CAPITOLO

13

I triangoli

Tre bastoncini legati agli estremi formano una figura che non si può deformare. È da questa rigidità che nasce quasi tutta la geometria del piano.

OBIETTIVI

1. Classificare i triangoli rispetto ai lati e rispetto agli angoli; riconoscere e disegnare bisettrici, mediane e altezze.
2. Enunciare i tre criteri di congruenza dei triangoli, distinguendo ciò che si assume da ciò che si dimostra.
3. Dimostrare e applicare le proprietà del triangolo isoscele e del triangolo equilatero.
4. Conoscere il teorema dell'angolo esterno e le disuguaglianze tra lati e angoli, compresa la disuguaglianza triangolare.
5. Scrivere una dimostrazione completa: figura, ipotesi, tesi, catena di passaggi giustificati.

INDICE DEL CAPITOLO

13.1 Il triangolo e i suoi elementi 2
13.2 Triangoli congruenti: i primi due criteri 5
13.3 Il triangolo isoscele e il terzo criterio 8
13.4 Il teorema dell'angolo esterno 12
13.5 Disuguaglianze nei triangoli 14
13.6 Come si scrive una dimostrazione 17

Matematica 1 · Parte V · Geometria euclidea · versione 1.0
Capitolo 13: I triangoli · pagine 333–356 del volume completo · estratto per lo studio

Prova a costruire un quadrato con quattro listelli di legno, inchiodati agli angoli con un solo chiodo ciascuno. Basta una piccola spinta e il quadrato si «schiaccia», diventando un rombo sempre più sottile. Ora fai lo stesso con tre listelli: il triangolo resta fermo, non c'è modo di cambiarne la forma senza spezzare un listello. Per questo le travature dei tetti, i tralicci dell'alta tensione, i telai delle biciclette e le gru dei cantieri sono fatti di triangoli.

Questa rigidità ha una traduzione geometrica precisa: *tre lati determinano il triangolo*. Se due triangoli hanno i lati ordinatamente congruenti, sono congruenti; non serve controllare anche gli angoli. È uno dei tre **criteri di congruenza**, gli strumenti che useremo in quasi tutte le dimostrazioni dei prossimi capitoli. Nel capitolo 12 hai conosciuto il metodo assiomatico e hai scritto le prime dimostrazioni con angoli e segmenti. Qui il metodo diventa davvero potente: con i criteri dimostreremo le proprietà del triangolo isoscele, il teorema dell'angolo esterno e una disuguaglianza che usi ogni giorno senza saperlo, quella secondo cui la strada in linea retta è la più breve.

13.1 Il triangolo e i suoi elementi

13.1.1 Lati, vertici, angoli

Dati tre punti A, B, C non allineati, i segmenti AB, BC, CA formano una poligonale chiusa e semplice. Il poligono che essa delimita si chiama **triangolo** ABC: è il poligono con tre lati, il più semplice di tutti. I punti A, B, C sono i **vertici**, i segmenti AB, BC, CA sono i **lati**. La somma dei tre lati è il **perimetro**. Un triangolo è sempre una figura convessa, quindi i suoi tre angoli interni sono convessi.

Per gli angoli interni useremo due notazioni. Possiamo scrivere $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$, nominando i tre punti con il vertice al centro; oppure, quando non c'è ambiguità, chiamarli semplicemente $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, o con le lettere greche α, β, γ. Spesso i lati si indicano con la lettera minuscola del vertice che non toccano: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

Ogni lato ha due vertici come estremi e uno solo che non gli appartiene. Si dice che il lato BC è **opposto** al vertice A e all'angolo α, mentre è **adiacente** agli angoli β e γ, che hanno il vertice nei suoi estremi. Analogamente, l'angolo α è **compreso** tra i lati AB e AC, che sono i suoi lati. Queste parole sembrano pedanti, ma sono decisive: i criteri di congruenza parlano proprio di lati «compresi» e di angoli «adiacenti», e confonderli porta a errori.

Nel capitolo 12 hai incontrato gli **angoli esterni** di un poligono. Per il triangolo li ricordiamo così: un **angolo esterno** è un angolo adiacente a un angolo interno, formato da un lato e dal prolungamento dell'altro lato che parte dallo stesso vertice. In ogni vertice ci sono due angoli esterni, congruenti perché opposti al vertice (figura 13.6a), e ciascuno è supplementare dell'angolo interno adiacente: se γ misura $65°$, gli angoli esterni in C misurano $115°$.

13.1.2 Classificazione dei triangoli

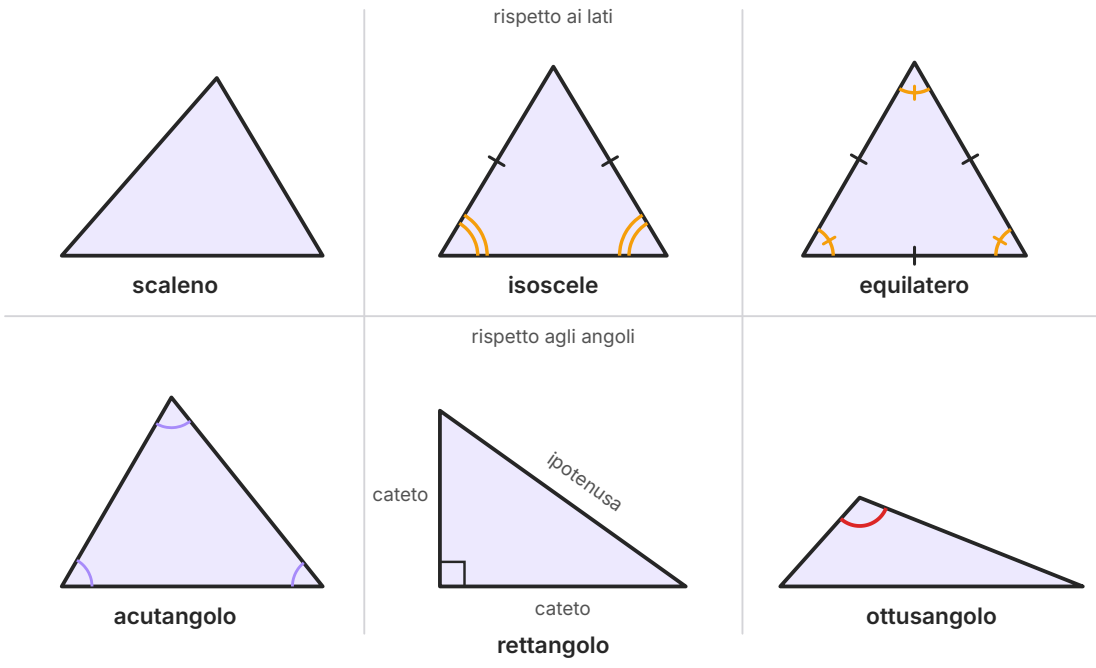


Figura 13.1 La classificazione dei triangoli. In alto rispetto ai lati: le tacche uguali indicano lati congruenti, gli archi uguali angoli congruenti. In basso rispetto agli angoli: acutangolo (tre angoli acuti), rettangolo (il quadratino indica l'angolo retto), ottusangolo (l'arco rosso indica l'angolo ottuso).

Rispetto ai lati, un triangolo si dice (figura 13.1):

- **scaleno**, se ha i tre lati a due a due non congruenti;
- **isoscele**, se ha almeno due lati congruenti;
- **equilatero**, se ha tutti e tre i lati congruenti.

Con la parola «almeno» nella definizione, ogni triangolo equilatero è anche isoscele: è la convenzione della maggior parte dei testi, e la seguiremo. In un triangolo isoscele i due lati congruenti si chiamano **lati obliqui**, il terzo lato **base**; gli angoli adiacenti alla base sono gli **angoli alla base**, l'angolo opposto alla base è l'**angolo al vertice**.

Rispetto agli angoli, un triangolo si dice:

- **acutangolo**, se ha tutti e tre gli angoli acuti;
- **rettangolo**, se ha un angolo retto;
- **ottusangolo**, se ha un angolo ottuso.

In un triangolo rettangolo i due lati che formano l'angolo retto si chiamano **cateti**, il lato opposto all'angolo retto **ipotenusa**. La classificazione rispetto agli angoli dà per scontato un fatto che non abbiamo ancora dimostrato: che un triangolo non possa avere *due* angoli retti, o un angolo retto e uno ottuso. Sarà una conseguenza del teorema dell'angolo esterno (paragrafo 13.4). Le due classificazioni sono indipendenti: un triangolo può essere, per esempio, isoscele e rettangolo, oppure scaleno e ottusangolo.

13.1.3 Bisettrici, mediane, altezze

In ogni triangolo si tracciano alcuni segmenti che hanno un estremo in un vertice e l'altro sulla retta del lato opposto (figura 13.2).

- La **bisettrice** relativa al vertice A è il segmento AD della bisettrice dell'angolo α, compreso tra il vertice e il punto D in cui essa incontra il lato opposto BC. Per definizione $\angle BAD \cong \angle DAC$.
- La **mediana** relativa al lato BC è il segmento AM che congiunge il vertice A con il punto medio M del lato opposto. Per definizione $BM \cong MC$.
- L'**altezza** relativa al lato BC è il segmento AH condotto da A perpendicolarmente alla retta BC; il punto H si chiama **piede** dell'altezza.

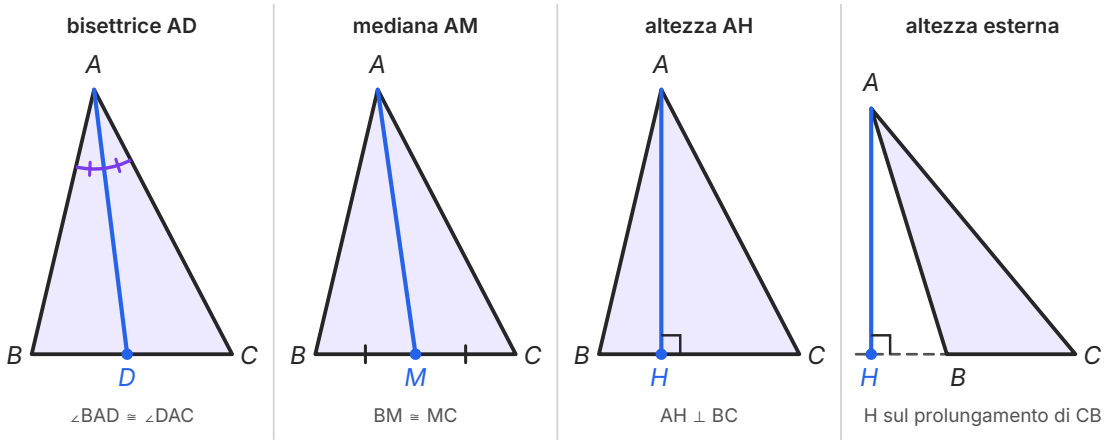


Figura 13.2 Gli elementi notevoli relativi al vertice A: la bisettrice AD divide l'angolo in due angoli congruenti; la mediana AM arriva nel punto medio di BC; l'altezza AH è perpendicolare alla retta BC. Nell'ultimo pannello il triangolo è ottusangolo in B e il piede H dell'altezza cade sul prolungamento del lato CB.

Ogni triangolo ha quindi tre bisettrici, tre mediane e tre altezze. Le bisettrici e le mediane cadono sempre all'interno del triangolo; le altezze no. In un triangolo ottusangolo le altezze che partono dai vertici degli angoli acuti cadono *fuori* dal triangolo, sul prolungamento di un lato (ultimo pannello della figura 13.2). In un triangolo rettangolo, invece, due altezze coincidono con i cateti. Che da un punto si possa condurre una e una sola perpendicolare a una retta lo dimo-

streremo nel capitolo 14; per ora lo usiamo soltanto per disegnare. Nell'anno prossimo vedrai che le tre bisettrici, le tre mediane e le tre altezze passano ciascuna per uno stesso punto (i *punti notevoli* del triangolo).

Attenzione. Bisettrice, mediana e altezza relative a uno stesso vertice sono, in generale, tre segmenti *diversi*: nel disegno a mano libera si tende a farle coincidere. Coincidono solo in casi speciali, come l'angolo al vertice di un triangolo isoscele (paragrafo 13.3). Per disegnare l'altezza usa la squadra, per la mediana misura il lato e prendi il punto medio, per la bisettrice usa il goniometro o la costruzione con il compasso. E ricorda che l'altezza è perpendicolare al lato opposto, non «verticale» sul foglio.

13.2 Triangoli congruenti: i primi due criteri

13.2.1 Che cosa significa che due triangoli sono congruenti

Nel capitolo 12 abbiamo detto che due figure sono congruenti se si possono sovrapporre con un movimento rigido. Quando due triangoli ABC e $A'B'C'$ si sovrappongono, ogni vertice del primo va a cadere su un vertice del secondo: supponiamo che A cada su A', B su B', C su C'. Allora combaciano anche i lati e gli angoli: $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $CA \cong C'A'$, e $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$. Lati e angoli che si corrispondono nella sovrapposizione si dicono **elementi omologhi** (o corrispondenti). Scrivendo $ABC \cong A'B'C'$ si sottintende che i vertici sono elencati nell'ordine della corrispondenza.

Viceversa, se due triangoli hanno i tre lati e i tre angoli ordinatamente congruenti, li consideriamo congruenti. Ma sei controlli sono tanti, e spesso non si possono fare tutti. I **criteri di congruenza** dicono che bastano *tre* elementi scelti bene. Una regola utile, che discende dalla definizione: *in triangoli congruenti, a lati congruenti si oppongono angoli congruenti, e viceversa*. Per trovare gli elementi omologhi, quindi, guarda che cosa sta di fronte a che cosa.

13.2.2 Il primo criterio (LAL)

Euclide, nella proposizione 4 del primo libro degli *Elementi*, «dimostra» il primo criterio sovrapponendo i due triangoli: immagina di spostare il primo sul secondo e osserva che deve combaciare. Ma il movimento delle figure non è previsto dai suoi postulati, e i commentatori successivi notarono che il ragionamento non è del tutto rigoroso. Per questo nella geometria moderna, a partire da Hilbert, il primo criterio (o una sua forma un po' più debole) si assume come **postulato**. Facciamo così anche noi, e lo aggiungiamo alla lista dei postulati del capitolo 12.

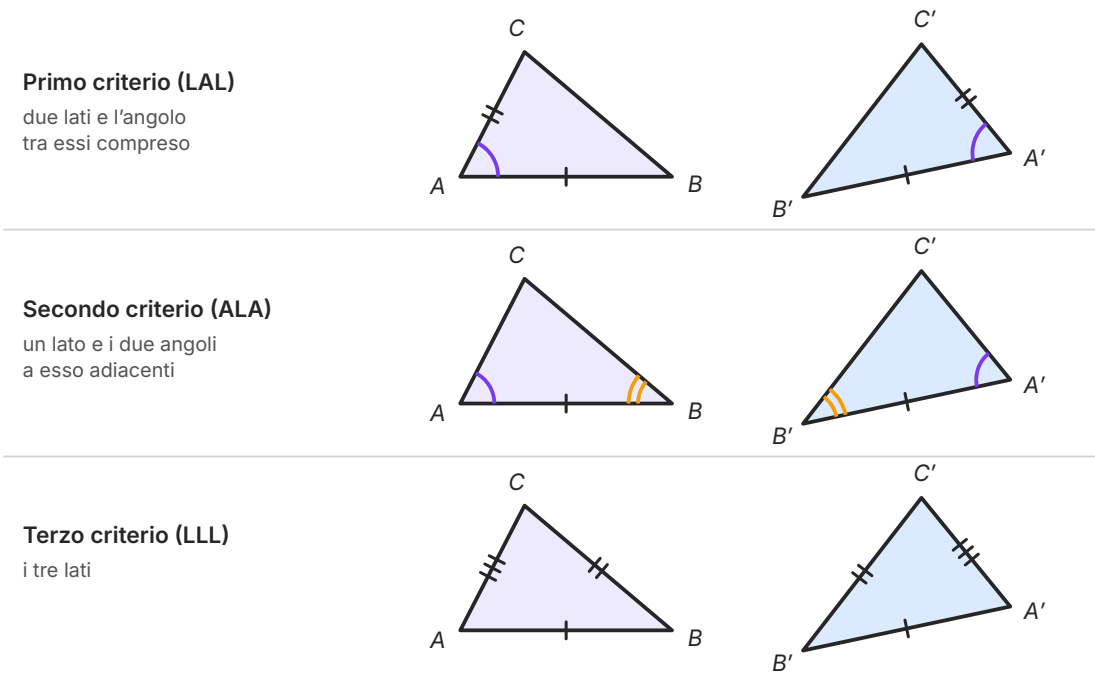


Figura 13.3 I tre criteri di congruenza. In ogni riga gli elementi segnati allo stesso modo sono congruenti per ipotesi; i triangoli a destra sono ruotati o ribaltati, ma questo non conta. Nel primo criterio l'angolo è *compreso* tra i due lati; nel secondo i due angoli sono *adiacenti* al lato.

IN SINTESI

Postulato 14 · Primo criterio di congruenza (LAL). Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso, allora sono congruenti.

Ipotesi: $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$. **Tesi:** $ABC \cong A'B'C'$.

Da questo postulato discende che anche gli altri elementi sono congruenti: $BC \cong B'C'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$. È questo il vero uso del criterio: si dimostra che due triangoli sono congruenti per ricavarne che due segmenti, o due angoli, sono congruenti. Nella figura 13.3, in alto, gli elementi dell'ipotesi sono segnati con tacche e archi: una tacca per la prima coppia di lati, due tacche per la seconda, un arco per l'angolo compreso.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. I segmenti AB e CD si intersecano nel punto O, che è il punto medio di entrambi. Dimostra che $AC \cong BD$.

Figura e dati. Disegna due segmenti che si tagliano a metà (non perpendicolari e non congruenti: la figura deve essere generica). **Ipotesi:** $AO \cong OB$, $CO \cong OD$. **Tesi:** $AC \cong BD$.

Dimostrazione. Il segmento AC è un lato del triangolo AOC, il segmento BD del triangolo BOD: confrontiamo questi due triangoli. 1) $AO \cong OB$ (ipotesi). 2) $CO \cong OD$ (ipotesi). 3) $\angle AOC \cong \angle BOD$ (opposti al vertice, capitolo 12); questo angolo è compreso tra i lati dei punti 1 e 2. Quindi $AOC \cong BOD$ (primo criterio). In triangoli congruenti i lati opposti ad angoli congruenti sono congruenti: AC e BD sono opposti agli angoli congruenti del punto 3, quindi $AC \cong BD$. c.v.d.

Abbiamo ottenuto anche di più: $\angle OAC \cong \angle OBD$, perché sono opposti ai lati congruenti OC e OD. Nel capitolo 14 questo ci dirà che le rette AC e BD sono parallele.

13.2.3 Il secondo criterio (ALA)

Il secondo criterio non va assunto: si dimostra a partire dal primo. È il nostro primo esempio di **dimostrazione per assurdo** in geometria (capitolo 5): supponiamo che la tesi sia falsa e mostriamo che si arriva a una contraddizione.

IN SINTESI

Teorema · Secondo criterio di congruenza (ALA). Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti un lato e i due angoli a esso adiacenti, allora sono congruenti.

Ipotesi: $AB \cong A'B'$, $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$. **Tesi:** $ABC \cong A'B'C'$.

Dimostrazione. Basta provare che $AC \cong A'C'$: avremo allora due lati e l'angolo compreso ordinatamente congruenti, e potremo applicare il primo criterio. Supponiamo per assurdo che AC e $A'C'$ *non* siano congruenti.

1. Sulla semiretta $A'C'$ esiste uno e un solo punto D tale che $A'D \cong AC$ *(postulato 9, trasporto di un segmento)*. Poiché $A'C'$ non è congruente ad AC, il punto D è diverso da C'.
2. Confrontiamo i triangoli ABC e $A'B'D$: $AB \cong A'B'$ *(ipotesi)*, $AC \cong A'D$ *(costruzione)*, $\angle BAC \cong \angle B'A'D$ *(ipotesi: l'angolo $\angle B'A'D$ è proprio $\angle A'$, perché D sta sulla semiretta $A'C'$)*. Quindi $ABC \cong A'B'D$ *(primo criterio)*, e in particolare $\angle ABC \cong \angle A'B'D$.
3. Per ipotesi anche $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$. Allora $\angle A'B'D \cong \angle A'B'C'$ *(postulato 8, proprietà transitiva)*.
4. I punti D e C' stanno sulla stessa semiretta di origine A', quindi dalla stessa parte della retta $A'B'$. Ma da quella parte esiste una sola semiretta di origine B' che forma con $B'A'$ un angolo congruente a $\angle B$ *(postulato 10, trasporto di un angolo)*: le semirette $B'D$ e $B'C'$ coincidono.

5. Allora D e C' sono entrambi punti comuni alle rette $A'C'$ e $B'C'$. Due rette distinte hanno al massimo un punto in comune *(capitolo 12, conseguenza del postulato 1)*, quindi $D = C'$: contro il punto 1.

L'ipotesi assurda è falsa: $AC \cong A'C'$, e per il primo criterio $ABC \cong A'B'C'$. c.v.d.

Attenzione alla parola *adiacenti*: i due angoli devono avere il vertice negli estremi del lato. Esiste anche una forma più generale del secondo criterio, con un lato e due angoli qualsiasi (LAA), ma per dimostrarla serve il teorema sulla somma degli angoli di un triangolo: la vedremo nel capitolo 14.

13.3 Il triangolo isoscele e il terzo criterio

13.3.1 Il teorema del triangolo isoscele

Il primo teorema importante che i criteri ci permettono di dimostrare riguarda il triangolo isoscele. Ne ricaveremo in un colpo solo quattro proprietà.

IN SINTESI

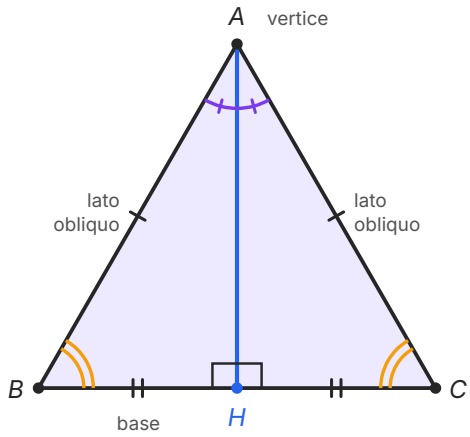
Teorema del triangolo isoscele. In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti. Inoltre la bisettrice dell'angolo al vertice è anche mediana e altezza relativa alla base.

Ipotesi: $AB \cong AC$; AH bisettrice di $\angle A$. **Tesi:** $\angle B \cong \angle C$; $BH \cong HC$; $AH \perp BC$.

Dimostrazione. L'angolo $\angle A$ ha una e una sola bisettrice *(postulato 13)*; essa è interna all'angolo e incontra la base BC in un punto H (è intuitivo e si potrebbe dimostrare con i postulati d'ordine; lo accettiamo). Confrontiamo i triangoli ABH e ACH (figura 13.4).

1. $AB \cong AC$ *(ipotesi)*.
2. $AH \cong AH$ *(lato in comune; postulato 8, proprietà riflessiva)*.
3. $\angle BAH \cong \angle HAC$ *(definizione di bisettrice)*; è l'angolo compreso tra i lati dei punti 1 e 2.
4. Quindi $ABH \cong ACH$ *(primo criterio)*, e gli elementi omologhi sono congruenti:
   a) $\angle ABH \cong \angle ACH$, cioè $\angle B \cong \angle C$ (sono opposti al lato comune AH);
   b) $BH \cong HC$ (opposti agli angoli congruenti del punto 3): H è il punto medio di BC e AH è la mediana;
   c) $\angle AHB \cong \angle AHC$ (opposti ai lati congruenti del punto 1).
5. Gli angoli $\angle AHB$ e $\angle AHC$ sono adiacenti, quindi la loro somma è un angolo piatto; essendo congruenti, ciascuno è la metà di un piatto, cioè un angolo retto *(definizione di angolo retto)*. Quindi $AH \perp BC$: AH è l'altezza relativa alla base.

Abbiamo ottenuto tutte le tesi. c.v.d.



Ipotesi:
AB ≅ AC

Tesi:
∠ABC ≅ ∠ACB (due archi)
BH ≅ HC (due tacche)
AH ⊥ BC

AH è insieme bisettrice, mediana e altezza

Figura 13.4 Il teorema del triangolo isoscele. I lati obliqui congruenti (una tacca) sono l'ipotesi; la bisettrice *AH* divide l'angolo al vertice in due angoli congruenti (archi con una tacca). Le tesi: gli angoli alla base sono congruenti (doppio arco), *H* è il punto medio della base (due tacche), gli angoli in *H* sono retti.

Attenzione: la coincidenza di bisettrice, mediana e altezza vale per l'angolo *al vertice*, cioè quello opposto alla base. La bisettrice di un angolo alla base, in generale, non è né mediana né altezza.

13.3.2 Il teorema inverso e il triangolo equilatero

Vale anche il **teorema inverso**, che si ottiene scambiando ipotesi e tesi: se due angoli di un triangolo sono congruenti, il triangolo è isoscele. Ricorda dal capitolo 5 che l'inverso di un teorema vero può essere falso; qui è vero, ma va dimostrato.

IN SINTESI

Teorema inverso. Se un triangolo ha due angoli congruenti, allora è isoscele, e i lati congruenti sono quelli opposti agli angoli congruenti.

Ipotesi: $\angle ABC \cong \angle ACB$. **Tesi:** $AB \cong AC$.

Corollari. Un triangolo è equilatero se e solo se è equiangolo (ha i tre angoli congruenti). Un triangolo scaleno ha i tre angoli a due a due non congruenti.

Dimostrazione. L'idea, elegante, è confrontare il triangolo con sé stesso «letto al contrario»: consideriamo il triangolo ABC e lo stesso triangolo con i vertici nell'ordine ACB, cioè con la corrispondenza $A \to A$, $B \to C$, $C \to B$.

1. $BC \cong CB$ *(è lo stesso segmento)*.
2. $\angle ABC \cong \angle ACB$ *(ipotesi)*: l'angolo in B del primo corrisponde all'angolo in C del secondo.

3. $\angle ACB \cong \angle ABC$ *(ipotesi, proprietà simmetrica)*.
4. Quindi $ABC \cong ACB$ *(secondo criterio)*. Il lato AB del primo corrisponde al lato AC del secondo: $AB \cong AC$.

c.v.d. Per i corollari: se il triangolo è equilatero, applicando il teorema del triangolo isoscele alle coppie di lati $AB \cong AC$ e $BA \cong BC$ si ottiene $\angle B \cong \angle C$ e $\angle A \cong \angle C$, quindi i tre angoli sono congruenti; viceversa, applicando il teorema inverso a due coppie di angoli si ottengono tre lati congruenti. Infine, se un triangolo avesse due angoli congruenti sarebbe isoscele: dunque un triangolo scaleno non può avere due angoli congruenti. Quest'ultima è la *contronominale* del teorema inverso, ed è vera insieme a esso.

APPROFONDIMENTO

Nel primo libro degli *Elementi* di Euclide (Alessandria, circa 300 a.C.) i risultati di questo capitolo occupano posizioni precise: il primo criterio è la proposizione 4, il teorema del triangolo isoscele la 5 e il suo inverso la 6, il terzo criterio la 8, il teorema dell'angolo esterno la 16, i teoremi tra lati e angoli le 18 e 19, la disuguaglianza triangolare la 20, il secondo criterio la 26. Nel Medioevo la proposizione 5 era chiamata *pons asinorum*, «il ponte degli asini»: secondo una spiegazione diffusa, la figura usata da Euclide, con i lati prolungati, ricorda un ponte, e il teorema era considerato il primo vero ostacolo per gli studenti. L'idea di confrontare un triangolo con sé stesso «letto al contrario», che hai appena visto nel teorema inverso, è antica: il commentatore Proclo (V secolo d.C.) riferisce che Pappo di Alessandria la usò per dimostrare in poche righe la proposizione 5.

13.3.3 Il terzo criterio (LLL)

Con il teorema del triangolo isoscele possiamo finalmente dimostrare il criterio che spiega la rigidità dei telai triangolari.

IN SINTESI

Teorema · Terzo criterio di congruenza (LLL). Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti i tre lati, allora sono congruenti.

Ipotesi: $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $CA \cong C'A'$. **Tesi:** $ABC \cong A'B'C'$.

Dimostrazione. L'idea è «portare» il triangolo $A'B'C'$ accanto ad ABC, dall'altra parte del lato AB, e usare due triangoli isosceli (figura 13.5).

1. Nel semipiano di origine AB che non contiene C, tracciamo la semiretta di origine A che forma con AB un angolo congruente a $\angle B'A'C'$ *(postulato 10)*, e su di essa il punto D tale che $AD \cong A'C'$ *(postulato 9)*.

2. I triangoli ABD e $A'B'C'$ hanno $AB \cong A'B'$ *(ipotesi)*, $AD \cong A'C'$ e $\angle BAD \cong \angle B'A'C'$ *(costruzione)*: quindi $ABD \cong A'B'C'$ *(primo criterio)*, e in particolare $BD \cong B'C'$.
3. Ne segue $AD \cong A'C' \cong AC$ e $BD \cong B'C' \cong BC$ *(ipotesi e proprietà transitiva)*.
4. I punti C e D stanno in semipiani opposti rispetto alla retta AB, quindi il segmento CD la interseca in un punto K *(postulato 7)*. Consideriamo il caso della figura, in cui K è interno al segmento AB.
5. Il triangolo ACD è isoscele ($AC \cong AD$), quindi $\angle ACD \cong \angle ADC$ *(teorema del triangolo isoscele)*. Anche BCD è isoscele ($BC \cong BD$), quindi $\angle BCD \cong \angle BDC$.
6. Sommando: $\angle ACD + \angle DCB \cong \angle ADC + \angle CDB$ *(postulato 11)*, cioè $\angle ACB \cong \angle ADB$.
7. I triangoli ACB e ADB hanno $AC \cong AD$, $CB \cong DB$ e gli angoli compresi congruenti *(punto 6)*: quindi $ABC \cong ABD$ *(primo criterio)*.
8. Poiché $ABD \cong A'B'C'$ *(punto 2)*, per la proprietà transitiva $ABC \cong A'B'C'$.

c.v.d. Se K coincide con A o con B, basta un solo triangolo isoscele; se K cade fuori dal segmento AB, al punto 6 si sottrae invece di sommare. I ragionamenti sono analoghi e li tralasciamo.

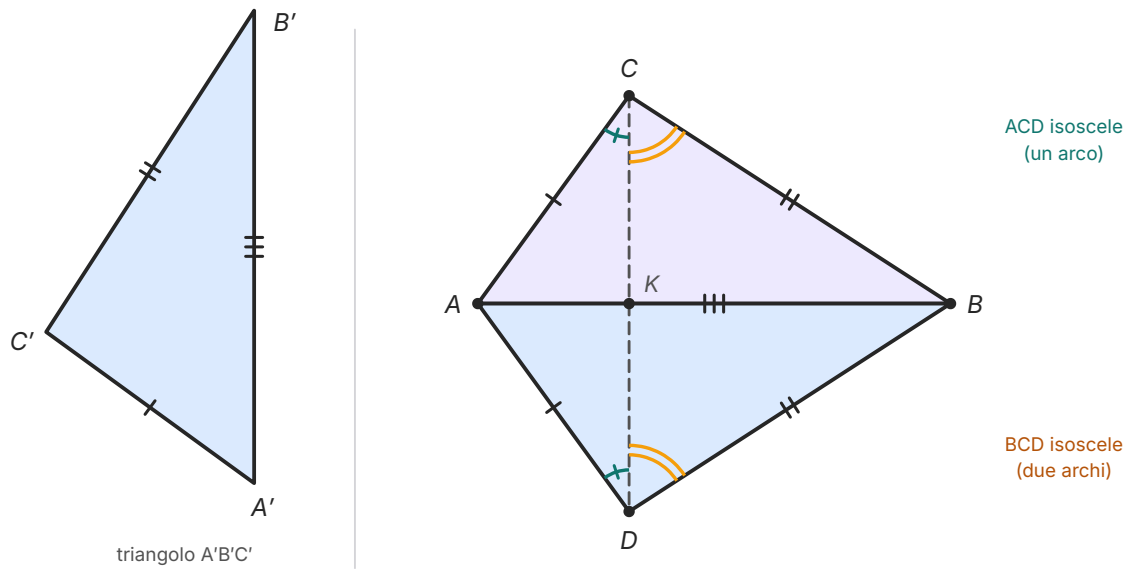


Figura 13.5 La dimostrazione del terzo criterio. A sinistra il triangolo $A'B'C'$; a destra il triangolo ABD, costruito congruente ad $A'B'C'$ dall'altra parte di AB. Le tacche mostrano $AC \cong AD$ e $BC \cong BD$: i triangoli ACD e BCD sono isosceli, e i loro angoli alla base (un arco, due archi) sono congruenti.

COLLEGAMENTI

Perché i ponti sono fatti di triangoli. Il terzo criterio dice che, fissate le lunghezze dei tre lati, il triangolo è determinato: i suoi angoli non possono cambiare. Una struttura fatta di aste unite da cerniere è quindi indeformabile se è suddivisa in triangoli. Un quadrilatero con i lati fissati, invece, può cambiare i propri angoli. È il motivo per cui negli scaffali si avvita una diagonale sul retro, i cancelli di legno hanno una traversa obliqua e le travi reticolari dei ponti e dei capannoni (le *travature reticolari* studiate in ingegneria) sono formate da triangoli. In fisica, le forze lungo le aste di un triangolo si calcolano proprio sfruttando questa rigidità.

13.3.4 Che cosa non è un criterio

I tre criteri usano sempre almeno un lato e scelgono con cura la posizione degli elementi. Due «criteri» che sembrano plausibili sono invece falsi, e lo si mostra con un **controesempio**.

ERRORE FREQUENTE

Tre angoli non bastano (AAA). Due triangoli equilateri, uno di lato 2 cm e uno di lato 5 cm, hanno gli angoli ordinatamente congruenti ma non sono congruenti: hanno la stessa forma, non la stessa grandezza. (Di figure con la stessa forma parlerai nel secondo anno, studiando la similitudine.)

Due lati e un angolo non compreso non bastano (LLA). Disegna un segmento AB di 8 cm e, in B, una semiretta che formi con BA un angolo di 30°. Puntando il compasso in A con apertura 5 cm, l'arco taglia la semiretta in *due* punti C_1 e C_2. I triangoli ABC_1 e ABC_2 hanno AB in comune, $AC_1 \cong AC_2$ e l'angolo in B in comune, ma non sono congruenti: uno è molto più «largo» dell'altro. L'angolo di 30° non è compreso tra i lati noti, e il primo criterio non si applica.

13.4 Il teorema dell'angolo esterno

Se misuri gli angoli di un triangolo qualsiasi con il goniometro, noterai che ogni angolo esterno è più grande dei due angoli interni lontani da esso, cioè non adiacenti. Questo fatto si può dimostrare usando soltanto il primo criterio: non serve il postulato delle parallele, che introdurremo solo nel capitolo 14.

IN SINTESI

Teorema dell'angolo esterno. In ogni triangolo, ciascun angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni non adiacenti a esso.

Ipotesi: ABC triangolo; D sul prolungamento di BC oltre C. **Tesi:** $\angle ACD > \angle BAC$ e $\angle ACD > \angle ABC$.

Dimostrazione. Prima parte: $\angle ACD > \angle BAC$ (figura 13.6b).

1. Sia M il punto medio di AC *(postulato 13)*. Tracciamo la semiretta BM e, sul suo prolungamento oltre M, prendiamo il punto E tale che $ME \cong BM$ *(postulato 9)*.
2. Confrontiamo i triangoli ABM e CEM: $AM \cong MC$ *(definizione di punto medio)*, $BM \cong ME$ *(costruzione)*, $\angle AMB \cong \angle CME$ *(opposti al vertice)*. Quindi $ABM \cong CEM$ *(primo criterio)*.
3. Gli angoli opposti ai lati congruenti BM e ME sono congruenti: $\angle BAM \cong \angle MCE$, cioè $\angle BAC \cong \angle ACE$.
4. Il punto E sta dalla parte di A rispetto alla retta BC e dalla parte opposta a B rispetto alla retta AC: la semiretta CE è quindi interna all'angolo $\angle ACD$. Ne segue $\angle ACE < \angle ACD$ *(definizione di confronto tra angoli)*.
5. Dai punti 3 e 4: $\angle BAC < \angle ACD$.

Seconda parte: $\angle ACD > \angle ABC$. Si ripete lo stesso ragionamento partendo dal punto medio N di BC e prolungando AN: si ottiene che $\angle ABC$ è minore dell'altro angolo esterno in C, quello formato da CB e dal prolungamento di AC. Ma i due angoli esterni in C sono congruenti, perché opposti al vertice; quindi $\angle ABC < \angle ACD$. c.v.d.

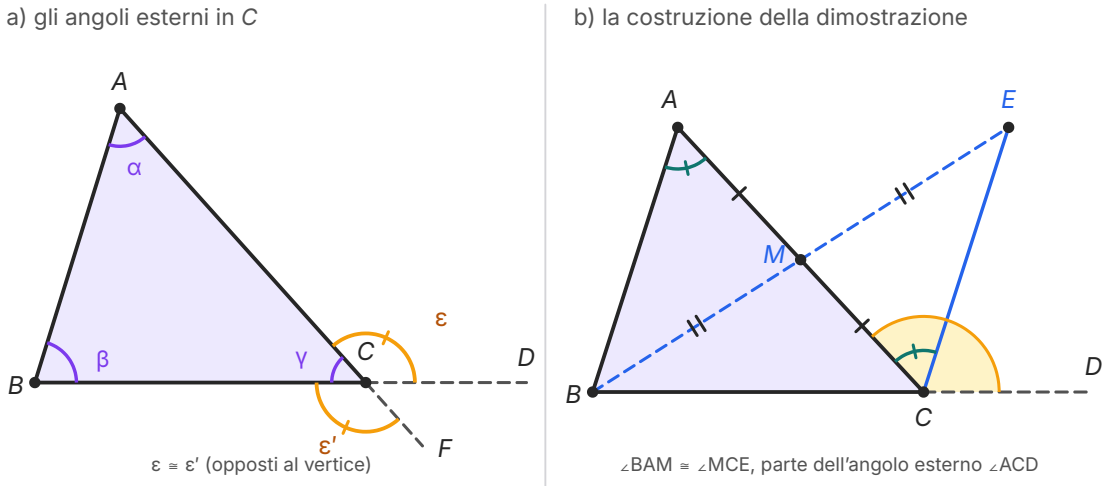


Figura 13.6 a) In ogni vertice ci sono due angoli esterni, ε ed ε′, congruenti perché opposti al vertice; ciascuno è supplementare dell'angolo interno adiacente γ. b) La costruzione della dimostrazione: M è il punto medio di AC e $ME \cong BM$. I triangoli ABM e CEM sono congruenti, quindi $\angle BAM \cong \angle MCE$ (archi verdi); l'angolo $\angle MCE$ è una parte dell'angolo esterno $\angle ACD$ (in giallo).

13.4.1 Conseguenze

Il teorema ha conseguenze immediate, che giustificano la classificazione del paragrafo 13.1.

Corollario 1. In ogni triangolo la somma di due angoli interni qualsiasi è minore di un angolo piatto. Infatti, se ε è l'angolo esterno in C, si ha γ + ε = angolo piatto (sono adiacenti) e α < ε

(teorema): quindi $\alpha + \gamma$ è minore dell'angolo piatto. Lo stesso vale per $\beta + \gamma$ e, usando un altro vertice, per $\alpha + \beta$.

Corollario 2. Un triangolo ha al più un angolo retto o ottuso; gli altri due angoli sono acuti. Infatti, se due angoli fossero ciascuno retto o ottuso, la loro somma sarebbe almeno un angolo piatto, contro il corollario 1. In particolare, in un triangolo rettangolo i due angoli adiacenti all'ipotenusa sono acuti.

Corollario 3. Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono acuti: sono congruenti, e non possono essere entrambi retti o ottusi.

> **DA RICORDARE**
>
> In questo capitolo sappiamo solo che l'angolo esterno è *maggiore* di ciascun angolo interno non adiacente (forma debole del teorema). Nel capitolo 14, con il postulato delle parallele, dimostreremo la forma forte: l'angolo esterno è *congruente alla somma* dei due interni non adiacenti, e la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto (180°). Fino ad allora **non puoi usare** nelle dimostrazioni il fatto che gli angoli di un triangolo sommano a 180°, anche se lo conosci dalla scuola media.

13.5 Disuguaglianze nei triangoli

13.5.1 Lato maggiore, angolo maggiore

Il teorema del triangolo isoscele dice che a lati congruenti si oppongono angoli congruenti. Che cosa succede se due lati sono diversi? L'intuizione suggerisce che il lato più lungo stia di fronte all'angolo più ampio: è proprio così.

> **IN SINTESI**
>
> **Teorema.** In un triangolo, a lato maggiore si oppone angolo maggiore. **Teorema inverso.** In un triangolo, ad angolo maggiore si oppone lato maggiore.
>
> **Ipotesi:** $AC > AB$. **Tesi:** $\angle ABC > \angle ACB$. (Inverso: dall'ipotesi $\angle ABC > \angle ACB$ si ricava $AC > AB$.)

Dimostrazione. Usiamo la figura 13.7a.

1. Poiché $AB < AC$, sul lato AC esiste un punto D, interno al segmento, tale che $AD \cong AB$ *(postulato 9 e definizione di confronto tra segmenti)*.
2. Il triangolo ABD è isoscele sulla base BD, quindi $\angle ABD \cong \angle ADB$ *(teorema del triangolo isoscele)*.
3. Il punto D è interno al lato AC, quindi la semiretta BD è interna all'angolo $\angle ABC$: $\angle ABC > \angle ABD$.
4. L'angolo $\angle ADB$ è un angolo esterno del triangolo BDC (è adiacente a $\angle BDC$), quindi è maggiore dell'angolo interno non adiacente $\angle DCB$ *(teorema dell'angolo esterno)*: $\angle ADB > \angle ACB$.

5. Mettendo insieme: $\angle ABC > \angle ABD \cong \angle ADB > \angle ACB$, quindi $\angle ABC > \angle ACB$.

c.v.d. Il teorema inverso si dimostra per assurdo. Supponiamo $\angle ABC > \angle ACB$. Per i due segmenti AC e AB ci sono tre possibilità: se fosse $AC \cong AB$, il triangolo sarebbe isoscele e avremmo $\angle ABC \cong \angle ACB$; se fosse $AC < AB$, per il teorema appena dimostrato avremmo $\angle ABC < \angle ACB$. Entrambi i casi contraddicono l'ipotesi: resta solo $AC > AB$. c.v.d.

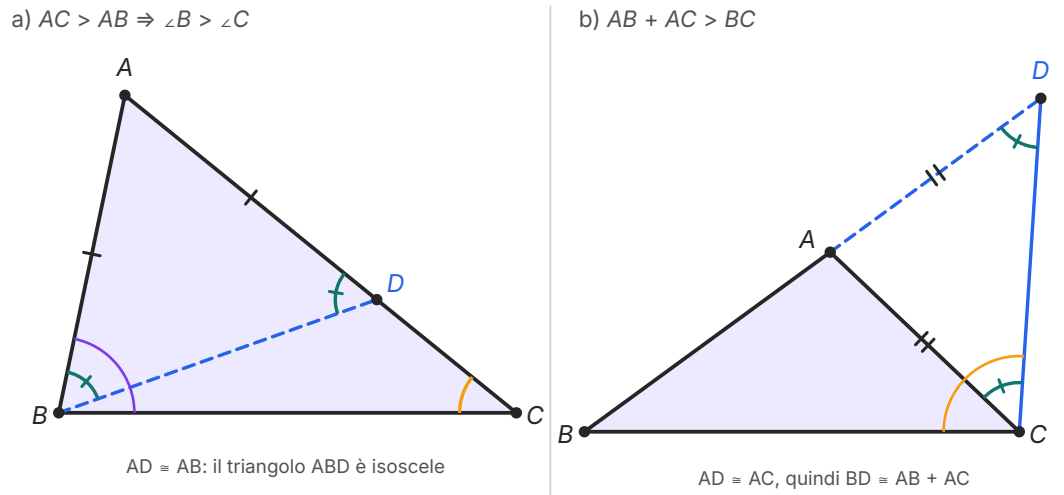


Figura 13.7 Le costruzioni per le disuguaglianze. a) Con $AD \cong AB$ il triangolo ABD è isoscele (archi verdi congruenti); l'angolo in B (viola) contiene $\angle ABD$, mentre $\angle ADB$ è esterno al triangolo BDC e supera l'angolo in C (arancione). b) Prolungando BA con $AD \cong AC$ si ottiene $BD \cong AB + AC$; nel triangolo BCD l'angolo in C (arancione) supera l'angolo in D.

Conseguenze. In un triangolo rettangolo l'angolo retto è il maggiore (gli altri due sono acuti): quindi *l'ipotenusa è il lato maggiore*, maggiore di ciascun cateto. Allo stesso modo, in un triangolo ottusangolo il lato opposto all'angolo ottuso è il maggiore. E per ordinare gli angoli di un triangolo di cui conosci i lati, basta ordinare i lati: con $AB = 8$ cm, $BC = 5$ cm e $CA = 11$ cm, l'angolo maggiore è $\angle B$ (opposto a CA) e il minore è $\angle A$ (opposto a BC).

13.5.2 La disuguaglianza triangolare

Da casa tua a scuola ci sono 900 m in linea d'aria; passando dal bar per un caffè, il percorso non può che allungarsi. Questa esperienza quotidiana è un teorema.

IN SINTESI

Teorema · Disuguaglianza triangolare. In ogni triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.

Ipotesi: ABC triangolo. **Tesi:** $BC < AB + AC$ (e analogamente per gli altri lati); se $AB > AC$, $BC > AB - AC$.

Dimostrazione. Usiamo la figura 13.7b.

1. Prolunghiamo il lato BA oltre A e prendiamo il punto D tale che $AD \cong AC$ *(postulato 9)*. Poiché A è interno a BD, si ha $BD \cong BA + AD \cong AB + AC$ *(postulato 11)*.
2. Il triangolo ACD è isoscele ($AD \cong AC$), quindi $\angle ADC \cong \angle ACD$ *(teorema del triangolo isoscele)*.
3. Il punto A è interno al segmento BD, quindi la semiretta CA è interna all'angolo $\angle BCD$: $\angle BCD > \angle ACD \cong \angle ADC$.
4. Nel triangolo BCD l'angolo in C è quindi maggiore dell'angolo in D. Al lato opposto all'angolo maggiore corrisponde il lato maggiore *(teorema inverso del paragrafo 13.5.1)*: $BD > BC$.
5. Dai punti 1 e 4: $BC < AB + AC$.

Per la seconda parte, applichiamo quanto appena dimostrato al lato AB: $AB < BC + AC$. Togliendo AC da entrambi i membri si ottiene $AB - AC < BC$. c.v.d.

In simboli, con le misure a, b, c dei lati: $|b - c| < a < b + c$, e lo stesso per gli altri lati. Il teorema ha un utilissimo «inverso pratico», che accettiamo (si giustifica con la costruzione con riga e compasso della figura 13.8): *tre lunghezze positive sono le misure dei lati di un triangolo se e solo se ciascuna è minore della somma delle altre due*. In pratica basta controllare la lunghezza maggiore: se è minore della somma delle altre due, le altre due disuguaglianze sono automaticamente vere. Se invece la lunghezza maggiore è *uguale* alla somma delle altre, i tre punti risultano allineati: si parla di **triangolo degenere**, che non è un triangolo.

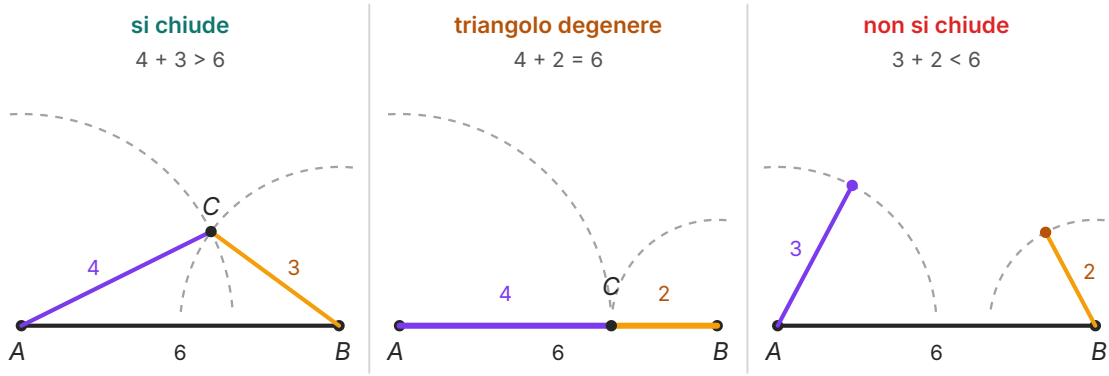


Figura 13.8 Costruire un triangolo con un lato AB di 6 unità e gli altri due lati assegnati. Il terzo vertice deve stare sull'arco di centro A e sull'arco di centro B. Con 4 e 3 gli archi si incontrano e il triangolo si chiude; con 4 e 2 si toccano in un punto di AB (triangolo degenere); con 3 e 2 non si incontrano.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Due lati di un triangolo misurano 7 cm e 12 cm. a) Quali valori può assumere la misura x del terzo lato? b) Se x è un numero intero di centimetri e il triangolo è isoscele, quanto vale il perimetro? c) In quest'ultimo caso, qual è l'angolo minore?

a) Il terzo lato deve essere minore della somma e maggiore della differenza degli altri due: $12 - 7 < x < 12 + 7$, cioè $5 < x < 19$. In termini di disequazioni (capitolo 11) è il sistema $x < 19$, $12 < 7 + x$, $7 < 12 + x$; la terza disequazione è sempre vera per $x > 0$.

b) Isoscele significa che x vale 7 oppure 12. Entrambi i valori stanno nell'intervallo $]5; 19[$: ci sono due triangoli, con lati 7, 7, 12 (perimetro 26 cm) e 7, 12, 12 (perimetro 31 cm).

c) L'angolo minore è opposto al lato minore. Nel triangolo 7, 12, 12 è l'angolo opposto al lato di 7 cm, cioè l'angolo al vertice. Nel triangolo 7, 7, 12 il lato minore compare due volte: i due angoli minori sono i due angoli alla base, opposti ai lati di 7 cm, mentre l'angolo al vertice, opposto al lato di 12 cm, è il maggiore.

13.6 Come si scrive una dimostrazione

13.6.1 Lo schema

Hai visto ormai molte dimostrazioni. Tutte seguono lo stesso schema, che conviene applicare con disciplina anche negli esercizi.

1. **La figura.** Disegna una figura grande, chiara e *generica*: se il testo parla di un triangolo qualsiasi, non disegnarlo isoscele o rettangolo, perché rischieresti di «vedere» proprietà che

non valgono in generale. Segna con tacche e archi gli elementi congruenti per ipotesi, con colori diversi le costruzioni aggiuntive.

2. **Ipotesi e tesi.** Scrivile in simboli, separate. L'ipotesi è tutto ciò che il testo ti dà; la tesi è ciò che devi provare, e nient'altro.
3. **Il piano.** Chiediti: quali triangoli contengono gli elementi della tesi? Di questi triangoli, che cosa so? Spesso bisogna lavorare all'indietro, dalla tesi verso l'ipotesi, e talvolta aggiungere un segmento (come nel teorema dell'angolo esterno).
4. **La catena.** Scrivi i passaggi in ordine; accanto a ognuno, tra parentesi, la giustificazione: un'ipotesi, una costruzione, una definizione, un postulato, un teorema già dimostrato.
5. **La conclusione.** L'ultimo passaggio deve coincidere con la tesi; chiudi con «c.v.d.» (come volevasi dimostrare).

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Nel triangolo isoscele ABC di base BC, siano M il punto medio di AC e N il punto medio di AB. Dimostra che le mediane BM e CN sono congruenti.

Ipotesi: $AB \cong AC$; $AN \cong NB$; $AM \cong MC$. **Tesi:** $BM \cong CN$.

Piano. BM è lato del triangolo ABM, CN del triangolo ACN. Questi triangoli hanno l'angolo $\angle A$ in comune: proviamo con il primo criterio. La dimostrazione è scritta nella tabella 13.1, nella forma a due colonne.

Tabella 13.1 La dimostrazione dell'esempio svolto, a due colonne: a sinistra le affermazioni, a destra le giustificazioni.

Affermazione	Giustificazione
1. $AB \cong AC$	ipotesi
2. $AN \cong AM$	metà di segmenti congruenti (punto 1, definizione di punto medio, postulato 11)
3. $\angle BAM \cong \angle CAN$	sono lo stesso angolo $\angle A$ (proprietà riflessiva)
4. $ABM \cong ACN$	primo criterio: punti 1, 2, 3 (l'angolo è compreso)
5. $BM \cong CN$	lati omologhi: opposti all'angolo $\angle A$ nei due triangoli. c.v.d.

Osserva il punto 2: «metà di segmenti congruenti sono congruenti» è il postulato 11, che in una dimostrazione scritta per esteso va citato. Nota anche che non abbiamo usato in alcun modo l'aspetto della figura: il ragionamento sarebbe valido anche per un triangolo isoscele molto alto o molto schiacciato.

13.6.2 Gli errori di ragionamento più comuni

Una dimostrazione sbagliata spesso «sembra» funzionare. Ecco gli errori da cui guardarsi.

- **Prendere la figura per una prova.** «Si vede che AH è perpendicolare a BC» non è una giustificazione: un disegno può essere impreciso, o rappresentare un caso particolare. La figura serve a trovare l'idea, la dimostrazione a garantirla.
- **Usare la tesi.** Se in un passaggio usi ciò che devi dimostrare, il ragionamento gira in tondo (si chiama **circolo vizioso**). Capita spesso quando la tesi è scritta nella figura come se fosse un'ipotesi: segna con le tacche solo ciò che è dato.
- **Applicare un criterio con gli elementi sbagliati.** Due lati e un angolo *non compreso* non bastano (paragrafo 13.3.4); nel secondo criterio gli angoli devono essere adiacenti al lato.
- **Confondere un teorema con il suo inverso.** Il **teorema inverso** si ottiene scambiando ipotesi e tesi, e va dimostrato a parte, perché la proposizione inversa può essere falsa: «se un triangolo è equilatero allora è isoscele» è vero, l'inverso «se è isoscele allora è equilatero» è falso. Il **teorema contronominale**, che nega e scambia ipotesi e tesi («se non è isoscele, allora non è equilatero»), è invece sempre equivalente al teorema di partenza (capitolo 5).
- **Usare risultati non ancora dimostrati.** In questo capitolo, per esempio, non si può usare la somma degli angoli di un triangolo, né il teorema di Pitagora: la catena deve poggiare solo su ciò che la precede.
- **Verificare invece di dimostrare.** Misurare gli angoli di tre triangoli disegnati non prova che la proprietà valga per tutti i triangoli. Un esempio può bastare a *smentire* un'affermazione generale (controesempio), mai a dimostrarla.

Mettiamo alla prova questi criteri su un caso concreto. **Trova l'errore.** «Teorema: in un triangolo, se la mediana AM è anche altezza, il triangolo è isoscele. Dimostrazione: i triangoli ABM e ACM hanno AM in comune e $AB \cong AC$; inoltre gli angoli in M sono retti, quindi i triangoli sono congruenti e $\angle B \cong \angle C$.»

Soluzione. L'errore è nel secondo passaggio: $AB \cong AC$ è proprio la tesi (il triangolo è isoscele), usata come se fosse un'ipotesi. Il teorema però è vero, e la dimostrazione corretta usa la mediana: $BM \cong MC$ (M punto medio), AM in comune, $\angle AMB \cong \angle AMC$ (retti, per ipotesi). L'angolo retto è compreso tra BM e AM e tra CM e AM, quindi $ABM \cong ACM$ per il primo criterio, e $AB \cong AC$ come lati omologhi (opposti agli angoli retti). c.v.d.

SINTESI

- Un triangolo è il poligono con tre lati. Ogni lato è opposto a un angolo e adiacente agli altri due; l'angolo esterno è adiacente a un angolo interno e ne è il supplementare.
- Rispetto ai lati un triangolo è scaleno, isoscele (almeno due lati congruenti) o equilatero; rispetto agli angoli è acutangolo, rettangolo o ottusangolo.
- Bisettrice, mediana e altezza relative a un vertice sono in generale segmenti diversi; in un triangolo ottusangolo due altezze cadono fuori dal triangolo.
- In triangoli congruenti gli elementi omologhi sono congruenti: a lati congruenti si oppongono angoli congruenti.
- Primo criterio (LAL): due lati e l'angolo compreso; in questo libro è un postulato (postulato 14). Secondo criterio (ALA): un lato e i due angoli adiacenti. Terzo criterio (LLL): i tre lati. Il secondo e il terzo si dimostrano.
- Tre angoli (AAA) o due lati e un angolo non compreso (LLA) non garantiscono la congruenza.
- In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti, e la bisettrice dell'angolo al vertice è anche mediana e altezza. Vale l'inverso: un triangolo con due angoli congruenti è isoscele.
- Un triangolo è equilatero se e solo se è equiangolo.
- Teorema dell'angolo esterno (forma debole): ogni angolo esterno è maggiore di ciascun angolo interno non adiacente. Quindi un triangolo ha al più un angolo retto o ottuso.
- A lato maggiore si oppone angolo maggiore, e viceversa; l'ipotenusa è il lato maggiore di un triangolo rettangolo.
- Disuguaglianza triangolare: $|b - c| < a < b + c$. Tre lunghezze formano un triangolo se la maggiore è minore della somma delle altre due.
- Una dimostrazione: figura generica, ipotesi e tesi in simboli, catena di passaggi ciascuno giustificato, c.v.d.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Un triangolo ha i lati di 7 cm, 7 cm e 10 cm. Rispetto ai lati è:

   A. scaleno

   B. equilatero

   C. isoscele

   D. non esiste

2. ● La mediana relativa al lato BC del triangolo ABC congiunge A con:
   A. il piede della perpendicolare a BC
   B. il punto in cui la bisettrice di $\angle A$ incontra BC
   C. il punto medio di BC
   D. il punto medio di AB

3. ● Quale delle seguenti condizioni *non* garantisce che due triangoli siano congruenti?
   A. due lati e l'angolo compreso ordinatamente congruenti
   B. i tre angoli ordinatamente congruenti
   C. i tre lati ordinatamente congruenti
   D. un lato e i due angoli adiacenti ordinatamente congruenti

4. ●● Quale terna può essere formata dalle misure dei lati di un triangolo?
   A. 2 cm, 3 cm, 6 cm
   B. 4 cm, 4 cm, 8 cm
   C. 1 cm, 2 cm, 4 cm
   D. 5 cm, 6 cm, 10 cm

5. ●● Nel triangolo ABC si ha $AB = 6$ cm, $BC = 9$ cm, $CA = 7$ cm. L'angolo maggiore è:
   A. $\angle A$
   B. $\angle B$
   C. $\angle C$
   D. non si può stabilire senza goniometro

6. ●● Un angolo esterno di un triangolo misura 80°. Allora:
   A. ciascuno dei due angoli interni non adiacenti è minore di 80°
   B. l'angolo interno adiacente misura 80°
   C. il triangolo è acutangolo
   D. uno dei due angoli interni non adiacenti può essere retto

7. ●● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Ogni triangolo equilatero è isoscele. b) Un triangolo può avere due angoli ottusi. c) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è il lato maggiore. d) Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti due lati e un angolo, sono congruenti. e) L'altezza di un triangolo cade sempre all'interno del triangolo.

8. ● Completa. a) In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono ... . b) Un angolo esterno di un triangolo è ... di ciascun angolo interno non adiacente. c) In un triangolo, a lato maggiore si oppone ... . d) Ogni lato di un triangolo è minore della ... degli altri due e maggiore della loro ... .

9. ● Nel triangolo ABC indica: a) il lato opposto all'angolo $\angle B$; b) l'angolo opposto al lato AB; c) gli angoli adiacenti al lato BC; d) l'angolo compreso tra i lati AB e BC.

Calcolare

10. ● Stabilisci quali terne possono essere le misure (in cm) dei lati di un triangolo: a) 3, 4, 5; b) 2, 5, 8; c) 6, 6, 11; d) 1, 5, 1; e) 2,5; 3,5; 6.

11. ● Due lati di un triangolo misurano 5 cm e 9 cm. a) Quali valori può avere la misura del terzo lato? b) Quanti sono i valori interi possibili?

12. ●● a) Un triangolo isoscele ha perimetro 32 cm e base 10 cm: quanto misura ciascun lato obliquo? b) In un triangolo isoscele ogni lato obliquo è i $\frac{3}{2}$ della base e il perimetro è 40 cm: trova i lati. c) Esiste un triangolo isoscele con i lati obliqui di 6 cm e perimetro 30 cm?

13. ●● Un triangolo isoscele ha due lati che misurano 4 cm e 9 cm. Quale dei due è la base? Calcola il perimetro.

14. ●● a) Nel triangolo ABC si ha $AB = 8$ cm, $BC = 5$ cm, $CA = 11$ cm: ordina gli angoli dal minore al maggiore. b) Nel triangolo PQR si ha $\angle P = 50°$, $\angle Q = 70°$, $\angle R = 60°$: ordina i lati dal minore al maggiore.

15. ●● Nel triangolo ABC l'angolo esterno in C misura 115°. a) Quanto misura γ? b) Che cosa puoi dire di α e di β? c) Può essere $\alpha = 120°$? Perché?

16. ●● Il triangolo ABC è isoscele sulla base BC, con $AB = 2x + 3$, $AC = 5x - 6$, $BC = x + 4$ (misure in cm). Trova x, i lati e il perimetro, e verifica la disuguaglianza triangolare.

17. ●● Un triangolo equilatero ha due lati che misurano $3x - 1$ e $x + 5$ (in cm). Trova x e il perimetro.

18. ●●● I lati di un triangolo misurano x, $x + 2$ e 10 (in cm). a) Per quali valori di x il triangolo esiste? b) Per quali valori esiste e ha perimetro minore di 30 cm?

19. ● Costruisci con riga e compasso un triangolo con lati di 7 cm, 5 cm e 4 cm: descrivi i passaggi e verifica che la terna rispetta la disuguaglianza triangolare. Qual è il suo angolo maggiore?

20. ●● Disegna un triangolo ottusangolo e traccia le sue tre altezze. Quante cadono fuori dal triangolo, e da quali vertici partono? Che cosa succede in un triangolo rettangolo?

Dimostrare e argomentare

21. ●● Il triangolo ABC è isoscele sulla base BC. Prolunga la base oltre B e oltre C di due segmenti congruenti $BD \cong CE$. Dimostra che $AD \cong AE$.

22. ●● Nel triangolo isoscele ABC di base BC, le bisettrici degli angoli alla base incontrano i lati opposti in D (su AC) ed E (su AB). Dimostra che $BD \cong CE$.

23. ●● I triangoli ABC e $A'B'C'$ sono congruenti; AM e $A'M'$ sono le mediane relative ai lati BC e $B'C'$. Dimostra che $AM \cong A'M'$.

24. ●● Sulla bisettrice di un angolo di vertice O scegli un punto P; sui due lati dell'angolo prendi i punti A e B con $OA \cong OB$. Dimostra che $PA \cong PB$.

25. ●● Trova l'errore. Marta scrive: «I triangoli ABC e $A'B'C'$ hanno $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\angle B \cong \angle B'$; quindi sono congruenti per il primo criterio.» Spiega perché il ragionamento non è valido e quale figura mostra che la conclusione può essere falsa.

26. ●● Spiega perché in un triangolo rettangolo a) gli altri due angoli sono acuti; b) l'ipotenusa è maggiore di ciascun cateto. Cita i teoremi che usi.

27. ●●● Dimostra che se in un triangolo ABC la mediana AM è anche bisettrice di $\angle A$, allora il triangolo è isoscele. (Suggerimento: prolunga AM oltre M di un segmento $MD \cong AM$ e confronta i triangoli ABM e DCM.)

Problemi

28. ● Uno scaffale a giorno, formato da montanti e ripiani, oscilla lateralmente. Il venditore consiglia di avvitare una traversa diagonale sul retro. Spiega, con il terzo criterio di congruenza, perché la traversa rende lo scaffale stabile.

29. ●● Per misurare la distanza tra due alberi A e B separati da uno stagno, Luca pianta un paletto in un punto O da cui raggiunge entrambi gli alberi a piedi. Prolunga AO oltre O fino al punto A' con $OA' \cong OA$, e BO fino a B' con $OB' \cong OB$. Misura $A'B' = 48$ m. Quanto distano gli alberi? Giustifica la risposta.

30. ●● Tre paesi A, B, C distano in linea d'aria $AB = 12$ km e $BC = 7$ km. a) Quali valori può avere la distanza AC? (I paesi potrebbero anche essere allineati.) b) Un cartello dice che da A a C ci sono 4 km in linea d'aria: è possibile?

31. ●● La capriata di un tetto è un triangolo isoscele formato da due puntoni di 4,5 m e da una catena orizzontale (la base) di 7,2 m. Un montante verticale (il *monaco*) collega il colmo al punto medio della catena. a) Quanti metri di trave servono per il triangolo? b) Spiega perché il monaco è perpendicolare alla catena e divide a metà l'angolo al colmo.

32. ●● Un falegname ha tre listelli lunghi 30 cm, 45 cm e 80 cm e vuole costruire una cornice triangolare usandoli come lati. a) Può farlo? b) Di quanto deve accorciare il listello più lungo perché la cornice si possa chiudere?

Verso la verifica

33. ●● Nel triangolo isoscele ABC di base BC prendi D su AB ed E su AC con $AD \cong AE$. Dimostra che $BE \cong CD$ e che $\angle ABE \cong \angle ACD$.

34. ●● I lati di un triangolo misurano $2x - 1$, $x + 3$ e $3x - 4$ (in cm). Trova per quali valori di x il triangolo è isoscele e, per ciascuno, scrivi i lati e verifica che il triangolo esiste.

35. ●●● Sfida. Nel triangolo ABC, sia AM la mediana relativa a BC. Dimostra che $2\,AM < AB + AC$. (Suggerimento: prolunga AM oltre M di $MD \cong AM$, dimostra che $CD \cong AB$ e applica la disuguaglianza triangolare al triangolo ACD.)

PER APPROFONDIRE

- [EUC] Euclide, *Elementi*, libro I: le proposizioni 4–26, da confrontare con le dimostrazioni di questo capitolo.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Euclide, gli *Elementi* e i commentatori antichi, da Pappo a Proclo.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: come si cerca il piano di una dimostrazione lavorando all'indietro dalla tesi.
- [CR] Courant e Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le costruzioni con riga e compasso e il metodo assiomatico.

Glossario del capitolo

Altezza di un triangolo
Segmento condotto da un vertice perpendicolarmente alla retta del lato opposto; il suo estremo su quella retta è il piede.

Angolo esterno
Angolo adiacente a un angolo interno, formato da un lato e dal prolungamento dell'altro lato uscente dallo stesso vertice; è supplementare dell'angolo interno adiacente.

Bisettrice di un triangolo
Segmento della bisettrice di un angolo interno compreso tra il vertice e il lato opposto.

Circolo vizioso
Errore di ragionamento in cui si usa, come se fosse già provata, la tesi che si deve dimostrare.

Elementi omologhi
In due triangoli congruenti, lati e angoli che si corrispondono nella sovrapposizione; a lati omologhi si oppongono angoli omologhi.

Mediana di un triangolo
Segmento che congiunge un vertice con il punto medio del lato opposto.

Primo criterio di congruenza (LAL)
Due triangoli con due lati e l'angolo compreso ordinatamente congruenti sono congruenti; in questo libro è il postulato 14.

Secondo criterio di congruenza (ALA)
Due triangoli con un lato e i due angoli a esso adiacenti ordinatamente congruenti sono congruenti.

Teorema dell'angolo esterno
In un triangolo ogni angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni non adiacenti (forma debole).

Teorema inverso
Proposizione ottenuta scambiando ipotesi e tesi di un teorema dato; non è automaticamente vera: va dimostrata a parte, e può anche essere falsa.

Terzo criterio di congruenza (LLL)
Due triangoli con i tre lati ordinatamente congruenti sono congruenti.

Triangolo
Poligono con tre lati, determinato da tre punti non allineati (i vertici).

Triangolo acutangolo
Triangolo con tutti e tre gli angoli acuti.

Triangolo degenere
Caso limite in cui un segmento è congruente alla somma degli altri due: i tre punti sono allineati e non formano un triangolo.

Triangolo equilatero
Triangolo con i tre lati congruenti; è anche equiangolo.

Triangolo isoscele
Triangolo con almeno due lati congruenti (i lati obliqui); il terzo lato è la base.

Triangolo ottusangolo
Triangolo con un angolo ottuso.

Triangolo rettangolo
Triangolo con un angolo retto; i lati che lo formano sono i cateti, il lato opposto è l'ipotenusa.

Triangolo scaleno
Triangolo con i tre lati a due a due non congruenti.

Soluzioni

1. C. Due lati sono congruenti (7 cm), quindi è isoscele; esiste, perché $10 < 7 + 7$.

2. C. La mediana congiunge un vertice con il punto medio del lato opposto. A descrive l'altezza, B la bisettrice.

3. B. Tre angoli congruenti non bastano: due triangoli equilateri di lati diversi hanno gli stessi angoli ma non sono congruenti. A, C, D sono i tre criteri.

4. D. $10 < 5 + 6 = 11$. Nelle altre terne il lato maggiore non è minore della somma degli altri due: $6 > 5$, $8 = 8$ (degenere), $4 > 3$.

5. A. Il lato maggiore è $BC = 9$ cm, opposto a $\angle A$; a lato maggiore si oppone angolo maggiore.

6. A. Per il teorema dell'angolo esterno ciascun interno non adiacente è minore di 80° (quindi D è falsa). L'interno adiacente misura $180° - 80° = 100°$: B è falsa, e il triangolo è ottusangolo, quindi C è falsa.

7. a) Vero (isoscele significa «almeno due lati congruenti»). b) Falso: la somma di due angoli interni è minore di un angolo piatto, quindi al più un angolo è ottuso. c) Vero: l'ipotenusa è opposta all'angolo retto, che è il maggiore. d) Falso: l'angolo deve essere compreso tra i due lati (LAL); con un angolo non compreso (LLA) i triangoli possono non essere congruenti. e) Falso: nei triangoli ottusangoli due altezze cadono fuori, sul prolungamento dei lati.

8. a) congruenti; b) maggiore; c) angolo maggiore; d) somma, differenza.

9. a) AC; b) $\angle C$ (cioè $\angle ACB$); c) $\angle B$ e $\angle C$; d) $\angle B$ (cioè $\angle ABC$).

10. a) Sì: $5 < 3 + 4$. b) No: $8 > 2 + 5 = 7$. c) Sì: $11 < 12$. d) No: $5 > 1 + 1$. e) No: $6 = 2{,}5 + 3{,}5$, triangolo degenere.

11. a) $9 - 5 < x < 9 + 5$, cioè $4 < x < 14$ (cm). b) I valori interi da 5 a 13: 9 valori.

12. a) $(32 - 10) : 2 = 11$ cm. b) Base b, lati obliqui $\frac{3}{2}b$: $b + 3b = 40$, $b = 10$ cm, lati obliqui 15 cm (esiste: $10 < 30$). c) No: la base sarebbe $30 - 12 = 18$ cm, ma $18 > 6 + 6$.

13. Se la base fosse 9 cm, i lati sarebbero 4, 4, 9, ma $9 > 4 + 4$: impossibile. Quindi la base è 4 cm, i lati obliqui 9 cm ($4 < 18$), perimetro 22 cm.

14. a) Angoli opposti: $BC = 5 \to \angle A$; $AB = 8 \to \angle C$; $CA = 11 \to \angle B$. Quindi $\angle A < \angle C < \angle B$. b) Lati opposti: $\angle P = 50° \to QR$; $\angle R = 60° \to PQ$; $\angle Q = 70° \to PR$. Quindi $QR < PQ < PR$.

15. a) $\gamma = 180° - 115° = 65°$ (supplementare). b) α e β sono entrambi minori di 115° (teorema dell'angolo esterno). c) No, perché $120° > 115°$.

16. $AB \cong AC$: $2x + 3 = 5x - 6$, $x = 3$. Lati $AB = AC = 9$ cm, $BC = 7$ cm; perimetro 25 cm. Esiste: $9 < 9 + 7$ e $7 < 18$.

17. $3x - 1 = x + 5$, $x = 3$; lato 8 cm, perimetro 24 cm.

18. a) Condizioni: $10 < x + x + 2$, cioè $x > 4$; $x + 2 < x + 10$ e $x < x + 12$ sono sempre vere. Quindi $x > 4$. b) Inoltre $2x + 12 < 30$, $x < 9$: $4 < x < 9$.

19. Si traccia $AB = 7$ cm; con centro A e apertura 5 cm si traccia un arco, con centro B e apertura 4 cm un altro arco; il loro punto d'incontro è C. La terna va bene: $7 < 5 + 4 = 9$. L'angolo maggiore è quello opposto al lato di 7 cm, cioè $\angle C$.

20. Cadono fuori due altezze, quelle che partono dai vertici dei due angoli acuti; l'altezza che parte dal vertice dell'angolo ottuso è interna. In un triangolo rettangolo le altezze relative ai cateti coincidono con i cateti stessi; l'altezza relativa all'ipotenusa è interna.

21. Ipotesi: $AB \cong AC$, $BD \cong CE$ (prolungamenti). Tesi: $AD \cong AE$. $\angle ABC \cong \angle ACB$ (triangolo isoscele); $\angle ABD$ e $\angle ACE$ sono loro supplementari (adiacenti), quindi congruenti (supplementari di angoli congruenti, capitolo 12). Nei triangoli ABD e ACE: $AB \cong AC$, $BD \cong CE$, $\angle ABD \cong \angle ACE$ compresi: congruenti per il

primo criterio, e $AD \cong AE$ (opposti agli angoli congruenti). c.v.d.

22. Triangoli DBC e ECB: BC in comune; $\angle DCB = \angle ACB \cong \angle ABC = \angle EBC$ (triangolo isoscele); $\angle DBC \cong \angle ECB$ perché metà di angoli congruenti (definizione di bisettrice, postulato 11). Il lato BC è adiacente a entrambe le coppie di angoli: per il secondo criterio $DBC \cong ECB$, quindi $BD \cong CE$ (opposti agli angoli congruenti $\angle DCB$ ed $\angle EBC$). c.v.d.

23. Dalla congruenza: $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $\angle B \cong \angle B'$. $BM \cong B'M'$ perché metà di segmenti congruenti (postulato 11). Nei triangoli ABM e $A'B'M'$: $AB \cong A'B'$, $BM \cong B'M'$, $\angle ABM \cong \angle A'B'M'$ compresi; primo criterio, quindi $AM \cong A'M'$. c.v.d.

24. Triangoli OAP e OBP: $OA \cong OB$ (ipotesi), OP in comune, $\angle AOP \cong \angle POB$ (definizione di bisettrice), angolo compreso. Primo criterio: $OAP \cong OBP$, quindi $PA \cong PB$ (opposti agli angoli congruenti in O). c.v.d.

25. L'angolo $\angle B$ non è compreso tra i lati AB e AC (l'angolo compreso è $\angle A$): il primo criterio non si applica. È il caso LLA, che non è un criterio: la costruzione del paragrafo 13.3.4 (AB = 8 cm, angolo di 30° in B, AC = 5 cm) dà due triangoli ABC_1 e ABC_2 non congruenti con quei dati.

26. a) Un triangolo ha al più un angolo retto o ottuso (corollario del teorema dell'angolo esterno: la somma di due angoli interni è minore di un piatto); poiché c'è già l'angolo retto, gli altri due sono acuti. b) L'angolo retto è quindi maggiore di ciascuno degli altri due; a angolo maggiore si oppone lato maggiore (teorema inverso del paragrafo 13.5.1), dunque l'ipotenusa è maggiore di ciascun cateto.

27. Prolunghiamo AM oltre M fino a D con $MD \cong AM$. Triangoli ABM e DCM: $BM \cong MC$ (mediana), $AM \cong MD$ (costruzione), $\angle AMB \cong \angle DMC$ (opposti al vertice); primo criterio, quindi $AB \cong DC$ e $\angle BAM \cong \angle CDM$. Per ipotesi $\angle BAM \cong \angle MAC$; allora $\angle CDA \cong \angle CAD$ (proprietà transitiva). Il triangolo ACD ha due angoli congruenti, quindi è isoscele (teorema inverso): $CA \cong CD$. Infine $AC \cong CD \cong AB$. c.v.d.

28. Traccia di risposta: un quadrilatero con i lati fissati può cambiare i suoi angoli (si «schiaccia»). La diagonale divide il rettangolo dello scaffale in due triangoli; un triangolo con i tre lati fissati è determinato (terzo criterio), quindi i suoi angoli non possono cambiare e lo scaffale non si deforma.

29. I triangoli AOB e $A'OB'$ hanno $OA \cong OA'$, $OB \cong OB'$ e $\angle AOB \cong \angle A'OB'$ (opposti al vertice, compresi): sono congruenti per il primo criterio, quindi $AB \cong A'B'$. Gli alberi distano 48 m.

30. a) Se i paesi formano un triangolo, $12 - 7 < AC < 12 + 7$; se sono allineati, $AC = 5$ oppure $AC = 19$. Quindi 5 km ≤ AC ≤ 19 km. b) No: 4 km è minore di 5 km.

31. a) $4{,}5 \cdot 2 + 7{,}2 = 16{,}2$ m (il triangolo esiste: $7{,}2 < 9$). b) Il monaco è la mediana relativa alla base del triangolo isoscele. Nel triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è anche mediana: poiché il punto medio della base è unico, la mediana coincide con quella bisettrice, che è anche altezza. Quindi il monaco è perpendicolare alla catena e divide a metà l'angolo al colmo. (In alternativa: i triangoli formati dal monaco con i due puntoni sono congruenti per il terzo criterio.)

32. a) No: $80 > 30 + 45 = 75$. b) Il listello più lungo deve diventare minore di 75 cm: va accorciato di più di 5 cm (con esattamente 5 cm si otterrebbe un triangolo degenere).

33. Triangoli ABE e ACD: $AB \cong AC$ (ipotesi), $AE \cong AD$ (ipotesi), $\angle A$ in comune, compreso tra i due lati in entrambi. Primo criterio: $ABE \cong ACD$. Quindi $BE \cong CD$ (opposti a $\angle A$) e $\angle ABE \cong \angle ACD$ (opposti ai lati congruenti AE e AD). c.v.d.

34. Tre casi. $2x - 1 = x + 3$: $x = 4$, lati 7, 7, 8 cm ($8 < 14$: esiste). $2x - 1 = 3x - 4$: $x = 3$, lati 5, 6, 5 cm ($6 < 10$: esiste). $x + 3 = 3x - 4$: $x = \frac{7}{2}$, lati 6; 6,5; 6,5 cm ($6{,}5 < 12{,}5$: esiste). In tutti i casi i lati sono positivi.

35. Prolunghiamo AM oltre M fino a D con $MD \cong AM$, quindi $AD \cong 2\,AM$. Triangoli ABM e DCM: $BM \cong MC$, $AM \cong MD$, $\angle AMB \cong \angle DMC$ (opposti al vertice): congruenti per il primo criterio, quindi $CD \cong AB$. Nel triangolo ACD la disuguaglianza triangolare dà $AD < AC + CD$, cioè $2\,AM < AC + AB$. (Il

triangolo *ACD* non è degenere: se *C* stesse sulla retta *AM*, questa coinciderebbe con la retta *BC* e *A* sarebbe allineato con *B* e *C*.) c.v.d.