CAPITOLO

15

I quadrilateri

Una finestra, un foglio, un campo da gioco: il mondo costruito dall'uomo è pieno di quadrilateri. Ma che cosa garantisce che un rettangolo sia davvero un rettangolo?

OBIETTIVI

1. Definire trapezio, parallelogramma, rettangolo, rombo e quadrato e riconoscere le relazioni di inclusione tra queste famiglie.
2. Dimostrare le proprietà del parallelogramma e riconoscere un parallelogramma attraverso le condizioni sufficienti.
3. Conoscere e dimostrare le proprietà caratteristiche di rettangolo, rombo, quadrato e trapezio isoscele.
4. Enunciare e applicare il piccolo teorema di Talete e il teorema dei punti medi.
5. Risolvere problemi su angoli, lati e perimetri dei quadrilateri, giustificando ogni passaggio.

INDICE DEL CAPITOLO

15.1 I quadrilateri e le loro famiglie 2
15.2 Il parallelogramma 4
15.3 Rettangolo, rombo, quadrato 8
15.4 Il trapezio 12
15.5 Fasci di parallele e punti medi 15

Matematica 1 · Parte V · Geometria euclidea · versione 1.0
Capitolo 15: I quadrilateri · pagine 385–410 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo 13 abbiamo visto che un telaio triangolare è rigido, mentre uno quadrato, con un chiodo per vertice, si deforma con una spinta. Proprio questa «mobilità» rende i quadrilateri interessanti. Spingendo un telaio quadrato lo si trasforma in un rombo: i quattro lati restano congruenti, gli angoli cambiano. Un telaio rettangolare, deformato, diventa un parallelogramma qualsiasi: i lati opposti restano congruenti e paralleli. Che cosa cambia e che cosa resta, quando un quadrilatero si deforma? Quali proprietà bastano per riconoscere un rettangolo senza misurare tutti gli angoli?

In questo capitolo, l'ultimo di geometria del volume, mettiamo al lavoro tutto ciò che abbiamo costruito: i postulati del capitolo 12, i criteri di congruenza del capitolo 13 e, soprattutto, il postulato delle parallele del capitolo 14 (postulato 15) con le sue conseguenze. Quasi ogni dimostrazione seguirà lo stesso schema: si traccia una diagonale, si confrontano due triangoli, si usano gli angoli formati da rette parallele.

15.1 I quadrilateri e le loro famiglie

15.1.1 Elementi di un quadrilatero

Un **quadrilatero** è un poligono con quattro lati. Lo indichiamo con i suoi vertici elencati nell'ordine in cui si incontrano percorrendo il contorno: il quadrilatero $ABCD$ ha i lati AB, BC, CD, DA. Come per tutti i poligoni, salvo avviso contrario, parliamo di quadrilateri **convessi** (capitolo 12).

In un quadrilatero due lati si dicono consecutivi se hanno un vertice in comune, **lati opposti** se non ne hanno: AB e CD sono opposti, così come BC e DA. Allo stesso modo due angoli sono **consecutivi** se i loro vertici sono estremi di uno stesso lato ($\angle A$ e $\angle B$), **opposti** in caso contrario ($\angle A$ e $\angle C$, $\angle B$ e $\angle D$). Un quadrilatero ha $\dfrac{4 \cdot 1}{2} = 2$ diagonali (capitolo 12): AC e BD. In un quadrilatero convesso le due diagonali si intersecano in un punto interno a entrambe; accettiamo questo fatto, intuitivo, senza dimostrarlo.

Ciascuna diagonale divide un quadrilatero convesso in due triangoli. Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto (capitolo 14), la somma degli angoli interni di un quadrilatero è due angoli piatti, cioè 360°: è il caso $n = 4$ della formula $(n - 2) \cdot 180°$ del paragrafo 14.4. Anche la somma degli angoli esterni, uno per vertice, è 360°.

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$$

15.1.2 Trapezi, parallelogrammi, rettangoli, rombi, quadrati

I quadrilateri con un nome proprio si definiscono a partire dal parallelismo dei lati, dalla congruenza dei lati o dagli angoli.

- Un **trapezio** è un quadrilatero con due soli lati opposti paralleli. I lati paralleli si chiamano **basi** (maggiore e minore), gli altri due **lati obliqui**.
- Un **parallelogramma** è un quadrilatero con i lati opposti paralleli a due a due.
- Un **rettangolo** è un quadrilatero con i quattro angoli retti.
- Un **rombo** è un quadrilatero con i quattro lati congruenti.
- Un **quadrato** è un quadrilatero con i quattro lati congruenti e i quattro angoli retti.

Dalle definizioni segue subito che il quadrato è insieme un rettangolo e un rombo. Nel paragrafo 15.3 dimostreremo che rettangoli e rombi sono parallelogrammi particolari. Le famiglie di quadrilateri sono quindi contenute l'una nell'altra, come gli insiemi del capitolo 5: la figura 15.1 lo mostra con un diagramma di Eulero-Venn. In particolare

$$\{\text{quadrati}\} = \{\text{rettangoli}\} \cap \{\text{rombi}\}.$$

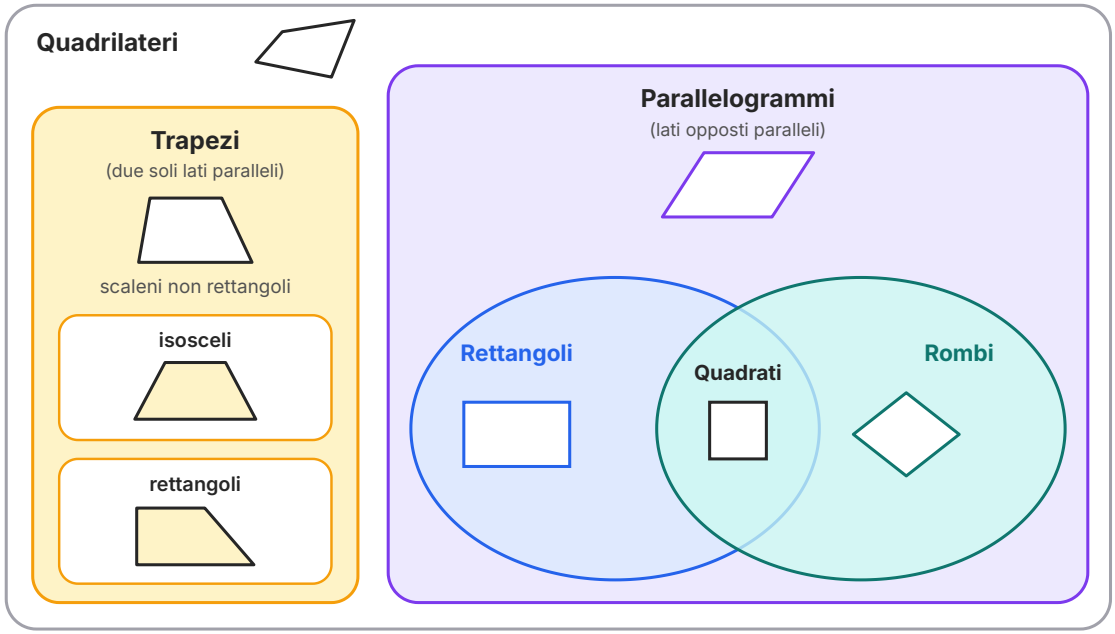


Figura 15.1 Diagramma di inclusione delle famiglie di quadrilateri. Rettangoli e rombi sono parallelogrammi; i quadrati sono i quadrilateri che sono insieme rettangoli e rombi. Con la nostra definizione («due soli lati paralleli») trapezi e parallelogrammi sono insiemi disgiunti. In ogni regione è disegnato un esempio.

DA RICORDARE

Una definizione è una **scelta**, e testi diversi possono scegliere in modo diverso. Alcuni libri definiscono il trapezio come un quadrilatero con *almeno* due lati paralleli: allora i parallelogrammi diventano trapezi particolari e il diagramma della figura 15.1 cambia. Nessuna delle due scelte è sbagliata; l'importante è dichiarare la definizione e usarla in modo coerente. In questo libro un trapezio ha **due soli** lati paralleli.

ERRORE FREQUENTE

«Un quadrato non è un rettangolo, perché il rettangolo ha i lati diversi.» Falso: la definizione di rettangolo chiede soltanto quattro angoli retti e non dice nulla sui lati. Quindi **ogni quadrato è un rettangolo** (e anche un rombo), mentre non ogni rettangolo è un quadrato. Di conseguenza tutto ciò che dimostreremo per i rettangoli vale anche per i quadrati. Quando nel linguaggio comune si dice «rettangolo» si pensa spesso a un rettangolo con lati diversi; in geometria bisogna attenersi alla definizione.

15.2 Il parallelogramma

15.2.1 Le proprietà del parallelogramma

Disegna un parallelogramma e misura lati, angoli e diagonali: troverai alcune regolarità. Ora le dimostriamo tutte insieme, a partire dalla sola definizione (figura 15.2).

IN SINTESI

Teorema del parallelogramma. In ogni parallelogramma: a) ciascuna diagonale lo divide in due triangoli congruenti; b) i lati opposti sono congruenti; c) gli angoli opposti sono congruenti; d) gli angoli consecutivi sono supplementari; e) le diagonali si tagliano scambievolmente a metà.

Ipotesi: $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$; O punto comune alle diagonali AC e BD. **Tesi:** $ABC \cong CDA$; $AB \cong CD$, $BC \cong DA$; $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$; $\angle A + \angle B = 180°$; $AO \cong OC$, $BO \cong OD$.

Dimostrazione. Tracciamo la diagonale AC e confrontiamo i triangoli ABC e CDA.

1. $AC \cong CA$ *(lato in comune; postulato 8, proprietà riflessiva)*.
2. $\angle BAC \cong \angle DCA$: sono angoli alterni interni formati dalle parallele AB e DC con la trasversale AC *(ipotesi; teorema inverso del teorema delle parallele, capitolo 14)*.
3. $\angle BCA \cong \angle DAC$: sono alterni interni rispetto alle parallele BC e AD, tagliate ancora da AC *(stesso teorema)*.

4. Il lato AC è compreso tra gli angoli dei punti 2 e 3, quindi $ABC \cong CDA$ *(secondo criterio, ALA)*. Questo prova a).
5. Nei triangoli congruenti si corrispondono i lati opposti ad angoli congruenti: $AB \cong CD$ (opposti agli angoli del punto 3) e $BC \cong DA$ (opposti agli angoli del punto 2); inoltre $\angle B \cong \angle D$. Questo prova b) e metà di c).
6. $\angle A = \angle BAC + \angle CAD$ e $\angle C = \angle DCA + \angle ACB$ sono somme di angoli ordinatamente congruenti (punti 2 e 3), quindi $\angle A \cong \angle C$ *(postulato 11)*. Questo completa c).
7. $\angle A$ e $\angle B$ sono angoli coniugati interni rispetto alle parallele AD e BC tagliate da AB, quindi sono supplementari *(teorema inverso, tabella 14.1)*. Lo stesso vale per ogni coppia di angoli consecutivi: d).
8. Per e) confrontiamo i triangoli AOB e COD: $AB \cong CD$ *(punto 5)*; $\angle OAB \cong \angle OCD$ *(alterni interni, come al punto 2)*; $\angle OBA \cong \angle ODC$ *(alterni interni rispetto alle parallele AB e DC con la trasversale BD)*. Per il secondo criterio $AOB \cong COD$, quindi $AO \cong OC$ e $BO \cong OD$.

c.v.d.

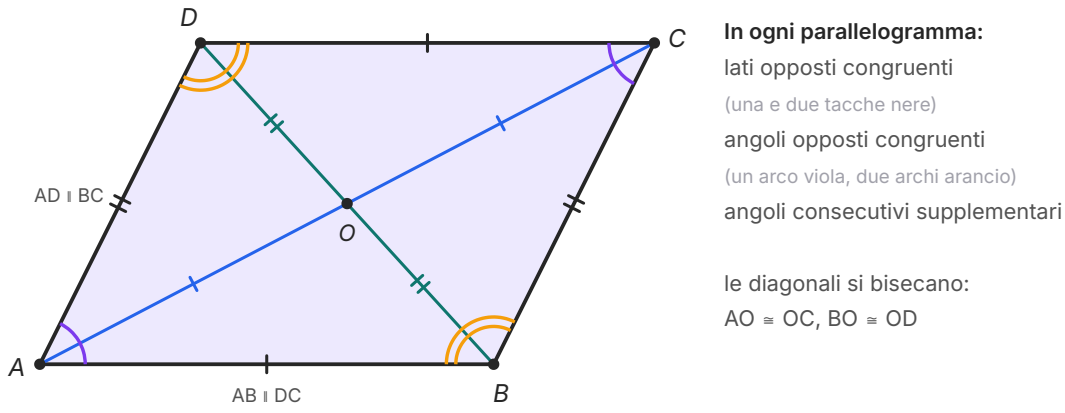


Figura 15.2 Il parallelogramma *ABCD* e le sue proprietà. Le tacche nere indicano i lati opposti congruenti; gli archi indicano gli angoli opposti congruenti; le tacche colorate mostrano che il punto *O* è il punto medio di entrambe le diagonali.

Il punto O in cui si incontrano le diagonali si chiama **centro** del parallelogramma. Attenzione: le diagonali di un parallelogramma si tagliano a metà, ma in generale *non* sono congruenti, né perpendicolari. Lo sono solo in parallelogrammi particolari, come vedremo nel paragrafo 15.3.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Nel parallelogramma $ABCD$ l'angolo $\angle A$ misura $(2x + 10)°$ e l'angolo $\angle B$ misura $(3x - 5)°$. Inoltre $AB = y + 4$ e $BC = 2y - 1$ (in cm), e il perimetro è 42 cm. Determina gli angoli e i lati.

Soluzione. Gli angoli $\angle A$ e $\angle B$ sono consecutivi, quindi supplementari:

$$(2x + 10) + (3x - 5) = 180 \quad \Rightarrow \quad 5x + 5 = 180 \quad \Rightarrow \quad x = 35.$$

Quindi $\angle A = 80°$ e $\angle B = 100°$; gli angoli opposti sono congruenti: $\angle C = 80°$, $\angle D = 100°$. Controllo: $80° + 100° + 80° + 100° = 360°$.

I lati opposti sono congruenti, quindi il perimetro è $2(AB + BC)$:

$$2[(y + 4) + (2y - 1)] = 42 \quad \Rightarrow \quad 3y + 3 = 21 \quad \Rightarrow \quad y = 6.$$

Quindi $AB = CD = 10$ cm e $BC = DA = 11$ cm. Verifica: $2 \cdot (10 + 11) = 42$.

15.2.2 Quando un quadrilatero è un parallelogramma

Il teorema precedente va dal parallelogramma alle sue proprietà. Spesso serve il cammino opposto: sappiamo qualcosa su un quadrilatero e vogliamo concludere che è un parallelogramma. Servono allora i **teoremi inversi**, che forniscono **condizioni sufficienti** perché un quadrilatero sia un parallelogramma (ricorda dal capitolo 5: in «$A \Rightarrow B$» la condizione A è sufficiente per B). Il fatto sorprendente è che *ciascuna* delle proprietà b), c), e), da sola, basta.

IN SINTESI

Teorema (condizioni sufficienti). Un quadrilatero convesso è un parallelogramma se vale una qualsiasi delle seguenti condizioni: 1) i lati opposti sono congruenti a due a due; 2) gli angoli opposti sono congruenti a due a due; 3) le diagonali si tagliano scambievolmente a metà; 4) due lati opposti sono congruenti e paralleli.

Ipotesi: $ABCD$ quadrilatero convesso che soddisfa una delle condizioni 1–4. **Tesi:** $AB \parallel DC$ e $AD \parallel BC$.

Dimostrazione della condizione 1. Per ipotesi $AB \cong CD$ e $BC \cong DA$. Tracciamo la diagonale AC.

1. I triangoli ABC e CDA hanno $AB \cong CD$, $BC \cong DA$ *(ipotesi)* e AC in comune, quindi sono congruenti *(terzo criterio, LLL)*.
2. Ne segue $\angle BAC \cong \angle DCA$ (opposti ai lati congruenti BC e DA) e $\angle BCA \cong \angle DAC$.
3. Poiché il quadrilatero è convesso, B e D stanno da parti opposte rispetto alla retta AC; allora $\angle BAC$ e $\angle DCA$ sono alterni interni rispetto alle rette AB, DC e alla trasversale AC. Essendo congruenti, $AB \parallel DC$ *(teorema delle parallele)*.

4. Allo stesso modo, da $\angle BCA \cong \angle DAC$ segue $BC \parallel AD$.

c.v.d.

Dimostrazione della condizione 2. Per ipotesi $\angle A \cong \angle C$ e $\angle B \cong \angle D$; la somma dei quattro angoli è 360° (paragrafo 15.1), quindi $2\angle A + 2\angle B = 360°$, cioè $\angle A + \angle B = 180°$. Gli angoli $\angle A$ e $\angle B$ sono coniugati interni rispetto alle rette AD, BC e alla trasversale AB: essendo supplementari, le rette sono parallele *(teorema delle parallele, nella forma con gli angoli coniugati)*. Allo stesso modo $\angle A + \angle D = 180°$ dà $AB \parallel DC$. c.v.d.

Dimostrazione della condizione 3. Per ipotesi le diagonali si incontrano in O con $AO \cong OC$ e $BO \cong OD$. I triangoli AOB e COD hanno $\angle AOB \cong \angle COD$ *(opposti al vertice, capitolo 12)*, compreso tra lati ordinatamente congruenti: sono congruenti *(postulato 14, LAL)*. Quindi $\angle OAB \cong \angle OCD$, che sono alterni interni rispetto alle rette AB, DC e alla trasversale AC: $AB \parallel DC$ *(teorema delle parallele)*. Con i triangoli AOD e COB si ottiene nello stesso modo $AD \parallel BC$. c.v.d.

Dimostrazione della condizione 4. Per ipotesi $AB \cong CD$ e $AB \parallel CD$. I triangoli ABC e CDA hanno $AB \cong CD$, AC in comune e $\angle BAC \cong \angle DCA$ *(alterni interni rispetto alle parallele AB e CD; teorema inverso)*: sono congruenti *(LAL)*. Quindi $\angle BCA \cong \angle DAC$, che sono alterni interni rispetto alle rette BC e AD: $BC \parallel AD$ *(teorema delle parallele)*. c.v.d.

Tabella 15.1 Le proprietà del parallelogramma e i teoremi inversi. Ogni riga è un «se e solo se»: per un quadrilatero convesso, la proprietà vale se e solo se il quadrilatero è un parallelogramma.

Proprietà	Parallelogramma ⇒ proprietà	Proprietà ⇒ parallelogramma
lati opposti congruenti	sì (teorema del parallelogramma, b)	sì (condizione 1)
angoli opposti congruenti	sì (c)	sì (condizione 2)
angoli consecutivi supplementari	sì (d)	sì (come nella condizione 2)
diagonali che si bisecano	sì (e)	sì (condizione 3)
due lati opposti congruenti e paralleli	sì (definizione e b)	sì (condizione 4)
due lati opposti paralleli e gli altri due congruenti	sì	**no**: il trapezio isoscele è un controesempio

L'ultima riga merita attenzione. Nella condizione 4 i due lati congruenti devono essere *gli stessi* che sono paralleli. Un trapezio isoscele ha due lati paralleli (le basi) e due lati congruenti (i lati obliqui), ma non è un parallelogramma.

COLLEGAMENTI

Il parallelogramma articolato. Quattro aste rigide, collegate da snodi in modo che le aste opposte siano congruenti, formano sempre un parallelogramma, comunque lo si deformi: è la condizione 1. Per questo i lati opposti restano paralleli mentre gli angoli cambiano. Molte lampade da scrivania sfruttano questo meccanismo: la testa della lampada, fissata al lato opposto a quello vincolato alla base, si alza e si abbassa restando sempre parallela a sé stessa. Lo stesso principio si ritrova nelle cassette degli attrezzi con i vassoi che si aprono a ventaglio, nei tergicristalli di alcuni autobus e nelle altalene a dondolo in cui il seggiolino resta orizzontale. In fisica incontrerai la *regola del parallelogramma*, che serve a sommare due forze applicate nello stesso punto: la somma è rappresentata dalla diagonale del parallelogramma che ha per lati le due forze.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Dimostra che le bisettrici di due angoli consecutivi di un parallelogramma sono perpendicolari.

Figura e dati. Parallelogramma $ABCD$; la bisettrice di $\angle A$ e quella di $\angle B$ si incontrano nel punto P. **Ipotesi:** $\angle PAB \cong \frac{1}{2}\angle A$, $\angle PBA \cong \frac{1}{2}\angle B$. **Tesi:** $\angle APB = 90°$.

Dimostrazione. 1) $\angle A + \angle B = 180°$ *(angoli consecutivi di un parallelogramma)*. 2) Quindi $\angle PAB + \angle PBA = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 90°$ *(ipotesi)*. 3) Nel triangolo ABP la somma degli angoli interni è $180°$ *(capitolo 14)*, quindi $\angle APB = 180° - 90° = 90°$. c.v.d.

Osserva che il punto 1 è l'unico in cui si usa che $ABCD$ è un parallelogramma. Il ragionamento vale quindi anche per due angoli adiacenti allo stesso lato obliquo di un trapezio, che sono coniugati interni e quindi supplementari.

15.3 Rettangolo, rombo, quadrato

15.3.1 Il rettangolo

Un rettangolo ha i quattro angoli retti, quindi gli angoli opposti sono congruenti: per la condizione 2 del paragrafo 15.2 **ogni rettangolo è un parallelogramma**, e ne possiede tutte le proprietà. Ha però una proprietà in più.

IN SINTESI

Teorema del rettangolo. Le diagonali di un rettangolo sono congruenti. **Inverso:** un parallelogramma con le diagonali congruenti è un rettangolo.

Ipotesi: $ABCD$ rettangolo. **Tesi:** $AC \cong BD$. (Inverso. **Ipotesi:** $ABCD$ parallelogramma, $AC \cong BD$. **Tesi:** $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ retti.)

Dimostrazione. Confrontiamo i triangoli ABC e BAD (figura 15.3, a sinistra).

1. AB è in comune *(postulato 8)*.
2. $BC \cong AD$ *(lati opposti di un parallelogramma)*.
3. $\angle ABC \cong \angle BAD$, perché sono entrambi retti *(ipotesi; tutti gli angoli retti sono congruenti, capitolo 12)*.
4. Per il primo criterio $ABC \cong BAD$ *(postulato 14, LAL)*, quindi $AC \cong BD$.

c.v.d. Per l'inverso, nel parallelogramma $ABCD$ i triangoli ABC e BAD hanno AB in comune, $BC \cong AD$ (lati opposti) e $AC \cong BD$ (ipotesi): sono congruenti per il terzo criterio, quindi $\angle ABC \cong \angle BAD$. Ma questi due angoli sono consecutivi, quindi supplementari: due angoli congruenti e supplementari sono retti. Gli angoli opposti sono congruenti, quindi tutti e quattro gli angoli sono retti. c.v.d.

Ne segue un fatto utile negli esercizi: le diagonali di un rettangolo si tagliano a metà e sono congruenti, quindi le quattro **semidiagonali** OA, OB, OC, OD sono congruenti, e i triangoli AOB, BOC, COD, DOA sono isosceli.

COLLEGAMENTI

Il controllo delle diagonali. Muratori, falegnami e tracciatori di campi sportivi usano da sempre il teorema inverso del rettangolo. Dopo aver disposto quattro picchetti con i lati opposti della stessa lunghezza (il quadrilatero è allora un parallelogramma, condizione 1), misurano le due diagonali con una cordella: se sono uguali, gli angoli sono retti. È molto più facile e preciso confrontare due lunghezze che controllare quattro angoli con una squadra.

15.3.2 Il rombo

Un rombo ha i quattro lati congruenti, quindi in particolare i lati opposti congruenti: per la condizione 1 **ogni rombo è un parallelogramma**. La sua proprietà caratteristica riguarda ancora le diagonali.

IN SINTESI

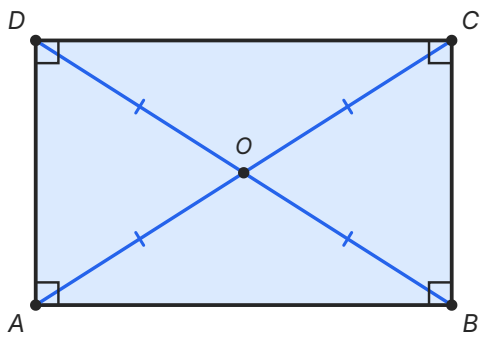
Teorema del rombo. Le diagonali di un rombo sono perpendicolari e sono bisettrici degli angoli. **Inverso:** un parallelogramma con le diagonali perpendicolari è un rombo.

Ipotesi: $ABCD$ rombo; O punto comune alle diagonali. **Tesi:** $AC \perp BD$; $\angle ABO \cong \angle CBO$ (e analogamente negli altri vertici).

Dimostrazione. Consideriamo i triangoli ABO e CBO (figura 15.3, a destra).

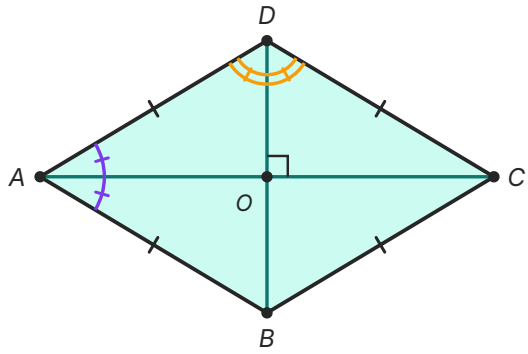
1. $AB \cong CB$ *(ipotesi: lati del rombo)*.
2. $AO \cong OC$ *(il rombo è un parallelogramma, e le diagonali di un parallelogramma si tagliano a metà)*.
3. BO è in comune *(postulato 8)*.
4. Per il terzo criterio $ABO \cong CBO$ *(LLL)*, quindi $\angle ABO \cong \angle CBO$: BD è bisettrice di $\angle B$.
5. Inoltre $\angle AOB \cong \angle COB$. Questi due angoli sono adiacenti, quindi supplementari; essendo anche congruenti, sono retti: $AC \perp BD$.

c.v.d. Ripetendo il ragionamento negli altri vertici si ottiene che ciascuna diagonale è bisettrice dei due angoli che congiunge. Per l'inverso: se nel parallelogramma $ABCD$ si ha $AC \perp BD$, i triangoli AOB e COB hanno $AO \cong OC$ (le diagonali si bisecano), OB in comune e $\angle AOB \cong \angle COB$ (retti); per il primo criterio $AB \cong CB$. Due lati consecutivi sono congruenti, e i lati opposti lo sono già: tutti e quattro i lati sono congruenti. c.v.d.



rettangolo: AC ≅ BD

le quattro semidiagonali sono congruenti



rombo: AC ⊥ BD

le diagonali sono bisettrici degli angoli

Figura 15.3 A sinistra, nel rettangolo le diagonali sono congruenti e si tagliano a metà: le quattro semidiagonali sono congruenti (una tacca). A destra, nel rombo le diagonali sono perpendicolari e dividono ogni angolo in due angoli congruenti (archi con tacche).

ERRORE FREQUENTE

«Le diagonali sono perpendicolari, quindi è un rombo.» L'inverso del teorema del rombo vale solo **per i parallelogrammi**. Un quadrilatero qualsiasi può avere le diagonali perpendicolari senza essere un rombo: un esempio è l'**aquilone** (o deltoide), il quadrilatero convesso con due coppie di lati consecutivi congruenti, come un aquilone di carta. Prima di applicare un teorema inverso del paragrafo 15.3, controlla di avere già un parallelogramma.

15.3.3 Il quadrato

Il quadrato è un rettangolo e un rombo, quindi ha *tutte* le proprietà dei due: le diagonali si tagliano a metà, sono congruenti, sono perpendicolari e sono bisettrici degli angoli. Poiché dividono a metà angoli retti, ciascuna forma con i lati angoli di 45°. Combinando i teoremi inversi si ottengono le condizioni sufficienti: un parallelogramma è un quadrato se ha le diagonali congruenti e perpendicolari; un rettangolo è un quadrato se ha due lati consecutivi congruenti, oppure le diagonali perpendicolari; un rombo è un quadrato se ha un angolo retto, oppure le diagonali congruenti.

Tabella 15.2 Le diagonali caratterizzano i parallelogrammi particolari.

Le diagonali di un parallelogramma…	Il parallelogramma è…
si tagliano a metà (sempre)	un parallelogramma qualsiasi
sono congruenti	un rettangolo
sono perpendicolari	un rombo
sono congruenti e perpendicolari	un quadrato

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Nel rettangolo $ABCD$ le diagonali si incontrano in O e l'angolo $\angle AOB$, opposto al lato AB, misura 124°. Calcola gli angoli $\angle OAB$, $\angle OBC$ e $\angle BOC$.

Soluzione. Le semidiagonali di un rettangolo sono congruenti, quindi $AO \cong OB$ e il triangolo AOB è isoscele sulla base AB: i suoi angoli alla base sono congruenti *(capitolo 13)* e la loro somma è $180° - 124° = 56°$ *(somma degli angoli interni)*. Quindi $\angle OAB = \angle OBA = 28°$.

L'angolo $\angle ABC$ è retto, quindi $\angle OBC = 90° - 28° = 62°$. Infine $\angle BOC$ è adiacente a $\angle AOB$: $\angle BOC = 180° - 124° = 56°$. Controllo nel triangolo isoscele BOC: $62° + 62° + 56° = 180°$.

15.4 Il trapezio

15.4.1 Definizioni e classificazione

Nel trapezio $ABCD$ indichiamo di solito con AB la base maggiore e con DC la base minore; AD e BC sono i lati obliqui. Le basi stanno su due rette parallele: la loro distanza, che è la stessa da qualunque punto si misuri (paragrafo 14.3), si chiama **altezza** del trapezio. Poiché $AB \parallel DC$, gli angoli adiacenti a ciascun lato obliquo sono coniugati interni, quindi **supplementari**: $\angle A + \angle D = 180°$ e $\angle B + \angle C = 180°$.

I trapezi si classificano guardando i lati obliqui (figura 15.4):

- un trapezio è **trapezio rettangolo** se un lato obliquo è perpendicolare alle basi; ha allora due angoli retti, e quel lato obliquo coincide con l'altezza;
- è **trapezio isoscele** se i lati obliqui sono congruenti;
- è **trapezio scaleno** se i lati obliqui non sono congruenti. Il trapezio rettangolo è un caso particolare di trapezio scaleno: il lato obliquo perpendicolare è infatti minore dell'altro, perché il segmento di perpendicolare è minore di ogni segmento obliquo (capitolo 14).

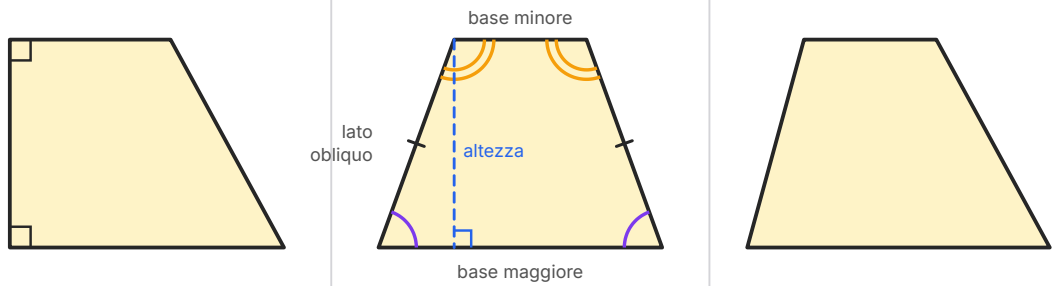


Figura 15.4 I tre tipi di trapezio. Nel trapezio isoscele sono segnati i lati obliqui congruenti (una tacca), gli angoli congruenti adiacenti a ciascuna base (un arco, due archi) e l'altezza, tratteggiata.

15.4.2 Il trapezio isoscele

IN SINTESI

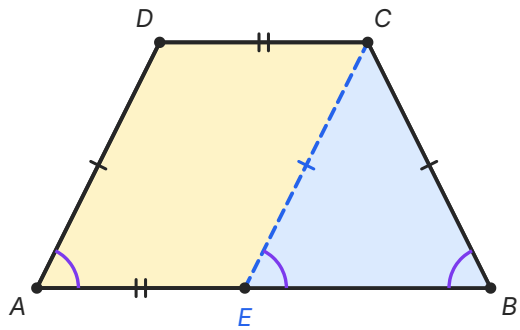
Teorema del trapezio isoscele. In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti a ciascuna base sono congruenti e le diagonali sono congruenti.

Ipotesi: $AB \parallel DC$, $DC < AB$; $AD \cong BC$. **Tesi:** $\angle A \cong \angle B$; $\angle C \cong \angle D$; $AC \cong BD$.

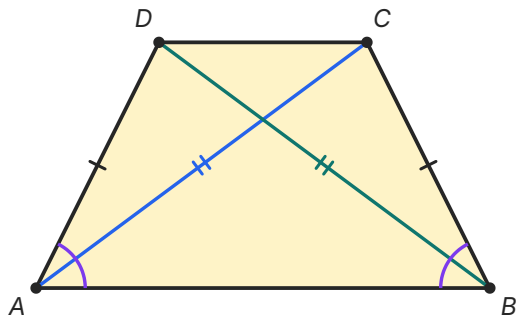
Dimostrazione. Per il punto C tracciamo la parallela al lato AD *(esiste ed è unica, capitolo 14)*, che incontra la base AB nel punto E (figura 15.5, a sinistra).

1. Il quadrilatero $AECD$ ha i lati opposti paralleli ($AE \parallel DC$ per ipotesi, $EC \parallel AD$ per costruzione): è un parallelogramma *(definizione)*. Quindi $EC \cong AD$ e $AE \cong DC$ *(lati opposti)*. Poiché $DC < AB$, il punto E è interno alla base AB.
2. $EC \cong AD \cong BC$ *(punto 1, ipotesi; postulato 8)*: il triangolo EBC è isoscele sulla base EB, quindi $\angle CEB \cong \angle CBE$ *(teorema del triangolo isoscele, capitolo 13)*.
3. $\angle CEB \cong \angle DAB$: sono angoli corrispondenti rispetto alle parallele AD ed EC tagliate da AB *(teorema inverso del teorema delle parallele)*.
4. Dai punti 2 e 3: $\angle DAB \cong \angle CBA$, cioè $\angle A \cong \angle B$ *(postulato 8)*.
5. $\angle D$ è supplementare di $\angle A$ e $\angle C$ è supplementare di $\angle B$ *(coniugati interni)*; supplementari di angoli congruenti sono congruenti *(capitolo 12)*: $\angle C \cong \angle D$.
6. Per le diagonali confrontiamo i triangoli ABC e BAD (figura 15.5, a destra): AB in comune, $BC \cong AD$ *(ipotesi)*, $\angle ABC \cong \angle BAD$ *(punto 4)*. Per il primo criterio *(postulato 14)* sono congruenti, quindi $AC \cong BD$.

c.v.d.



CE ∥ AD: AECD è un parallelogramma



ABC ≅ BAD (LAL) ⇒ AC ≅ BD

Figura 15.5 A sinistra, la costruzione della dimostrazione: la parallela *CE* al lato *AD* forma il parallelogramma *AECD* e il triangolo isoscele *EBC* (in azzurro); i tre archi segnano gli angoli congruenti $\angle A$, $\angle CEB$, $\angle B$. A destra, i triangoli *ABC* e *BAD* sono congruenti per il primo criterio, quindi le diagonali sono congruenti (due tacche).

Valgono anche i teoremi inversi: **un trapezio con gli angoli adiacenti a una base congruenti è isoscele** (esercizio 25), e **un trapezio con le diagonali congruenti è isoscele**. Inoltre la retta che congiunge i punti medi delle due basi di un trapezio isoscele è perpendicolare alle basi ed è un asse di simmetria della figura.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Nel trapezio isoscele *ABCD*, di base maggiore *AB*, la diagonale *AC* è bisettrice dell'angolo $\angle A$. a) Dimostra che la base minore è congruente ai lati obliqui. b) Se la base minore misura 7 cm e la base maggiore 15 cm, calcola il perimetro.

a) Ipotesi: $AB \parallel DC$; $AD \cong BC$; $\angle DAC \cong \angle CAB$. **Tesi:** $DC \cong AD$.

1) $\angle DCA \cong \angle CAB$ *(alterni interni rispetto alle parallele DC e AB con la trasversale AC; teorema inverso)*. 2) $\angle CAB \cong \angle DAC$ *(ipotesi)*. 3) Quindi $\angle DCA \cong \angle DAC$ *(postulato 8)*: il triangolo *ACD* ha due angoli congruenti ed è isoscele, con $DC \cong DA$ *(teorema inverso del triangolo isoscele, capitolo 13)*. c.v.d.

b) I lati obliqui sono congruenti alla base minore: $AD = BC = DC = 7$ cm. Il perimetro è $15 + 3 \cdot 7 = 36$ cm.

15.5 Fasci di parallele e punti medi

15.5.1 Il piccolo teorema di Talete

Nel capitolo 14 abbiamo visto che il parallelismo è una relazione di equivalenza: l'insieme di tutte le rette parallele a una retta data si chiama **fascio di rette parallele** (fascio improprio). Una retta che non appartiene al fascio le incontra tutte (capitolo 14) ed è detta **trasversale**. Se due rette del fascio tagliano due trasversali t e t' nei punti A, B e A', B', i segmenti AB e $A'B'$ si dicono **segmenti corrispondenti**.

Sulle righe di un quadernone, che sono parallele ed equidistanti, ogni retta trasversale viene tagliata in segmenti tutti uguali tra loro, per quanto inclinata sia. Non è un caso.

IN SINTESI

Piccolo teorema di Talete. Se un fascio di rette parallele stacca su una trasversale segmenti congruenti, allora stacca segmenti congruenti su ogni altra trasversale.

Ipotesi: $a \parallel b \parallel c$; t taglia a, b, c in A, B, C; t' le taglia in A', B', C'; $AB \cong BC$. **Tesi:** $A'B' \cong B'C'$.

Dimostrazione. Se $t \parallel t'$ i quadrilateri $ABB'A'$ e $BCC'B'$ sono parallelogrammi e la tesi segue subito dai lati opposti congruenti. Supponiamo allora che t e t' non siano parallele. Per A' tracciamo la parallela a t, che incontra b in P; per B' la parallela a t, che incontra c in Q (figura 15.6).

1. $ABPA'$ ha i lati opposti paralleli, quindi è un parallelogramma, e $A'P \cong AB$; allo stesso modo $BCQB'$ è un parallelogramma e $B'Q \cong BC$ *(definizione; lati opposti del parallelogramma)*.
2. $A'P \cong AB \cong BC \cong B'Q$ *(punto 1, ipotesi; postulato 8)*.
3. $A'P \parallel B'Q$, perché entrambe sono parallele a t *(transitività del parallelismo, capitolo 14)*. Quindi $\angle PA'B' \cong \angle QB'C'$: sono corrispondenti rispetto a queste parallele, tagliate da t' *(teorema inverso)*.
4. $\angle A'B'P \cong \angle B'C'Q$: sono corrispondenti rispetto alle parallele b e c, tagliate da t' *(teorema inverso)*.
5. I triangoli $A'PB'$ e $B'QC'$ hanno $A'P \cong B'Q$ e gli angoli congruenti dei punti 3 e 4: il primo è adiacente al lato, il secondo è opposto. Per il secondo criterio generalizzato *(LAA, capitolo 14)* sono congruenti, quindi $A'B' \cong B'C'$.

c.v.d.

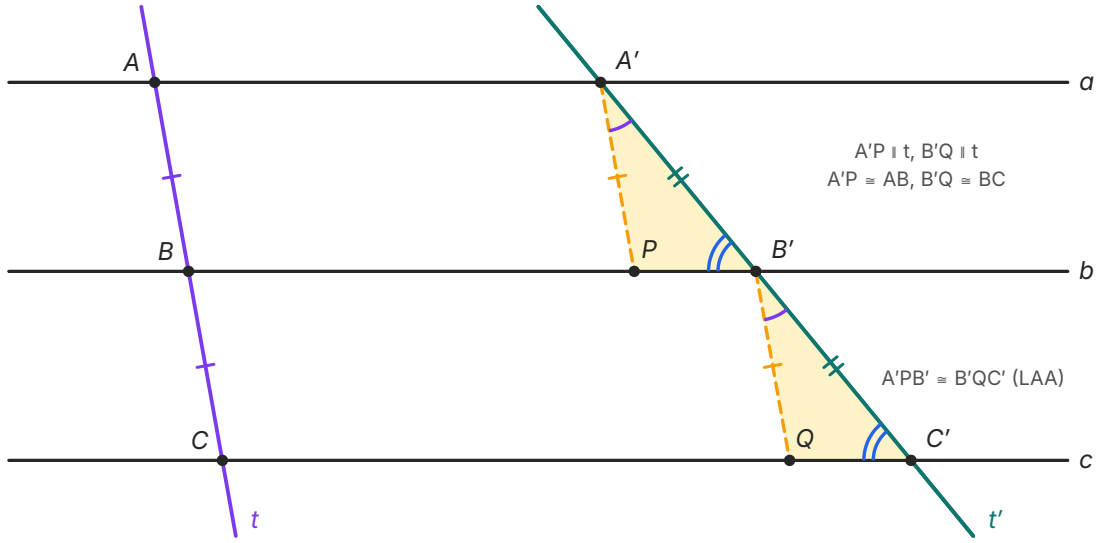


Figura 15.6 Il piccolo teorema di Talete. Le parallele *a*, *b*, *c* staccano su *t* i segmenti congruenti *AB* e *BC*. Le parallele a *t* condotte da *A′* e da *B′* (tratteggiate) formano i triangoli *A′PB′* e *B′QC′*, congruenti: quindi anche *A′B′* e *B′C′* sono congruenti.

Il teorema si estende subito a un numero qualsiasi di parallele: se $AB \cong BC \cong CD \cong \ldots$ su una trasversale, anche i segmenti corrispondenti sull'altra sono tutti congruenti tra loro. Attenzione però: i segmenti sulle due trasversali sono congruenti *tra loro* sulla stessa trasversale, non a quelli dell'altra ($A'B'$ in generale non è congruente ad AB). Il teorema «grande» di Talete, che confronta i rapporti tra segmenti corrispondenti, lo studierai il prossimo anno, insieme alla similitudine.

APPROFONDIMENTO

Perché «Talete»?

Talete di Mileto (VI secolo a.C.) è considerato dalla tradizione greca il primo matematico a cui si attribuiscono dimostrazioni, come ricordato nel capitolo 12. Le fonti antiche gli attribuiscono alcuni risultati semplici, per esempio che un diametro divide un cerchio in due parti uguali e che gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali. Il legame tra il suo nome e il teorema del fascio di parallele è invece una tradizione scolastica più recente, diffusa soprattutto in Italia e in Francia (nei paesi di lingua tedesca, invece, il «teorema di Talete» è un altro risultato, sul triangolo inscritto in una semicirconferenza); nei paesi di lingua inglese lo stesso risultato si chiama di solito *intercept theorem*, «teorema delle intersezioni». È un buon esempio di come il nome di un teorema non sempre racconti la sua storia.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Dividi un segmento AB in 5 parti congruenti con riga, squadra e compasso, senza misurare.

Costruzione. 1) Traccia per A una semiretta r qualsiasi, non contenente B. 2) Con il compasso, a partire da A, riporta su r cinque segmenti congruenti consecutivi AP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, di lunghezza a piacere. 3) Congiungi P_5 con B. 4) Per P_1, P_2, P_3, P_4 traccia le parallele a P_5B (con la squadra fatta scorrere lungo la riga): incontrano AB nei punti Q_1, Q_2, Q_3, Q_4.

Giustificazione. Le rette P_1Q_1, P_2Q_2, ..., P_5B, insieme alla parallela a P_5B condotta per A, formano un fascio di parallele che stacca sulla trasversale r cinque segmenti congruenti (per costruzione). Per il piccolo teorema di Talete stacca segmenti congruenti anche sulla trasversale AB: $AQ_1 \cong Q_1Q_2 \cong Q_2Q_3 \cong Q_3Q_4 \cong Q_4B$.

La costruzione funziona anche quando la lunghezza di AB non è divisibile «comodamente»: per dividere in tre parti uguali un segmento di 10 cm il righello darebbe solo un'approssimazione di $\frac{10}{3} = 3{,}\overline{3}$ cm, mentre la costruzione è esatta.

15.5.2 Il teorema dei punti medi

Il segmento che congiunge i punti medi di due lati di un triangolo si chiama **segmento dei punti medi** (o *congiungente dei punti medi*). Ha due proprietà notevoli.

IN SINTESI

Teorema dei punti medi. In un triangolo, il segmento che congiunge i punti medi di due lati è parallelo al terzo lato ed è congruente alla sua metà.

Ipotesi: ABC triangolo; $AM \cong MB$; $AN \cong NC$. **Tesi:** $MN \parallel BC$; $MN \cong \frac{1}{2} BC$.

Dimostrazione. (Figura 15.7, a sinistra.)

1. Per M tracciamo la parallela a BC; consideriamo anche la parallela a BC condotta per A *(esistono e sono uniche, postulato 15)*. Le tre rette parallele (quella per A, quella per M e la retta BC) staccano sulla trasversale AB i segmenti congruenti AM e MB *(ipotesi)*.
2. Per il piccolo teorema di Talete staccano segmenti congruenti anche sulla trasversale AC: la parallela per M incontra AC in un punto N' con $AN' \cong N'C$.
3. Ma il punto medio di AC è unico *(postulato 13)*, quindi $N' = N$, e la parallela a BC per M passa per N: $MN \parallel BC$.
4. Ora per N tracciamo la parallela ad AB, che incontra BC in P. Le parallele ad AB per A (la retta AB stessa), per N e per C staccano su AC i segmenti congruenti AN e NC, quindi su BC i

segmenti congruenti AN e NC, quindi su BC i segmenti congruenti BP e PC*(piccolo teorema di Talete)*: P è il punto medio di BC, e $BP \cong \frac{1}{2}\,BC$.

5. Il quadrilatero $MNPB$ ha i lati opposti paralleli ($MN \parallel BP$ per il punto 3, $NP \parallel MB$ per costruzione): è un parallelogramma, quindi $MN \cong BP \cong \frac{1}{2}\,BC$ *(lati opposti)*.

c.v.d.

I punti 1–3 dimostrano anche un teorema inverso, spesso utile: **la retta condotta per il punto medio di un lato di un triangolo parallelamente a un secondo lato passa per il punto medio del terzo lato**.

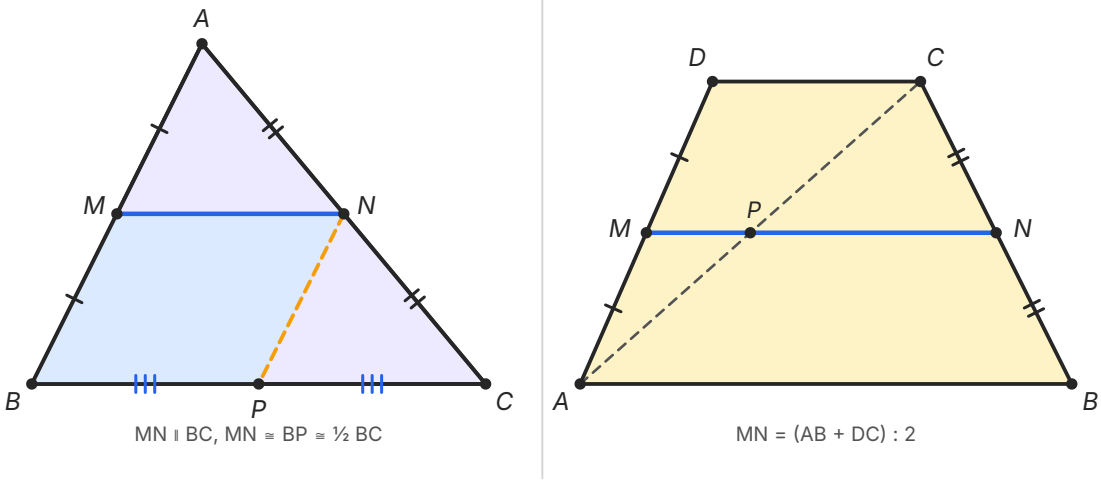


Figura 15.7 A sinistra, il teorema dei punti medi: MN è parallelo a BC, e il parallelogramma $MNPB$ (in azzurro) mostra che MN è congruente a BP, metà di BC. A destra, nel trapezio il segmento MN che congiunge i punti medi dei lati obliqui è parallelo alle basi; la diagonale AC lo divide nei segmenti MP e PN.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Un triangolo ha i lati di 14 cm, 18 cm e 22 cm. Congiungendo i punti medi dei tre lati si ottiene un triangolo più piccolo: calcolane il perimetro.

Soluzione. Per il teorema dei punti medi ciascun lato del triangolo interno è la metà del lato del triangolo grande a cui è parallelo: i lati misurano 7 cm, 9 cm e 11 cm, e il perimetro è $7 + 9 + 11 = 27$ cm, cioè la metà del perimetro del triangolo dato ($54 : 2 = 27$). I tre segmenti dei punti medi dividono il triangolo in quattro triangoli congruenti (esercizio 32).

15.5.3 Conseguenze: il trapezio e il quadrilatero di Varignon

IN SINTESI

Corollario (segmento dei punti medi del trapezio). In un trapezio, il segmento che congiunge i punti medi dei lati obliqui è parallelo alle basi ed è congruente alla loro semisomma.

Ipotesi: $AB \parallel DC$; $AM \cong MD$; $BN \cong NC$. **Tesi:** $MN \parallel AB$; $MN \cong \frac{1}{2}(AB + DC)$.

Dimostrazione. Tracciamo la diagonale AC (figura 15.7, a destra). La parallela alle basi condotta per M forma con le rette AB e DC un fascio di tre parallele che stacca su AD i segmenti congruenti AM e MD; per il piccolo teorema di Talete stacca segmenti congruenti anche su BC e su AC. Quindi passa per il punto medio N di BC (che è unico), cioè $MN \parallel AB$, e incontra AC nel suo punto medio P. Nel triangolo ACD, MP congiunge i punti medi di AD e AC: $MP \cong \frac{1}{2} DC$ *(teorema dei punti medi)*. Nel triangolo ABC, PN congiunge i punti medi di AC e BC: $PN \cong \frac{1}{2} AB$. Sommando, $MN = MP + PN \cong \frac{1}{2} DC + \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}(AB + DC)$ *(postulato 11)*. c.v.d.

Per esempio, in un trapezio con le basi di 16 cm e 10 cm il segmento dei punti medi dei lati obliqui misura (16 + 10) : 2 = 13 cm: è la media aritmetica delle basi.

APPROFONDIMENTO

Il parallelogramma di Varignon

Disegna un quadrilatero qualsiasi, anche irregolare, anche concavo, e congiungi in ordine i punti medi dei suoi lati: ottieni sempre un parallelogramma (figura 15.8). Il risultato porta il nome del matematico francese Pierre Varignon (1654–1722), nei cui scritti compare. La dimostrazione è un'applicazione diretta del teorema dei punti medi. Siano E, F, G, H i punti medi di AB, BC, CD, DA. Nel triangolo ABC il segmento EF congiunge i punti medi di due lati, quindi $EF \parallel AC$ e $EF \cong \frac{1}{2} AC$; nel triangolo ACD, allo stesso modo, $HG \parallel AC$ e $HG \cong \frac{1}{2} AC$. Dunque EF e HG sono paralleli (entrambi paralleli ad AC) e congruenti: per la condizione 4 del paragrafo 15.2 il quadrilatero $EFGH$ è un parallelogramma, il **parallelogramma di Varignon**.

Le sue proprietà dipendono solo dalle diagonali del quadrilatero di partenza. I lati sono paralleli alle diagonali e ne sono la metà, quindi il perimetro di $EFGH$ è uguale alla somma delle diagonali $AC + BD$. Se le diagonali sono congruenti, $EFGH$ è un rombo; se sono perpendicolari, è un rettangolo; se sono congruenti e perpendicolari, è un quadrato.

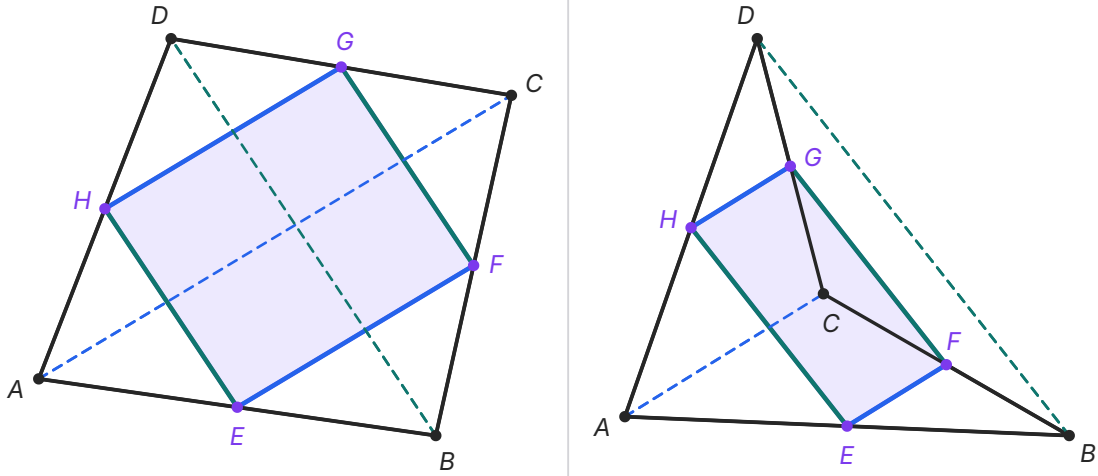


Figura 15.8 Il parallelogramma di Varignon *EFGH*, i cui vertici sono i punti medi dei lati di un quadrilatero convesso (a sinistra) e di uno concavo (a destra). I lati *EF* e *HG* (in blu) sono paralleli alla diagonale *AC*, i lati *FG* ed *EH* (in verde) alla diagonale *BD*, entrambe tratteggiate.

SINTESI

- La somma degli angoli interni di un quadrilatero convesso è 360°; un quadrilatero ha due diagonali.
- Trapezio: due soli lati paralleli (le basi). Parallelogramma: lati opposti paralleli. Rettangolo: quattro angoli retti. Rombo: quattro lati congruenti. Quadrato: rettangolo e rombo insieme.
- Rettangoli e rombi sono parallelogrammi; i quadrati sono l'intersezione delle due famiglie. Le definizioni sono scelte: va dichiarata quella che si usa.
- In un parallelogramma una diagonale lo divide in due triangoli congruenti; lati opposti e angoli opposti sono congruenti, angoli consecutivi supplementari, le diagonali si bisecano.
- Un quadrilatero convesso è un parallelogramma se ha i lati opposti congruenti, o gli angoli opposti congruenti, o le diagonali che si bisecano, o due lati opposti congruenti e paralleli.
- Le diagonali del rettangolo sono congruenti; un parallelogramma con diagonali congruenti è un rettangolo.
- Le diagonali del rombo sono perpendicolari e bisettrici degli angoli; un parallelogramma con diagonali perpendicolari è un rombo (ma non un quadrilatero qualsiasi: l'aquilone).
- In un trapezio gli angoli adiacenti a un lato obliquo sono supplementari. Nel trapezio isoscele gli angoli adiacenti a ciascuna base sono congruenti e le diagonali sono congruenti.
- Piccolo teorema di Talete: se un fascio di parallele stacca segmenti congruenti su una trasversale, li stacca congruenti su ogni altra trasversale.
- Teorema dei punti medi: il segmento che unisce i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato e ne è la metà.
- Nel trapezio il segmento dei punti medi dei lati obliqui è parallelo alle basi e congruente alla loro semisomma; i punti medi dei lati di un quadrilatero qualsiasi formano un parallelogramma (Varignon).

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Un quadrilatero con i quattro lati congruenti è sicuramente:
   A. un quadrato
   B. un rettangolo
   C. un rombo
   D. un trapezio

2. ● In un parallelogramma un angolo misura 65°. Gli altri tre angoli, percorrendo il contorno, misurano:

   A. 65°, 65°, 65°
   B. 115°, 65°, 115°
   C. 25°, 65°, 25°
   D. 115°, 115°, 115°

3. ●● Quale delle seguenti condizioni **non** basta a garantire che un quadrilatero convesso sia un parallelogramma?

   A. le diagonali si tagliano scambievolmente a metà
   B. i lati opposti sono congruenti a due a due
   C. gli angoli opposti sono congruenti a due a due
   D. due lati opposti sono paralleli e gli altri due sono congruenti

4. ●● Le diagonali di un rombo che non è un quadrato sono:

   A. perpendicolari e si tagliano a metà
   B. congruenti e perpendicolari
   C. perpendicolari ma non si tagliano a metà
   D. congruenti ma non perpendicolari

5. ● In un triangolo un lato misura 14 cm. Il segmento che congiunge i punti medi degli altri due lati misura:

   A. 28 cm
   B. 7 cm
   C. 14 cm
   D. non si può stabilire senza conoscere gli altri lati

6. ●● Le basi di un trapezio misurano 18 cm e 12 cm. Il segmento che congiunge i punti medi dei lati obliqui misura:

   A. 6 cm
   B. 30 cm
   C. 3 cm
   D. 15 cm

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Ogni quadrato è un rombo. b) Ogni rettangolo è un quadrato. c) Un parallelogramma con le diagonali congruenti è un rettangolo. d) Un quadrilatero con le diagonali perpendicolari è un rombo. e) Le diagonali di un trapezio isoscele sono congruenti. f) In un trapezio gli angoli adiacenti a un lato obliquo sono supplementari.

8. ● Completa. a) La somma degli angoli interni di un quadrilatero convesso è _____ . b) Un parallelogramma con un angolo retto è un _____ . c) Un parallelogramma con due lati consecutivi congruenti è un _____ . d) Se un fascio di parallele stacca segmenti congruenti su una trasversale, allora _____ . e) I punti medi dei lati di un quadrilatero qualsiasi sono i vertici di un _____ .

Calcolare

9. ● a) Tre angoli di un quadrilatero convesso misurano 85°, 110° e 72°: quanto misura il quarto? b) Gli angoli di un quadrilatero convesso sono proporzionali ai numeri 2, 3, 4, 6: calcolali.

10. ● In un parallelogramma $ABCD$ l'angolo $\angle A$ è i $\frac{3}{5}$ dell'angolo $\angle B$. Calcola i quattro angoli ed esprimi il risultato in gradi e primi.

11. ●● Nel parallelogramma $ABCD$ si ha $\angle A = (4x - 20)°$ e $\angle C = (2x + 30)°$. Determina x e i quattro angoli.

12. ●● Il perimetro di un parallelogramma $ABCD$ è 80 cm e il lato BC è i $\frac{3}{5}$ del lato AB. Calcola i lati. Sapendo che le diagonali misurano $AC = 32$ cm e $BD = 26$ cm, calcola il perimetro del triangolo AOB, dove O è il punto d'incontro delle diagonali.

13. ●● In un rombo $ABCD$ l'angolo $\angle A$ misura 64°. Calcola gli angoli del rombo e gli angoli del triangolo AOB, dove O è il punto d'incontro delle diagonali.

14. ●● Nel rettangolo $ABCD$ le diagonali si incontrano in O e $\angle BOC = 70°$. Calcola $\angle AOB$, $\angle OBC$, $\angle OAB$ e $\angle ACD$.

15. ●● In un trapezio isoscele ciascun angolo adiacente alla base minore supera di 15° il doppio di un angolo adiacente alla base maggiore. Calcola i quattro angoli.

16. ●● In un trapezio rettangolo $ABCD$, con gli angoli retti in A e in D, l'angolo ottuso supera l'angolo acuto di 76°. Calcola gli angoli $\angle B$ e $\angle C$.

17. ●● a) I lati di un triangolo ABC misurano $AB = 16$ cm, $BC = 20$ cm, $AC = 12$ cm: calcola il perimetro del triangolo che ha per vertici i punti medi dei lati. b) I segmenti che congiungono i punti medi dei lati di un triangolo misurano 5 cm, 7 cm e 9 cm: calcola il perimetro del triangolo.

18. ●● a) In un trapezio il segmento dei punti medi dei lati obliqui misura 17 cm e una base misura 12 cm: quanto misura l'altra base? b) Le basi di un trapezio differiscono di 8 cm e il segmento dei punti medi dei lati obliqui misura 20 cm: calcola le basi.

19. ●● Le diagonali di un quadrilatero convesso $ABCD$ misurano 10 cm e 16 cm. a) Calcola il perimetro del parallelogramma di Varignon. b) Se invece le diagonali misurassero entrambe 12 cm, che quadrilatero sarebbe il parallelogramma di Varignon, e quale sarebbe il suo perimetro?

Dimostrare e argomentare

20. ●● Dimostra che un parallelogramma con un angolo retto è un rettangolo. Scrivi ipotesi e tesi e giustifica ogni passaggio.

21. ●● Dimostra che, se in un parallelogramma una diagonale è bisettrice di un angolo, il parallelogramma è un rombo.

22. ●● Nel trapezio isoscele $ABCD$, di basi AB e DC, le diagonali si incontrano in O. Dimostra che il triangolo ABO è isoscele.

23. ● Trova l'errore. Un compagno scrive: a) «Il quadrilatero $ABCD$ ha le diagonali perpendicolari, quindi è un rombo»; b) «Il quadrilatero $ABCD$ ha $AB \parallel DC$ e $AD \cong BC$, quindi è un parallelogramma». Spiega perché i due ragionamenti sono sbagliati e disegna un controesempio per ciascuno.

24. ●●● Dimostra che i punti medi dei lati di un rettangolo sono i vertici di un rombo.

25. ●● Dimostra che un trapezio con gli angoli adiacenti alla base maggiore congruenti è isoscele. (Suggerimento: traccia per C la parallela al lato AD, come nella figura 15.5.)

Problemi

26. ● Un cancelletto estensibile per bambini è formato da aste incernierate che formano rombi congruenti, di lato 20 cm. Quando il cancelletto è aperto in modo che l'angolo acuto dei rombi misuri 60°, quanto misurano gli altri angoli di ciascun rombo? Quanto è lunga la diagonale minore di ciascun rombo? Giustifica la risposta.

27. ●● Il braccio di una lampada da scrivania è un parallelogramma articolato $ABCD$: il lato AB è fissato alla base, la testa della lampada è fissata al lato CD. a) Perché, comunque si muova il braccio, CD resta parallelo ad AB? b) Se l'angolo $\angle A$ passa da 90° a 70°, quanto misurano gli altri tre angoli?

28. ●● Un custode deve tracciare un campo rettangolare. Pianta quattro picchetti in modo che i lati opposti misurino 100 m e 64 m, poi misura con una cordella le due diagonali e verifica che sono uguali. Spiega perché questi controlli bastano a garantire che il campo è rettangolare.

29. ●● Una scala ha i montanti rettilinei che si allargano verso il basso e 5 pioli paralleli, equidistanti lungo i montanti: il piolo più in alto è lungo 40 cm, quello più in basso 60 cm. Quanto sono lunghi gli altri tre pioli? Giustifica con i teoremi del capitolo.

30. ●● Hai una striscia di carta lunga 13 cm e un foglio a righe parallele equidistanti. Spiega come dividere la striscia in 3 parti uguali usando le righe del foglio, senza misurare, e perché il metodo funziona. Quanto misura ciascuna parte?

Verso la verifica

31. ●● Nel parallelogramma $ABCD$ la bisettrice dell'angolo $\angle A$ incontra il lato CD nel punto E. a) Dimostra che il triangolo ADE è isoscele. b) Se $AD = 7$ cm e $AB = 12$ cm, calcola EC.

32. ●● Nel triangolo ABC siano M, N, P i punti medi di AB, AC, BC. a) Dimostra che $AMPN$ è un parallelogramma e che i triangoli AMN, MBP, NPC, PNM sono congruenti. b) Se $AB = 10$ cm e $AC = 14$ cm, calcola il perimetro di $AMPN$.

33. ●● Nel trapezio isoscele $ABCD$, di base maggiore AB, la diagonale AC è perpendicolare al lato obliquo BC e $\angle CAB = 30°$. a) Calcola gli angoli del trapezio. b) Dimostra che $DC \cong AD$. c) Sapendo che $DC = 6$ cm, calcola la base maggiore e il perimetro. (Suggerimento per c: traccia per C la parallela ad AD.)

34. ●●● Sfida. Dimostra che in ogni quadrilatero convesso i due segmenti che congiungono i punti medi dei lati opposti si tagliano scambievolmente a metà.

PER APPROFONDIRE

- [EUC] Euclide, *Elementi*, libro I, proposizioni 33–34: le proprietà del parallelogramma nella forma originale, da confrontare con il paragrafo 15.2.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Talete e le origini della geometria dimostrativa in Grecia.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: la ricerca di una figura ausiliaria (una parallela, una diagonale) come strategia per le dimostrazioni.

Glossario del capitolo

Altezza del trapezio
Distanza tra le rette delle due basi di un trapezio.

Aquilone
Quadrilatero convesso con due coppie di lati consecutivi congruenti; ha le diagonali perpendicolari ma in generale non è un rombo.

Centro del parallelogramma
Punto in cui si incontrano le diagonali di un parallelogramma; è il punto medio di entrambe.

Fascio di rette parallele
Insieme di tutte le rette parallele a una retta data (fascio improprio).

Lati opposti
In un quadrilatero, due lati che non hanno vertici in comune.

Parallelogramma
Quadrilatero con i lati opposti paralleli a due a due; ha lati e angoli opposti congruenti e diagonali che si bisecano.

Parallelogramma di Varignon
Il parallelogramma che ha per vertici i punti medi dei lati di un quadrilatero qualsiasi; i suoi lati sono paralleli alle diagonali e ne sono la metà.

Piccolo teorema di Talete
Se un fascio di parallele stacca segmenti congruenti su una trasversale, stacca segmenti congruenti su ogni altra trasversale.

Quadrato
Quadrilatero con quattro lati congruenti e quattro angoli retti: è insieme un rettangolo e un rombo.

Quadrilatero
Poligono con quattro lati; ha due diagonali e la somma dei suoi angoli interni (se convesso) è 360°.

Rettangolo
Quadrilatero con i quattro angoli retti; è un parallelogramma con le diagonali congruenti.

Rombo
Quadrilatero con i quattro lati congruenti; è un parallelogramma con le diagonali perpendicolari e bisettrici degli angoli.

Segmenti corrispondenti
Segmenti staccati da due stesse rette di un fascio di parallele su due trasversali diverse.

Teorema dei punti medi
Il segmento che unisce i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato ed è congruente alla sua metà.

Trapezio
Quadrilatero con due soli lati opposti paralleli, detti basi; gli altri due sono i lati obliqui.

Trapezio isoscele
Trapezio con i lati obliqui congruenti; ha congruenti gli angoli adiacenti a ciascuna base e le diagonali.

Trapezio rettangolo
Trapezio con un lato obliquo perpendicolare alle basi; ha due angoli retti.

Trapezio scaleno
Trapezio con i lati obliqui non congruenti.

Soluzioni

1. C. Quattro lati congruenti è la definizione di rombo; non si sa nulla degli angoli, quindi non è necessariamente un quadrato né un rettangolo.

2. B. Gli angoli consecutivi sono supplementari ($180° - 65° = 115°$) e quelli opposti congruenti: 65°, 115°, 65°, 115°.

3. D. Un trapezio isoscele ha due lati opposti paralleli e gli altri due congruenti, ma non è un parallelogramma. A, B, C sono condizioni sufficienti (paragrafo 15.2.2).

4. A. Il rombo è un parallelogramma (le diagonali si bisecano) e le sue diagonali sono perpendicolari; sono congruenti solo nel quadrato.

5. B. Per il teorema dei punti medi il segmento è la metà del terzo lato: $14 : 2 = 7$ cm.

6. D. È la semisomma delle basi: $(18 + 12) : 2 = 15$ cm.

7. a) Vero (quattro lati congruenti). b) Falso: un rettangolo è un quadrato solo se ha anche i lati congruenti. c) Vero (inverso del teorema del rettangolo). d) Falso: vale solo per i parallelogrammi; controesempio l'aquilone. e) Vero. f) Vero: sono coniugati interni rispetto alle basi parallele.

8. a) 360°; b) rettangolo; c) rombo; d) stacca segmenti congruenti su ogni altra trasversale; e) parallelogramma.

9. a) $360° - (85° + 110° + 72°) = 93°$. b) $2 + 3 + 4 + 6 = 15$ parti, $360° : 15 = 24°$: gli angoli sono 48°, 72°, 96°, 144°.

10. $\angle A + \angle B = 180°$ e $\angle A = \frac{3}{5}\angle B$: $\frac{8}{5}\angle B = 180°$, $\angle B = 112{,}5° = 112°30'$, $\angle A = 67°30'$. Quindi $\angle A = \angle C = 67°30'$, $\angle B = \angle D = 112°30'$.

11. Angoli opposti congruenti: $4x - 20 = 2x + 30$, $x = 25$. $\angle A = \angle C = 80°$, $\angle B = \angle D = 100°$.

12. $AB + BC = 40$ e $BC = \frac{3}{5}AB$: $\frac{8}{5}AB = 40$, $AB = CD = 25$ cm, $BC = DA = 15$ cm. Le diagonali si bisecano: $AO = 16$ cm, $BO = 13$ cm; perimetro di AOB: $25 + 16 + 13 = 54$ cm.

13. $\angle A = \angle C = 64°$, $\angle B = \angle D = 180° - 64° = 116°$. Le diagonali sono bisettrici e perpendicolari: $\angle OAB = 32°$, $\angle OBA = 58°$, $\angle AOB = 90°$ (controllo: $32 + 58 + 90 = 180$).

14. $\angle AOB = 180° - 70° = 110°$ (adiacenti). Il triangolo BOC è isoscele ($OB \cong OC$, semidiagonali): $\angle OBC = \angle OCB = (180° - 70°) : 2 = 55°$.
$\angle OAB = \angle OBA = 90° - 55° = 35°$. $\angle ACD \cong \angle CAB = 35°$ (alterni interni, $AB \parallel DC$).

15. Angolo alla base maggiore x, alla base minore $2x + 15$; sono supplementari: $3x + 15 = 180$, $x = 55$. Angoli: 55°, 55°, 125°, 125°.

16. $\angle B + \angle C = 180°$ e $\angle C - \angle B = 76°$: $\angle C = 128°$, $\angle B = 52°$.

17. a) Ogni lato del triangolo dei punti medi è metà di un lato: $8 + 10 + 6 = 24$ cm (metà di 48 cm). b) Ogni lato del triangolo è il doppio di un segmento dei punti medi: $10 + 14 + 18 = 42$ cm.

18. a) $AB + DC = 2 \cdot 17 = 34$, l'altra base è $34 - 12 = 22$ cm. b) Somma 40 cm, differenza 8 cm: basi 24 cm e 16 cm.

19. a) Il perimetro di Varignon è la somma delle diagonali: $10 + 16 = 26$ cm. b) Con diagonali congruenti i lati sono tutti congruenti (6 cm): è un rombo di perimetro 24 cm.

20. Ipotesi: $ABCD$ parallelogramma, $\angle A$ retto. **Tesi:** i quattro angoli sono retti. $\angle C \cong \angle A$ (angoli opposti), quindi è retto; $\angle B$ e $\angle D$ sono supplementari di $\angle A$ (angoli consecutivi), quindi $180° - 90° = 90°$. c.v.d.

21. Ipotesi: $ABCD$ parallelogramma; $\angle BAC \cong \angle CAD$. **Tesi:** $AB \cong BC$. $\angle BCA \cong \angle CAD$ (alterni interni, $AD \parallel BC$, teorema inverso); quindi $\angle BCA \cong \angle BAC$ (postulato 8) e il triangolo ABC è isoscele con $BA \cong BC$ (teorema inverso del triangolo isoscele). Due lati

consecutivi congruenti e lati opposti congruenti: tutti i lati sono congruenti, è un rombo. c.v.d.

22. I triangoli ABC e BAD sono congruenti (LAL: AB in comune, $BC \cong AD$, $\angle ABC \cong \angle BAD$ per il teorema del trapezio isoscele). Quindi $\angle CAB \cong \angle DBA$, cioè $\angle OAB \cong \angle OBA$: il triangolo ABO ha due angoli congruenti ed è isoscele (teorema inverso del triangolo isoscele). c.v.d.

23. a) L'inverso del teorema del rombo vale solo per i parallelogrammi; controesempio: un aquilone con $AB \cong AD$ e $CB \cong CD$, AB diverso da CB: le diagonali sono perpendicolari ma i lati non sono tutti congruenti. b) La condizione 4 richiede che siano congruenti gli stessi lati che sono paralleli; controesempio: un trapezio isoscele, con $AB \parallel DC$ e $AD \cong BC$, che non è un parallelogramma.

24. Il quadrilatero dei punti medi è il parallelogramma di Varignon, con i lati congruenti alla metà delle diagonali del rettangolo. Le diagonali del rettangolo sono congruenti, quindi i quattro lati sono congruenti: è un rombo. (Oppure: i quattro triangoli rettangoli agli angoli del rettangolo hanno i cateti congruenti a metà dei lati, quindi sono congruenti per il primo criterio, e le loro ipotenuse, lati del quadrilatero, sono congruenti.) c.v.d.

25. Ipotesi: $AB \parallel DC$, $DC < AB$, $\angle A \cong \angle B$. **Tesi:** $AD \cong BC$. Per C si traccia la parallela ad AD, che incontra AB in E; $AECD$ è un parallelogramma, quindi $CE \cong AD$. $\angle CEB \cong \angle A$ (corrispondenti, $AD \parallel EC$) $\cong \angle B$ (ipotesi): il triangolo EBC ha due angoli congruenti, quindi $CE \cong CB$ (teorema inverso del triangolo isoscele). Allora $AD \cong CE \cong BC$. c.v.d.

26. Gli angoli consecutivi sono supplementari: 60°, 120°, 60°, 120°. La diagonale minore congiunge i vertici degli angoli ottusi e forma con due lati un triangolo isoscele con l'angolo al vertice di 60°; gli angoli alla base misurano $(180° - 60°) : 2 = 60°$, quindi il triangolo è equilatero e la diagonale minore misura 20 cm.

27. a) Le aste sono rigide, quindi i lati opposti restano congruenti: il quadrilatero è sempre un parallelogramma (condizione 1) e $CD \parallel AB$. b) $\angle C = 70°$, $\angle B = \angle D = 110°$.

28. Lati opposti congruenti: il quadrilatero è un parallelogramma (condizione 1). Un parallelogramma con le diagonali congruenti è un rettangolo (inverso del teorema del rettangolo).

29. Ogni coppia di pioli forma con i montanti un trapezio. Il piolo centrale congiunge i punti medi dei montanti nel trapezio formato dal primo e dall'ultimo piolo: $(40 + 60) : 2 = 50$ cm. Allo stesso modo il secondo piolo è il segmento dei punti medi del trapezio di basi 40 e 50: 45 cm; il quarto, del trapezio di basi 50 e 60: 55 cm. Pioli: 40, 45, 50, 55, 60 cm.

30. Si dispone la striscia obliquamente in modo che un estremo stia su una riga e l'altro sulla terza riga successiva; le due righe intermedie la tagliano in tre parti. Le righe formano un fascio di parallele che stacca segmenti congruenti su ogni trasversale perpendicolare (le righe sono equidistanti), quindi, per il piccolo teorema di Talete, anche sulla striscia. Ogni parte misura $\frac{13}{3}$ cm $= 4,\overline{3}$ cm.

31. a) $\angle DEA \cong \angle EAB$ (alterni interni, $DC \parallel AB$) e $\angle EAB \cong \angle DAE$ (bisettrice): $\angle DEA \cong \angle DAE$, quindi ADE è isoscele con $DE \cong DA$. b) $DE = 7$ cm, $DC = AB = 12$ cm, $EC = 12 - 7 = 5$ cm.

32. a) Per il teorema dei punti medi $MP \parallel AC$ e $NP \parallel AB$, quindi $AMPN$ ha i lati opposti paralleli: è un parallelogramma. Inoltre $MN \cong \frac{1}{2} BC \cong BP \cong PC$, $MP \cong \frac{1}{2} AC \cong AN \cong NC$, $NP \cong \frac{1}{2} AB \cong AM \cong MB$: i quattro triangoli hanno i tre lati ordinatamente congruenti e sono congruenti (LLL). b) $AM = PN = 5$ cm, $AN = MP = 7$ cm: perimetro 24 cm.

33. a) Nel triangolo ABC, retto in C: $\angle B = 180° - 90° - 30° = 60°$. Trapezio isoscele: $\angle A = \angle B = 60°$, $\angle C = \angle D = 120°$. b) $\angle DCA \cong \angle CAB = 30°$ (alterni interni) e $\angle DAC = 60° - 30° = 30°$: il triangolo ACD ha due angoli congruenti, quindi $DC \cong DA$. c) $AD = BC = DC = 6$ cm. Per C la parallela ad AD incontra AB in E: $AECD$ è un parallelogramma ($AE = 6$ cm, $EC = 6$ cm); il triangolo EBC è isoscele ($EC \cong BC$) con $\angle B = 60°$, quindi è equilatero e $EB = 6$ cm. $AB = 12$ cm; perimetro $12 + 6 + 6 + 6 = 30$ cm.

34. Siano *E*, *F*, *G*, *H* i punti medi di *AB*, *BC*, *CD*, *DA*. Per il teorema di Varignon *EFGH* è un parallelogramma. I segmenti *EG* e *FH*, che congiungono i punti medi dei lati opposti di *ABCD*, sono le sue diagonali; le diagonali di un parallelogramma si tagliano scambievolmente a metà. c.v.d.