CAPITOLO

1

I numeri reali

Tra due frazioni c'è sempre un'altra frazione; eppure sulla retta restano infiniti punti senza nome. I numeri reali li nominano tutti.

OBIETTIVI

1. Dimostrare che $\sqrt{3}$ è irrazionale e, più in generale, che $\sqrt{n}$ è razionale solo se n è un quadrato perfetto.
2. Stabilire quando somme e prodotti di numeri razionali e irrazionali sono razionali.
3. Descrivere l'insieme $\mathbb{R}$ e la corrispondenza biunivoca tra numeri reali e punti della retta; costruire $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ con riga e compasso.
4. Approssimare un numero reale per difetto e per eccesso con intervalli sempre più stretti, anche con il foglio di calcolo.
5. Valutare come si propagano gli errori nei calcoli con valori approssimati e scegliere quante cifre usare.
6. Usare il valore assoluto per misurare distanze sulla retta reale e descrivere intervalli.

INDICE DEL CAPITOLO

1.1 Oltre √2: altri numeri irrazionali 2
1.2 L'insieme dei numeri reali 5
1.3 La retta reale 8
1.4 Approssimare un numero reale 10
1.5 Calcolare con valori approssimati 13
1.6 Valore assoluto e distanza 15

Matematica 2 · Parte I · I numeri reali · versione 1.0
Capitolo 1: I numeri reali · pagine 21–42 del volume completo · estratto per lo studio

Nel primo volume abbiamo scoperto che la diagonale di un quadrato di lato 1 misura $\sqrt{2}$, e che $\sqrt{2}$ non è il quoziente di due interi. È stato un colpo di scena: i numeri razionali, che sembravano bastare per ogni misura, lasciano fuori almeno una lunghezza che si può disegnare con una squadra. Ma è un caso isolato, una stranezza del quadrato? O ce ne sono altri? E se ce ne sono, che cosa sono davvero questi numeri che non si possono scrivere come frazione, e come si fa a calcolare con loro?

In questo capitolo rispondiamo a queste domande. Vedremo che i numeri irrazionali sono moltissimi, che insieme ai razionali formano l'insieme dei *numeri reali* e che finalmente «riempiono» la retta senza lasciare buchi. Impareremo anche a trattarli in pratica: un numero irrazionale non si può scrivere per intero, ma si può approssimare bene quanto si vuole, e bisogna sapere quanto ci si può fidare del risultato di un calcolo fatto con valori approssimati. È ciò che fa ogni giorno chi misura in laboratorio, chi progetta un pezzo meccanico o chi programma un computer.

1.1 Oltre √2: altri numeri irrazionali

Che cosa sappiamo già

Ricordiamo in breve (vedi *Matematica 1*) gli insiemi numerici costruiti finora: i naturali $\mathbb{N}$, gli interi $\mathbb{Z}$, i razionali $\mathbb{Q}$, con $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Ogni numero razionale si scrive come frazione $\frac{p}{q}$ con p e q interi e $q \neq 0$; eseguendo la divisione si ottiene un numero decimale *limitato*, come $\frac{3}{8} = 0{,}375$, oppure *illimitato periodico*, come $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$. Viceversa, ogni decimale limitato o periodico ha una frazione generatrice. Nel primo volume abbiamo poi dimostrato per assurdo che non esiste alcuna frazione il cui quadrato sia 2: $\sqrt{2}$ è un numero *irrazionale*. La dimostrazione si basava su un fatto di aritmetica: se p^2 è pari, anche p è pari. Ora usiamo la stessa idea per altri numeri.

1.1.1 Anche √3 è irrazionale

IN SINTESI

Teorema. Non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia 3: $\sqrt{3}$ è irrazionale.

Ipotesi: p e q numeri naturali, $q \neq 0$. **Tesi:** $\left(\frac{p}{q}\right)^2 \neq 3$.

Dimostrazione. Supponiamo che sia $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, con la frazione ridotta ai minimi termini, cioè con p e q privi di fattori comuni. Elevando al quadrato, $3 = \frac{p^2}{q^2}$, cioè

$$p^2 = 3q^2.$$

Il numero p^2 è dunque divisibile per 3. Allora anche p è divisibile per 3: se non lo fosse, il fattore primo 3 non comparirebbe nella scomposizione di p, e quindi nemmeno in quella di $p^2 = p \cdot p$, che ha gli stessi fattori primi di p. Scriviamo allora $p = 3k$, con k naturale. Sostituendo: $9k^2 = 3q^2$, cioè $q^2 = 3k^2$. Anche q^2 è divisibile per 3, e per lo stesso ragionamento lo è q. Ma allora p e q hanno il fattore comune 3, contro l'ipotesi che la frazione fosse ridotta ai minimi termini. L'ipotesi $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ porta a una contraddizione, quindi è falsa. *c.v.d.*

Lo stesso schema funziona con 5, 7, 11 e con qualunque numero primo al posto di 3: nel ragionamento abbiamo usato soltanto il fatto che 3 è primo. Ma che cosa succede con $\sqrt{12}$, o con $\sqrt{50}$, il cui radicando non è primo?

1.1.2 Quando √n è razionale

Un numero naturale si dice **quadrato perfetto** se è il quadrato di un numero naturale: 0, 1, 4, 9, 16, 25, … Se n è un quadrato perfetto, $\sqrt{n}$ è un naturale: $\sqrt{49} = 7$. Il teorema seguente dice che in tutti gli altri casi $\sqrt{n}$ è irrazionale. Per dimostrarlo osserviamo come è fatta la scomposizione in fattori primi di un quadrato. Se $m = 2^3 \cdot 5$, allora $m^2 = 2^6 \cdot 5^2$: elevando al quadrato ogni esponente raddoppia. Quindi *in un quadrato ogni fattore primo compare con esponente pari*; e viceversa, un naturale in cui tutti gli esponenti sono pari è un quadrato perfetto, perché si possono dimezzare.

IN SINTESI

Teorema. Sia n un numero naturale. $\sqrt{n}$ è razionale se e solo se n è un quadrato perfetto; in caso contrario $\sqrt{n}$ è irrazionale.

Ipotesi: n naturale, non quadrato perfetto. **Tesi:** $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

Dimostrazione. Se n non è un quadrato perfetto, nella sua scomposizione c'è almeno un fattore primo, chiamiamolo s, con esponente dispari. Supponiamo per assurdo che sia $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$. Allora

$$p^2 = n \cdot q^2.$$

Contiamo quante volte compare il primo s nei due membri. In p^2 compare un numero pari di volte (eventualmente zero), perché p^2 è un quadrato. A destra compare un numero pari di volte in q^2 e un numero dispari di volte in n: in tutto, pari + dispari = un numero dispari di volte. Ma

la scomposizione in fattori primi di un naturale è unica (teorema fondamentale dell'aritmetica), quindi i due membri non possono essere uguali. Contraddizione. *c.v.d.*

ESEMPIO SVOLTO

Stabilisci se sono razionali o irrazionali: $\sqrt{12}$, $\sqrt{144}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{1{,}44}$.

• $12 = 2^2 \cdot 3$: il fattore 3 ha esponente 1, dispari. 12 non è un quadrato perfetto, quindi $\sqrt{12}$ è irrazionale (infatti $3^2 = 9 < 12 < 16 = 4^2$).

• $144 = 2^4 \cdot 3^2$: tutti gli esponenti sono pari, quindi 144 è un quadrato perfetto: $\sqrt{144} = 2^2 \cdot 3 = 12$, razionale.

• $50 = 2 \cdot 5^2$: il fattore 2 ha esponente 1. $\sqrt{50}$ è irrazionale.

• Il teorema parla di naturali, ma si ragiona allo stesso modo con un decimale: $1{,}44 = \frac{144}{100}$ e $\left(\frac{12}{10}\right)^2 = \frac{144}{100}$. Quindi $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$, razionale. In generale, se una frazione ridotta ai minimi termini ha per numeratore e per denominatore due quadrati perfetti, la sua radice quadrata è razionale.

1.1.3 Calcolare con i numeri irrazionali

Che cosa succede se sommiamo o moltiplichiamo un razionale e un irrazionale? Prendiamo $\sqrt{2} + 1$. Se fosse razionale, cioè uguale a un razionale t, avremmo $\sqrt{2} = t - 1$: differenza di due razionali, quindi razionale. Ma $\sqrt{2}$ non lo è. Dunque $\sqrt{2} + 1$ è irrazionale. Lo stesso ragionamento vale in generale.

IN SINTESI

Teorema. Siano r un numero razionale e x un numero irrazionale. Allora:

- $r + x$ e $r - x$ sono irrazionali;
- se $r \neq 0$, anche $r \cdot x$ e $\frac{x}{r}$ sono irrazionali.

Ipotesi: $r \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **Tesi:** $r \pm x \notin \mathbb{Q}$; se $r \neq 0$, $rx \notin \mathbb{Q}$ e $\frac{x}{r} \notin \mathbb{Q}$.

Dimostrazione. Se fosse $r + x = t$ con t razionale, sarebbe $x = t - r$, razionale perché $\mathbb{Q}$ è chiuso rispetto alla sottrazione: assurdo. Se fosse $rx = t$ con $r \neq 0$, sarebbe $x = \frac{t}{r}$, razionale perché in $\mathbb{Q}$ si può dividere per ogni numero diverso da zero: assurdo. I casi della differenza e del quoziente sono analoghi. *c.v.d.*

Così sono irrazionali $\sqrt{2}+1$, $5-\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e infiniti altri numeri: ne troviamo uno per ogni razionale. Attenzione però: il teorema non dice nulla sulla somma o sul prodotto di *due* irrazionali, che può essere razionale oppure no.

ERRORE FREQUENTE

«$\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$ sono irrazionali, quindi il loro prodotto è irrazionale.» Falso! Il prodotto $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ è un numero positivo il cui quadrato vale $(\sqrt{2})^2\cdot(\sqrt{8})^2 = 2\cdot 8 = 16$: quindi $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} = 4$, un intero.

Anche la somma di due irrazionali può essere razionale: $(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2}) = 2$. Per la somma e il prodotto di due irrazionali non c'è una regola: bisogna ragionare caso per caso.

Il più famoso dei numeri irrazionali è forse π, il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro. Che π sia irrazionale fu dimostrato da Johann Heinrich Lambert nel 1761, con un ragionamento che richiede strumenti che studierai negli anni successivi; qui ci basta l'enunciato. Le scritture 3,14 e $\dfrac{22}{7}$, che usavi alla scuola media, sono quindi soltanto *approssimazioni* razionali di π, non il suo valore.

1.2 L'insieme dei numeri reali

1.2.1 Decimali illimitati non periodici

Abbiamo ricordato che le frazioni danno decimali limitati o periodici. Un numero irrazionale, allora, non può avere né l'una né l'altra scrittura: il suo sviluppo decimale è **illimitato non periodico**, cioè ha infinite cifre dopo la virgola e nessun gruppo di cifre che, da un certo punto in poi, si ripeta sempre uguale. È il caso di $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$, di $\sqrt{3} = 1{,}73205080\ldots$ o di $\pi = 3{,}14159265\ldots$: le cifre continuano senza fine, e nessuno schema le fa ripetere a gruppi.

Non bisogna però pensare che un decimale illimitato non periodico debba avere cifre «a caso». Il numero

$$0{,}101001000100001\ldots$$

in cui, dopo ogni cifra 1, il numero di zeri aumenta ogni volta di uno, segue una regola semplicissima, eppure non è periodico: un periodo di lunghezza L dovrebbe ripetersi sempre uguale, ma più avanti si incontrano blocchi di zeri più lunghi di L, che non contengono nessun 1. Quindi è un numero irrazionale. La figura 1.1 riassume la classificazione dei numeri decimali.

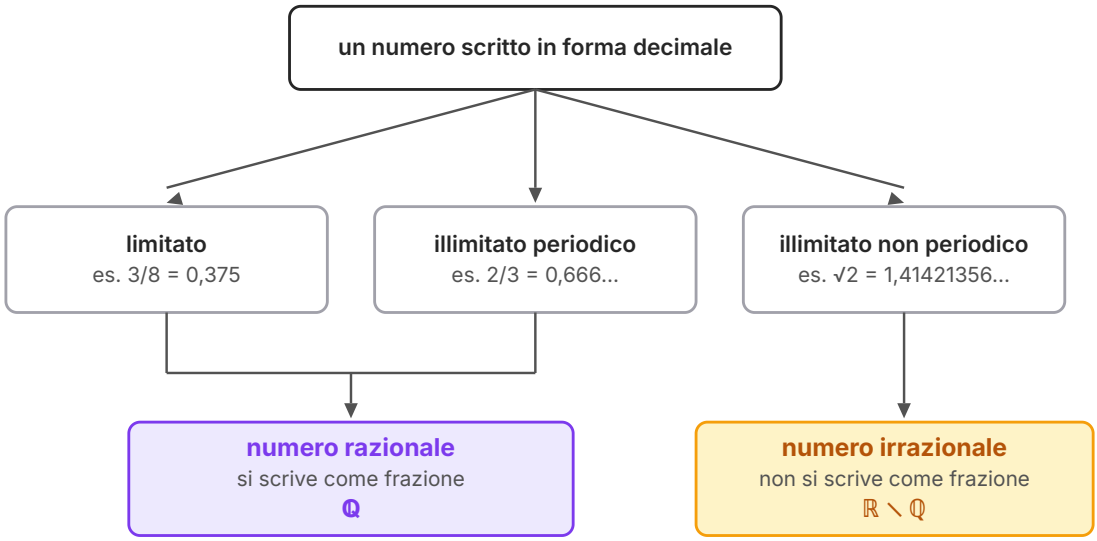


Figura 1.1 I tre tipi di sviluppo decimale. Limitati e periodici corrispondono alle frazioni; gli sviluppi illimitati non periodici sono i numeri irrazionali.

1.2.2 Razionali e irrazionali insieme

Chiamiamo **numero reale** ogni numero che si può scrivere in forma decimale, limitata, periodica o illimitata non periodica. L'insieme dei numeri reali si indica con $\mathbb{R}$: è l'unione dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali e dell'insieme degli irrazionali, che indichiamo con $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Un numero reale è razionale oppure irrazionale, mai le due cose insieme. Gli insiemi numerici che conosci sono ora inclusi l'uno nell'altro come nella figura 1.2:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

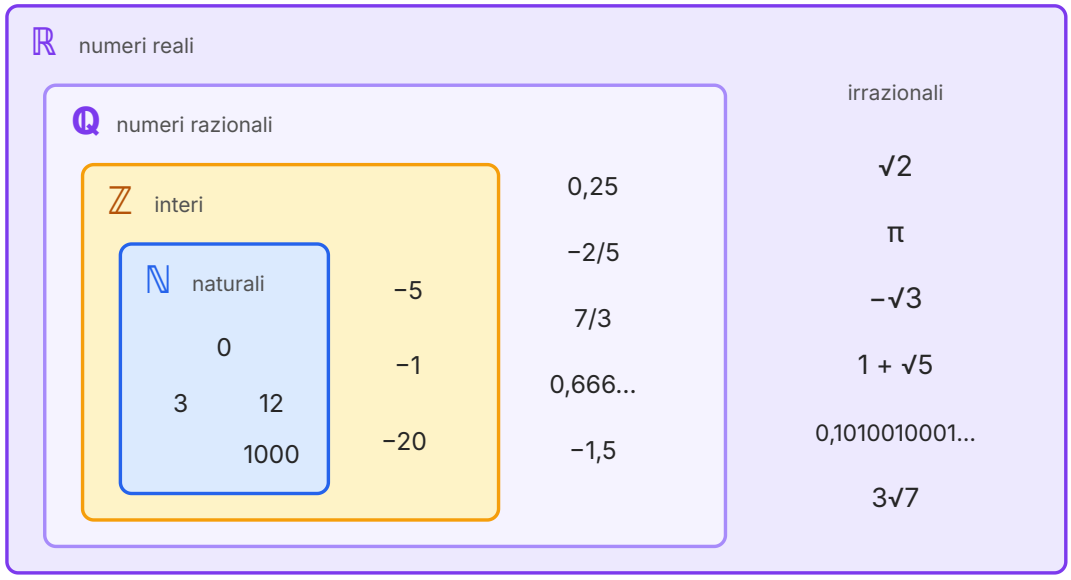


Figura 1.2 Gli insiemi numerici $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, con alcuni esempi. La fascia a destra contiene i numeri irrazionali, cioè i reali che non sono razionali.

In $\mathbb{R}$ si possono eseguire addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione per un numero diverso da zero, e il risultato è ancora un numero reale. Valgono tutte le proprietà che conosci dai razionali: commutativa, associativa, distributiva, esistenza dell'opposto e, per i numeri diversi da zero, del reciproco. Dare una definizione rigorosa di queste operazioni tra decimali con infinite cifre è delicato, e i matematici ci riuscirono solo nell'Ottocento; noi le useremo come si usano in tutte le scienze, sapendo che si comportano come quelle tra frazioni. Una cosa però in $\mathbb{R}$ non si può fare: estrarre la radice quadrata di un numero negativo, perché il quadrato di un numero reale non è mai negativo.

1.2.3 Confrontare due numeri reali

Due numeri reali positivi scritti in forma decimale si confrontano come si confrontano i decimali: si guarda la parte intera e poi, una dopo l'altra, le cifre decimali, fino alla prima cifra diversa. Quando uno dei due numeri è una radice, c'è anche un'altra strada. Per due numeri *non negativi* a e b vale

$$a < b \iff a^2 < b^2,$$

perché moltiplicando membro a membro due disuguaglianze tra numeri positivi il verso si conserva. Così per confrontare $\sqrt{10}$ e $3{,}16$ basta confrontare 10 con $3{,}16^2 = 9{,}9856$: poiché $9{,}9856 <$

10, si ha $3{,}16 < \sqrt{10}$.

ESEMPIO SVOLTO

Ordina dal minore al maggiore: $\sqrt{10}$, π, 3,16, $\frac{22}{7}$.

Scriviamo le prime cifre decimali di ciascun numero: $\sqrt{10} = 3{,}1622\ldots$, $\pi = 3{,}1415\ldots$, $3{,}16 = 3{,}1600$, $\frac{22}{7} = 3{,}1428\ldots$. Tutti hanno parte intera 3 e prima cifra decimale 1. Alla seconda cifra decimale, π e $\frac{22}{7}$ hanno 4, mentre $\sqrt{10}$ e 3,16 hanno 6: i primi due sono i più piccoli. Tra π e $\frac{22}{7}$ decide la terza cifra: $1 < 2$, quindi $\pi < \frac{22}{7}$. Tra 3,16 e $\sqrt{10}$ decide la terza cifra: $0 < 2$. Quindi

$$\pi < \frac{22}{7} < 3{,}16 < \sqrt{10}.$$

Per le cifre di π ci siamo fidati della calcolatrice; per $\sqrt{10}$ lo si può verificare con i quadrati: $3{,}162^2 = 9{,}998244 < 10 < 10{,}004569 = 3{,}163^2$, quindi $3{,}162 < \sqrt{10} < 3{,}163$.

1.3 La retta reale

1.3.1 I razionali lasciano buchi

Fissati su una retta un punto O come origine, un verso e un'unità di misura, a ogni numero razionale corrisponde un punto. I razionali sono densi: tra due razionali c'è sempre un altro razionale, per esempio la loro media, e quindi ce ne sono infiniti. Si potrebbe pensare che i punti razionali coprano tutta la retta. Non è così: il punto che si ottiene ribaltando con il compasso la diagonale del quadrato unitario dista $\sqrt{2}$ dall'origine, e non corrisponde a nessun razionale (vedi *Matematica 1*). Per i teoremi dimostrati all'inizio del capitolo i «buchi» sono infiniti: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}+1$, $3\sqrt{2}$, … Anzi, in un senso che si può precisare, gli irrazionali sono molti di più dei razionali.

Con riga e compasso si possono costruire molti di questi punti, usando il teorema di Pitagora che conosci dalla scuola media (lo dimostreremo nel capitolo 4). Nella figura 1.3, dal punto $\sqrt{2}$ si alza un segmento perpendicolare lungo 1: il triangolo rettangolo che ha per cateti $\sqrt{2}$ e 1 ha ipotenusa di quadrato $(\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3$, cioè lunga $\sqrt{3}$. Riportando l'ipotenusa sulla retta con il compasso, puntato nell'origine, si trova il punto $\sqrt{3}$.

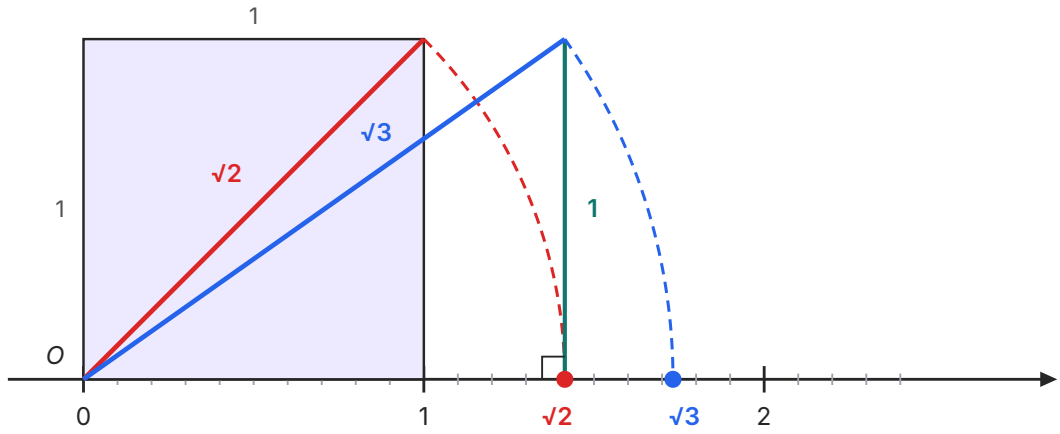


Figura 1.3 Costruzione dei punti √2 e √3 sulla retta. La diagonale del quadrato unitario (rossa) misura √2; il triangolo rettangolo di cateti √2 e 1 ha ipotenusa (blu) √3. Gli archi, centrati nell'origine *O*, riportano le due lunghezze sulla retta.

Ripetendo il procedimento, cioè alzando ogni volta un segmento lungo 1 perpendicolare all'ultima ipotenusa, si ottengono in successione segmenti lunghi $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ...: è la spirale di Teodoro, che ritroveremo nel capitolo 4.

1.3.2 La corrispondenza tra punti e numeri reali

Con i numeri reali i buchi spariscono. Accettiamo come punto di partenza, senza dimostrarlo, il fatto seguente, che corrisponde all'intuizione di una retta «continua», senza interruzioni: *a ogni numero reale corrisponde uno e un solo punto della retta, e a ogni punto della retta corrisponde uno e un solo numero reale.* Una corrispondenza di questo tipo, che associa a ogni elemento del primo insieme uno e un solo elemento del secondo e viceversa, si chiama **corrispondenza biunivoca**. La retta con l'origine, il verso e l'unità di misura, pensata come immagine di $\mathbb{R}$, si chiama **retta reale**; il numero che corrisponde a un punto è la sua **ascissa**.

Sulla retta reale l'ordine diventa una questione di posizione: $a < b$ significa che il punto di ascissa a precede il punto di ascissa b. Inoltre tra due numeri reali distinti, per quanto vicini, ci sono sempre infiniti razionali e infiniti irrazionali. Per esempio tra $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$ e 1,415 ci sono i razionali 1,4143, 1,4144, ..., e gli irrazionali $1{,}4143 + \dfrac{\sqrt{2}}{10\,000}$, $1{,}4143 + \dfrac{\sqrt{2}}{100\,000}$, ... (razionale più irrazionale).

DA RICORDARE

Gli intervalli che conosci dal primo volume si definiscono allo stesso modo in $\mathbb{R}$, anche con estremi irrazionali: $[\sqrt{2};\ \pi]$ è l'insieme dei reali x con $\sqrt{2} \le x \le \pi$, $]-\sqrt{3};\ 0[$ quello dei reali con $-\sqrt{3} < x < 0$, $]-\infty;\ \sqrt{5}]$ quello dei reali con $x \le \sqrt{5}$. Le parentesi quadre rivolte verso l'interno indicano un estremo incluso, quelle rivolte verso l'esterno un estremo escluso; $\pm\infty$ sono sempre esclusi. Un intervallo con estremi distinti contiene sempre infiniti numeri reali.

1.4 Approssimare un numero reale

1.4.1 Per difetto e per eccesso

Un numero irrazionale non si può scrivere per intero: le sue cifre non finiscono mai. Nei calcoli concreti lo sostituiamo con un numero razionale vicino, una sua approssimazione. Un numero minore del valore esatto è un'**approssimazione per difetto**, uno maggiore un'**approssimazione per eccesso**. Per un numero positivo, troncare lo sviluppo decimale dà l'approssimazione per difetto; aumentando di 1 l'ultima cifra conservata si ottiene quella per eccesso. Per $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$, ai centesimi: 1,41 per difetto e 1,42 per eccesso; ai millesimi: 1,414 e 1,415.

Ma come facciamo a conoscere le cifre di $\sqrt{2}$ senza la calcolatrice? Basta confrontare i quadrati, come abbiamo già fatto nel primo volume: se il quadrato di un numero positivo è minore di 2, quel numero è minore di $\sqrt{2}$; se è maggiore di 2, è maggiore di $\sqrt{2}$. Procedendo una cifra alla volta otteniamo la tabella 1.1.

Tabella 1.1 Approssimazioni successive di $\sqrt{2}$. A ogni riga l'intervallo si restringe di dieci volte e contiene il successivo.

Cifre decimali	Per difetto a	a^2	Per eccesso b	b^2	Ampiezza $b - a$
0	1	1	2	4	1
1	1,4	1,96	1,5	2,25	0,1
2	1,41	1,9881	1,42	2,0164	0,01
3	1,414	1,999396	1,415	2,002225	0,001
4	1,4142	1,99996164	1,4143	2,00024449	0,0001

Ogni riga fornisce un intervallo $[a;\ b]$ che contiene $\sqrt{2}$, perché $a^2 < 2 < b^2$. Gli intervalli sono uno dentro l'altro, e la loro ampiezza diventa ogni volta dieci volte più piccola: 1, 0,1, 0,01, … La figura 1.4 mostra l'effetto sulla retta: è come guardare $\sqrt{2}$ con una lente che ingrandisce ogni volta dieci volte.

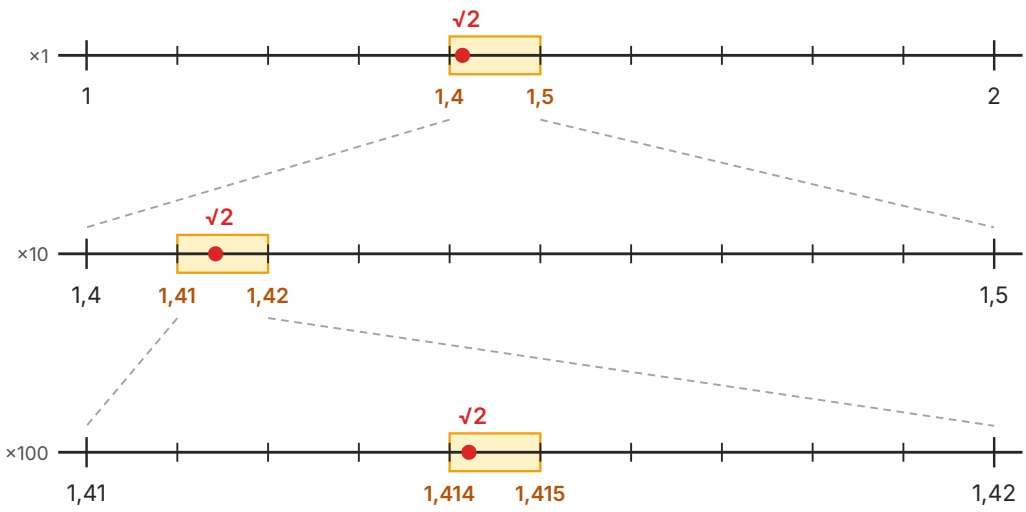


Figura 1.4 Approssimazioni successive di √2: ogni riga ingrandisce dieci volte l'intervallo evidenziato nella riga precedente. Il punto √2 resta sempre dentro l'intervallo.

1.4.2 Classi contigue: come un reale è «catturato» dai razionali

Raccogliamo le approssimazioni per difetto in un insieme $A = \{1; 1{,}4; 1{,}41; 1{,}414; \ldots\}$ e quelle per eccesso in un insieme $B = \{2; 1{,}5; 1{,}42; 1{,}415; \ldots\}$. Le due successioni hanno due proprietà:

- ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B: le due successioni non si «scavalcano» mai;
- per quanto piccola sia una tolleranza scelta, per esempio un milionesimo, si trovano un elemento di A e uno di B che distano meno di essa.

Due insiemi di numeri con queste proprietà si dicono **classi contigue**. Intuitivamente, si stringono l'uno verso l'altro senza mai sovrapporsi, e tra di loro resta posto per *un solo* numero reale, detto **elemento separatore**: nel nostro esempio, √2. Se ci limitassimo ai razionali, tra A e B non troveremmo nulla, perché nessun razionale ha quadrato 2: è un buco. In $\mathbb{R}$, invece, due classi contigue hanno sempre un elemento separatore. È questa la proprietà che rende «continua» la retta reale, e che useremo, senza dimostrarla, ogni volta che un numero è determinato da approssimazioni sempre migliori.

APPROFONDIMENTO · I PITAGORICI E L'INCOMMENSURABILE

Le notizie sicure sulla scuola pitagorica sono poche, perché i suoi membri non lasciarono scritti propri e le testimonianze sono molto più tarde. È certo che i matematici greci, già prima di Platone, sapevano che il lato e la diagonale del quadrato sono *incommensurabili*, cioè che non esiste un segmento contenuto un numero intero di volte in entrambi. Secondo la tradizione la scoperta avvenne in ambiente pitagorico, e alcuni autori antichi la collegano al nome di Ippaso di Metaponto, del quale si raccontava che fosse stato punito per averla divulgata: sono racconti, non fatti documentati.

Un'informazione più precisa viene da Platone, che nel dialogo *Teeteto* attribuisce a Teodoro di Cirene la dimostrazione, caso per caso, dell'irrazionalità di $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e delle altre radici fino a $\sqrt{17}$ (ne riparleremo nel capitolo 4). Il libro X degli *Elementi* di Euclide è interamente dedicato alle grandezze incommensurabili. Una definizione rigorosa dei numeri reali arrivò molto più tardi, nel 1872, con i lavori di Richard Dedekind e di Georg Cantor.

Con il computer: il metodo di Erone per √3

Le approssimazioni della tabella 1.1 migliorano di una cifra a ogni passo. Esiste un procedimento molto più rapido, descritto da Erone di Alessandria (vissuto probabilmente nel I secolo d.C.) e chiamato perciò **metodo di Erone**. L'idea è semplice. Se x è un'approssimazione per eccesso di $\sqrt{3}$, cioè $x > \sqrt{3}$, allora $\frac{3}{x}$ è un'approssimazione per difetto, perché $\frac{3}{x} < \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Quindi $\sqrt{3}$ sta nell'intervallo tra $\frac{3}{x}$ e x, e il punto medio di questo intervallo è una nuova approssimazione, migliore della precedente:

$$x_{\text{nuovo}} = \frac{x + \frac{3}{x}}{2}.$$

Con un foglio di calcolo bastano poche celle. Nella cella A2 scriviamo il valore di partenza 2 (infatti $2^2 = 4 > 3$); in B2 la formula `=3/A2`; in A3 la formula `=(A2+B2)/2`. Copiamo B2 in B3 e trasciniamo verso il basso le formule della riga 3. Nella colonna C la formula `=A2−B2` mostra l'ampiezza dell'intervallo. Si ottiene la tabella 1.2.

Tabella 1.2 Il metodo di Erone per $\sqrt{3} = 1{,}7320508075\ldots$, partendo da 2 (valori arrotondati alla nona cifra decimale). L'ampiezza dell'intervallo crolla a ogni passo.

Passo	Per eccesso x	Per difetto $3/x$	Ampiezza
0	2,000000000	1,500000000	0,500000000
1	1,750000000	1,714285714	0,035714286
2	1,732142857	1,731958763	$1{,}8 \cdot 10^{-4}$
3	1,732050810	1,732050805	$4{,}9 \cdot 10^{-9}$

Dopo soli tre passi le due colonne coincidono fino alla settima cifra decimale: $\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$ con un errore minore di un centomilionesimo. Al passo successivo le colonne coincidono in tutte le cifre che il foglio di calcolo mostra. Ciò non significa che abbiamo trovato il valore esatto di $\sqrt{3}$, che è irrazionale: abbiamo raggiunto il limite di precisione della macchina, che lavora sempre con un numero finito di cifre (ne parleremo nel capitolo 15).

1.5 Calcolare con valori approssimati

1.5.1 Errore assoluto ed errore relativo

Ricordiamo dal primo volume che, se un valore approssimato x sostituisce un valore esatto a, l'errore assoluto è $|x - a|$ e l'errore relativo è il rapporto tra l'errore assoluto e il valore, spesso espresso in percentuale. Di solito il valore esatto non lo conosciamo (altrimenti non approssimeremmo!), ma sappiamo maggiorare l'errore: se diciamo che 1,41 approssima $\sqrt{2}$ ***a meno di un centesimo***, intendiamo che $|1{,}41 - \sqrt{2}| < 0{,}01$. Così l'errore assoluto di $\pi \approx 3{,}14$ è minore di 0,002 e il suo errore relativo è minore di $\dfrac{0{,}002}{3{,}14} \approx 0{,}064\%$.

1.5.2 Come si propagano gli errori

Quando usiamo valori approssimati in un calcolo, anche il risultato è approssimato. Quanto? Vediamolo con due casi semplici, senza pretendere formule complete (le studierai in fisica).

- **Somma.** Se a è noto a meno di 0,1 e b a meno di 0,2, la somma $a + b$ è nota a meno di $0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$: nel caso peggiore i due errori si sommano. In una somma (o in una differenza) gli errori assoluti si sommano: è il primo esempio di propagazione dell'errore.
- **Prodotto.** In un prodotto (e in un quoziente) sono invece gli *errori relativi* che, con buona approssimazione, si sommano. Lo vediamo nell'esempio che segue.

ESEMPIO SVOLTO

Un foglio rettangolare misura 12,3 cm × 8,6 cm, con un righello che ha la precisione del millimetro: ciascuna misura può essere sbagliata al più di 0,1 cm. Quanto vale l'area, e con quale precisione?

Valore misurato. $12{,}3 \cdot 8{,}6 = 105{,}78\ \text{cm}^2$.

Valori estremi. L'area più piccola possibile è $12{,}2 \cdot 8{,}5 = 103{,}7\ \text{cm}^2$, la più grande $12{,}4 \cdot 8{,}7 = 107{,}88\ \text{cm}^2$. L'area vera sta tra le due, e differisce da 105,78 al più di circa $2{,}1\ \text{cm}^2$.

Con gli errori relativi. Gli errori relativi delle misure sono $\frac{0{,}1}{12{,}3} \approx 0{,}81\%$ e $\frac{0{,}1}{8{,}6} \approx 1{,}16\%$; la loro somma è circa 1,98%, e l'1,98% di 105,78 è circa $2{,}09\ \text{cm}^2$: lo stesso risultato. La figura 1.5 spiega perché: aumentando i lati, l'area cresce di due strisce, di aree $8{,}6 \cdot 0{,}1$ e $12{,}3 \cdot 0{,}1$, più un quadratino di area $0{,}01\ \text{cm}^2$, che si può trascurare.

Risultato. Ha senso scrivere $A = (106 \pm 2)\ \text{cm}^2$: dichiarare $105{,}78\ \text{cm}^2$ significherebbe vantare una precisione al centesimo che non abbiamo.

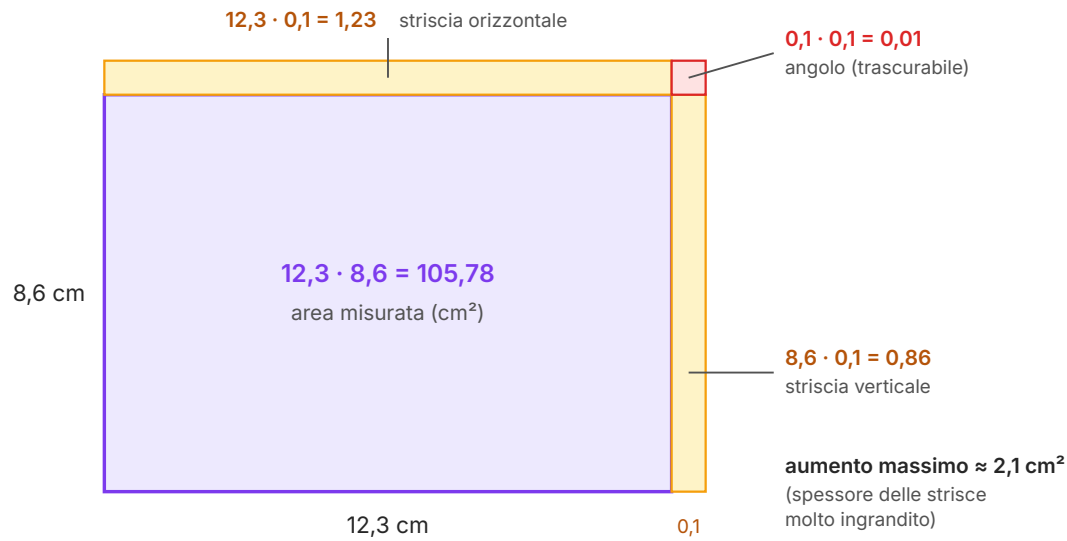


Figura 1.5 Come cresce l'area di un rettangolo quando ciascun lato aumenta di 0,1 cm: due strisce più un piccolo angolo. Lo spessore delle strisce è molto ingrandito per renderle visibili.

1.5.3 Quante cifre servono?

Supponiamo di dover calcolare la diagonale di un quadrato di lato 100 m, cioè $100\sqrt{2}$ m = 141,42… m. Con $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ troviamo 140 m, con un errore di oltre un metro; con $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ troviamo 141 m, con un errore di circa 42 cm; con $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ l'errore scende sotto il centimetro. Mol-

tiplicando per 100 anche l'errore assoluto viene moltiplicato per 100, mentre l'errore relativo resta lo stesso. La regola pratica è: *si scelgono le cifre in base alla precisione richiesta dal risultato, si porta qualche cifra in più nei calcoli intermedi e si arrotonda solo alla fine*. Quando è possibile, conviene anzi lasciare i numeri irrazionali in forma esatta ($100\sqrt{2}$ m) e approssimare soltanto il risultato finale.

ERRORE FREQUENTE

Arrotondare troppo presto. Calcoliamo $(\sqrt{2})^2 \cdot 50$, che vale esattamente 100. Chi arrotonda subito $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ ottiene $1{,}4^2 \cdot 50 = 1{,}96 \cdot 50 = 98$, sbagliando del 2%. Chi lavora in forma esatta scrive $(\sqrt{2})^2 = 2$ e ottiene 100 senza alcun errore.

Anche la calcolatrice arrotonda: il numero che mostra per $\sqrt{2}$ è un decimale limitato, quindi non è $\sqrt{2}$. In un calcolo lungo, i piccoli arrotondamenti di ogni passaggio possono accumularsi.

COLLEGAMENTI

Misure in fisica e cifre significative. In laboratorio ogni misura è un valore approssimato, e il modo in cui la si scrive dichiara la sua precisione. Scrivere che un tavolo è lungo 1,20 m invece di 1,2 m non è la stessa cosa: le tre cifre significative di 1,20 m dicono che lo strumento apprezza il centimetro. Per questo un risultato non va scritto con più cifre di quelle che le misure giustificano: dividendo una distanza di 100 m, misurata al metro, per un tempo di 12,3 s, misurato al decimo di secondo, la calcolatrice mostra 8,130081301..., ma ha senso scrivere circa 8,1 m/s. In fisica imparerai a stimare l'incertezza di un risultato con regole simili a quelle di questo paragrafo: errori assoluti che si sommano nelle somme, errori relativi che si sommano nei prodotti e nei quozienti.

1.6 Valore assoluto e distanza

Il **valore assoluto** di un numero reale a, che si indica con $|a|$, si definisce come per gli interi nel primo volume:

$$|a| = a \ \text{ se } a \geq 0; \quad |a| = -a \ \text{ se } a < 0.$$

Così $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|-\pi| = \pi$, $|0| = 0$, e anche $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$, perché $1 - \sqrt{2}$ è negativo ($1 < \sqrt{2}$). Sulla retta reale $|a|$ è la distanza del punto di ascissa a dall'origine. Più in generale, la **distanza** tra i punti di ascisse a e b è

$$d(a; b) = |a - b|.$$

Il valore assoluto serve proprio a non dover sapere quale dei due numeri sia il maggiore: $|a - b|$ e $|b - a|$ sono uguali. Nella figura 1.6, in alto, la distanza tra -2 e 3 è $|-2 - 3| = |-5| = 5$. Dalla definizione seguono alcune proprietà che userai spesso:

- $|a| \geq 0$, e $|a| = 0$ solo se $a = 0$;
- $|-a| = |a|$;
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, e se $b \neq 0$ anche $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$;
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (**disuguaglianza triangolare**): vale l'uguaglianza se a e b hanno lo stesso segno (o uno dei due è 0), altrimenti il primo membro è minore. Per esempio $|3 + (-5)| = 2$, mentre $|3| + |-5| = 8$.

ESEMPIO SVOLTO

Calcola la distanza tra i punti di ascisse: a) $-\sqrt{2}$ e 3; b) $1 - \sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$.

a) $d = |-\sqrt{2} - 3| = |-(3 + \sqrt{2})| = 3 + \sqrt{2} \approx 4{,}41$.

b) $d = |(1 - \sqrt{3}) - \sqrt{3}| = |1 - 2\sqrt{3}|$. Poiché $2\sqrt{3} \approx 3{,}46$ è maggiore di 1, il numero $1 - 2\sqrt{3}$ è negativo, quindi $d = 2\sqrt{3} - 1 \approx 2{,}46$.

Controllo: $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ e $1 - \sqrt{3} \approx -0{,}73$; la distanza tra $-0{,}73$ e $1{,}73$ è circa 2,46. Il risultato esatto è $2\sqrt{3} - 1$; le approssimazioni servono solo a controllarlo.

Il valore assoluto permette anche di descrivere in modo compatto un insieme di punti. I numeri x la cui distanza da 1 è minore di 1,5 sono quelli per cui $|x - 1| < 1{,}5$: sulla retta, sono i punti tra $1 - 1{,}5 = -0{,}5$ e $1 + 1{,}5 = 2{,}5$, esclusi gli estremi, cioè l'intervallo $]-0{,}5;\ 2{,}5[$ (la figura 1.6, in basso). In generale, se $r > 0$, la condizione $|x - c| < r$ individua l'intervallo $]c - r;\ c + r[$, di centro c e raggio r. Le equazioni e le disequazioni con il valore assoluto, da risolvere con il calcolo, le studierai nel capitolo 10; nel capitolo 2 ritroverai il valore assoluto nella radice di un quadrato.

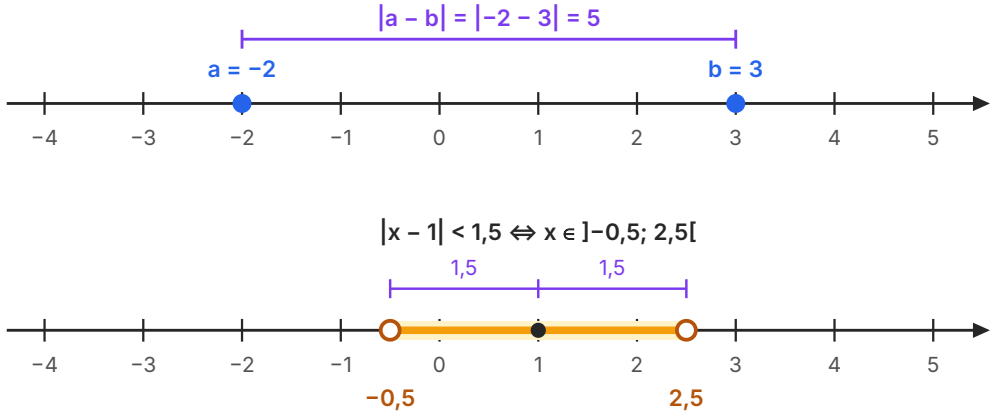


Figura 1.6 In alto: la distanza tra i punti di ascisse -2 e 3 è $|-2 - 3| = 5$. In basso: i punti la cui distanza da 1 è minore di 1,5 formano l'intervallo aperto $]-0{,}5;\ 2{,}5[$.

Ecco infine il legame con le approssimazioni: dire che x approssima a a meno di ε (la lettera greca epsilon, usata per le quantità piccole) significa che $|x - a| < \varepsilon$, cioè che a sta nell'intervallo di centro x e raggio ε. Gli intervalli della tabella 1.1 sono proprio intervalli di questo tipo, sempre più stretti intorno a $\sqrt{2}$.

Con questo capitolo abbiamo a disposizione tutti i numeri che servono per misurare: ogni segmento ha una lunghezza reale, ogni punto della retta un'ascissa. Nel prossimo capitolo impareremo a calcolare in forma esatta con le radici, senza passare dalle approssimazioni: scriveremo per esempio $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ e $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$, e giustificheremo con le proprietà dei radicali ciò che qui abbiamo ottenuto ragionando sui quadrati. Le approssimazioni torneranno utili alla fine, quando un risultato esatto come $2\sqrt{3} - 1$ dovrà diventare una misura da usare in pratica, con il giusto numero di cifre.

SINTESI

- Un numero irrazionale non si può scrivere come frazione; il suo sviluppo decimale è illimitato non periodico.
- $\sqrt{3}$ è irrazionale; più in generale, per n naturale, $\sqrt{n}$ è razionale solo se n è un quadrato perfetto. La dimostrazione usa la scomposizione in fattori primi: in un quadrato ogni primo ha esponente pari.
- La somma di un razionale e di un irrazionale è irrazionale; il prodotto di un razionale diverso da zero e di un irrazionale è irrazionale. Somma e prodotto di due irrazionali possono essere razionali ($\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4$).
- π è irrazionale (Lambert, 1761); 3,14 e 22/7 ne sono approssimazioni razionali.
- L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è l'unione dei razionali e degli irrazionali: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. In $\mathbb{R}$ valgono le proprietà delle operazioni note da $\mathbb{Q}$.
- Tra i numeri reali e i punti della retta c'è una corrispondenza biunivoca: la retta reale non ha buchi. Con riga e compasso si costruiscono i punti $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ...
- Due numeri non negativi si confrontano anche confrontando i loro quadrati: per $a, b \geq 0$, $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.
- Un numero reale si approssima per difetto e per eccesso con intervalli sempre più stretti; le approssimazioni per difetto e per eccesso formano due classi contigue, il cui unico elemento separatore è il numero stesso.
- Il metodo di Erone approssima $\sqrt{n}$ con la media tra x e n/x, e converge molto rapidamente.
- Nelle somme si sommano gli errori assoluti, nei prodotti e nei quozienti (circa) gli errori relativi. Si arrotonda solo alla fine, e un risultato non si scrive con più cifre di quante le misure ne giustificano.
- $|a - b|$ è la distanza tra i punti di ascisse a e b; $|x - c| < r$ individua l'intervallo $]c - r;\, c + r[$. Dire che x approssima a a meno di ε significa che $|x - a| < \varepsilon$: il valore esatto sta in un intervallo di centro x e raggio ε, tanto più stretto quanto migliore è l'approssimazione.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Quale dei seguenti numeri è irrazionale?
   A. $\sqrt{36}$
   B. $1,\overline{2}$ (periodico)
   C. $\sqrt{12}$
   D. $\frac{22}{7}$

2. ● Il numero 0,101001000100001..., in cui dopo ogni 1 il numero di zeri aumenta di uno, è:
   A. periodico, con periodo 10
   B. razionale, perché le sue cifre seguono una regola
   C. intero
   D. irrazionale

3. ● Quale affermazione è *sempre* vera?
   A. Il prodotto di un razionale diverso da zero e di un irrazionale è irrazionale.
   B. La somma di due irrazionali è irrazionale.
   C. Il prodotto di due irrazionali è irrazionale.
   D. La radice quadrata di un naturale è irrazionale.

4. ● Quanti numeri reali sono compresi tra 1,41 e 1,42?
   A. Nessuno
   B. Uno solo, $\sqrt{2}$
   C. Nove
   D. Infiniti

5. ● La distanza tra i punti della retta reale di ascisse -3 e 5 è:
   A. 2
   B. 8
   C. -8
   D. -2

6. ●● Poiché $1,73^2 = 2,9929$, il numero 1,73 è:
   A. un'approssimazione per difetto di $\sqrt{3}$ a meno di un centesimo
   B. un'approssimazione per eccesso di $\sqrt{3}$
   C. il valore esatto di $\sqrt{3}$
   D. un'approssimazione per difetto di $\sqrt{3}$ a meno di un millesimo

7. ●● Una lunghezza di 50 cm è misurata con un errore massimo di 0,5 cm, una di 2 m con un errore massimo di 1 cm. Quale misura è più precisa?

   A. La prima

   B. La seconda

   C. Sono ugualmente precise

   D. Non si può dire senza conoscere lo strumento

8. ● **Vero o falso?** Correggi le affermazioni false. a) Ogni numero naturale è un numero reale. b) Ogni numero reale è razionale oppure irrazionale. c) $\sqrt{16}$ è irrazionale. d) $\pi = 3{,}14$. e) Tra due numeri irrazionali distinti c'è sempre almeno un numero razionale.

9. ● **Completa.** a) Un numero è irrazionale se il suo sviluppo decimale è _____ e _____. b) Un naturale n ha radice quadrata razionale solo se n è un _____. c) La distanza tra i punti di ascisse a e b è _____. d) Se $x > \sqrt{5}$, allora $\frac{5}{x}$ è un'approssimazione per _____ di $\sqrt{5}$.

Calcolare

10. ● Stabilisci quali numeri sono razionali e quali irrazionali, motivando: a) $\sqrt{25}$; b) $\sqrt{27}$; c) $\sqrt{0{,}\overline{09}}$; d) 2π; e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$; f) $5 - \sqrt{2}$.

11. ● Ordina dal minore al maggiore, senza calcolatrice per le radici (confronta i quadrati): $\sqrt{5}$; 2,23; $\frac{9}{4}$; $2{,}\overline{23}$.

12. ● Confrontando i quadrati, trova le approssimazioni per difetto e per eccesso di $\sqrt{7}$ a meno di 1, di 0,1, di 0,01 e di 0,001.

13. ●● Senza calcolatrice, stabilisci tra quali interi consecutivi sono compresi: a) $\sqrt{50}$; b) $\sqrt{120}$; c) $\sqrt{200}$; d) $-\sqrt{30}$.

14. ● Calcola la distanza tra i punti di ascisse: a) -4 e 7; b) $-2{,}5$ e $-0{,}8$; c) $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$; d) $1 - \sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$.

15. ●● Scrivi come intervallo e rappresenta sulla retta l'insieme dei numeri reali la cui distanza: a) da 3 è minore di 2; b) da -1 è al più 0,5; c) da 0 è minore di $\sqrt{2}$.

16. ●● Arrotonda ai centesimi e calcola l'errore assoluto e l'errore relativo (in percentuale): a) $\frac{5}{7}$; b) $\sqrt{10}$.

17. ●● Confronta le approssimazioni 3,14 e $\frac{22}{7}$ di π: quale ha l'errore assoluto minore? Calcola i due errori relativi.

18. ●● Tre segmenti consecutivi sono misurati $(4{,}2 \pm 0{,}1)$ cm, $(3{,}7 \pm 0{,}1)$ cm e $(5{,}0 \pm 0{,}1)$ cm. Quanto è lunga la spezzata, e con quale incertezza?

19. ●● I lati di un rettangolo misurano $(25{,}0 \pm 0{,}2)$ cm e $(4{,}0 \pm 0{,}2)$ cm. Calcola l'area con gli errori relativi e controlla il risultato con i valori estremi.

Dimostrare e argomentare

20. ●● Dimostra per assurdo che $\sqrt{5}$ è irrazionale, seguendo lo schema usato per $\sqrt{3}$.

21. ●● Dimostra che, se x è irrazionale, anche $-x$ e $\dfrac{1}{x}$ sono irrazionali.

22. ●● **Trova l'errore.** Luca scrive: «La somma di due numeri irrazionali è irrazionale: infatti $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ è irrazionale.» Che cosa c'è di sbagliato nel ragionamento? Trova un controesempio all'affermazione.

23. ●● Trova un numero razionale e un numero irrazionale compresi tra 1,41 e 1,42, e spiega perché ce ne sono infiniti di entrambi i tipi.

24. ●●● Dimostra che $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ è irrazionale. *(Suggerimento: se fosse $\sqrt{2} + \sqrt{3} = t$ razionale, quanto varrebbe t^2? Usa il fatto che $\sqrt{6}$ è irrazionale.)*

Problemi

25. ●● Un'aiuola quadrata ha area 50 m^2. Quanti metri di bordura servono per recintarla? La bordura si vende a decimetri: devi arrotondare per difetto o per eccesso? Perché?

26. ●● Un'automobilina percorre $(125{,}0 \pm 0{,}5)$ m in $(5{,}0 \pm 0{,}1)$ s. Calcola la velocità media e la sua incertezza, sommando gli errori relativi. Controlla con i valori estremi.

27. ●● Un foglio A4 misura 210 mm × 297 mm. a) Calcola il rapporto tra il lato lungo e il lato corto e confrontalo con $\sqrt{2}$: qual è l'errore relativo? b) Mostra che un rettangolo con i lati in rapporto $\sqrt{2}$, piegato a metà in modo da dimezzare il lato lungo, dà due rettangoli con i lati ancora in rapporto $\sqrt{2}$.

28. ●● In un frigorifero la temperatura deve stare a 4 °C, con uno scarto massimo di 1,5 °C. Scrivi la condizione su T con il valore assoluto e come intervallo.

29. ●●● Uno schermo ha i lati in rapporto 16 : 9 e una diagonale di 55 pollici (1 pollice = 2,54 cm). Calcola base e altezza in centimetri, arrotondate al millimetro. Il numero $\sqrt{16^2 + 9^2}$ che compare nel calcolo è razionale?

Con il computer

30. ●● Con il foglio di calcolo applica il metodo di Erone a $\sqrt{5}$, partendo da 3. Dopo quanti passi le colonne x e $5/x$ coincidono nelle prime sei cifre decimali? Scrivi $\sqrt{5}$ con sei decimali esatti (troncato).

31. ●● Con un software di geometria dinamica costruisci sulla retta, con il procedimento della figura 1.3, i punti $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, ..., $\sqrt{10}$. Misura con lo strumento «distanza» le ipotenuse e confrontale con i valori di $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., $\sqrt{10}$ dati dalla calcolatrice. Perché il software mostra sempre valori approssimati?

Verso la verifica

32. ●● a) Stabilisci se $3\sqrt{2}$ e $\sqrt{0{,}\overline{49}}$ sono razionali. b) Ordina dal minore al maggiore $3\sqrt{2}$, 4,2 e $\frac{17}{4}$. c) Scrivi come intervallo l'insieme dei reali x tali che $|x - 4| \leq \sqrt{2}$.

33. ●● Vero o falso? Motiva. a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ è razionale. b) $(1 + \sqrt{2})^2$ è irrazionale. c) $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$ è irrazionale.

34. ●●● **Sfida.** Il numero positivo il cui cubo è 2 (nel prossimo capitolo lo scriveremo $\sqrt[3]{2}$) è irrazionale. Dimostralo. *(Suggerimento: se fosse uguale a p/q, allora $p^3 = 2q^3$; conta quante volte compare il fattore 2 nei due membri.)*

PER APPROFONDIRE

- [CR] Courant e Robbins, *Che cos'è la matematica?*: i numeri irrazionali, le successioni di intervalli incapsulati e la continuità della retta.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: la scoperta delle grandezze incommensurabili nella matematica greca e la costruzione dei numeri reali nell'Ottocento.
- [EUC] Euclide, *Elementi*, libro X: la teoria delle grandezze incommensurabili.

Glossario del capitolo

Approssimazione per difetto
Valore approssimato minore del valore esatto; per un numero positivo si ottiene troncando lo sviluppo decimale.

Approssimazione per eccesso
Valore approssimato maggiore del valore esatto; per un numero positivo si ottiene aumentando di 1 l'ultima cifra del troncamento.

Ascissa
Il numero reale che corrisponde a un punto della retta reale.

Classi contigue
Due insiemi di numeri tali che ogni elemento del primo è minore di ogni elemento del secondo e che contengono elementi vicini quanto si vuole; in $\mathbb{R}$ separano uno e un solo numero.

Corrispondenza biunivoca
Corrispondenza tra due insiemi che associa a ogni elemento del primo uno e un solo elemento del secondo, e viceversa.

Decimale illimitato non periodico
Sviluppo decimale con infinite cifre e senza un gruppo di cifre che si ripeta sempre uguale; è lo sviluppo dei numeri irrazionali.

Distanza
La distanza tra i punti di ascisse a e b della retta reale è $|a - b|$.

Disuguaglianza triangolare
Per ogni coppia di numeri reali, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Elemento separatore
L'unico numero reale compreso tra tutti gli elementi di due classi contigue; per esempio $\sqrt{2}$ per le sue approssimazioni per difetto e per eccesso.

Errore assoluto
Distanza $|x - a|$ tra un valore approssimato x e il valore esatto a.

Errore relativo
Rapporto tra l'errore assoluto e il valore della grandezza, spesso in percentuale; nei prodotti e nei quozienti gli errori relativi (circa) si sommano.

Metodo di Erone
Procedimento per approssimare $\sqrt{n}$: da un valore x si passa alla media tra x e n/x; le approssimazioni migliorano molto rapidamente.

Numero irrazionale
Numero reale che non si può scrivere come frazione; ne sono esempi $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π.

Numero reale
Numero che si scrive in forma decimale limitata, periodica o illimitata non periodica; l'insieme $\mathbb{R}$ è l'unione di razionali e irrazionali.

Quadrato perfetto
Numero naturale che è il quadrato di un naturale; nella sua scomposizione in fattori primi tutti gli esponenti sono pari.

Retta reale
Retta con un'origine, un verso e un'unità di misura, i cui punti corrispondono in modo biunivoco ai numeri reali.

Valore assoluto
$|a| = a$ se $a \geq 0$, $|a| = -a$ se $a < 0$; è la distanza del punto di ascissa a dall'origine.

Soluzioni

1. C. $12 = 2^2 \cdot 3$ non è un quadrato perfetto. $\sqrt{36} = 6$; $1{,}\overline{2}$ è periodico, quindi razionale (= 11/9); 22/7 è una frazione.

2. D. Lo sviluppo è illimitato e non periodico, perché i blocchi di zeri diventano sempre più lunghi. Seguire una regola non basta per essere periodici.

3. A. È il teorema dimostrato nel testo. B e C sono false: $(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2$ e $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4$; D è falsa: $\sqrt{9} = 3$.

4. D. Tra due reali distinti ci sono infiniti razionali (1,411; 1,4111; ...) e infiniti irrazionali.

5. B. $|-3 - 5| = |-8| = 8$. Una distanza non è mai negativa.

6. A. $1{,}73^2 = 2{,}9929 < 3 < 3{,}0276 = 1{,}74^2$, quindi $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$: approssimazione per difetto a meno di 0,01. Non lo è a meno di un millesimo: $\sqrt{3} = 1{,}73205...$, e 1,732 è più vicino.

7. B. Errori relativi: 0,5/50 = 1% e 1/200 = 0,5%. Conta l'errore relativo, non quello assoluto.

8. a) V. b) V. c) F: $\sqrt{16} = 4$, razionale. d) F: 3,14 è un'approssimazione razionale di π, che è irrazionale. e) V: tra due reali distinti ci sono sempre infiniti razionali.

9. a) illimitato, non periodico. b) quadrato perfetto. c) $|a - b|$. d) difetto (perché $\frac{5}{x} < \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$).

10. a) 5, razionale. b) Irrazionale: $27 = 3^3$, esponente dispari. c) 0,3, razionale ($0{,}3^2 = 0{,}09$). d) Irrazionale: prodotto di un razionale non nullo e di un irrazionale. e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = 6$, razionale: è positivo e il suo quadrato è $2 \cdot 18 = 36$. f) Irrazionale: razionale meno irrazionale.

11. $2{,}23 < 2{,}\overline{23} < \sqrt{5} < \frac{9}{4}$. Infatti $2{,}\overline{23} = 2{,}2323...$, $\frac{9}{4} = 2{,}25$; e $2{,}236^2 = 4{,}999696 < 5 < 5{,}004169 = 2{,}237^2$, quindi $\sqrt{5} = 2{,}236...$, che sta tra 2,2323... e 2,25.

12. [2; 3] ($4 < 7 < 9$); [2,6; 2,7] ($6{,}76 < 7 < 7{,}29$); [2,64; 2,65] ($6{,}9696 < 7 < 7{,}0225$); [2,645; 2,646] ($6{,}996025 < 7 < 7{,}001316$). $\sqrt{7} = 2{,}6457...$

13. a) $7 < \sqrt{50} < 8$ ($49 < 50 < 64$). b) $10 < \sqrt{120} < 11$ ($100 < 120 < 121$). c) $14 < \sqrt{200} < 15$ ($196 < 200 < 225$). d) $-6 < -\sqrt{30} < -5$, perché $5 < \sqrt{30} < 6$ ($25 < 30 < 36$) e cambiando segno il verso si inverte.

14. a) $|-4 - 7| = 11$. b) $|-2{,}5 - (-0{,}8)| = |-1{,}7| = 1{,}7$. c) $|\sqrt{2} - (-\sqrt{2})| = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$. d) $|1 - \sqrt{3} - \sqrt{3}| = |1 - 2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} - 1 \approx 2{,}46$ (vedi l'esempio svolto sulla distanza).

15. a) $|x - 3| < 2$: $]1; 5[$. b) $|x + 1| \le 0{,}5$: $[-1{,}5; -0{,}5]$. c) $|x| < \sqrt{2}$: $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$.

16. a) $\frac{5}{7} = 0{,}714285... \approx 0{,}71$; errore assoluto $|0{,}71 - \frac{5}{7}| = \frac{3}{700} \approx 0{,}0043$; errore relativo $\frac{3}{700} : \frac{5}{7} = \frac{3}{500} = 0{,}6\%$. b) $\sqrt{10} = 3{,}16227... \approx 3{,}16$; errore assoluto $\approx 0{,}0023$; errore relativo $\approx 0{,}0023 : 3{,}162 \approx 0{,}072\%$.

17. $\frac{22}{7} = 3{,}142857...$: $|\frac{22}{7} - \pi| \approx 0{,}00126$; $|3{,}14 - \pi| \approx 0{,}00159$. $\frac{22}{7}$ è un po' migliore. Errori relativi: circa 0,040% e 0,051%.

18. 4,2 + 3,7 + 5,0 = 12,9 cm; gli errori assoluti si sommano: 0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,3 cm. Lunghezza (12,9 ± 0,3) cm.

19. $A = 25{,}0 \cdot 4{,}0 = 100$ cm^2. Errori relativi 0,2/25 = 0,8% e 0,2/4 = 5%; somma 5,8%, cioè 5,8 cm^2: $A \approx (100 \pm 6)$ cm^2. Valori estremi: $24{,}8 \cdot 3{,}8 = 94{,}24$ e $25{,}2 \cdot 4{,}2 = 105{,}84$, cioè $100 - 5{,}76$ e $100 + 5{,}84$: il risultato è confermato.

20. Se $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ ridotta ai minimi termini, allora $p^2 = 5q^2$: 5 divide p^2, e poiché 5 è primo divide p. Posto $p = 5k$, si ha $25k^2 = 5q^2$, cioè $q^2 = 5k^2$: anche q è multiplo di 5. Il fattore comune 5 contraddice l'ipotesi. *c.v.d.*

21. Se $-x = t$ fosse razionale, $x = -t$ sarebbe razionale (opposto di un razionale): assurdo. Se $\frac{1}{x} = t$ fosse razionale, sarebbe $t \neq 0$ (il prodotto $\frac{1}{x} \cdot x$ vale 1) e $x = \frac{1}{t}$ sarebbe razionale: assurdo. Nota: $x \neq 0$ perché 0 è razionale.

22. Un esempio non dimostra una proprietà generale. L'affermazione è falsa: $\sqrt{2}$ e $2 - \sqrt{2}$ sono irrazionali (il secondo è razionale meno irrazionale), ma la loro somma è 2. (Che $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sia davvero irrazionale si dimostra nell'esercizio 24.)

23. Per esempio 1,415 (razionale) e $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$ (irrazionale). Sono infiniti i razionali 1,411; 1,4111; 1,41111; … e gli irrazionali $1{,}41 + \sqrt{2}/1000$, $1{,}41 + \sqrt{2}/10\,000$, … (tutti tra 1,41 e 1,42, e irrazionali perché somma di un razionale e di un irrazionale).

24. Se $\sqrt{2} + \sqrt{3} = t$ razionale, elevando al quadrato $t^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$ (il quadrato del binomio vale anche con i reali, e $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ perché è positivo e il suo quadrato è 6). Allora $\sqrt{6} = (t^2 - 5)/2$ sarebbe razionale; ma 6 non è un quadrato perfetto, quindi $\sqrt{6}$ è irrazionale. Assurdo. *c.v.d.*

25. Lato $\sqrt{50}$ m $\approx 7{,}0711$ m; perimetro $4\sqrt{50} \approx 28{,}284$ m. Si arrotonda per eccesso, 28,3 m: per difetto la bordura non basterebbe a chiudere il quadrato.

26. $v = 125{,}0 : 5{,}0 = 25$ m/s. Errori relativi $0{,}5/125 = 0{,}4\%$ e $0{,}1/5 = 2\%$; somma 2,4%, cioè 0,6 m/s: $v = (25{,}0 \pm 0{,}6)$ m/s. Valori estremi: $124{,}5 : 5{,}1 \approx 24{,}41$ e $125{,}5 : 4{,}9 \approx 25{,}61$, cioè circa $25 - 0{,}59$ e $25 + 0{,}61$: confermato.

27. a) $297 : 210 = 1{,}41428\ldots$; $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$; differenza $\approx 0{,}00007$, errore relativo $\approx 0{,}005\%$. b) Lati l e $l\sqrt{2}$; piegando, il lato lungo si dimezza: i nuovi lati sono $l\sqrt{2}/2$ e l, con rapporto $l : (l\sqrt{2}/2) = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$ (infatti $(2/\sqrt{2})^2 = 4/2 = 2$). È il motivo della scelta dei formati A.

28. $|T - 4| \leq 1{,}5$, cioè $T \in [2{,}5;\ 5{,}5]$ (in °C).

29. Con lati $16u$ e $9u$, la diagonale è $u\sqrt{256 + 81} = u\sqrt{337} = 55$ pollici, quindi $u = 55/\sqrt{337} \approx 2{,}99604$ pollici. Base $16u \approx 47{,}937$ pollici $\approx 121{,}8$ cm; altezza $9u \approx 26{,}964$ pollici $\approx 68{,}5$ cm. 337 è primo, quindi non è un quadrato perfetto: $\sqrt{337} \approx 18{,}358$ è irrazionale.

30. Valori (arrotondati al nono decimale) — passo 0: 3,000000000 e 1,666666667; passo 1: 2,333333333 e 2,142857143; passo 2: 2,238095238 e 2,234042553; passo 3: 2,236068896 e 2,236067059; passo 4: 2,236067977 e 2,236067977. Le prime sei cifre decimali coincidono al passo 4: $\sqrt{5} = 2{,}236067\ldots$ ($\sqrt{5} = 2{,}2360679\ldots$).

31. Le ipotenuse misurano $\sqrt{2} \approx 1{,}414$, $\sqrt{3} \approx 1{,}732$, 2, $\sqrt{5} \approx 2{,}236$, $\sqrt{6} \approx 2{,}449$, $\sqrt{7} \approx 2{,}646$, $\sqrt{8} \approx 2{,}828$, 3, $\sqrt{10} \approx 3{,}162$ (in unità della costruzione). Il software rappresenta i numeri con un numero finito di cifre: per un irrazionale può mostrare soltanto un'approssimazione.

32. a) $3\sqrt{2}$ è irrazionale (razionale non nullo per irrazionale); $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$ è razionale. b) $4{,}2 < 3\sqrt{2} < 17/4$: $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ e $4{,}2^2 = 17{,}64 < 18 < 18{,}0625 = (17/4)^2$. c) $|x - 4| \leq \sqrt{2}$: $[4 - \sqrt{2};\ 4 + \sqrt{2}]$.

33. a) V: $\sqrt{8}/\sqrt{2} = 2$, perché è positivo e il suo quadrato è $8/2 = 4$. b) V: $(1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$, razionale più irrazionale. c) F: $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = 3 - 1 = 2$.

34. Se il numero fosse p/q, con p, q naturali non nulli, sarebbe $p^3 = 2q^3$. In un cubo ogni primo compare con esponente multiplo di 3; quindi il fattore 2 compare in p^3 un numero di volte multiplo di 3, mentre in $2q^3$ compare un multiplo di 3 più 1 volte. Per l'unicità della scomposizione in fattori primi è impossibile. *c.v.d.*