# Verifica di fine parte II · Insiemi, logica e funzioni

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). Non è ammessa la calcolatrice. Scrivi tutti i passaggi: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

### Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 5)* Se A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e B = {2, 4, 6, 8}, l'insieme A ∖ B è:
   **A.** {1, 3, 5}
   **B.** {8}
   **C.** {1, 3, 5, 8}
   **D.** {2, 4, 6}

2. ●● *(0,5 punti · cap. 5)* La negazione di «tutti gli studenti hanno superato la verifica» è:
   **A.** nessuno studente ha superato la verifica
   **B.** tutti gli studenti non hanno superato la verifica
   **C.** almeno uno studente non ha superato la verifica
   **D.** almeno uno studente ha superato la verifica

3. ●● *(0,5 punti · cap. 6)* Nell'insieme $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, la relazione «$x$ è divisore di $y$» è:
   **A.** una relazione di equivalenza
   **B.** una relazione d'ordine parziale
   **C.** una relazione d'ordine totale
   **D.** né d'equivalenza né d'ordine

4. ●● *(0,5 punti · cap. 6)* La funzione $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n^2$ è:
   **A.** iniettiva ma non suriettiva
   **B.** suriettiva ma non iniettiva
   **C.** biiettiva
   **D.** né iniettiva né suriettiva

### Calcolare

5. ● *(1 punto · cap. 5)* Sia $U = \{n \in \mathbb{N} \mid n \le 10\}$; siano A l'insieme dei multipli di 2 e B l'insieme dei multipli di 3 contenuti in U. Elenca gli elementi di $A \cap B$, $A \cup B$ e del complementare di $A \cup B$ rispetto a U.

6. ●● *(1 punto · cap. 5)* Costruisci le tavole di verità di $\neg(p \wedge q)$ e di $\neg p \vee \neg q$ e stabilisci se le due proposizioni sono equivalenti. Come si chiama questa legge?

7. ●● *(1,5 punti · cap. 6)* Nell'insieme A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} è data la relazione «$x - y$ è multiplo di 3». a) Elenca le coppie della relazione. b) Verifica che è una relazione di equivalenza. c) Scrivi le classi di equivalenza e l'insieme quoziente.

8. ●● *(1 punto · cap. 6)* Sia $f(x) = 3x - 2$. a) Completa la tabella per $x = -1, 0, 1, 2$ e disegna il grafico; indica pendenza e ordinata all'origine. b) Con $g(x) = x^2$, calcola $(g \circ f)(1)$ e $(f \circ g)(-2)$.

### Problemi

9. ●● *(1,5 punti · cap. 5)* In una classe di 25 studenti, 14 giocano a calcio, 9 a pallavolo e 5 praticano entrambi gli sport. Rappresenta la situazione con un diagramma di Venn. Quanti studenti praticano solo il calcio? Quanti solo la pallavolo? Quanti nessuno dei due sport?

10. ●● *(1 punto · cap. 6)* Un negozio noleggia biciclette con due tariffe: tariffa A, 3 € fissi più 1,50 € all'ora; tariffa B, 2,50 € all'ora senza quota fissa. a) Scrivi il costo in funzione delle ore $t$ per ciascuna tariffa. b) Con una tabella per $t = 1, 2, 3, 4$ stabilisci per quale durata le due tariffe costano uguale e quale conviene per un noleggio di 4 ore.

### Sfida

11. ●●● *(1 punto · capp. 5–6)* Siano A = {1, 2} e B = {$a$, $b$, $c$}. Quante sono le funzioni da A a B? Quante di esse sono iniettive? Quante sono suriettive? Giustifica ogni risposta.

# Soluzioni

**1.** A. $A \setminus B$ contiene gli elementi di A che non stanno in B: {1, 3, 5}. L'8 non appartiene ad A.

**2.** C. La negazione di «per ogni $x$, $P(x)$» è «esiste almeno un $x$ per cui non $P(x)$». La B è troppo forte (equivale a «nessuno»).

**3.** B. È riflessiva, antisimmetrica e transitiva (ordine largo), ma parziale: 2 e 3 non sono confrontabili.

**4.** D. Non iniettiva: $(-2)^2 = 2^2$; non suriettiva: per esempio 2, o −1, non sono quadrati di interi.

**5.** $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 3, 6, 9\}$. $A \cap B = \{0, 6\}$; $A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$ (verifica: $6 + 4 - 2 = 8$ elementi); complementare di $A \cup B$: {1, 5, 7}.

**6.** Per $(p; q)$ = (V; V), (V; F), (F; V), (F; F): $\neg(p \wedge q)$ vale F, V, V, V; $\neg p \vee \neg q$ vale F, V, V, V. Le colonne coincidono: le proposizioni sono equivalenti. È una delle leggi di De Morgan.

**7.** a) (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5), (6; 6), (1; 4), (4; 1), (2; 5), (5; 2), (3; 6), (6; 3): 12 coppie. b) Riflessiva: $x - x = 0 = 3 \cdot 0$. Simmetrica: se $x - y = 3k$, allora $y - x = 3 \cdot (-k)$. Transitiva: se $x - y = 3h$ e $y - z = 3k$, allora $x - z = 3(h + k)$. c) [1] = {1, 4}, [2] = {2, 5}, [3] = {3, 6}; insieme quoziente {[1], [2], [3]}.

**8.** a) $x = -1, 0, 1, 2 \to y = -5, -2, 1, 4$: una retta crescente con pendenza $m = 3$ e ordinata all'origine $q = -2$. b) $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(1) = 1$; $(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(4) = 10$.

**9.** Solo calcio: $14 - 5 = 9$; solo pallavolo: $9 - 5 = 4$. Almeno uno sport: $14 + 9 - 5 = 18$. Nessuno: $25 - 18 = 7$. Nel diagramma: 5 nell'intersezione, 9 e 4 nelle parti esterne dei due cerchi, 7 fuori dai cerchi.

**10.** a) $C_A = 1{,}50\,t + 3$; $C_B = 2{,}50\,t$. b) Per $t = 1, 2, 3, 4$: A costa 4,50; 6; 7,50; 9 €; B costa 2,50; 5; 7,50; 10 €. Costano uguale per 3 ore (7,50 €). Per 4 ore conviene A (9 € contro 10 €).

**11.** Una funzione da A a B si costruisce scegliendo l'immagine di 1 (3 modi) e quella di 2 (3 modi): $3 \cdot 3 = 9$ funzioni. Iniettive: l'immagine di 2 deve essere diversa da quella di 1, quindi $3 \cdot 2 = 6$. Suriettive: nessuna, perché le immagini sono al massimo 2 e B ha 3 elementi.