Matematica 1 · Parte III · Il calcolo letterale · versione 1.0
Verifica: Verifica di fine parte III · pagine 253–254 del volume completo · estratto per lo studio

Verifica di fine parte III · Il calcolo letterale

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). Non è ammessa la calcolatrice. Scrivi tutti i passaggi e, per ogni frazione algebrica, le condizioni di esistenza: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 7)* Il grado del polinomio $2x^3y - x^2y^2 + 5xy^4 - 1$ è:
   A. 3
   B. 4
   C. 5
   D. 6

2. ● *(0,5 punti · cap. 7)* Lo sviluppo di $(2a - 3)^2$ è:
   A. $4a^2 - 9$
   B. $4a^2 - 12a + 9$
   C. $4a^2 - 6a + 9$
   D. $4a^2 + 9$

3. ●● *(0,5 punti · cap. 8)* Il resto della divisione di $x^3 - 2x^2 + 3$ per $x - 2$ è:
   A. -3
   B. 0
   C. 11
   D. 3

4. ●● *(0,5 punti · cap. 9)* Le condizioni di esistenza della frazione $\dfrac{x+1}{x^2 - 4x}$ sono:
   A. $x \neq 0$, $x \neq 4$
   B. $x \neq -1$
   C. $x \neq \pm 2$
   D. $x \neq 4$

Calcolare

5. ● *(1 punto · cap. 7)* a) Semplifica $(2a - b)^2 - (a + b)(a - b) - (a - 2b)^2$. b) Sviluppa $(x - 2)^3$ con la formula del cubo di un binomio.

6. ● *(1 punto · cap. 7)* Calcola MCD e mcm dei monomi $6a^3b^2$, $9a^2b^4c$, $15ab^3$.

7. ●● *(1,5 punti · cap. 8)* Scomponi in fattori: a) $3x^3 - 12x$; b) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$; c) $x^3 - 3x^2 + 4$ (con la regola di Ruffini); d) $8a^3 - 1$.

8. ●● *(1 punto · cap. 8)* Calcola MCD e mcm dei polinomi $x^2 - 9$, $x^2 + 6x + 9$, $2x + 6$.

9. ●● *(1,5 punti · cap. 9)* Semplifica, indicando le condizioni di esistenza: $\left(\frac{x}{x-2} - \frac{4}{x^2-2x}\right) : \frac{x+2}{x^2}$.

Problemi

10. ●● *(1 punto · cap. 7)* Un'aiuola quadrata ha il lato di x metri (con $x > 2$). Viene trasformata in un rettangolo allungando di 2 m due lati opposti e accorciando di 2 m gli altri due. a) Scrivi l'area del rettangolo come polinomio. b) Dimostra che l'area diminuisce sempre della stessa quantità, qualunque sia x, e trova questa quantità.

Sfida

11. ●●● *(1 punto · capp. 8–9)* a) Determina il valore di k per cui il polinomio $P(x) = x^3 + k\,x^2 - 4x + 4$ è divisibile per $x - 2$. b) Per quel valore di k, scomponi $P(x)$ e semplifica la frazione $\frac{P(x)}{x^2-4}$, indicando le condizioni di esistenza.

Soluzioni

1. C. I termini hanno grado 4, 4, 5 e 0: il grado del polinomio è 5.

2. B. $(2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3 + 3^2 = 4a^2 - 12a + 9$. La A dimentica il doppio prodotto e sbaglia il segno di 3^2.

3. D. Per il teorema del resto il resto è $P(2) = 8 - 8 + 3 = 3$.

4. A. $x^2 - 4x = x(x - 4)$: deve essere $x \neq 0$ e $x \neq 4$. Il numeratore non impone condizioni.

5. a) $4a^2 - 4a\,b + b^2 - (a^2 - b^2) - (a^2 - 4a\,b + 4b^2) = 2a^2 - 2b^2$. b) $(x - 2)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 4 - 8 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

6. Coefficienti interi: MCD(6, 9, 15) = 3, mcm(6, 9, 15) = 90. Lettere comuni con esponente minimo: $a\,b^2$; tutte le lettere con esponente massimo: a^3b^4c. MCD = $3a\,b^2$, mcm = $90a^3b^4c$.

7. a) $3x(x^2 - 4) = 3x(x - 2)(x + 2)$. b) $x^2(x - 2) - 9(x - 2) = (x - 2)(x^2 - 9) = (x - 2)(x - 3)(x + 3)$. c) $P(-1) = -1 - 3 + 4 = 0$, quindi $x + 1$ è un fattore; con Ruffini il quoziente è $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$: $(x + 1)(x - 2)^2$. d) Differenza di cubi: $(2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)$.

8. $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$; $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$; $2x + 6 = 2(x + 3)$. MCD = $x + 3$; mcm = $2(x - 3)(x + 3)^2$.

9. C.E.: $x \neq 0$, $x \neq 2$ (denominatori) e $x \neq -2$ (numeratore del divisore). Parentesi: $\frac{x \cdot x - 4}{x(x - 2)} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x(x - 2)} = \frac{x + 2}{x}$. Divisione: $\frac{x + 2}{x} \cdot \frac{x^2}{x + 2} = x$.

10. a) $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$ (in m^2). b) L'area del quadrato è x^2; quella del rettangolo è $x^2 - 4$: la differenza è sempre 4 m^2, indipendentemente da x (somma per differenza).

11. a) Per il teorema di Ruffini serve $P(2) = 0$: $8 + 4k - 8 + 4 = 4k + 4 = 0$, quindi $k = -1$. b) $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x - 1) - 4(x - 1) = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$. Quindi $\frac{(x - 1)(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)} = x - 1$, con C.E. $x \neq \pm 2$.