inscritto in una semicirconferenza, quindi è retto. (Senza circonferenza: i triangoli AMC e BMC sono isosceli, quindi $\angle A \cong \angle ACM$ e $\angle B \cong \angle BCM$; sommando, $\angle A + \angle B = \angle ACB$, e poiché $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180°$, si ha $\angle ACB = 90°$.)