CAPITOLO

12

Fondamenti della geometria euclidea

«Il punto è ciò che non ha parti.» — Euclide, Elementi, libro I, definizione 1

OBIETTIVI

1. Riconoscere la struttura di una teoria assiomatica: enti primitivi, postulati, definizioni, teoremi.
2. Usare correttamente i termini e i simboli di base: semiretta, segmento, semipiano, figura convessa e concava, angolo.
3. Distinguere angoli consecutivi, adiacenti e opposti al vertice; complementari, supplementari ed esplementari.
4. Confrontare, sommare e sottrarre segmenti e angoli tramite la congruenza; trasportarli con riga e compasso; individuare punto medio e bisettrice.
5. Comprendere e scrivere le prime dimostrazioni, con ipotesi, tesi e passaggi giustificati.
6. Calcolare con le misure in gradi, primi e secondi e contare le diagonali di un poligono.

INDICE DEL CAPITOLO

12.1 Dalla geometria pratica alla geometria razionale 2
12.2 Enti primitivi e primi postulati 4
12.3 Gli angoli 7
12.4 La congruenza 9
12.5 I primi teoremi 15
12.6 Misure e poligoni 16

Matematica 1 · Parte V · Geometria euclidea · versione 1.0
Capitolo 12: Fondamenti della geometria euclidea · pagine 307–332 del volume completo · estratto per lo studio

Prendi un foglio e disegna un punto con la matita. Per quanto la punta sia sottile, sotto una lente vedrai una macchiolina di grafite con una sua larghezza, una sua forma, perfino dei bordi frastagliati. Eppure, quando in geometria parliamo di un «punto», intendiamo qualcosa che non ha alcuna estensione. Allo stesso modo, la riga che tracci con il righello ha uno spessore e finisce ai bordi del foglio, mentre la retta della geometria è sottilissima e non finisce mai.

La geometria che studierai in questa parte del libro non parla dunque degli oggetti del foglio, ma di oggetti ideali, di cui i disegni sono soltanto rappresentazioni approssimate. Il disegno aiuta a capire, ma una proprietà non è vera perché «si vede»: è vera perché si *dimostra* a partire da poche affermazioni accettate all'inizio. Questo modo di procedere, inventato dai matematici greci e codificato da Euclide più di duemila anni fa, è il cuore del capitolo. Imparerai il vocabolario di base, le regole del gioco (i postulati) e scriverai le tue prime dimostrazioni.

12.1 Dalla geometria pratica alla geometria razionale

12.1.1 Le origini

La parola *geometria* viene dal greco e significa «misura della terra». Il nome ricorda le origini pratiche della disciplina: misurare campi, costruire edifici e canali, calcolare volumi di granai. Lo storico greco Erodoto racconta che in Egitto i terreni dovevano essere misurati di nuovo quando le piene del Nilo ne portavano via una parte, e collega a questa necessità la nascita della geometria. Nei papiri egizi e nelle tavolette babilonesi si trovano infatti regole per calcolare aree e volumi, spesso molto efficaci, ma presentate come ricette: «fai così e ottieni il risultato», senza spiegare perché funzionano.

Con i Greci, a partire dal VI secolo a.C., cambia la domanda. Non basta più sapere *che* una regola funziona: si vuole capire *perché* funziona, cioè ricavarla con un ragionamento da fatti più semplici. La tradizione attribuisce a Talete di Mileto le prime dimostrazioni geometriche. Nei secoli successivi i risultati si moltiplicarono, e nacque il bisogno di ordinarli in un sistema in cui ogni proprietà discendesse da altre già stabilite.

APPROFONDIMENTO

Euclide e gli *Elementi*

Di Euclide sappiamo pochissimo: visse ad Alessandria d'Egitto intorno al 300 a.C. La sua opera principale, gli *Elementi*, è divisa in tredici libri e raccoglie in forma ordinata la geometria piana, la teoria delle proporzioni, l'aritmetica dei numeri interi e la geometria solida. Il primo libro si apre con 23 definizioni, 5 postulati e 5 «nozioni comuni», cioè principi generali come «il tutto è maggiore della parte»; seguono le proposizioni, ciascuna dimostrata a partire da ciò che la precede. Ecco i cinque postulati, nella nostra traduzione:

1. Si possa condurre una linea retta da un punto qualsiasi a un qualsiasi altro punto. 2. Una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta. 3. Con qualunque centro e qualunque distanza si possa descrivere un cerchio. 4. Tutti gli angoli retti siano uguali tra loro. 5. Se una retta, incontrando due rette, forma dalla stessa parte angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, le due rette, prolungate illimitatamente, si incontrano da quella parte.

Per oltre duemila anni gli *Elementi* sono stati il modello del ragionamento rigoroso. Il quinto postulato, molto più complicato degli altri, ha una storia affascinante che racconteremo nel capitolo 14. Nel 1899 David Hilbert, nei *Fondamenti della geometria*, completò il sistema di Euclide con un elenco di assiomi divisi in gruppi (appartenenza, ordine, congruenza, parallele, continuità): i postulati di questo capitolo ne seguono, semplificata, la stessa organizzazione.

12.1.2 Il metodo assiomatico

L'idea di Euclide è semplice da dire e profonda nelle conseguenze. Non si può definire tutto: ogni definizione usa altre parole, che a loro volta andrebbero definite, e così via senza fine. Occorre quindi partire da alcuni oggetti che non si definiscono, e da alcune proprietà che non si dimostrano. Su queste basi si costruisce tutto il resto. Questo modo di organizzare una teoria si chiama **metodo assiomatico** (o ipotetico-deduttivo) e ha quattro ingredienti.

Gli **enti primitivi** sono gli oggetti di cui la teoria parla senza definirli. Nella geometria del piano sono il **punto**, la **retta** e il **piano**. Non diciamo che cosa «sono»; ne conosciamo il comportamento attraverso le proprietà che enunciamo.

Gli **assiomi** o **postulati** sono le proposizioni che si accettano come vere senza dimostrazione. Descrivono le relazioni fondamentali tra gli enti primitivi, per esempio «per due punti distinti passa una e una sola retta». In passato si distingueva tra assiomi (verità generali, valide in ogni scienza) e postulati (richieste specifiche della geometria); oggi i due termini si usano come sinonimi.

Le **definizioni** introducono nuovi oggetti a partire da quelli già noti: segmento, angolo, poligono sono enti *definiti*, perché li descriviamo usando punti, rette e piani.

I **teoremi** sono le proposizioni che si dimostrano. Come hai visto nel capitolo 5, un teorema ha la forma «se I, allora T»: l'**ipotesi** I è ciò che si suppone vero, la **tesi** T è ciò che si vuole pro-

vare, e la **dimostrazione** è la catena di passaggi che porta dall'ipotesi alla tesi, ciascuno giustificato da un postulato, da una definizione o da un teorema già dimostrato. Un teorema che discende in modo immediato da un altro si chiama **corollario**; un teorema di supporto, dimostrato soprattutto per usarlo nella dimostrazione di un risultato più importante, si chiama **lemma**.

> **DA RICORDARE**
> In geometria la figura **aiuta** a trovare l'idea, ma **non dimostra** nulla. Ogni passaggio di una dimostrazione deve poter essere giustificato citando un postulato, una definizione o un teorema già provato. «Si vede dal disegno» non è una giustificazione: un disegno può essere impreciso, oppure rappresentare un caso particolare.

12.2 Enti primitivi e primi postulati

12.2.1 Punti, rette e piani

Indichiamo i punti con lettere maiuscole (A, B, P…), le rette con lettere minuscole (r, s, t…) e i piani con lettere greche minuscole (α, β…) quando serve distinguerli. Per dire che il punto P appartiene alla retta r scriviamo $P \in r$, e diciamo anche che *r passa per P*. In questa parte del libro lavoriamo quasi sempre in un solo piano: è la **geometria piana**. Una **figura** geometrica è un qualsiasi insieme di punti; la retta e il piano stesso sono figure, e possiamo applicare alle figure le operazioni tra insiemi del capitolo 5 (intersezione, unione, differenza).

12.2.2 I postulati di appartenenza

I primi postulati descrivono come punti, rette e piani «stanno» gli uni sugli altri.

Postulato 1. Per due punti distinti passa una e una sola retta.

Postulato 2. Ogni retta contiene infiniti punti, ed esistono punti che non le appartengono.

Postulato 3. Per tre punti non appartenenti a una stessa retta passa uno e un solo piano; ogni piano contiene infiniti punti.

Postulato 4. Se due punti distinti di una retta appartengono a un piano, tutta la retta appartiene a quel piano.

Il primo postulato giustifica la notazione: la retta passante per A e B si può indicare con AB, perché ce n'è una sola. Tre o più punti che appartengono a una stessa retta si dicono **allineati**. Dal primo postulato segue subito un fatto importante.

Conseguenza. *Due rette distinte hanno al massimo un punto in comune.* Infatti, se avessero in comune due punti distinti, per quei due punti passerebbero due rette diverse, contro il postulato 1 (è una dimostrazione per assurdo, come nel capitolo 5). Due rette con esattamente un punto in comune si dicono **incidenti**; due rette di un piano senza punti in comune si dicono parallele, e le studieremo nel capitolo 14.

12.2.3 I postulati d'ordine: semirette e segmenti

I punti di una retta non sono sparsi a caso: sono *ordinati*, come i numeri sulla retta numerica. Fissato un verso di percorrenza, di due punti distinti uno precede l'altro. Accettiamo i seguenti postulati.

Postulato 5. Nell'ordine di una retta non esiste un primo punto né un ultimo punto: la retta è **illimitata** in entrambi i versi.

Postulato 6. Tra due punti distinti di una retta esiste sempre almeno un altro punto: la retta è **densa**.

Dal postulato 6, applicato più volte, segue che tra due punti di una retta ce ne sono infiniti: esattamente come in $\mathbb{Q}$, dove tra due numeri razionali c'è sempre la loro media (capitolo 3).

Un punto O di una retta divide la retta in due parti. Ciascuna delle due parti, insieme al punto O, si chiama **semiretta** di **origine** O. Le due semirette in cui un punto divide una retta si dicono **semirette opposte**. Se A è un punto della semiretta diverso da O, possiamo chiamarla semiretta OA (figura 12.1a).

Dati due punti distinti A e B, si chiama **segmento** AB la figura formata da A, da B e da tutti i punti della retta AB compresi tra A e B. I punti A e B sono gli **estremi** del segmento; gli altri punti sono i punti *interni* (figura 12.1b). A differenza della retta e della semiretta, il segmento è una figura *limitata*. Se A e B coincidono parliamo di segmento nullo.

Due segmenti si dicono **consecutivi** se hanno in comune soltanto un estremo. Due segmenti consecutivi che appartengono alla stessa retta si dicono **adiacenti** (figura 12.1c e d). Quindi due segmenti adiacenti sono sempre anche consecutivi, ma non viceversa.

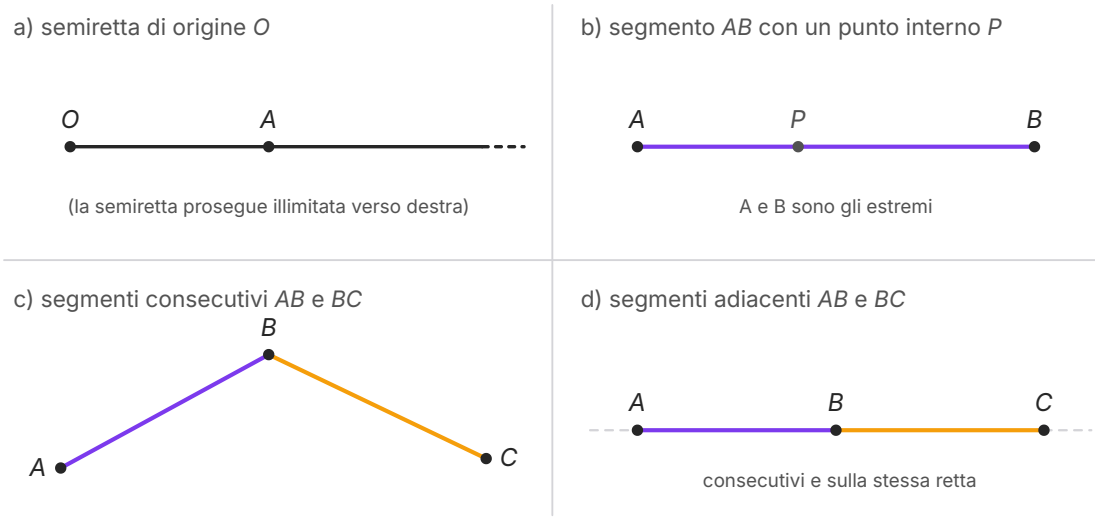


Figura 12.1 a) La semiretta di origine O passante per A: il tratteggio indica che prosegue senza fine. b) Il segmento AB, con estremi A e B e un punto interno P. c) Due segmenti consecutivi: hanno in comune solo l'estremo B. d) Due segmenti adiacenti: consecutivi e appartenenti alla stessa retta.

Una sequenza di segmenti ciascuno consecutivo al successivo, in cui due segmenti consecutivi non appartengono mai alla stessa retta, forma una **poligonale** (o spezzata). La poligonale è *chiusa* se l'ultimo estremo coincide con il primo, *aperta* in caso contrario; è *intrecciata* se due suoi lati non consecutivi si intersecano, *semplice* se questo non accade. I segmenti sono i *lati* della poligonale, gli estremi sono i *vertici*.

> **ERRORE FREQUENTE**
> «Consecutivi» e «adiacenti» non sono sinonimi. Due segmenti consecutivi hanno in comune *soltanto* un estremo (se si sovrappongono per un tratto non lo sono); diventano adiacenti solo se, in più, stanno sulla stessa retta. In figura 12.1c i segmenti AB e BC sono consecutivi ma non adiacenti. La stessa distinzione vale per gli angoli (paragrafo 12.3).

12.2.4 Semipiani e figure convesse

Come un punto divide una retta in due semirette, così una retta divide un piano in due parti. Anche questa proprietà, evidente nel disegno, va accettata come postulato.

Postulato 7. Una retta r di un piano divide i punti del piano non appartenenti a r in due regioni, tali che: se P e Q appartengono alla stessa regione, il segmento PQ non interseca r; se appartengono a regioni diverse, il segmento PQ interseca r.

Ciascuna delle due regioni, insieme alla retta r, si chiama **semipiano** di *origine* r (figura 12.2a). In pratica: per passare da un semipiano all'altro bisogna «attraversare» la retta.

Una figura si dice **convessa** se, comunque si scelgano due suoi punti P e Q, il segmento PQ è tutto contenuto nella figura. Una figura che non è convessa si dice **concava**: esistono almeno due suoi punti tali che il segmento che li congiunge esce, in parte, dalla figura (figura 12.2c). Sono figure convesse la retta, la semiretta, il segmento, il semipiano e il piano.

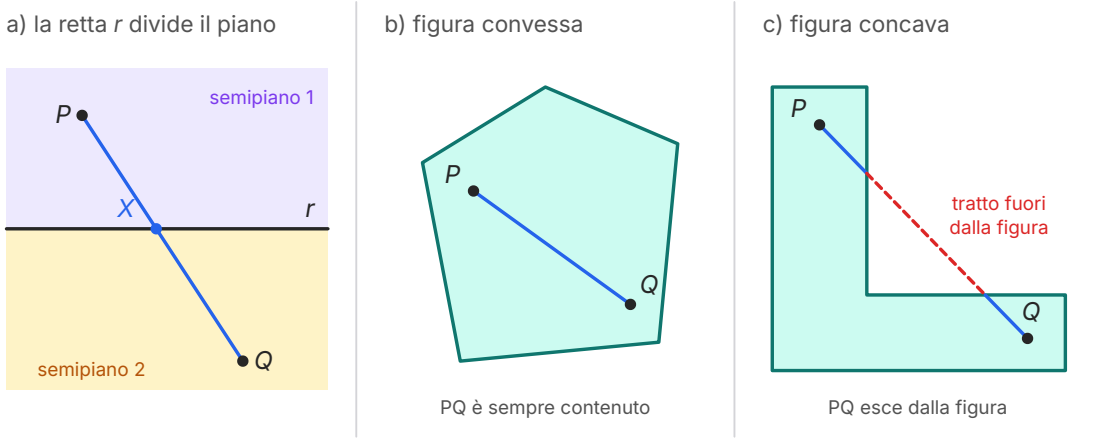


Figura 12.2 a) La retta r divide il piano in due semipiani: il segmento che unisce due punti di semipiani diversi interseca r nel punto X. b) In una figura convessa il segmento che unisce due punti qualsiasi della figura è tutto contenuto nella figura. c) In una figura concava esistono due punti per i quali questo non accade.

Per provare che una figura è concava basta *una* coppia di punti che «non funziona»; per provare che è convessa bisogna ragionare su *tutte* le coppie: la negazione di un «per ogni» è un «esiste» (capitolo 5).

12.3 Gli angoli

12.3.1 Definizione di angolo

Nel linguaggio comune «angolo» indica cose diverse; in geometria serve una definizione precisa. Due semirette con la stessa origine dividono il piano in due parti.

Si chiama **angolo** ciascuna delle due parti in cui il piano è diviso da due semirette aventi la stessa origine, comprese le semirette stesse. Le due semirette sono i **lati** dell'angolo, la loro origine comune è il **vertice**.

Due semirette con la stessa origine individuano quindi *due* angoli. Se i lati non sono né semirette opposte né coincidenti, uno dei due angoli è una figura convessa e si chiama **angolo convesso**; l'altro è una figura concava e si chiama **angolo concavo**. Un modo pratico per riconoscerli: l'angolo concavo contiene i prolungamenti dei lati oltre il vertice, quello convesso no (figura 12.3).

Un angolo di vertice O e lati OA e OB si indica con $\angle AOB$ (la lettera del vertice sta sempre in mezzo) oppure con una lettera greca: α, β, γ, δ... Quando non si dice nulla, $\angle AOB$ indica l'angolo convesso.

12.3.2 Angoli particolari

Alcune posizioni dei lati danno origine ad angoli con un nome proprio.

- Se i lati sono semirette opposte, ciascuno dei due angoli è un semipiano e si chiama **angolo piatto**.
- Se i lati coincidono, uno dei due angoli è formato dalla sola semiretta e si chiama **angolo nullo**; l'altro è l'intero piano e si chiama **angolo giro**.

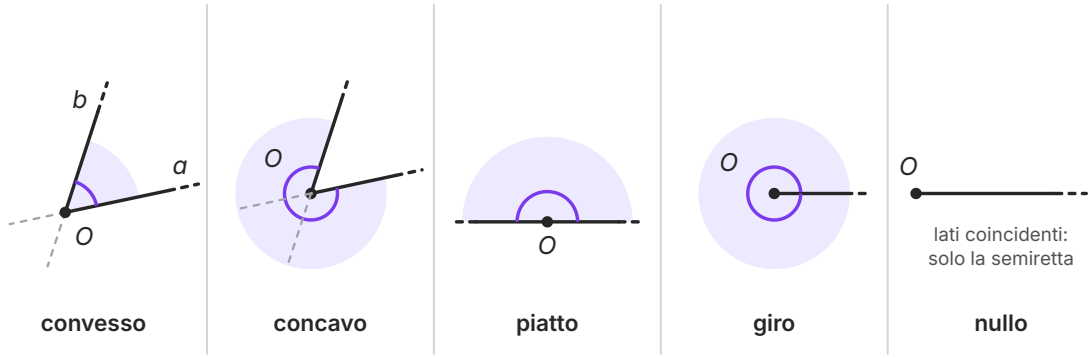


Figura 12.3 I lati a e b di vertice O individuano un angolo convesso e un angolo concavo; il tratteggio grigio mostra i prolungamenti dei lati, che stanno nell'angolo concavo. Seguono l'angolo piatto (un semipiano), l'angolo giro (tutto il piano) e l'angolo nullo (solo la semiretta).

12.3.3 Angoli consecutivi, adiacenti, opposti al vertice

Come per i segmenti, è utile dare un nome ad alcune posizioni reciproche di due angoli (figura 12.4).

Due angoli si dicono **angoli consecutivi** se hanno lo stesso vertice, un lato in comune, e gli altri due lati si trovano da parti opposte rispetto al lato comune, così che i due angoli non hanno altri punti in comune oltre a quelli del lato comune.

Due angoli consecutivi si dicono **angoli adiacenti** se i lati non comuni sono semirette opposte. In questo caso i due angoli, «affiancati», formano un angolo piatto.

Due angoli convessi si dicono **opposti al vertice** se i lati dell'uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro oltre il vertice. Due rette incidenti formano quattro angoli convessi: due coppie di angoli opposti al vertice e quattro coppie di angoli adiacenti.

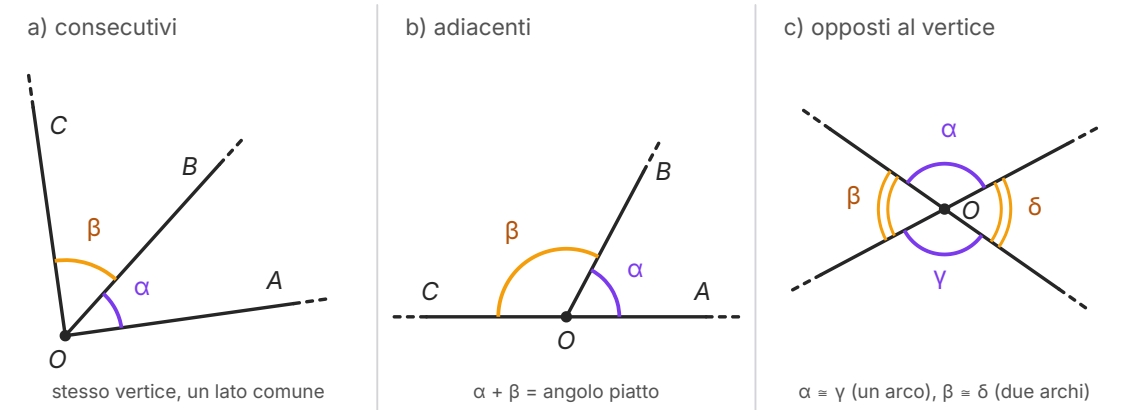


Figura 12.4 a) Gli angoli $\alpha = \angle AOB$ e $\beta = \angle BOC$ sono consecutivi: hanno il vertice e il lato OB in comune. b) Gli angoli α e β sono adiacenti: i lati non comuni OA e OC sono semirette opposte. c) Due rette incidenti formano due coppie di angoli opposti al vertice; gli archi uguali indicano angoli congruenti, come dimostreremo nel paragrafo 12.5.

12.4 La congruenza

12.4.1 Figure congruenti

Se un triangolo di carta, spostato e magari capovolto, combacia punto per punto con un triangolo disegnato, diciamo che i due triangoli «sono uguali». Lo spostamento è un **movimento rigido**: cambia la posizione della figura ma non la deforma, non la allunga e non la accorcia.

In geometria, due figure che si possono sovrapporre esattamente con un movimento rigido si dicono **congruenti**, e si scrive $F \cong G$. Nel metodo assiomatico la congruenza è considerata un **concetto primitivo**: non la definiamo, ma ne fissiamo le proprietà con i postulati.

Perché non scriviamo semplicemente «=»? Perché due figure congruenti sono, in generale, insiemi di punti *diversi*: due segmenti congruenti disegnati in posti diversi del foglio non hanno nemmeno un punto in comune. Il simbolo «=» tra due figure significherebbe che sono lo stesso insieme di punti.

IN SINTESI

Postulati della congruenza (per segmenti e angoli).

8. La congruenza è una relazione di equivalenza: ogni figura è congruente a sé stessa (proprietà riflessiva); se $F \cong G$ allora $G \cong F$ (simmetrica); se $F \cong G$ e $G \cong H$ allora $F \cong H$ (transitiva).

9. *Trasporto di un segmento.* Dati un segmento AB e una semiretta di origine O, esiste uno e un solo punto P della semiretta tale che $OP \cong AB$.

10. *Trasporto di un angolo.* Dati un angolo convesso e una semiretta a di origine O, in ciascuno dei due semipiani che hanno per origine la retta contenente a esiste una e una sola semiretta b di origine O tale che l'angolo convesso di lati a e b sia congruente all'angolo dato.

11. Somme e differenze di segmenti (o di angoli) congruenti sono congruenti; lo stesso vale per multipli e sottomultipli: in particolare, le metà di segmenti (o di angoli) congruenti sono congruenti.

12. Tutti gli angoli piatti sono congruenti tra loro; tutti gli angoli giro sono congruenti tra loro.

13. Ogni segmento ha uno e un solo punto medio; ogni angolo ha una e una sola bisettrice.

Per il postulato 8 la congruenza è una relazione di equivalenza (capitolo 6): divide segmenti e angoli in classi.

12.4.2 Confronto, somma e differenza di segmenti

Due segmenti si possono **confrontare** trasportandoli sulla stessa semiretta con un estremo nell'origine. Siano AB e CD i due segmenti; trasportiamoli sulla semiretta di origine O, ottenendo $OP \cong AB$ e $OQ \cong CD$. Se P e Q coincidono, $AB \cong CD$; se P è interno al segmento OQ, diciamo che AB è *minore* di CD e scriviamo $AB < CD$; altrimenti AB è maggiore di CD.

La **somma** di due segmenti adiacenti AB e BC è il segmento AC, e si scrive $AB + BC = AC$. Se i due segmenti non sono adiacenti, li si rende adiacenti trasportandoli: la somma di AB e CD è il segmento PR ottenuto disponendo sulla stessa retta $PQ \cong AB$ e, di seguito, $QR \cong CD$. Se $AB > CD$, la **differenza** $AB - CD$ è il segmento che, sommato a CD, dà AB.

Sommando più volte uno stesso segmento si ottengono i suoi **multipli**: $2\,AB = AB + AB$, $3\,AB = AB + AB + AB$, e così via. Se $CD = n\,AB$ con n naturale non nullo, diciamo anche che AB è un *sottomultiplo* di CD e scriviamo $AB = \frac{1}{n}\,CD$.

Il **punto medio** di un segmento AB è il punto M di AB tale che $AM \cong MB$. Il punto medio divide il segmento in due parti congruenti, ciascuna metà dell'intero: $AM = \frac{1}{2}\,AB$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Su una retta si susseguono, nell'ordine, i punti A, B, C con $AB = 6$ cm e $BC = 10$ cm. Detti M il punto medio di AB e N il punto medio di BC, determina la lunghezza di MN e confrontala con quella di AC.

Soluzione. I segmenti AB e BC sono adiacenti, quindi $AC = AB + BC = 16$ cm. Il punto M divide AB a metà: $MB = 3$ cm. Il punto N divide BC a metà: $BN = 5$ cm. Poiché M sta su AB e N su BC, i segmenti MB e BN sono adiacenti, e

$$MN = MB + BN = 3\text{ cm} + 5\text{ cm} = 8\text{ cm}.$$

Dunque MN è la metà di AC. Non è una coincidenza: $MN = \frac{1}{2}\,AB + \frac{1}{2}\,BC = \frac{1}{2}\,(AB + BC) = \frac{1}{2}\,AC$, qualunque siano le lunghezze. Lo dimostrerai senza numeri nell'esercizio 24.

12.4.3 Confronto, somma e differenza di angoli; bisettrice

Per gli angoli si procede allo stesso modo. Per confrontare α e β li si trasporta in modo che abbiano lo stesso vertice e un lato in comune, e che gli altri lati stiano dalla stessa parte rispetto al lato comune: se i secondi lati coincidono gli angoli sono congruenti, altrimenti è minore quello il cui secondo lato è interno all'altro angolo.

La somma di due angoli consecutivi $\angle AOB$ e $\angle BOC$ è l'angolo $\angle AOC$ che ha per lati i lati non comuni e che contiene il lato comune OB. Per sommare angoli non consecutivi li si rende consecutivi trasportandoli. Si definiscono poi, come per i segmenti, la differenza, i multipli e i sottomultipli di un angolo. La somma di due angoli adiacenti è un angolo piatto; la somma di due angoli piatti è un angolo giro.

La **bisettrice** di un angolo è la semiretta che ha origine nel vertice e divide l'angolo in due angoli congruenti (figura 12.5a). Se OC è la bisettrice di $\angle AOB$, allora $\angle AOC \cong \angle COB$ e ciascuno dei due è la metà di $\angle AOB$.

12.4.4 Angoli retti, acuti, ottusi

Si chiama **angolo retto** la metà di un angolo piatto, cioè ciascuno dei due angoli in cui la bisettrice divide un angolo piatto. Un angolo convesso minore di un angolo retto si dice **acuto**; un angolo maggiore di un retto ma minore di un piatto si dice **ottuso** (figura 12.5). Nei disegni l'angolo retto si segna con un piccolo quadrato nel vertice.

Poiché tutti gli angoli piatti sono congruenti (postulato 12) e le metà di angoli congruenti sono congruenti (postulato 11), **tutti gli angoli retti sono congruenti tra loro**. Il quarto postulato di Euclide, per noi, è quindi una conseguenza dei postulati 11, 12 e 13.

Due rette incidenti che formano quattro angoli retti si dicono perpendicolari, e si scrive $r \perp s$. Le studieremo nel capitolo 14.

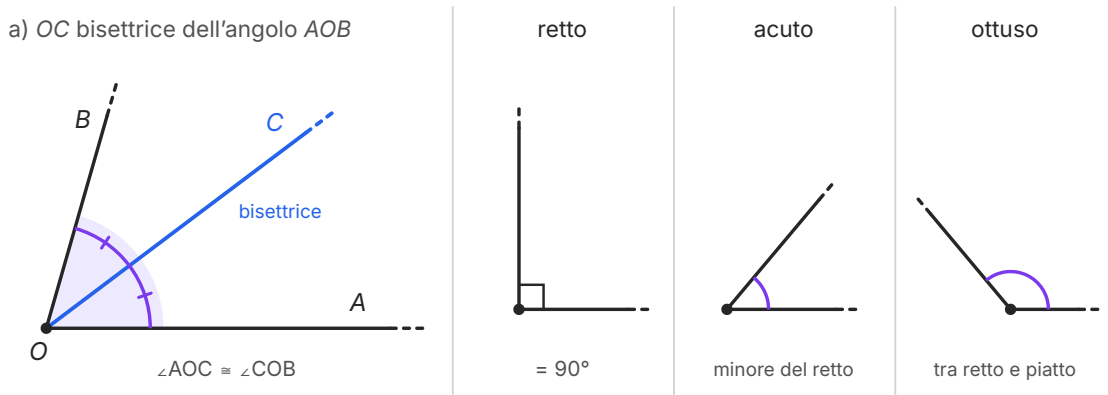


Figura 12.5 a) La bisettrice *OC* divide l'angolo $\angle AOB$ in due angoli congruenti (gli archi con una tacca indicano angoli congruenti). A destra, un angolo retto (con il quadratino nel vertice), un angolo acuto e un angolo ottuso.

Infine, tre coppie di angoli ricorrono di continuo negli esercizi (figura 12.6). Due angoli si dicono

- **complementari** se la loro somma è un angolo retto;
- **supplementari** se la loro somma è un angolo piatto;
- **esplementari** se la loro somma è un angolo giro.

Attenzione: due angoli complementari o supplementari non devono necessariamente essere consecutivi. Due angoli adiacenti sono sempre supplementari, ma due angoli supplementari possono stare in punti diversi del piano (figura 12.6b).

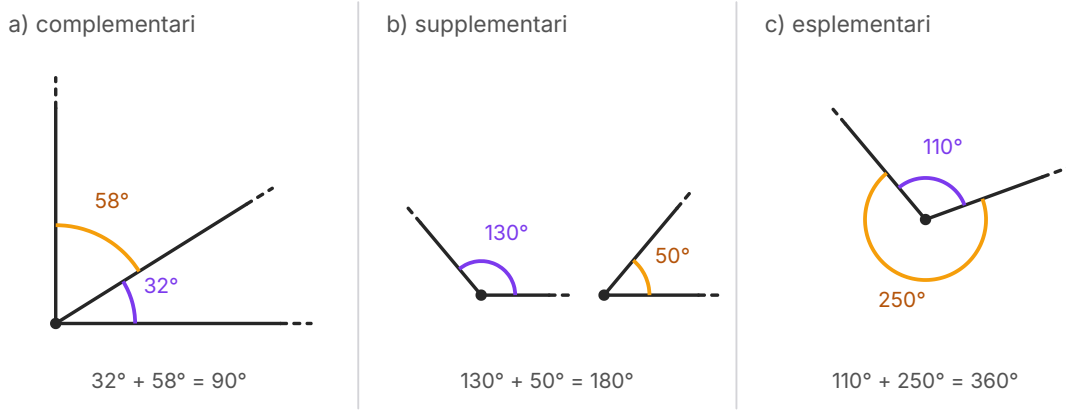


Figura 12.6 a) Due angoli complementari, disegnati consecutivi: 32° + 58° = 90°. b) Due angoli supplementari non consecutivi: 130° + 50° = 180°. c) Due angoli esplementari con gli stessi lati: l'angolo convesso di 110° e l'angolo concavo di 250°.

12.4.5 Costruzioni con riga e compasso

Nella geometria di Euclide le figure non si disegnano «a occhio», né si misurano con il righello graduato o con il goniometro: si costruiscono. Una **costruzione con riga e compasso** usa due soli strumenti. La **riga** non è graduata e serve soltanto a tracciare la retta che passa per due punti già noti; il **compasso** serve a tracciare una circonferenza, o un suo arco, di centro e raggio dati. Ogni nuovo punto nasce come intersezione di rette e archi già tracciati. Sono esattamente le operazioni permesse dai primi tre postulati di Euclide: tracciare una retta da un punto a un altro, prolungarla, descrivere un cerchio con qualsiasi centro e qualsiasi raggio. Come fa Euclide senza dirlo esplicitamente, accetteremo che due archi che «si attraversano» abbiano un punto in comune; la circonferenza la studierai il prossimo anno.

Perché proprio questi due strumenti? Per i Greci una costruzione era anche una *prova di esistenza*: mostrare come si costruisce una figura significava mostrare che esiste. Per questo il primo libro degli *Elementi* si apre con tre costruzioni. La proposizione 1 costruisce un triangolo equilatero su un segmento dato; la 2 riporta, a partire da un punto dato, un segmento congruente a un segmento dato; la 3, dati due segmenti diversi, toglie dal maggiore un segmento congruente al minore. La proposizione 2 serve perché il compasso di Euclide è «a chiusura»: traccia il cerchio di centro dato passante per un punto dato, ma sollevato dal foglio si chiude e non conserva l'apertura. Euclide dimostra che anche con questo strumento si può trasportare un segmento: da allora possiamo usare senza scrupoli il compasso moderno, che l'apertura la mantiene. Alcuni problemi posti dai Greci, come dividere un angolo qualsiasi in tre parti congruenti, hanno resistito per più di duemila anni: solo nel 1837 Pierre Wantzel dimostrò che con riga e compasso non si possono risolvere.

Trasporto di un segmento

Dati il segmento AB e una semiretta di origine O (figura 12.7a):

1. si apre il compasso con le punte in A e in B;
2. senza cambiare l'apertura, si punta il compasso in O e si traccia un arco che taglia la semiretta;
3. il punto di intersezione P è l'estremo cercato: $OP \cong AB$.

È la costruzione che realizza il postulato 9: tutti i punti dell'arco hanno da O la stessa distanza AB, e la semiretta ne incontra uno solo.

Trasporto di un angolo

Dati l'angolo convesso $\angle AOB$, di lati a e b, e una semiretta a' di origine O' (figura 12.7b):

1. con centro O e un'apertura qualsiasi si traccia un arco che taglia il lato a in C e il lato b in D;
2. con la stessa apertura e centro O' si traccia un arco che taglia a' in C';

3. con centro C' e apertura uguale a CD si traccia un arco che taglia il secondo arco, nel semipiano scelto, in D';
4. la semiretta b' di origine O' passante per D' è il secondo lato dell'angolo cercato: $\angle C'O'D' \cong \angle AOB$.

Perché funziona? I triangoli OCD e $O'C'D'$ hanno $OC \cong O'C'$ e $OD \cong O'D'$ (stessa apertura del compasso) e $CD \cong C'D'$ (per costruzione): hanno ordinatamente congruenti i tre lati. Nel capitolo 13 dimostreremo che allora sono congruenti (terzo criterio di congruenza), e in particolare hanno congruenti gli angoli in O e in O'. La costruzione realizza così il postulato 10. Le costruzioni della bisettrice, della perpendicolare e della parallela per un punto, che si giustificano con i criteri di congruenza, le vedremo nel capitolo 14.

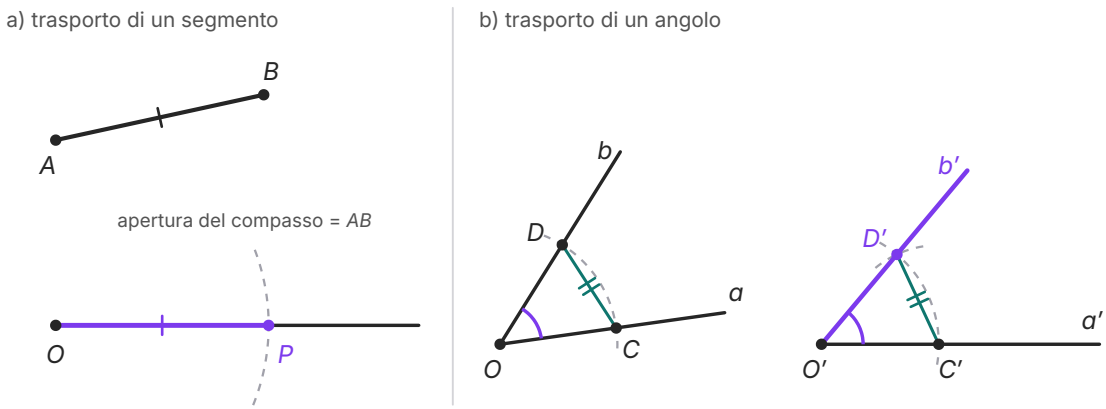


Figura 12.7 a) Trasporto del segmento AB sulla semiretta di origine O: l'arco di centro O e raggio AB taglia la semiretta in P, e $OP \cong AB$ (tacche). b) Trasporto dell'angolo di lati a e b sulla semiretta a': due archi con la stessa apertura, di centri O e O', e un arco di centro C' e raggio CD individuano D'. Le corde CD e $C'D'$ (tacche doppie) sono congruenti, quindi i triangoli OCD e $O'C'D'$ hanno i tre lati congruenti.

COLLEGAMENTI

Riga e compasso al computer

I programmi di geometria dinamica, come GeoGebra, che è gratuito, mettono a disposizione gli strumenti di Euclide: la retta per due punti, la circonferenza di dato centro passante per un punto, la circonferenza con raggio uguale a un segmento dato (il «compasso») e l'intersezione di due oggetti. Sul foglio la costruzione resta ferma; sullo schermo, invece, i punti di partenza si possono *trascinare*. Se la figura è stata costruita davvero, e non disegnata a occhio, le proprietà volute restano vere in ogni posizione. Prova a trasportare un angolo con i passaggi descritti sopra, misura i due angoli e trascina i punti A, O, B: le due misure cambiano sempre insieme. Questa «prova del trascinamento» è il modo più semplice per controllare una costruzione.

12.5 I primi teoremi

Abbiamo ora gli strumenti per la prima dimostrazione completa di questo volume. Guarda la figura 12.4c: i due angoli segnati con un arco sembrano proprio congruenti. Ma «sembrare» non basta: dobbiamo dimostrarlo per *qualunque* coppia di rette incidenti, non solo per quella disegnata.

IN SINTESI

Teorema degli angoli opposti al vertice. Due angoli opposti al vertice sono congruenti.

Ipotesi: α e γ sono opposti al vertice. **Tesi:** $\alpha \cong \gamma$.

Dimostrazione. Siano r e s le rette che contengono i lati di α e di γ, e sia O il loro punto comune. Consideriamo l'angolo β che ha per lati un lato di α e un lato di γ (figura 12.4c).

1. α e β hanno in comune un lato, e i loro lati non comuni sono semirette opposte (stanno sulla stessa retta, da parti opposte rispetto a O). Quindi α e β sono adiacenti, e $\alpha + \beta$ è un angolo piatto. *(Definizione di angoli adiacenti.)*
2. Per lo stesso motivo γ e β sono adiacenti, e $\gamma + \beta$ è un angolo piatto.
3. Tutti gli angoli piatti sono congruenti *(postulato 12)*, quindi $\alpha + \beta \cong \gamma + \beta$.
4. Sottraendo da questi due angoli congruenti lo stesso angolo β si ottengono angoli congruenti *(postulato 11)*: $\alpha \cong \gamma$.

Abbiamo ottenuto la tesi. c.v.d.

Ogni passaggio cita tra parentesi la propria giustificazione: è lo stile che ti chiederemo in tutte le dimostrazioni. Prima di cominciare, disegna una figura *generica* (non un caso particolare), segna con tacche e archi gli elementi congruenti per ipotesi e scrivi a parte ipotesi e tesi. Lo stesso ragionamento prova che anche $\beta \cong \delta$.

Il ragionamento appena svolto contiene un'idea più generale, che conviene isolare in un teorema autonomo.

IN SINTESI

Teorema. Angoli supplementari di angoli congruenti sono congruenti.

Ipotesi: $\alpha \cong \beta$; α' è supplementare di α; β' è supplementare di β. **Tesi:** $\alpha' \cong \beta'$.

Dimostrazione. Per ipotesi $\alpha + \alpha'$ e $\beta + \beta'$ sono angoli piatti, quindi sono congruenti *(postulato 12)*. Si ha allora $\alpha' \cong (\alpha + \alpha') - \alpha$ e $\beta' \cong (\beta + \beta') - \beta$: sono differenze di angoli congruenti, perché i piatti sono congruenti e $\alpha \cong \beta$ per ipotesi. Per il postulato 11, $\alpha' \cong \beta'$. c.v.d.

Allo stesso modo si dimostra che **angoli complementari di angoli congruenti sono congruenti** (esercizio 21): basta sostituire «angolo piatto» con «angolo retto» e ricordare che tutti gli angoli retti sono congruenti. In particolare, due angoli supplementari (o complementari) *dello stesso angolo* sono congruenti: è il caso $\alpha = \beta$.

Con questi teoremi il teorema degli angoli opposti al vertice diventa un corollario: α e γ sono entrambi supplementari dello stesso angolo β, quindi sono congruenti.

Corollario. *Se due rette incidenti formano un angolo retto, tutti e quattro gli angoli che formano sono retti.* Infatti l'angolo opposto al vertice di un retto è retto (teorema precedente), e ciascuno dei due angoli adiacenti a un retto è la differenza tra un angolo piatto e un retto, cioè ancora un retto.

ERRORE FREQUENTE

Il teorema dice: «se due angoli sono opposti al vertice, allora sono congruenti». Il **teorema inverso** sarebbe: «se due angoli sono congruenti, allora sono opposti al vertice». È falso: due angoli di 40° disegnati in punti diversi del foglio sono congruenti ma non hanno nemmeno lo stesso vertice. Ricorda dal capitolo 5 che una proposizione e la sua inversa sono indipendenti; equivalente al teorema è invece la **contronominale**: «se due angoli non sono congruenti, allora non sono opposti al vertice».

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Due angoli adiacenti α e β sono tali che β è il triplo di α. Determina le loro ampiezze e l'angolo formato dalle loro bisettrici.

Soluzione. Due angoli adiacenti sono supplementari: $\alpha + \beta = 180°$. Posto $\alpha = x$, si ha $\beta = 3x$ e

$$x + 3x = 180° \quad \Rightarrow \quad 4x = 180° \quad \Rightarrow \quad x = 45°.$$

Quindi $\alpha = 45°$ e $\beta = 135°$. Le bisettrici dividono gli angoli a metà; l'angolo che formano è la somma delle metà adiacenti al lato comune: $22{,}5° + 67{,}5° = 90°$. Le bisettrici sono perpendicolari! Anche questo non dipende dai numeri: la somma delle metà è la metà di un angolo piatto, cioè un retto (esercizio 22).

12.6 Misure e poligoni

12.6.1 Lunghezza di un segmento

Finora abbiamo confrontato segmenti senza usare numeri. Nella pratica, però, è comodo associare a ogni segmento un numero, la sua **lunghezza**. Si sceglie un segmento come *unità di misura* u (per esempio il centimetro); la lunghezza di AB è il numero che indica quante volte u, o una sua parte, è contenuto in AB. Se $AB = 3u$, diciamo che AB è lungo 3 cm. La misura rispetta la

congruenza e le operazioni: segmenti congruenti hanno la stessa lunghezza, e la lunghezza della somma di due segmenti è la somma delle lunghezze. Per questo negli esercizi scriviamo, con un piccolo abuso, $AB = 6$ cm anziché «la lunghezza di AB è 6 cm».

La diagonale del quadrato di lato 1 ha una lunghezza non razionale (capitolo 3): per misurare tutti i segmenti serviranno i numeri reali, che vedrai il prossimo anno.

12.6.2 Ampiezza di un angolo: gradi, primi, secondi

Per gli angoli l'unità di misura più usata è il **grado** sessagesimale: un grado (1°) è la trecentosessantesima parte dell'angolo giro. Quindi un angolo giro misura 360°, un angolo piatto 180°, un angolo retto 90°. La misura di un angolo si chiama **ampiezza**. Un angolo acuto ha ampiezza compresa tra 0° e 90°, un angolo ottuso tra 90° e 180°, un angolo concavo tra 180° e 360°.

Il grado si divide in 60 *primi* e ogni primo in 60 *secondi*:

$$1° = 60' \qquad 1' = 60'' \qquad 1° = 3600''$$

Il sistema si chiama *sessagesimale* perché si basa sul 60, come ore, minuti e secondi: nei calcoli si «riporta» a 60, non a 100.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola: a) $37°48'25'' + 25°27'50''$; b) il complementare e il supplementare di $37°48'25''$; c) $102°15' - 47°38'40''$.

a) Si sommano separatamente gradi, primi e secondi: $62°75'75''$. Poiché $75'' = 1'15''$, si ottiene $62°76'15''$; poiché $76' = 1°16'$, il risultato è $\mathbf{63°16'15''}$.

b) Per sottrarre da 90° si scrive $90° = 89°59'60''$. Allora $89°59'60'' - 37°48'25'' = \mathbf{52°11'35''}$ è il complementare. Il supplementare è $180° - 37°48'25'' = 179°59'60'' - 37°48'25'' = \mathbf{142°11'35''}$. Controllo: il supplementare supera il complementare di 90°, come deve.

c) Si scrive $102°15' = 102°14'60'' = 101°74'60''$, così che ogni sottrazione sia possibile: $101°74'60'' - 47°38'40'' = \mathbf{54°36'20''}$.

Per passare dalla forma decimale a quella sessagesimale si moltiplica la parte decimale per 60. Per esempio $12{,}35° = 12° + 0{,}35 \cdot 60' = 12°21'$. Viceversa, $23°15'36'' = 23° + \frac{15}{60}° + \frac{36}{3600}° = 23° + 0{,}25° + 0{,}01° = 23{,}26°$.

COLLEGAMENTI

Gradi in geografia e in astronomia. La divisione dell'angolo giro in 360 parti e l'uso di sottomultipli di 60 risalgono all'astronomia antica, che aveva ereditato dai Babilonesi un sistema di numerazione in base 60. Oggi le coordinate geografiche si esprimono ancora in gradi, primi e secondi: la latitudine va da 0° (equatore) a 90° (poli). Poiché la Terra compie un giro completo su sé stessa, rispetto al Sole, in circa 24 ore, in un'ora ruota di 360° : 24 = 15°: per questo i fusi orari sono ampi, idealmente, 15° di longitudine. In un minuto la Terra ruota di 15′, in un secondo di 15″.

12.6.3 I poligoni

Una poligonale chiusa e semplice divide il piano in due regioni, una limitata e una illimitata. Si chiama **poligono** la figura formata dalla poligonale e dalla regione limitata che essa racchiude. La poligonale è il *contorno* del poligono; i suoi lati e i suoi vertici sono i **lati** e i **vertici** del poligono. Due lati con un estremo in comune si dicono *consecutivi*, e così due vertici estremi di uno stesso lato.

Un poligono si chiama triangolo, quadrilatero, pentagono, esagono, ettagono, ottagono... secondo il numero dei lati. Un poligono può essere convesso o concavo: in questo libro, salvo avviso contrario, parleremo di poligoni convessi.

In ogni vertice, l'angolo formato dai due lati che vi concorrono e che contiene il poligono si chiama **angolo interno**. In un poligono convesso tutti gli angoli interni sono convessi. Si chiama **angolo esterno** un angolo adiacente a un angolo interno, formato da un lato e dal prolungamento del lato consecutivo. In ogni vertice ci sono *due* angoli esterni (figura 12.8, angoli ε ed ε' nel vertice C): sono congruenti perché opposti al vertice. Inoltre ciascun angolo esterno è supplementare dell'angolo interno adiacente.

12.6.4 Le diagonali

Una **diagonale** è un segmento che congiunge due vertici non consecutivi di un poligono. Quante diagonali ha un poligono di n lati? Da un vertice, per esempio A, non si possono tracciare diagonali verso A stesso né verso i due vertici consecutivi ad A: restano $n - 3$ vertici, quindi da ogni vertice escono $n - 3$ diagonali (figura 12.8). Moltiplicando per gli n vertici si ottiene $n(n - 3)$; ma in questo modo ogni diagonale è contata due volte, una per ciascun estremo (la diagonale AC è anche la diagonale CA). Il numero delle diagonali è dunque

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

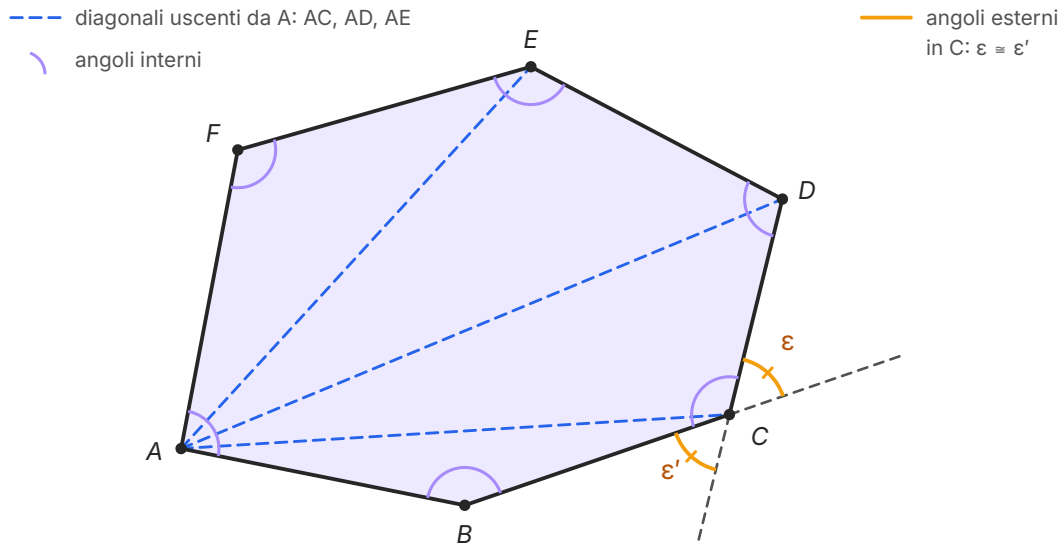


Figura 12.8 Un esagono convesso *ABCDEF*. Da *A* escono 6 − 3 = 3 diagonali (tratteggiate in blu). Gli archi viola indicano gli angoli interni; nel vertice *C*, prolungando i lati *BC* e *DC*, si ottengono i due angoli esterni ε ed ε′, congruenti perché opposti al vertice.

Tabella 12.1 Diagonali uscenti da un vertice e numero totale di diagonali di un poligono di *n* lati.

Poligono	*n*	Diagonali da un vertice (*n* − 3)	Diagonali in tutto
triangolo	3	0	0
quadrilatero	4	1	2
pentagono	5	2	5
esagono	6	3	9
ettagono	7	4	14
ottagono	8	5	20
decagono	10	7	35
dodecagono	12	9	54

ESEMPIO SVOLTO

Problema. a) Quante diagonali ha un ettagono? b) Esiste un poligono con 44 diagonali? E uno con 10?

a) $d = \dfrac{7 \cdot 4}{2} = 14$.

b) Cerchiamo n naturale, $n \geq 3$, tale che $\dfrac{n(n-3)}{2} = 44$, cioè $n(n-3) = 88$: il prodotto di due naturali che differiscono di 3 deve essere 88. Provando: $10 \cdot 7 = 70$, $11 \cdot 8 = 88$. Quindi $n = 11$: l'endecagono ha 44 diagonali. Per 10 diagonali servirebbe $n(n-3) = 20$; ma $7 \cdot 4 = 28$ e $6 \cdot 3 = 18$, e il prodotto cresce al crescere di n: nessun naturale va bene. **Non esiste** un poligono con 10 diagonali.

12.6.5 Poligoni regolari

Un poligono si dice **equilatero** se ha tutti i lati congruenti, **equiangolo** se ha tutti gli angoli interni congruenti. Un poligono che è insieme equilatero ed equiangolo si chiama **poligono regolare**. Il quadrato e il triangolo equilatero sono poligoni regolari.

Le due condizioni sono indipendenti: il rombo che non è un quadrato è equilatero ma non equiangolo; il rettangolo che non è un quadrato è equiangolo ma non equilatero. Nessuno dei due è regolare. Vedremo nel capitolo 13 che per i triangoli le due condizioni si equivalgono: un triangolo equilatero è anche equiangolo, e viceversa.

SINTESI

- La geometria razionale, codificata da Euclide negli *Elementi* (circa 300 a.C.), procede con il metodo assiomatico: enti primitivi, postulati, definizioni, teoremi.
- Enti primitivi della geometria piana: punto, retta, piano. I postulati si accettano senza dimostrazione; i teoremi si dimostrano dalla loro ipotesi alla tesi.
- Per due punti distinti passa una e una sola retta; quindi due rette distinte hanno al massimo un punto in comune.
- La retta è illimitata e densa. Un punto la divide in due semirette opposte; due punti individuano un segmento.
- Segmenti (o angoli) consecutivi hanno in comune solo un estremo (un lato); quelli adiacenti sono anche allineati (i lati non comuni sono semirette opposte).
- Una retta divide il piano in due semipiani. Una figura è convessa se contiene il segmento che unisce due qualsiasi suoi punti.
- Angolo: parte di piano delimitata da due semirette con la stessa origine. Angoli particolari: nullo, piatto, giro; retto = metà del piatto; acuto, ottuso; convesso, concavo.
- La congruenza ($\cong$) è un concetto primitivo, legato all'idea di movimento rigido, ed è una relazione di equivalenza. Permette di confrontare, sommare e sottrarre segmenti e angoli; punto medio e bisettrice dividono a metà.
- Complementari: somma 90°; supplementari: somma 180°; esplementari: somma 360°.
- Teoremi: gli angoli opposti al vertice sono congruenti; supplementari (o complementari) di angoli congruenti sono congruenti.
- Ampiezze in gradi sessagesimali: $1° = 60'$, $1' = 60''$; angolo giro 360°.
- Un poligono di n lati ha $n - 3$ diagonali uscenti da ogni vertice e $n(n-3)/2$ diagonali in tutto; è regolare se è equilatero ed equiangolo.
- Con riga (non graduata) e compasso si trasportano segmenti e angoli: è il significato costruttivo dei postulati 9 e 10, e le costruzioni di Euclide erano anche prove di esistenza.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Quale dei seguenti è un ente primitivo della geometria euclidea?

   A. il segmento

   B. la semiretta

   C. la retta

   D. l'angolo

2. ● Due segmenti che hanno in comune soltanto un estremo e appartengono alla stessa retta si dicono:

   A. consecutivi ma non adiacenti
   B. adiacenti
   C. congruenti
   D. opposti

3. ● Il complementare di un angolo di $27°35'$ misura:

   A. $62°35'$
   B. $152°25'$
   C. $63°25'$
   D. $62°25'$

4. ● Quante diagonali ha un esagono?

   A. 9
   B. 6
   C. 12
   D. 18

5. ●● Quale affermazione è vera?

   A. Un angolo concavo è minore di un angolo piatto.
   B. Due angoli adiacenti sono sempre congruenti.
   C. Due angoli opposti al vertice sono sempre congruenti.
   D. Un angolo retto è il doppio di un angolo piatto.

6. ●● Quale delle seguenti figure è convessa?

   A. un semipiano
   B. una figura a forma di L
   C. un angolo concavo
   D. un poligono con un angolo interno di 200°

7. ● Un angolo di $1°$ equivale a:

   A. $60''$
   B. $100'$
   C. $\frac{1}{180}$ di angolo giro
   D. $3600''$

8. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Per tre punti passa sempre una retta. b) Due segmenti adiacenti sono anche consecutivi. c) I lati di un angolo piatto sono semirette opposte. d) Due angoli supplementari sono sempre adiacenti. e) L'unione di due figure convesse è sempre convessa. f) Un poligono equilatero è sempre regolare.

9. ● Completa. a) Le proposizioni accettate come vere senza dimostrazione si chiamano _____. b) Un teorema che discende immediatamente da un altro si chiama _____. c) Due angoli la cui somma è un angolo giro si dicono _____. d) La semiretta che divide un angolo in due angoli congruenti si chiama _____. e) Il punto che divide un segmento in due segmenti congruenti si chiama _____.

Calcolare

10. ● Calcola: a) 34°27′45″ + 18°45′30″; b) 90° − 47°32′18″; c) 125°14′ − 68°40′35″; d) 3 · 25°36′40″; e) 100°25′30″ : 3.

11. ● Scrivi in gradi, primi e secondi: a) 47,5°; b) 15,45°; c) 0,76°. d) Scrivi in forma decimale 41°20′24″.

12. ● Determina il complementare e il supplementare di: a) 38°; b) 52°18′; c) 71°43′27″.

13. ● Determina l'esplementare di: a) 135°20′; b) 250°15′30″. Quale dei due angoli dati è concavo?

14. ●● Due angoli adiacenti sono tali che: a) uno supera l'altro di 36°; b) uno è i $\frac{2}{7}$ dell'altro. Calcola le loro ampiezze in entrambi i casi.

15. ●● Due rette incidenti formano quattro angoli. a) Uno di essi misura 47°: quanto misurano gli altri tre? b) La somma di due angoli opposti al vertice è 150°: quanto misurano i quattro angoli?

16. ●● Su una retta si susseguono, nell'ordine, i punti A, B, C, D con $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $CD = 2$ cm. Calcola AC, BD e AD. Detto M il punto medio di AD, calcola BM e stabilisci se M sta su BC.

17. ●● Il segmento AB è lungo 18 cm e M è il suo punto medio. Il punto P di MB è tale che $MP = \frac{1}{3}\,MB$. Calcola AP e PB.

18. ●● a) Calcola il numero delle diagonali di un ottagono, di un decagono e di un dodecagono. b) Quale poligono ha 27 diagonali? c) In un poligono da ogni vertice escono 7 diagonali: quanti lati ha, e quante diagonali in tutto?

19. ●● L'angolo $\angle AOB$ misura 76° e OC è la sua bisettrice. La semiretta OD, interna all'angolo $\angle COB$, forma con OC un angolo di 14°. Calcola $\angle AOD$ e $\angle DOB$.

20. ●● a) Due angoli complementari stanno nel rapporto 2 : 3. b) Due angoli supplementari stanno nel rapporto 4 : 5. Calcola le loro ampiezze.

Dimostrare e argomentare

21. ●● Dimostra che angoli complementari di angoli congruenti sono congruenti. Scrivi ipotesi, tesi e giustifica ogni passaggio.

22. ●● Dimostra che le bisettrici di due angoli adiacenti sono perpendicolari, cioè formano un angolo retto.

23. ●● Dimostra che le bisettrici di due angoli opposti al vertice sono semirette opposte.

24. ●● I segmenti AB e BC sono adiacenti; M e N sono i punti medi rispettivamente di AB e di BC. Dimostra che $MN \cong \frac{1}{2} AC$.

25. ● Trova l'errore. Un compagno scrive: «Gli angoli α e β sono congruenti e hanno lo stesso vertice, quindi sono opposti al vertice». Spiega perché il ragionamento è sbagliato e disegna un controesempio.

26. ●●● Dimostra che l'intersezione di due figure convesse è una figura convessa. Mostra poi con un disegno che l'unione di due figure convesse può non essere convessa.

27. ●● Spiega perché: a) in ogni vertice di un poligono convesso i due angoli esterni sono congruenti; b) un triangolo non ha diagonali.

Problemi

28. ●● Quale angolo convesso formano le lancette di un orologio alle 3:00? E alle 4:00? Alle 9:30 e alle 2:20, ricordando che anche la lancetta delle ore si muove (di 0,5° al minuto)?

29. ● Una pizza rotonda è tagliata in 8 fette uguali con tagli che passano per il centro. Quanto misura l'angolo di ogni fetta? E se le fette fossero 7? Esprimi il risultato in gradi, primi e secondi, arrotondando al secondo.

30. ●● La Terra ruota di 360° in circa 24 ore. Di quanti gradi ruota in 2 ore e 20 minuti? Quanto tempo impiega a ruotare di 1°?

31. ●● Tre paesi A, B, C si trovano, nell'ordine, lungo una strada rettilinea. La distanza tra A e C è 42 km e il tratto AB è i $\frac{3}{4}$ del tratto BC. Un distributore si trova a metà strada tra A e C. Quanto dista da B?

32. ● Un ventaglio aperto forma un angolo di 162° ed è diviso da stecche in 9 settori congruenti e consecutivi. Quanto misura ciascun settore? Di quanti gradi si dovrebbe aprire il ventaglio perché ogni settore misuri 20°?

Costruire con riga e compasso

33. ● Disegna un segmento AB e una semiretta di origine O. Con riga e compasso costruisci sulla semiretta il punto P tale che $OP \cong AB$ e poi il punto Q tale che $OQ = 3AB$. Descrivi i passaggi.

34. ●● Sono dati due angoli convessi α e β, la cui somma è minore di un angolo piatto. Descrivi come costruire con riga e compasso un angolo congruente ad $\alpha + \beta$, giustificando ogni passaggio.

35. ●● **Con il computer.** In un programma di geometria dinamica disegna un angolo $\angle AOB$ e una semiretta di origine O'. Trasporta l'angolo sulla semiretta usando solo gli strumenti retta, circonferenza e intersezione, con i passaggi del paragrafo; poi disegna accanto, a occhio, una semiretta che sembri formare lo stesso angolo. Misura gli angoli e trascina i punti A e B. Che cosa osservi? Perché?

Verso la verifica

36. ●● Tre angoli consecutivi α, β, γ formano un angolo piatto; β è il doppio di α e γ supera β di $20°$. Calcola le tre ampiezze e l'angolo formato dalle bisettrici di α e di γ.

37. ●● Un poligono ha un numero di diagonali uguale al triplo del numero dei lati. Quanti lati ha? Quante diagonali escono da ciascun vertice?

38. ●●● Sfida. Le semirette OA, OB, OC, OD sono tali che gli angoli $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOA$ sono consecutivi e insieme formano un angolo giro. Sapendo che $\angle AOB \cong \angle COD$ e $\angle BOC \cong \angle DOA$, dimostra che OA e OC sono semirette opposte, e così pure OB e OD.

PER APPROFONDIRE

- [EUC] Il primo libro degli *Elementi*: definizioni, postulati e nozioni comuni, seguiti dalle prime proposizioni. Leggerne qualche pagina aiuta a capire lo stile delle dimostrazioni.
- [BOY] I capitoli sulla matematica greca raccontano il passaggio dalla geometria pratica degli Egizi e dei Babilonesi a quella dimostrativa.
- [CR] Courant e Robbins discutono il metodo assiomatico e il significato dei postulati nella matematica moderna.

Glossario del capitolo

Angoli complementari, supplementari, esplementari
Coppie di angoli la cui somma è, rispettivamente, un angolo retto (90°), un angolo piatto (180°), un angolo giro (360°).

Angoli opposti al vertice
Due angoli convessi i cui lati sono i prolungamenti dei lati dell'altro oltre il vertice; sono sempre congruenti.

Angolo
Ciascuna delle due parti in cui il piano è diviso da due semirette con la stessa origine (il vertice), comprese le semirette stesse (i lati).

Angolo retto
Metà di un angolo piatto; misura 90°. Un angolo convesso minore del retto è acuto, uno compreso tra il retto e il piatto è ottuso.

Bisettrice
Semiretta con origine nel vertice di un angolo che lo divide in due angoli congruenti.

Congruenza
Relazione tra figure che si possono sovrapporre punto per punto con un movimento rigido; si indica con $\cong$ ed è una relazione di equivalenza.

Corollario
Teorema che discende in modo immediato da un altro teorema.

Costruzione con riga e compasso
Costruzione di una figura con la sola riga non graduata (retta per due punti) e il compasso (circonferenza di centro e raggio dati); i nuovi punti sono intersezioni di rette e archi già tracciati.

Diagonale
Segmento che congiunge due vertici non consecutivi di un poligono; un poligono di n lati ne ha $n(n-3)/2$.

Ente primitivo
Concetto che una teoria assume senza definirlo; nella geometria piana euclidea sono il punto, la retta e il piano.

Figura convessa
Figura che contiene il segmento che unisce due qualsiasi suoi punti; una figura che non è convessa si dice concava.

Grado sessagesimale
Unità di misura degli angoli pari alla trecentosessantesima parte dell'angolo giro; si divide in 60 primi, e ogni primo in 60 secondi.

Lemma
Teorema di supporto, dimostrato soprattutto per essere usato nella dimostrazione di un risultato più importante.

Poligono regolare
Poligono che è insieme equilatero (lati tutti congruenti) ed equiangolo (angoli interni tutti congruenti).

Postulato (assioma)
Proposizione accettata come vera senza dimostrazione, che descrive le proprietà fondamentali degli enti primitivi.

Punto medio
Punto di un segmento che lo divide in due segmenti congruenti.

Segmenti adiacenti
Segmenti consecutivi (con in comune soltanto un estremo) che appartengono alla stessa retta.

Segmento
Figura formata da due punti distinti A e B, detti estremi, e da tutti i punti della retta AB compresi tra essi.

Semipiano
Ciascuna delle due parti in cui una retta divide il piano, insieme alla retta stessa, detta origine del semipiano.

Semiretta
Ciascuna delle due parti in cui un punto, detto origine, divide una retta, insieme all'origine stessa.

Teorema
Proposizione dimostrata a partire da postulati, definizioni e teoremi già provati; ha la forma «se ipotesi, allora tesi».

Soluzioni

1. C. Punto, retta e piano sono enti primitivi; segmento, semiretta e angolo sono enti definiti.

2. B. Hanno in comune solo un estremo (consecutivi) e stanno sulla stessa retta: sono adiacenti.

3. D. $90° - 27°35' = 89°60' - 27°35' = 62°25'$.

4. A. $d = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$.

5. C. È il teorema degli angoli opposti al vertice. A è falsa (un angolo concavo è maggiore di un piatto), B è falsa (due adiacenti sono supplementari, congruenti solo se entrambi retti), D è falsa (il retto è la metà del piatto).

6. A. Il semipiano è convesso; la figura a L, l'angolo concavo e un poligono con un angolo interno concavo sono figure concave.

7. D. $1° = 60' = 60 \cdot 60'' = 3600''$; inoltre $1°$ è $\frac{1}{360}$ di angolo giro, non $\frac{1}{180}$.

8. a) F: per tre punti passa una retta solo se sono allineati. b) V. c) V. d) F: due angoli supplementari possono non avere neppure lo stesso vertice; sono adiacenti solo se sono anche consecutivi con i lati non comuni opposti. e) F: per esempio l'unione di due semirette con la stessa origine non opposte (o una figura a L formata da due rettangoli) non è convessa. f) F: il rombo non quadrato è equilatero ma non equiangolo.

9. a) assiomi (o postulati); b) corollario; c) esplementari; d) bisettrice; e) punto medio.

10. a) $52°72'75'' = 53°13'15''$. b) $89°59'60'' - 47°32'18'' = 42°27'42''$. c) $125°14' = 124°73'60''$; $124°73'60'' - 68°40'35'' = 56°33'25''$. d) $75°108'120'' = 75°110' = 76°50'$. e) $100°25'30'' = 99°85'30'' = 99°84'90''$; $99° : 3 = 33°$, $84' : 3 = 28'$, $90'' : 3 = 30''$: risultato $33°28'30''$.

11. a) $47°30'$. b) $0{,}45 \cdot 60' = 27'$: $15°27'$. c) $0{,}76 \cdot 60' = 45{,}6'$; $0{,}6 \cdot 60'' = 36''$: $0°45'36''$. d) $41° + 20/60° + 24/3600° = 41° + 1224/3600° = 41° + 0{,}34° = 41{,}34°$.

12. a) complementare 52°, supplementare 142°. b) $37°42'$ e $127°42'$. c) $18°16'33''$ e $108°16'33''$.

13. a) $360° - 135°20' = 224°40'$. b) $360° - 250°15'30'' = 109°44'30''$. È concavo l'angolo di $250°15'30''$ (maggiore di 180°).

14. Gli angoli adiacenti sono supplementari. a) $x + (x + 36°) = 180°$, $x = 72°$: gli angoli misurano 72° e 108°. b) $x + \frac{2}{7}x = 180°$, $\frac{9}{7}x = 180°$, $x = 140°$: gli angoli misurano 140° e 40°.

15. a) L'opposto al vertice misura 47°; i due adiacenti misurano $180° - 47° = 133°$. Angoli: 47°, 133°, 47°, 133°. b) Gli opposti al vertice sono congruenti: $150° : 2 = 75°$; gli altri due misurano 105°. Angoli: 75°, 105°, 75°, 105°.

16. $AC = 8$ cm, $BD = 7$ cm, $AD = 10$ cm. $AM = 5$ cm, quindi $BM = AM - AB = 2$ cm. Poiché $AB = 3$ cm < $AM = 5$ cm < $AC = 8$ cm, il punto M sta su BC.

17. $AM = MB = 9$ cm; $MP = 3$ cm. $AP = AM + MP = 12$ cm; $PB = MB - MP = 6$ cm (controllo: $12 + 6 = 18$).

18. a) Ottagono: $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20$; decagono: $\frac{10 \cdot 7}{2} = 35$; dodecagono: $\frac{12 \cdot 9}{2} = 54$. b) $n(n - 3) = 54 = 9 \cdot 6$: $n = 9$, ennagono. c) $n - 3 = 7$, $n = 10$ (decagono), con 35 diagonali.

19. $\angle AOC \cong \angle COB = 38°$. $\angle AOD = \angle AOC + \angle COD = 38° + 14° = 52°$; $\angle DOB = \angle COB - \angle COD = 38° - 14° = 24°$ (controllo: $52° + 24° = 76°$).

20. a) 90° si divide in $2 + 3 = 5$ parti da 18°: 36° e 54°. b) 180° si divide in 9 parti da 20°: 80° e 100°.

21. Ipotesi: $\alpha \cong \beta$; α' complementare di α; β' complementare di β. Tesi: $\alpha' \cong \beta'$. Per ipotesi $\alpha + \alpha'$ e $\beta + \beta'$ sono angoli retti; tutti gli angoli retti sono congruenti (metà di angoli piatti, postulati 11, 12 e 13), quindi $\alpha + \alpha' \cong \beta + \beta'$. Allora $\alpha' \cong (\alpha + \alpha') - \alpha$ e $\beta' \cong (\beta + \beta') - \beta$ sono differenze di angoli congruenti

(perché $\alpha \cong \beta$), quindi congruenti per il postulato 11. c.v.d.

22. Siano $\angle AOB$ e $\angle BOC$ adiacenti, con bisettrici OM e ON. Ipotesi: $\angle AOB + \angle BOC$ è un angolo piatto; $\angle MOB \cong \frac{1}{2}\ \angle AOB$; $\angle BON \cong \frac{1}{2}\ \angle BOC$. Tesi: $\angle MON$ è retto. L'angolo $\angle MON$ contiene OB ed è somma degli angoli consecutivi $\angle MOB$ e $\angle BON$: $\angle MON \cong \frac{1}{2}\ \angle AOB + \frac{1}{2}\ \angle BOC \cong \frac{1}{2}\ (\angle AOB + \angle BOC)$, cioè la metà di un angolo piatto: un angolo retto. c.v.d.

23. Siano α e γ opposti al vertice, β un angolo adiacente a entrambi, e siano b_1, b_2 le bisettrici di α e γ. L'angolo formato da b_1 e b_2 che contiene β è $\frac{1}{2}\ \alpha + \beta + \frac{1}{2}\ \gamma$. Poiché $\alpha \cong \gamma$ (teorema degli opposti al vertice), $\frac{1}{2}\ \alpha + \frac{1}{2}\ \gamma \cong \alpha$, e quindi l'angolo vale $\alpha + \beta$, che è piatto perché α e β sono adiacenti. Due semirette con la stessa origine che formano un angolo piatto sono opposte. c.v.d.

24. Ipotesi: AB e BC adiacenti; $AM \cong MB$; $BN \cong NC$. Tesi: $MN \cong \frac{1}{2}\ AC$. M sta su AB e N su BC, quindi MB e BN sono adiacenti e $MN = MB + BN$. Ma $MB \cong \frac{1}{2}\ AB$ e $BN \cong \frac{1}{2}\ BC$, dunque $MN \cong \frac{1}{2}\ AB + \frac{1}{2}\ BC \cong \frac{1}{2}\ (AB + BC) = \frac{1}{2}\ AC$. c.v.d.

25. Il compagno usa il teorema inverso, che è falso. Controesempio: un angolo di 40° e la sua copia ottenuta ruotandolo attorno al vertice, in modo che i due angoli siano consecutivi (formano insieme un angolo di 80°): sono congruenti, hanno lo stesso vertice, ma i lati dell'uno non sono i prolungamenti dei lati dell'altro.

26. Siano F e G convesse e siano P, Q due punti di $F \cap G$. Poiché $P, Q \in F$ e F è convessa, $PQ \subseteq F$; analogamente $PQ \subseteq G$. Quindi $PQ \subseteq F \cap G$, che è dunque convessa. c.v.d. Controesempio per l'unione: due rettangoli disposti a forma di L (o due segmenti consecutivi non allineati): presi un punto all'estremità di ciascuno, il segmento che li unisce esce dalla figura.

27. a) I due angoli esterni in un vertice sono formati ciascuno da un lato e dal prolungamento dell'altro: i lati di uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro, quindi sono opposti al vertice e perciò congruenti. b) In un triangolo ogni vertice è consecutivo agli altri due: non esistono vertici non consecutivi (infatti $n - 3 = 0$).

28. In 12 ore la lancetta delle ore percorre 360°, cioè 30° all'ora e 0,5° al minuto; quella dei minuti percorre 6° al minuto. Alle 3:00: $3 \cdot 30° = 90°$. Alle 4:00: 120°. Alle 9:30: ore a $9 \cdot 30° + 30 \cdot 0{,}5° = 285°$, minuti a 180°: differenza 105°. Alle 2:20: ore a $60° + 10° = 70°$, minuti a 120°: 50°.

29. $360° : 8 = 45°$. Con 7 fette: $360° : 7 = 51{,}428...° = 51°25'42{,}9'' \approx 51°25'43''$.

30. In un'ora $360° : 24 = 15°$. In 2 h 20 min = $\frac{7}{3}$ h: $15° \cdot \frac{7}{3} = 35°$. Per 1° servono 60 min : 15 = 4 minuti.

31. $AB + BC = 42$ km con $AB = \frac{3}{4}\ BC$: $\frac{7}{4}\ BC = 42$ km, $BC = 24$ km, $AB = 18$ km. Il distributore è a 21 km da A, quindi a $21 - 18 = 3$ km da B (tra B e C).

32. $162° : 9 = 18°$. Con settori di 20°: $9 \cdot 20° = 180°$, cioè il ventaglio dovrebbe aprirsi fino a formare un angolo piatto.

33. Con apertura AB e centro O si taglia la semiretta in P: $OP \cong AB$. Con la stessa apertura e centro P si taglia la semiretta, oltre P, in P_1; con centro P_1 si ottiene Q oltre P_1. I segmenti OP, PP_1, P_1Q sono adiacenti e congruenti ad AB, quindi $OQ = OP + PP_1 + P_1Q = 3AB$.

34. Si traccia una semiretta a di origine O e vi si trasporta α, ottenendo il secondo lato b. Poi si trasporta β sulla semiretta b, nel semipiano di origine la retta di b che non contiene a: si ottiene il lato c. Gli angoli di lati a, b (congruente ad α) e di lati b, c (congruente a β) sono consecutivi, quindi l'angolo di lati a e c che contiene b è la loro somma ed è congruente ad $\alpha + \beta$ (somme di angoli congruenti sono congruenti, postulato 11).

35. L'angolo costruito ha sempre la stessa ampiezza di $\angle AOB$, comunque si trascinino A e B: la costruzione impone $OC \cong O'C'$, $OD \cong O'D'$ e $CD \cong C'D'$, che re-

stano vere in ogni posizione, e per il terzo criterio di congruenza gli angoli in O e in O' sono congruenti. La semiretta disegnata a occhio non dipende da A e da B: appena li si sposta, la sua ampiezza non coincide più con quella di $\angle AOB$.

36. $\alpha + 2\alpha + (2\alpha + 20°) = 180°$, $5\alpha = 160°$, $\alpha = 32°$, $\beta = 64°$, $\gamma = 84°$. L'angolo tra le bisettrici di α e di γ comprende metà di α, tutto β e metà di γ: $16° + 64° + 42° = 122°$.

37. $\frac{n(n-3)}{2} = 3n$ con $n \geq 3$; dividendo per $n \neq 0$: $n - 3 = 6$, $n = 9$. L'ennagono ha 27 diagonali ($= 3 \cdot 9$) e da ogni vertice ne escono 6.

38. Poniamo $\angle AOB \cong \angle COD = \alpha$ e $\angle BOC \cong \angle DOA = \beta$. Gli angoli consecutivi formano un angolo giro: $\alpha + \beta + \alpha + \beta$ è un giro, cioè $2(\alpha + \beta)$ è un angolo giro. Quindi $\alpha + \beta$ è la metà di un angolo giro, cioè un angolo piatto (la metà di un giro è un piatto, perché due piatti formano un giro e la metà è unica). Ma $\alpha + \beta = \angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$: l'angolo $\angle AOC$ è piatto, e quindi OA e OC sono semirette opposte. Analogamente $\angle BOC + \angle COD = \beta + \alpha$ è piatto, quindi OB e OD sono opposte. c.v.d.