CAPITOLO

11

Disequazioni di primo grado

Un'equazione cerca un numero; una disequazione cerca tutti i numeri che vanno bene. E spesso sono infiniti.

OBIETTIVI

1. Conoscere le proprietà delle disuguaglianze e scrivere un insieme di numeri come intervallo, in tre notazioni.
2. Applicare i principi di equivalenza alle disequazioni, cambiando il verso quando si moltiplica o si divide per un numero negativo.
3. Risolvere disequazioni intere di primo grado, riconoscendo quelle sempre verificate e quelle impossibili.
4. Risolvere sistemi di disequazioni intersecando gli insiemi delle soluzioni.
5. Studiare il segno di prodotti e quozienti di fattori di primo grado per risolvere disequazioni prodotto e fratte.
6. Tradurre in disequazioni problemi concreti: tariffe a confronto, voti minimi, condizioni geometriche.

INDICE DEL CAPITOLO

11.1 Disuguaglianze e intervalli 2
11.2 Disequazioni intere di primo grado 6
11.3 Sistemi di disequazioni 10
11.4 Lo studio del segno 12
11.5 Problemi con le disequazioni 15

Matematica 1 · Parte IV · Equazioni e disequazioni · versione 1.0
Capitolo 11: Disequazioni di primo grado · pagine 279–302 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo 10 hai imparato a risolvere equazioni: domande del tipo «quale numero rende vera questa uguaglianza?». La risposta, per un'equazione di primo grado determinata, è un solo numero. Ma molte domande della vita reale non chiedono un valore esatto. Chiedono *fino a quando*, *almeno quanto*, *non più di*. Quanti minuti posso telefonare prima che un abbonamento diventi più caro di un altro? Che voto mi serve, come minimo, nell'ultima verifica per avere la sufficienza in pagella? Quanto può essere lungo il terzo lato di un triangolo, se gli altri due misurano 5 cm e 8 cm?

Per rispondere servono le **disequazioni**: confronti tra due espressioni che contengono un'incognita, scritti con i simboli $<$, $>$, $\leq$, $\geq$. La loro soluzione, di solito, non è un numero ma un insieme di numeri, spesso infinito: tutti i numeri maggiori di 7,5, tutti quelli compresi tra 3 e 13. Per descrivere questi insiemi in modo compatto useremo gli **intervalli**.

La buona notizia è che le tecniche del capitolo 10 restano quasi tutte valide: si sviluppano i calcoli, si trasportano i termini, si eliminano i denominatori numerici. C'è però una regola nuova, che è anche la fonte dell'errore più frequente: quando si moltiplicano o si dividono i due membri per un numero *negativo*, il verso della disuguaglianza si rovescia. Capiremo perché, e impareremo poi a trattare le disequazioni in cui l'incognita compare in un prodotto o al denominatore: lì il metodo decisivo sarà lo **studio del segno**.

11.1 Disuguaglianze e intervalli

11.1.1 Disuguaglianze numeriche

Dati due numeri razionali a e b, vale sempre una e una sola delle tre relazioni $a < b$, $a = b$, $a > b$: è la *legge di tricotomia*, che hai già usato per ordinare i numeri sulla retta. Dire che $a < b$ equivale a dire che la differenza $b - a$ è positiva; sulla retta orientata, a si trova a sinistra di b.

Una **disuguaglianza** è una scrittura che confronta due espressioni numeriche con uno dei simboli $<$ (minore), $>$ (maggiore), $\leq$ (minore o uguale), $\geq$ (maggiore o uguale). Come le proposizioni del capitolo 5, una disuguaglianza numerica è vera oppure falsa: $-3 < 2$ è vera, $\frac{1}{2} > \frac{2}{3}$ è falsa, $5 \leq 5$ è vera (perché 5 è uguale a 5), mentre $5 < 5$ è falsa. I simboli $<$ e $>$ esprimono una disuguaglianza *stretta*, i simboli $\leq$ e $\geq$ una disuguaglianza *larga*. La «punta» del simbolo indica sempre il numero più piccolo, e $a < b$ si può leggere anche da destra a sinistra: $b > a$. Questo modo di leggere si chiama **verso** della disuguaglianza: $a < b$ e $b > a$ dicono la stessa cosa con versi opposti.

11.1.2 Le proprietà delle disuguaglianze

Per risolvere le disequazioni ci servono alcune regole che dicono come si comporta una disuguaglianza quando la si trasforma. Partiamo da un esempio numerico: $3 < 7$.

- Aggiungiamo 5 a entrambi i membri: $8 < 12$. Il verso non cambia. Lo stesso accade sottraendo: $3 - 10 < 7 - 10$, cioè $-7 < -3$. Sulla retta, aggiungere lo stesso numero significa spostare entrambi i punti della stessa distanza: chi stava a sinistra resta a sinistra.
- Moltiplichiamo per 2: $6 < 14$. Il verso non cambia.
- Moltiplichiamo per -2: otteniamo -6 e -14, e ora $-6 > -14$. Il verso *si è rovesciato*.

Perché la moltiplicazione per un negativo rovescia il verso? Moltiplicare per -1 significa passare all'opposto, cioè riflettere i punti della retta rispetto all'origine: lo specchio scambia la sinistra con la destra, e il numero che era più piccolo diventa il più grande. In modo algebrico: se $a < b$, allora $b - a > 0$; moltiplicando per un numero $c < 0$, il prodotto $(b - a)c$ è negativo per la regola dei segni, cioè $b\,c - a\,c < 0$, ovvero $a\,c > b\,c$.

IN SINTESI

Proprietà delle disuguaglianze (per a, b, c razionali).

- **Transitiva:** se $a < b$ e $b < c$, allora $a < c$.
- **Addizione:** se $a < b$, allora $a + c < b + c$ per ogni c (lo stesso vale sottraendo).
- **Moltiplicazione per un positivo:** se $a < b$ e $c > 0$, allora $a\,c < b\,c$ e $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- **Moltiplicazione per un negativo:** se $a < b$ e $c < 0$, allora $a\,c > b\,c$ e $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$: **il verso cambia**.
- **Somma membro a membro:** se $a < b$ e $c < d$, allora $a + c < b + d$.
- **Reciproci:** se a e b sono *concordi* (entrambi positivi o entrambi negativi) e $a < b$, allora $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Le stesse regole valgono con $\leq$ al posto di $<$.

L'ultima proprietà merita attenzione. Tra numeri positivi è intuitiva: 2 è minore di 4, ma un mezzo è maggiore di un quarto. Se però i due numeri sono discordi la regola non vale: $-1 < 2$ e anche $-1 < \frac{1}{2}$, perché un negativo resta minore di un positivo. Allo stesso modo, elevare al quadrato conserva il verso solo tra numeri positivi: $2 < 3$ dà $4 < 9$, ma $-5 < 1$ dà $25 > 1$. Non esiste una regola «automatica» per le potenze: bisogna guardare i segni.

11.1.3 Disequazioni e soluzioni

Una **disequazione** è una disuguaglianza tra due espressioni letterali, di cui almeno una contiene un'incognita, che ci chiediamo per quali valori dell'incognita sia vera. Per esempio

$$2x - 5 > 1$$

non è né vera né falsa finché non si sceglie un valore di x: per $x = 4$ diventa $3 > 1$, vera; per $x = 2$ diventa $-1 > 1$, falsa; per $x = 3$ diventa $1 > 1$, falsa (1 non è maggiore di sé stesso). È un enunciato aperto, nel senso del capitolo 5.

Si chiama **soluzione** di una disequazione ogni valore dell'incognita che, sostituito, la rende una disuguaglianza vera. L'**insieme delle soluzioni**, indicato con S, è l'insieme di verità dell'enunciato. Per la disequazione $2x - 5 > 1$ scopriremo tra poco che le soluzioni sono tutti i numeri maggiori di 3: sono infinite, e non si possono elencare. Ecco perché ci serve un modo per descrivere insiemi infiniti di numeri.

Come per le equazioni, il *grado* di una disequazione intera è il grado del polinomio che si ottiene portando tutto al primo membro e riducendo. In questo capitolo ci occupiamo delle disequazioni di primo grado e di quelle che si risolvono con fattori di primo grado. In questo volume, come nei capitoli precedenti, le lettere rappresentano numeri razionali.

11.1.4 Gli intervalli

Un **intervallo** è l'insieme di tutti i numeri compresi tra due estremi, oppure di tutti i numeri che stanno da una stessa parte di un estremo. Sulla retta orientata un intervallo è un segmento oppure una semiretta. Gli intervalli si descrivono in tre modi equivalenti:

1. con una o due **disuguaglianze**, per esempio $-2 \le x < 3$;
2. con la notazione con le **parentesi quadre**, per esempio $[-2; 3[$;
3. con una **rappresentazione grafica** sulla retta (figura 11.1).

Nella notazione con le parentesi, la parentesi quadra «rivolta verso il numero», come in $[-2$, indica che l'estremo *appartiene* all'intervallo; la parentesi «rivolta all'esterno», come in $3[$, indica che l'estremo è *escluso*. Gli estremi si separano con il punto e virgola, perché la virgola è già usata per i decimali. Sulla retta, un estremo incluso si disegna con un pallino pieno, un estremo escluso con un pallino vuoto.

Un intervallo è **limitato** se ha entrambi gli estremi numerici, **illimitato** se si estende senza fine da una parte. Per gli intervalli illimitati si usano i simboli $+\infty$ (più infinito) e $-\infty$ (meno infinito), che *non sono numeri*: indicano soltanto che l'intervallo prosegue senza fine in quella direzione. Per questo dalla parte di $\pm\infty$ la parentesi è sempre aperta. Un intervallo si dice **aperto** se non contiene i suoi estremi numerici, **chiuso** se li contiene; se ne contiene uno solo, è chiuso da una parte e aperto dall'altra.

Tabella 11.1 Gli intervalli di estremi a e b, con $a < b$, nelle tre notazioni.

Disuguaglianza	Intervallo	Sulla retta	Nome
$a \le x \le b$	$[a; b]$	segmento, due pallini pieni	limitato chiuso
$a < x < b$	$]a; b[$	segmento, due pallini vuoti	limitato aperto
$a \le x < b$	$[a; b[$	pieno in a, vuoto in b	chiuso a sinistra, aperto a destra
$a < x \le b$	$]a; b]$	vuoto in a, pieno in b	aperto a sinistra, chiuso a destra
$x \ge a$	$[a; +\infty[$	semiretta verso destra, pallino pieno	illimitato superiormente, chiuso
$x > a$	$]a; +\infty[$	semiretta verso destra, pallino vuoto	illimitato superiormente, aperto
$x \le b$	$]-\infty; b]$	semiretta verso sinistra, pallino pieno	illimitato inferiormente, chiuso
$x < b$	$]-\infty; b[$	semiretta verso sinistra, pallino vuoto	illimitato inferiormente, aperto

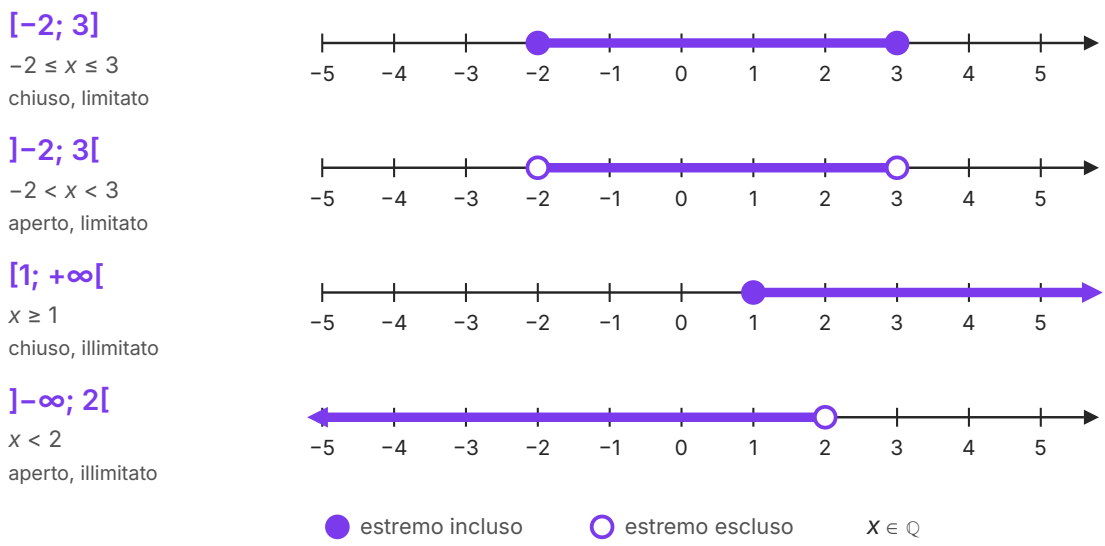


Figura 11.1 Quattro intervalli sulla retta orientata. Il pallino pieno indica un estremo che appartiene all'intervallo, il pallino vuoto un estremo escluso; la freccia indica che l'intervallo prosegue senza fine.

L'insieme di *tutti* i numeri si può scrivere come $]-\infty; +\infty[$. Quando l'insieme delle soluzioni è formato da due intervalli separati, come «$x < -1$ oppure $x > 4$», si scrive la loro unione: $S =]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[$. Quando non ci sono soluzioni si scrive $S = \varnothing$.

Una precisazione. In questo volume gli intervalli sono insiemi di numeri razionali: $[-2; 3]$ è l'insieme dei razionali compresi tra -2 e 3. Il prossimo anno, quando conoscerai i numeri reali,

gli intervalli saranno insiemi di numeri reali e il disegno sulla retta diventerà ancora più fedele; la notazione e le regole di questo capitolo resteranno identiche.

APPROFONDIMENTO

Da dove vengono i simboli. I simboli $<$ e $>$ compaiono a stampa nell'*Artis analyticae praxis* del matematico inglese Thomas Harriot, pubblicata nel 1631, dieci anni dopo la morte dell'autore. Il segno di uguale era più antico: lo aveva introdotto il gallese Robert Recorde nel 1557, con due segmenti paralleli «perché nessuna coppia di cose può essere più uguale». I simboli con il trattino, $\leq$ e $\geq$, si diffusero più tardi, nel corso del Settecento. Prima di allora le disuguaglianze si scrivevano a parole: una regola che oggi occupa mezza riga poteva richiedere un intero paragrafo in latino.

COLLEGAMENTI

Intervalli in fisica e nella vita quotidiana. Nel capitolo 3 hai visto che ogni misura ha un errore. In fisica una lunghezza si scrive, per esempio, $l = (12{,}4 \pm 0{,}1)$ cm: significa che il valore vero sta nell'intervallo $[12{,}3;\ 12{,}5]$, cioè $12{,}3 \leq l \leq 12{,}5$ (in cm). Anche i limiti di velocità sono disequazioni: in città deve essere $v \leq 50$ km/h. Un farmaco «da conservare tra 2 °C e 8 °C» chiede che la temperatura T soddisfi $2 \leq T \leq 8$. In chimica, una soluzione è acida quando il suo pH è minore di 7: un'altra disuguaglianza, e un altro intervallo.

11.2 Disequazioni intere di primo grado

11.2.1 Disequazioni equivalenti e principi di equivalenza

Due disequazioni nella stessa incognita sono **disequazioni equivalenti** se hanno lo stesso insieme delle soluzioni. Risolvere una disequazione significa trasformarla, passo dopo passo, in disequazioni equivalenti sempre più semplici, fino a una della forma $x > k$, $x \leq k$ e simili, di cui si leggono subito le soluzioni. Le trasformazioni lecite sono garantite da due principi, che traducono le proprietà del paragrafo precedente.

IN SINTESI

Primo principio di equivalenza. Aggiungendo o sottraendo ai due membri di una disequazione uno stesso numero, o una stessa espressione definita per ogni valore dell'incognita, si ottiene una disequazione equivalente.

Secondo principio di equivalenza. Moltiplicando o dividendo i due membri di una disequazione per uno stesso numero **positivo** si ottiene una disequazione equivalente con lo **stesso verso**; moltiplicando o dividendo per uno stesso numero **negativo** si ottiene una disequazione equivalente **solo se si cambia il verso**.

Dal primo principio seguono le stesse conseguenze che conosci per le equazioni: si può *trasportare* un termine da un membro all'altro cambiandone il segno, e si possono cancellare termini uguali presenti in entrambi i membri. Dal secondo principio segue che si possono eliminare i denominatori numerici moltiplicando per il loro mcm, che è positivo, senza cambiare il verso. Segue anche che si può cambiare segno a tutti i termini, cioè moltiplicare per -1, *a patto di cambiare il verso*: $-x > 4$ equivale a $x < -4$.

Nel capitolo 10 i principi di equivalenza delle equazioni erano illustrati da una bilancia in equilibrio. Una disequazione assomiglia a una bilancia *inclinata*: aggiungere lo stesso peso sui due piatti non cambia da che parte pende. Ma per la moltiplicazione per un negativo l'immagine della bilancia non funziona più, perché non esistono pesi negativi: lì conviene ricordare lo specchio della retta.

Attenzione a un punto sottile. Nel secondo principio si moltiplica per un *numero* di segno noto. Se si moltiplica o si divide per un'espressione che contiene l'incognita, come x o $x - 1$, non si sa quale sia il suo segno: per alcuni valori è positiva, per altri negativa, per uno è zero. Per questo non si dividono mai i due membri per un'espressione con l'incognita. Vedremo nel paragrafo 11.4 come trattare questi casi.

ERRORE FREQUENTE

Dimenticare di cambiare il verso. Da $-3x > 12$ molti scrivono «$x > -4$». È sbagliato: dividendo per -3, numero negativo, il verso cambia e si ottiene $x < -4$. Controllo rapido: $x = 0$ soddisfa $x > -4$, ma sostituito nella disequazione di partenza dà $0 > 12$, falso. Un controllo con un valore facile smaschera quasi sempre l'errore.

11.2.2 Risolvere una disequazione intera

Una disequazione si dice **disequazione intera** se l'incognita non compare in nessun denominatore. La strategia di risoluzione è quella delle equazioni:

1. si eliminano i denominatori numerici moltiplicando i due membri per il loro mcm;
2. si svolgono i calcoli (prodotti, prodotti notevoli) ed eventualmente si semplifica;
3. si portano i termini con l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo, e si riducono i termini simili;
4. si divide per il coefficiente dell'incognita, **cambiando il verso se il coefficiente è negativo**;
5. si scrive l'insieme delle soluzioni, anche come intervallo, e lo si rappresenta sulla retta.

Torniamo alla disequazione del paragrafo 11.1.3: da $2x - 5 > 1$ trasportiamo -5 e otteniamo $2x > 6$; dividendo per 2, che è positivo, $x > 3$. Quindi $S =]3; +\infty[$, come avevamo anticipato.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Risolvi la disequazione $3(x-2)-2(x+1)<5-2x$.

Calcoli. Svolgiamo i prodotti al primo membro: $3x-6-2x-2<5-2x$, cioè $x-8<5-2x$.

Trasporto. Portiamo $-2x$ al primo membro e -8 al secondo, cambiandone il segno: $x+2x<5+8$, cioè $3x<13$.

Divisione. Dividiamo per 3, positivo, senza cambiare il verso: $x<\frac{13}{3}$.

Soluzioni. $S=\left]-\infty;\ \frac{13}{3}\right[$. Controllo: $x=0$ appartiene a S; sostituito, dà $-6-2<5$, cioè $-8<5$, vero. Il valore $x=5$ non appartiene a S: dà $9-12<-5$, cioè $-3<-5$, falso. I due controlli sono coerenti con la soluzione.

Quando ci sono denominatori numerici, li eliminiamo per primi. Risolviamo $\frac{x-1}{2}-\frac{2x+3}{3}\geq\frac{x}{6}-1$. Il mcm dei denominatori è 6, positivo: moltiplicando ogni termine per 6 il verso resta lo stesso e si ottiene $3(x-1)-2(2x+3)\geq x-6$. Svolgendo, $3x-3-4x-6\geq x-6$, cioè $-x-9\geq x-6$. Trasportando: $-x-x\geq -6+9$, quindi $-2x\geq 3$. Ora il coefficiente è negativo: dividendo per -2 il verso cambia, e $x\leq -\frac{3}{2}$. Le soluzioni sono $S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$; l'estremo $-\frac{3}{2}$ è incluso perché la disequazione è larga.

Come per le equazioni, i prodotti notevoli possono far comparire termini di secondo grado che poi si cancellano. Nella disequazione $(x+3)^2-(x-1)(x+1)\leq 4x+2$, sviluppando si ha $x^2+6x+9-x^2+1\leq 4x+2$: i termini in x^2 si eliminano e resta $6x+10\leq 4x+2$, cioè $2x\leq -8$, quindi $x\leq -4$ e $S=]-\infty;-4]$. Attenzione al segno meno davanti a $(x-1)(x+1)=x^2-1$: il prodotto va calcolato prima, tra parentesi, e poi si cambia il segno a tutti i suoi termini.

11.2.3 La forma normale e i casi particolari

Dopo i passi 1–3 ogni disequazione intera di primo grado assume una delle **forme normali** $a\,x>b$, $a\,x\geq b$, $a\,x<b$, $a\,x\leq b$, con a e b numeri. La conclusione dipende dal segno di a.

- Se $a>0$, si divide per a senza cambiare il verso: $a\,x>b$ dà $x>\frac{b}{a}$.
- Se $a<0$, si divide per a cambiando il verso: $a\,x>b$ dà $x<\frac{b}{a}$.
- Se $a=0$, non si può dividere. La disequazione diventa $0\cdot x>b$, cioè $0>b$, che non contiene più l'incognita: è vera per tutti i valori di x oppure per nessuno, a seconda del valore di b.

Nel terzo caso si dice che la disequazione è **sempre verificata** se la disuguaglianza numerica che resta è vera (allora $S=]-\infty;+\infty[$, tutti i numeri), e che è **impossibile** (o mai verificata) se è

falsa (allora $S = \varnothing$). Per esempio, $2(x + 3) - x > x + 4$ diventa $x + 6 > x + 4$, cioè $0 \cdot x > -2$: poiché $0 > -2$ è vero, la disequazione è sempre verificata. Invece $3(x - 1) \geq 3x$ diventa $0 \cdot x \geq 3$: poiché $0 \geq 3$ è falso, la disequazione è impossibile.

Con una disuguaglianza larga bisogna fare attenzione al caso $b = 0$: $0 \cdot x \geq 0$ è sempre verificata (0 è maggiore *o uguale* a 0), mentre $0 \cdot x > 0$ è impossibile. La tabella 11.2 riassume tutti i casi; confrontala con la discussione dell'equazione $a\,x = b$ nel capitolo 10.

Tabella 11.2 La disequazione $a\,x > b$ (e la sua versione larga $a\,x \geq b$) al variare di a e b.

Caso	$a\,x > b$	$a\,x \geq b$
$a > 0$	$x > \frac{b}{a}$	$x \geq \frac{b}{a}$
$a < 0$	$x < \frac{b}{a}$ (il verso cambia)	$x \leq \frac{b}{a}$ (il verso cambia)
$a = 0$, $b < 0$	sempre verificata	sempre verificata
$a = 0$, $b = 0$	impossibile ($0 > 0$ è falso)	sempre verificata ($0 \geq 0$ è vero)
$a = 0$, $b > 0$	impossibile	impossibile

11.2.4 Disequazioni e grafici

Nel capitolo 10 hai visto che lo zero della funzione $y = 2x - 5$, cioè la soluzione dell'equazione $2x - 5 = 0$, è $x = 2{,}5$: è l'ascissa del punto in cui il grafico taglia l'asse x. Le disequazioni hanno un'interpretazione grafica altrettanto semplice. Risolvere $2x - 5 > 0$ significa cercare i valori di x per cui l'ordinata $y = 2x - 5$ è positiva, cioè i punti del grafico che stanno *sopra* l'asse x. Algebricamente, $2x > 5$ e quindi $x > 2{,}5$; nella figura 11.2 sono i punti del tratto verde, la cui proiezione sull'asse x è proprio l'intervallo $]2{,}5;\, +\infty[$.

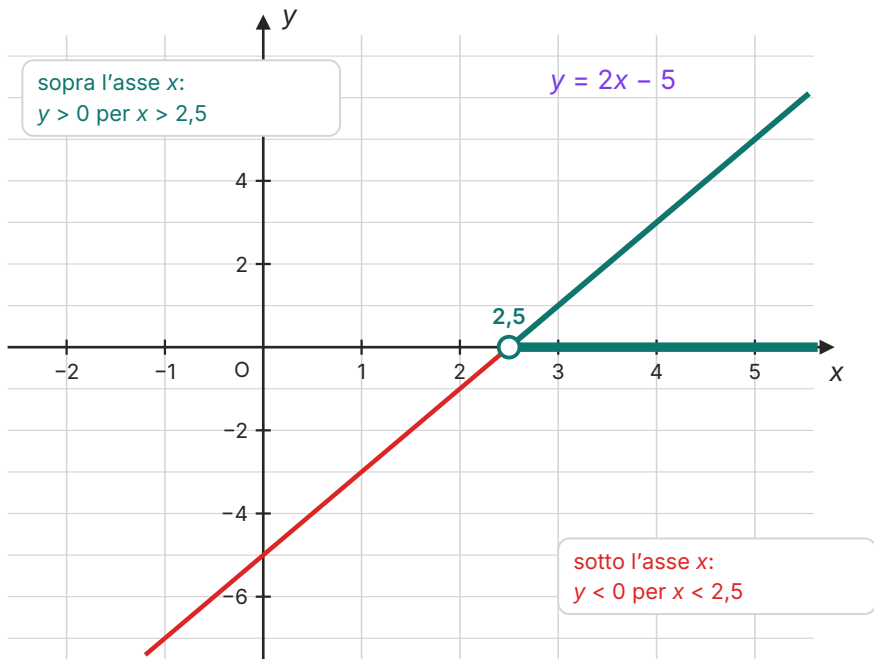


Figura 11.2 Il grafico di $y = 2x - 5$. Il tratto verde, sopra l'asse x, corrisponde alle soluzioni di $2x - 5 > 0$, cioè $x > 2{,}5$; il tratto rosso alle soluzioni di $2x - 5 < 0$. Nel punto (2,5; 0) la funzione si annulla.

Il grafico rende evidente anche il ruolo del coefficiente: la retta $y = 2x - 5$ sale (il coefficiente di x è positivo), quindi è positiva *a destra* del suo zero. Una retta che scende, come $y = -2x + 4$, è positiva *a sinistra* del suo zero, che è 2: le soluzioni di $-2x + 4 > 0$ sono $x < 2$. È la versione grafica del cambio di verso, e ci servirà nel paragrafo 11.4.

11.3 Sistemi di disequazioni

11.3.1 Risolvere un sistema

A volte un numero deve soddisfare più condizioni *contemporaneamente*. Un **sistema di disequazioni** è un insieme di due o più disequazioni nella stessa incognita, scritte una sotto l'altra e collegate da una parentesi graffa, di cui si cercano le soluzioni *comuni*. La parentesi graffa si legge «e»: con il linguaggio del capitolo 5, l'insieme delle soluzioni del sistema è l'**intersezione** degli insiemi delle soluzioni delle singole disequazioni.

Il metodo è sempre lo stesso: si risolve ogni disequazione separatamente, poi si riportano le soluzioni su uno **schema grafico** formato da una riga per ogni disequazione, con le stesse posi-

zioni dei numeri; si tracciano le linee verticali in corrispondenza degli estremi e si prendono i tratti in cui *tutte* le righe sono «piene».

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Risolvi il sistema formato dalle tre disequazioni (1) $2(x-1) \geq x-4$, (2) $5-3x > x-7$, (3) $\frac{x}{2}+1 > 0$.

Disequazione (1). $2x-2 \geq x-4$, quindi $x \geq -2$.

Disequazione (2). $-3x-x > -7-5$, cioè $-4x > -12$; dividendo per -4 il verso cambia: $x < 3$.

Disequazione (3). Moltiplicando per 2: $x+2 > 0$, cioè $x > -2$.

Schema. Nella figura 11.3 le tre soluzioni sono riportate su tre righe. La (1) contiene -2, la (3) no: poiché il sistema chiede che valgano *tutte*, -2 è escluso. Il valore 3 è escluso dalla (2).

Soluzioni. $S =]-2;\,3[$, cioè $-2 < x < 3$.

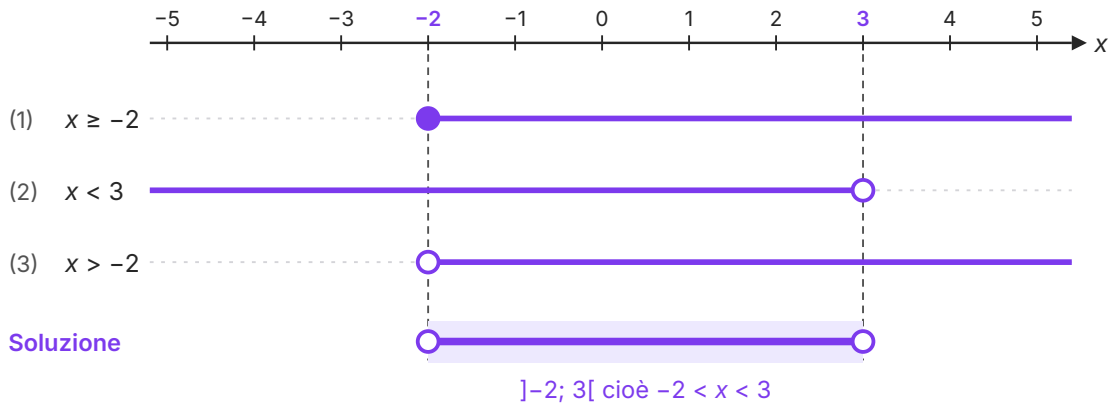


Figura 11.3 Lo schema grafico del sistema dell'esempio svolto. Ogni riga riporta le soluzioni di una disequazione; la soluzione del sistema è la parte comune a tutte le righe. L'estremo -2 è escluso perché non soddisfa la disequazione (3).

Un sistema può non avere soluzioni anche se ogni sua disequazione ne ha infinite. Il sistema formato da $x > 4$ e $x < 1$ è impossibile: nessun numero è contemporaneamente maggiore di 4 e minore di 1, e le due righe dello schema non si sovrappongono mai. Si scrive $S = \varnothing$. Se invece una delle disequazioni è sempre verificata, la sua riga è tutta piena e non pone alcun vincolo; se una è impossibile, l'intero sistema è impossibile.

11.3.2 Disuguaglianze doppie

Una scrittura come $-3 < 2x+1 \leq 7$ è una **disuguaglianza doppia**: chiede che l'espressione centrale sia maggiore di -3 *e* minore o uguale a 7. È quindi un sistema di due disequazioni,

$2x + 1 > -3$ e $2x + 1 \le 7$. Quando l'incognita compare solo nel termine centrale, si può risolvere direttamente, applicando i principi di equivalenza a tutti e tre i membri: sottraendo 1 si ottiene $-4 < 2x \le 6$; dividendo per 2, $-2 < x \le 3$. Quindi $S =]-2; 3]$.

Se si deve dividere per un numero negativo, il verso cambia in *entrambe* le disuguaglianze: da $0 < 5 - x \le 4$, sottraendo 5, si ha $-5 < -x \le -1$; moltiplicando per -1, $5 > x \ge 1$, cioè $1 \le x < 5$. È buona abitudine riscrivere il risultato con il numero più piccolo a sinistra, come appare sulla retta.

11.4 Lo studio del segno

11.4.1 Il segno di un binomio di primo grado

Consideriamo la disequazione $(3 - 2x)(x + 4) > 0$. Sviluppando il prodotto comparirebbe x^2, e le equazioni e disequazioni di secondo grado si studiano il prossimo anno. Ma non serve sviluppare: la domanda «quando un prodotto è positivo?» ha una risposta semplice, la regola dei segni. Basta sapere, per ogni valore di x, il segno di ciascun fattore. Questo procedimento si chiama **studio del segno**.

Il primo passo è studiare il segno di un singolo binomio $a\,x + b$, con $a \neq 0$. Si risolve la disequazione $a\,x + b > 0$: per $a > 0$ si ottiene $x > -\dfrac{b}{a}$, per $a < 0$ si ottiene $x < -\dfrac{b}{a}$. Il binomio si annulla in $x = -\dfrac{b}{a}$ ed è negativo dall'altra parte. Con il linguaggio della figura 11.2: se il coefficiente di x è positivo, il binomio è positivo a destra del suo zero; se è negativo, è positivo a sinistra.

> **DA RICORDARE**
> Per studiare il segno di un fattore si imposta sempre la disequazione «fattore **> 0**» (anche se il testo chiede < 0 o ≤ 0) e la si risolve: dove il fattore è positivo si disegna una linea continua, dove è negativo una linea tratteggiata, e dove si annulla si scrive 0. Solo alla fine, sulla riga del risultato, si sceglie il segno richiesto dal testo.

11.4.2 Disequazioni prodotto

Si chiama **disequazione prodotto** una disequazione della forma $A \cdot B \cdot C \ldots > 0$ (o con $<$, $\ge$, $\le$), in cui il primo membro è un prodotto di fattori e il secondo è zero. Ogni fattore cambia segno in un solo punto, il suo zero; gli zeri dividono la retta in intervalli, e in ciascun intervallo il segno del prodotto è costante. Si costruisce così una **tabella dei segni**: una riga per fattore, una riga finale per il prodotto, ottenuta con la regola dei segni colonna per colonna.

Risolviamo ora la disequazione $(3 - 2x)(x + 4) > 0$ con cui si apre il paragrafo 11.4.

Segno dei fattori. $3 - 2x > 0$ quando $-2x > -3$, cioè $x < \frac{3}{2}$. $x + 4 > 0$ quando $x > -4$.

Tabella dei segni. Gli zeri -4 e $\frac{3}{2}$ dividono la retta in tre intervalli:

	$x < -4$	$-4 < x < \frac{3}{2}$	$x > \frac{3}{2}$
$3 - 2x$	+	+	−
$x + 4$	−	+	+
prodotto	**−**	**+**	**−**

Soluzioni. Il prodotto è positivo solo nell'intervallo centrale. Negli zeri il prodotto vale 0, e $0 > 0$ è falso: gli estremi sono esclusi. $S =]-4; \frac{3}{2}[$.

Controllo. Per $x = 0$: $3 \cdot 4 = 12 > 0$, vero. Per $x = 2$: $(-1) \cdot 6 = -6$, negativo: 2 non è soluzione, come previsto.

Lo studio del segno permette di risolvere anche disequazioni di grado superiore al primo, purché il polinomio si possa **scomporre** in fattori di primo grado con le tecniche del capitolo 8. Per esempio, $x^2 - 5x < 0$ si scrive $x(x - 5) < 0$: il fattore x è positivo per $x > 0$, il fattore $x - 5$ per $x > 5$; il prodotto è negativo quando i fattori sono discordi, cioè per $0 < x < 5$. Allo stesso modo $x^2 - 16 \le 0$ diventa $(x - 4)(x + 4) \le 0$, con soluzioni $-4 \le x \le 4$: qui gli estremi sono inclusi, perché per $x = \pm 4$ il prodotto vale 0 e $0 \le 0$ è vero.

Due casi particolari si risolvono senza tabella. Un quadrato non è mai negativo, quindi $(x - 3)^2 > 0$ è vera per ogni $x \neq 3$, mentre $(x - 3)^2 < 0$ è impossibile. E un'espressione come $x^2 + 4$ è sempre positiva (è almeno 4): perciò $x^2 + 4 < 0$ non ha soluzioni, e un fattore come $x^2 + 4$ in un prodotto non cambia mai il segno del risultato.

11.4.3 Disequazioni fratte

Una **disequazione fratta** è una disequazione in cui l'incognita compare in almeno un denominatore. Si tratta come una disequazione prodotto, con due differenze importanti. La prima: occorrono le **condizioni di esistenza** del capitolo 9, perché i valori che annullano un denominatore non possono essere soluzioni (per essi la frazione non ha significato). La seconda: il quoziente di due numeri ha lo stesso segno del loro prodotto, quindi la regola dei segni è la stessa, ma gli zeri del denominatore vanno sempre **esclusi**, anche quando la disequazione è larga.

Il procedimento è questo:

1. si scrivono le C.E.;
2. si porta tutto al primo membro e si riduce a un'unica frazione, in modo da avere la forma $\frac{N}{D} > 0$ (o con $<$, $\ge$, $\le$);

3. si studia il segno di ogni fattore del numeratore e del denominatore (sempre «> 0»);
4. si compila la tabella dei segni e si scelgono gli intervalli con il segno richiesto, includendo gli zeri del numeratore solo se la disequazione è larga ed escludendo sempre gli zeri del denominatore.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Risolvi $\frac{(x-1)(x+2)}{3-x} \geq 0$.

C.E. $3 - x \neq 0$, cioè $x \neq 3$.

Segno dei fattori. Numeratore: $x - 1 > 0$ per $x > 1$; $x + 2 > 0$ per $x > -2$. Denominatore: $3 - x > 0$ per $x < 3$.

Tabella dei segni (figura 11.4). Gli zeri -2, 1, 3 dividono la retta in quattro intervalli. Per $x < -2$ i segni sono $(-)(-)/(+)$, quindi la frazione è positiva; tra -2 e 1 sono $(-)(+)/(+)$, negativa; tra 1 e 3 sono $(+)(+)/(+)$, positiva; per $x > 3$ sono $(+)(+)/(-)$, negativa.

Soluzioni. Cerchiamo la frazione positiva *o nulla*. Gli zeri del numeratore, -2 e 1, sono inclusi (la frazione vale 0); lo zero del denominatore, 3, è escluso. $S =]-\infty; -2] \cup [1; 3[$.

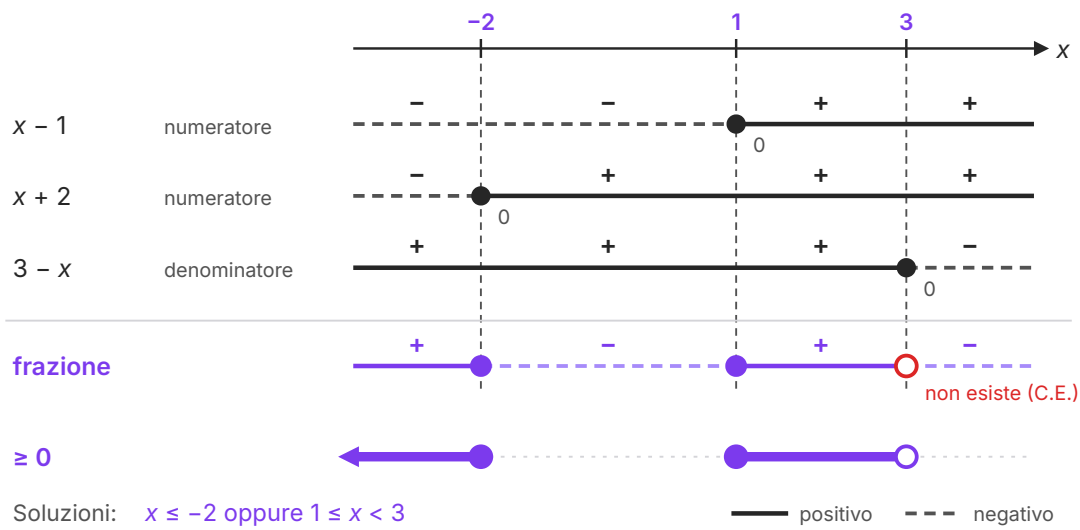


Figura 11.4 La tabella dei segni della frazione $\frac{(x-1)(x+2)}{3-x}$. Linea continua: fattore positivo; linea tratteggiata: fattore negativo; 0: zero del fattore. Nell'ultima riga le soluzioni di $\frac{(x-1)(x+2)}{3-x} \geq 0$: il valore 3, escluso dalle C.E., ha il pallino vuoto anche se la disequazione è larga.

Spesso il secondo membro non è zero. In questo caso *non* si moltiplica per il denominatore: si trasporta tutto al primo membro e si fa il denominatore comune.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Risolvi $\dfrac{x+1}{x-2} \le 2$.

C.E. $x \neq 2$.

Riduzione a un'unica frazione. $\dfrac{x+1}{x-2} - 2 \le 0$, cioè $\dfrac{x+1-2(x-2)}{x-2} \le 0$, cioè $\dfrac{5-x}{x-2} \le 0$.

Segno. $5 - x > 0$ per $x < 5$; $x - 2 > 0$ per $x > 2$. Per $x < 2$ la frazione è (+)/(−), negativa; tra 2 e 5 è (+)/(+), positiva; per $x > 5$ è (−)/(+), negativa.

Soluzioni. Cerchiamo la frazione negativa o nulla: 5 è incluso, 2 è escluso. $S =]-\infty; 2[\cup [5; +\infty[$.

Controllo. Per $x = 0$: $\dfrac{1}{-2} = -0{,}5 \le 2$, vero. Per $x = 3$: $\dfrac{4}{1} = 4 \le 2$, falso. Coerente.

ERRORE FREQUENTE

Moltiplicare per il denominatore. Nell'esempio precedente, la tentazione è «moltiplicare per $x - 2$»: $x + 1 \le 2(x - 2)$, da cui $x \ge 5$. Si perdono così tutte le soluzioni $x < 2$! Il motivo è che $x - 2$ non ha un segno fisso: per $x > 2$ è positivo e il verso resta, ma per $x < 2$ è negativo e il verso dovrebbe cambiare. In una disequazione fratta non si eliminano i denominatori che contengono l'incognita: **si studia il segno**. Per la stessa ragione $x^2 > x$ non si risolve «dividendo per x»: si scrive $x(x - 1) > 0$ e si studia il segno.

11.5 Problemi con le disequazioni

Per risolvere un problema con una disequazione si seguono le stesse fasi dei problemi con le equazioni (capitolo 10): si sceglie l'incognita e se ne fissano le limitazioni, cioè i valori che hanno senso nella situazione concreta; si traduce il testo in una disequazione (o in un sistema); la si risolve; si confrontano le soluzioni con le limitazioni e si risponde con una frase. Le parole del testo che segnalano una disequazione sono «almeno» (≥), «al massimo», «non più di» (≤), «più di» (>), «meno di» (<), «conviene», «supera», «non basta».

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Nelle prime tre verifiche di matematica Marta ha preso 5,5, 7 e 6. Che voto deve prendere, come minimo, nella quarta verifica perché la media dei quattro voti sia almeno 6,5? (I voti vanno da 1 a 10.)

Incognita e limitazioni. Sia x il voto della quarta verifica, con $1 \le x \le 10$.

Disequazione. La media è $\frac{5{,}5 + 7 + 6 + x}{4} = \frac{18{,}5 + x}{4}$ e deve essere almeno 6,5: $\frac{18{,}5 + x}{4} \ge 6{,}5$.

Risoluzione. Moltiplicando per 4: $18{,}5 + x \ge 26$, quindi $x \ge 7{,}5$.

Confronto con le limitazioni. Il sistema formato da $x \ge 7{,}5$ e $x \le 10$ dà $7{,}5 \le x \le 10$. Risposta: Marta deve prendere almeno 7,5.

Tariffe a confronto. Un operatore telefonico propone due piani mensili. Il piano A costa 6 € al mese più 0,10 € per ogni minuto di chiamata; il piano B costa 15 € al mese più 0,04 € al minuto. Chiamiamo x il numero di minuti al mese, con $x \ge 0$. I costi mensili sono $6 + 0{,}10x$ e $15 + 0{,}04x$ euro. Il piano A costa meno quando

$$6 + 0{,}10x < 15 + 0{,}04x$$

cioè $0{,}06x < 9$ e quindi $x < 150$. Per meno di 150 minuti al mese conviene il piano A, per più di 150 il piano B; per esattamente 150 minuti i due piani costano uguale, 21 €. La figura 11.5 mostra i grafici delle due funzioni costo, che sono rette (capitolo 6): la soluzione della disequazione è l'insieme delle ascisse in cui la retta di A sta sotto la retta di B. È un esempio di **problema di decisione**: tra più alternative si sceglie la più conveniente, e la risposta non è un numero ma una regola («se chiami meno di 150 minuti scegli A»). Problemi di questo tipo, molto più grandi, sono l'oggetto della ricerca operativa, la parte della matematica che aiuta aziende ed enti a organizzare trasporti, turni e produzioni.

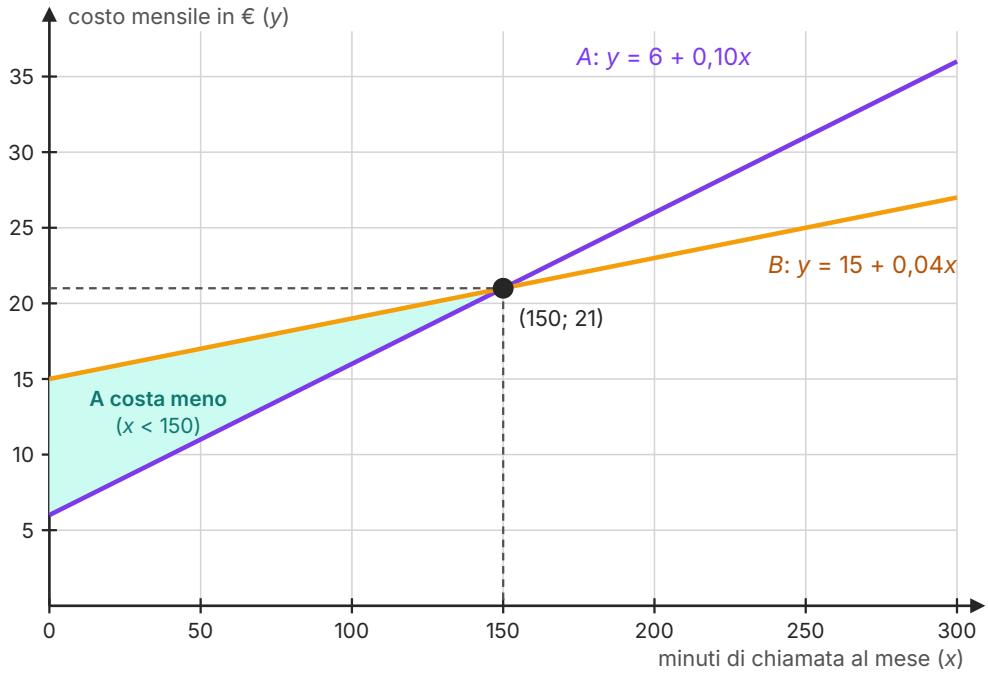


Figura 11.5 Il costo mensile dei piani A ($y = 6 + 0{,}10x$) e B ($y = 15 + 0{,}04x$) in funzione dei minuti di chiamata x. Le rette si incontrano in (150; 21); a sinistra di $x = 150$ la retta di A è più in basso: il piano A costa meno.

Una condizione geometrica. Con tre bastoncini si può costruire un triangolo solo se ciascuno è più corto della somma degli altri due: prova con bastoncini di 3 cm, 4 cm e 10 cm, e vedrai che i due più corti, anche distesi, non arrivano a chiudere la figura. Questa condizione, la **disuguaglianza triangolare**, sarà dimostrata nel capitolo 13; qui la usiamo per un calcolo. Se due lati di un triangolo misurano 5 cm e 8 cm, quanto può misurare il terzo lato x? Le condizioni sono tre: $x < 5 + 8$, $5 < 8 + x$, $8 < 5 + x$. La prima dà $x < 13$, la seconda è vera per ogni $x > 0$, la terza dà $x > 3$. Il sistema ha soluzione $3 < x < 13$: il terzo lato deve essere maggiore della differenza e minore della somma degli altri due.

APPROFONDIMENTO · DISEQUAZIONI LETTERALI

Una **disequazione letterale** contiene, oltre all'incognita, altre lettere, dette *parametri*, che rappresentano numeri fissati ma non specificati. Come per le equazioni letterali del capitolo 10, la risoluzione richiede una **discussione**: quando si divide per il coefficiente dell'incognita bisogna sapere non solo se è zero, ma anche se è positivo o negativo, perché da questo dipende il verso. Per esempio, $a\,x > 2$ ha soluzioni $x > \frac{2}{a}$ se $a > 0$, $x < \frac{2}{a}$ se $a < 0$, ed è impossibile se $a = 0$ (diventa $0 > 2$).

Vediamo un esempio più completo: risolviamo, al variare del parametro a, la disequazione $(a-1)x \le a^2 - 1$.

Osservazione. Il secondo membro si scompone: $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$. Il coefficiente dell'incognita è $a - 1$.

Caso $a > 1$. Il coefficiente è positivo: dividendo, $x \le a + 1$.

Caso $a < 1$. Il coefficiente è negativo: dividendo, il verso cambia e $x \ge a + 1$.

Caso $a = 1$. La disequazione diventa $0 \cdot x \le 0$, vera per ogni x: è sempre verificata.

Verifica su un caso. Per $a = 3$ la disequazione è $2x \le 8$, cioè $x \le 4 = a + 1$. Per $a = -2$ è $-3x \le 3$, cioè $x \ge -1 = a + 1$. Entrambi i casi confermano la discussione.

SINTESI

- Una disuguaglianza confronta due espressioni con $<$, $>$, $\leq$, $\geq$. Sommando uno stesso numero ai due membri o moltiplicandoli per uno stesso numero positivo il verso resta; moltiplicando per un numero negativo il verso cambia.
- Una disequazione è una disuguaglianza con un'incognita; le sue soluzioni formano un insieme, spesso infinito, che si scrive come intervallo o unione di intervalli.
- Intervalli: $[a; b]$ chiuso, $]a; b[$ aperto, $[a; +\infty[$ e $]-\infty; b[$ illimitati. Da parte di $\pm\infty$ la parentesi è sempre aperta. Sulla retta: pallino pieno = estremo incluso, pallino vuoto = escluso.
- Principi di equivalenza: si possono trasportare termini cambiandone il segno ed eliminare denominatori numerici (mcm positivo); dividendo per un coefficiente negativo si cambia il verso.
- Forma normale $a\,x > b$: se $a > 0$, $x > \frac{b}{a}$; se $a < 0$, $x < \frac{b}{a}$; se $a = 0$ la disequazione è sempre verificata o impossibile.
- Graficamente, le soluzioni di $m\,x + q > 0$ sono le ascisse dei punti della retta $y = m\,x + q$ che stanno sopra l'asse x.
- Le soluzioni di un sistema di disequazioni sono l'intersezione delle soluzioni delle singole disequazioni: si usa lo schema grafico a righe.
- Una disuguaglianza doppia è un sistema di due disequazioni; se l'incognita è solo al centro si risolve operando sui tre membri.
- Disequazioni prodotto: si studia il segno di ogni fattore (sempre «> 0») e si applica la regola dei segni nella tabella dei segni.
- Disequazioni fratte: C.E., tutto al primo membro, un'unica frazione, studio del segno. Gli zeri del denominatore sono sempre esclusi. Mai moltiplicare per un denominatore che contiene l'incognita.
- Nelle disequazioni letterali (approfondimento) si discute il segno del coefficiente dell'incognita (positivo, negativo, nullo).
- Nei problemi: incognita, limitazioni, disequazione o sistema, soluzione, confronto con le limitazioni, risposta.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Se $a < b$, quale delle seguenti disuguaglianze è *sempre* vera?
   - **A.** $-a < -b$
   - **B.** $a - 3 < b - 3$
   - **C.** $2a > 2b$
   - **D.** $a^2 < b^2$

2. ● L'insieme dei numeri x tali che $-1 < x \leq 4$ si scrive:
   - **A.** $[-1; 4]$
   - **B.** $]-1; 4[$
   - **C.** $]-1; 4]$
   - **D.** $[-1; 4[$

3. ● La disequazione $-3x > 12$ è equivalente a:
   - **A.** $x > -4$
   - **B.** $x < -4$
   - **C.** $x > 4$
   - **D.** $x < 4$

4. ●● La disequazione $0 \cdot x > -5$:
   - **A.** non ha soluzioni
   - **B.** ha soluzioni $x > -5$
   - **C.** ha soluzioni $x > 0$
   - **D.** è verificata per ogni x

5. ●● Le soluzioni del sistema formato da $x > 2$ e $x \leq 5$ sono:
   - **A.** $]2; 5]$
   - **B.** $[2; 5[$
   - **C.** $]-\infty; 2[\cup [5; +\infty[$
   - **D.** $\varnothing$

6. ●● Le soluzioni di $\dfrac{x-3}{x+1} < 0$ sono:
   - **A.** $x < 3$
   - **B.** $x < -1$ oppure $x > 3$
   - **C.** $-1 \leq x < 3$
   - **D.** $-1 < x < 3$

7. ●● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Se $a < b$, allora $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ per ogni coppia di numeri non nulli. b) Il numero 3 appartiene all'intervallo $[3; +\infty[$. c) Moltiplicando i due membri di una disequazione per $x - 1$ il verso non cambia. d) La disequazione $x^2 + 1 > 0$ è verificata per ogni x.

8. ● Completa. a) Moltiplicando o dividendo i due membri di una disequazione per un numero negativo, si ottiene una disequazione equivalente solo se si ... il verso. b) L'insieme dei numeri minori di 7 si scrive come intervallo ... . c) Un intervallo si dice ... se contiene entrambi i suoi estremi. d) Le soluzioni di un sistema di disequazioni sono l'... delle soluzioni delle singole disequazioni.

9. ● Scrivi ogni intervallo con le disuguaglianze e rappresentalo sulla retta: a) $[-2; 5[$; b) $]-\infty; 0]$; c) $]\frac{1}{2}; +\infty[$; d) $]-3; -1[$.

Calcolare

10. ● Risolvi e scrivi le soluzioni come intervallo: a) $3x - 5 > 7$; b) $4 - 2x \geq 10$; c) $5(x - 1) < 2(x + 5)$; d) $2x + 3 \leq 4x - 9$.

11. ●● Risolvi: a) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} > 1$; b) $\frac{x+1}{4} - \frac{x-2}{3} \geq 1$; c) $\frac{2x-1}{3} + \frac{1}{2} < \frac{x+2}{6}$.

12. ●● Stabilisci se ciascuna disequazione è sempre verificata o impossibile: a) $2(x + 1) - x > x + 1$; b) $3(x - 2) \geq 3x$; c) $4x - (x + 5) \leq 3(x - 1) - 2$; d) $(x - 2)^2 > x(x - 4) + 4$.

13. ●● Risolvi: a) $(x + 2)^2 - x^2 < 12$; b) $(x - 3)(x + 3) \geq (x - 1)^2$; c) $(2x + 1)^2 - 4x(x - 1) \leq 13$.

14. ●● Risolvi i sistemi: a) $2x - 1 > 3$ e $x + 4 \leq 10$; b) $3 - x \geq 1$ e $2x + 5 > 1$; c) $\frac{x}{3} - 1 < 0$ e $4 - x < 0$; d) $5x - 2 \geq 3x$, $1 - x < 4$ e $x - 1 \leq 2x + 1$.

15. ● Risolvi le disuguaglianze doppie: a) $-1 \leq 2x + 3 < 9$; b) $0 < 5 - x \leq 4$.

16. ●● Risolvi con lo studio del segno: a) $(x - 4)(x + 1) > 0$; b) $(2x - 3)(5 - x) \geq 0$; c) $x(x + 3)(x - 2) < 0$.

17. ●● Scomponi in fattori e risolvi: a) $x^2 - 16 \leq 0$; b) $x^2 + 2x > 0$; c) $x^2 - 6x + 9 > 0$; d) $x^2 + 4 < 0$.

18. ●● Risolvi le disequazioni fratte: a) $\frac{x-2}{x+3} > 0$; b) $\frac{4-x}{2x-1} \geq 0$; c) $\frac{3}{x-1} < 0$; d) $\frac{x+2}{(x-1)(x+4)} \geq 0$.

19. ●●● Riduci a un'unica frazione e risolvi: a) $\frac{x+3}{x-1} \geq 2$; b) $\frac{1}{x} < 3$; c) $\frac{2x}{x+2} \leq 1$.

20. ●● Risolvi il sistema formato da $\frac{x-3}{x+1} < 0$ e $2x - 1 \geq 0$.

21. ●●● *(approfondimento)* Risolvi al variare del parametro: a) $a\,x < 3$; b) $(a + 2)x \geq a^2 - 4$.

Dimostrare e argomentare

22. ●● Dimostra che se $a < b$ e $c < d$, allora $a + c < b + d$. Usa la proprietà dell'addizione due volte e la proprietà transitiva.

23. ●● Trova l'errore. Per risolvere $\frac{x+1}{x-2} \geq 3$, Luca moltiplica per $x - 2$ e scrive $x + 1 \geq 3x - 6$, quindi $x \leq \frac{7}{2}$. Mostra con un valore che la sua soluzione è sbagliata, spiega l'errore e risolvi correttamente.

24. ●● Dimostra che se a e b sono positivi e $a < b$, allora $a^2 < b^2$ (moltiplica la disuguaglianza prima per a, poi per b). Mostra con un esempio che la conclusione può essere falsa se i numeri non sono entrambi positivi.

25. ●●● Dimostra che se $a < b$, allora $a < \frac{a+b}{2} < b$: la media di due numeri è sempre compresa tra di essi. Quale proprietà di $\mathbb{Q}$, studiata nel capitolo 3, viene così giustificata?

26. ●● Spiega perché la disequazione $x^2 > x$ non si può risolvere dividendo i due membri per x. Risolvila correttamente e indica una soluzione che il metodo sbagliato perderebbe.

Problemi

27. ● Una palestra propone due formule: A, con 30 € di iscrizione e 6 € per ogni ingresso; B, senza iscrizione, con 10 € per ingresso. Da quanti ingressi in poi la formula A costa meno della B?

28. ●● Luca ha preso 4,5 e 6 nelle prime due verifiche di latino. a) Che voto gli serve, come minimo, nella terza verifica per avere una media di almeno 6? b) E se la terza verifica vale il doppio delle altre (media ponderata con pesi 1, 1, 2)?

29. ●● Due lati di un triangolo misurano 7 cm e 12 cm. a) Quali valori può avere la misura x del terzo lato? b) Quante sono le possibili misure intere in centimetri? c) Quante restano se il perimetro deve essere minore di 35 cm?

30. ● La base di un rettangolo supera l'altezza di 4 cm e il perimetro non deve superare 40 cm. Quali valori può avere l'altezza?

31. ●● La temperatura in gradi Fahrenheit si ottiene da quella in gradi Celsius con la formula $F = \frac{9}{5}C + 32$. a) Una stanza è confortevole tra 15 °C e 25 °C: a quale intervallo di gradi Fahrenheit corrisponde? b) Per quali temperature Celsius si ha $F > 100$?

32. ●● Un'agenzia noleggia auto con due tariffe giornaliere: A, 40 € più 0,20 € per km; B, 25 € più 0,35 € per km. Per quali percorrenze in un giorno conviene la tariffa A?

Verso la verifica

33. ●● Risolvi il sistema formato da $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} \leq 1$ e $(x+2)^2 - (x-2)^2 > 8$ e rappresenta le soluzioni sulla retta.

34. ●● Risolvi $\frac{x^2-4}{x^2-3x} \geq 0$, scomponendo numeratore e denominatore.

35. ●●● *(approfondimento)* Sfida. Considera l'equazione $(k-2)x = k+1$ nell'incognita x, con parametro k. a) Per quale valore di k è impossibile? b) Per quali valori di k ha una soluzione positiva? (Suggerimento: ricava x e risolvi una disequazione fratta nell'incognita k.)

PER APPROFONDIRE

- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: come si traduce un testo in simboli e come si controlla il risultato con casi particolari.
- [CR] Courant e Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le disuguaglianze tra le medie e il loro uso nelle dimostrazioni.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: la nascita del simbolismo algebrico tra Cinquecento e Seicento.

Glossario del capitolo

Disequazione
Disuguaglianza tra due espressioni contenenti un'incognita, di cui si cercano i valori che la rendono vera.

Disequazione fratta
Disequazione con l'incognita in almeno un denominatore; si risolve con le C.E. e lo studio del segno, escludendo sempre gli zeri del denominatore.

Disequazione impossibile
Disequazione che non ha soluzioni, come $0 \cdot x \geq 3$; $S = \varnothing$.

Disequazione intera
Disequazione in cui l'incognita non compare in alcun denominatore.

Disequazione letterale
Disequazione che contiene parametri oltre all'incognita; si discute il segno del coefficiente dell'incognita.

Disequazione prodotto
Disequazione della forma $A \cdot B \cdot \ldots > 0$ (o con $<, \geq, \leq$), con un prodotto di fattori al primo membro e zero al secondo; si risolve con lo studio del segno.

Disequazione sempre verificata
Disequazione soddisfatta da ogni valore dell'incognita, come $0 \cdot x > -2$; $S =]-\infty; +\infty[$.

Disequazioni equivalenti
Disequazioni nella stessa incognita che hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

Disuguaglianza
Scrittura che confronta due espressioni con uno dei simboli $<, >, \leq, \geq$; se le espressioni sono numeriche è vera oppure falsa.

Disuguaglianza doppia
Scrittura come $a < E \leq b$, equivalente al sistema formato da $E > a$ ed $E \leq b$.

Intervallo
Insieme dei numeri compresi tra due estremi, o che stanno da una stessa parte di un estremo; si scrive per esempio $[a; b]$ o $]a; +\infty[$.

Intervallo chiuso / aperto
Chiuso se contiene i suoi estremi numerici (parentesi quadre rivolte verso l'interno), aperto se non li contiene.

Intervallo limitato / illimitato
Limitato se ha entrambi gli estremi numerici; illimitato se prosegue senza fine verso $+\infty$ o $-\infty$.

Primo principio di equivalenza (disequazioni)
Aggiungendo o sottraendo ai due membri uno stesso numero o una stessa espressione si ottiene una disequazione equivalente.

Secondo principio di equivalenza (disequazioni)
Moltiplicando o dividendo i due membri per uno stesso numero positivo il verso resta; per un numero negativo il verso deve cambiare.

Sistema di disequazioni
Insieme di disequazioni nella stessa incognita che devono valere contemporaneamente; le soluzioni sono l'intersezione delle soluzioni delle singole disequazioni.

Soluzione di una disequazione
Valore dell'incognita che, sostituito, rende vera la disuguaglianza; l'insieme di tutte le soluzioni si indica con S.

Studio del segno
Metodo che determina, per ogni intervallo, il segno di un prodotto o di un quoziente di fattori studiando il segno di ciascun fattore.

Tabella dei segni
Schema con una riga per ogni fattore e una per il risultato, in cui si riporta il segno in ciascun intervallo determinato dagli zeri dei fattori.

Verso di una disuguaglianza
Il senso del confronto (minore o maggiore): a < b e b > a esprimono la stessa relazione con versi opposti.

Soluzioni

1. B. Sottraendo lo stesso numero il verso resta. A è falsa perché moltiplicando per −1 il verso cambia ($-a > -b$); C è falsa perché moltiplicando per 2 il verso resta ($2a < 2b$); D è falsa per numeri negativi: $-3 < 1$ ma $9 > 1$.

2. C. −1 è escluso (parentesi aperta), 4 è incluso (parentesi chiusa): $]-1; 4]$.

3. B. Dividendo per −3 il verso cambia: $x < -4$.

4. D. La disequazione diventa $0 > -5$, che è vero indipendentemente da x: è sempre verificata.

5. A. Intersezione: $2 < x \le 5$, cioè $]2; 5]$.

6. D. Numeratore positivo per $x > 3$, denominatore positivo per $x > -1$; la frazione è negativa tra −1 e 3. Gli estremi sono esclusi (in −1 la frazione non esiste, in 3 vale 0).

7. a) Falso: vale solo se a e b sono concordi; per esempio $-1 < 2$ ma $\frac{1}{-1} = -1 < \frac{1}{2}$. b) Vero: la parentesi quadra chiusa indica che 3 appartiene all'intervallo. c) Falso: $x - 1$ può essere negativo (per $x < 1$) e allora il verso cambierebbe; non si moltiplica per un'espressione di segno non noto. d) Vero: $x^2 \ge 0$, quindi $x^2 + 1 \ge 1 > 0$.

8. a) cambia (si inverte); b) $]-\infty; 7[$; c) chiuso; d) intersezione.

9. a) $-2 \le x < 5$: pallino pieno in −2, vuoto in 5. b) $x \le 0$: semiretta verso sinistra, pallino pieno in 0. c) $x > \frac{1}{2}$: semiretta verso destra, pallino vuoto in $\frac{1}{2}$. d) $-3 < x < -1$: segmento con due pallini vuoti.

10. a) $3x > 12$, $x > 4$: $]4; +\infty[$. b) $-2x \ge 6$, $x \le -3$: $]-\infty; -3]$. c) $5x - 5 < 2x + 10$, $3x < 15$, $x < 5$: $]-\infty; 5[$. d) $-2x \ge -12$ (oppure $12 \le 2x$), $x \ge 6$: $[6; +\infty[$.

11. a) mcm 6: $3x - 2x > 6$, $x > 6$. b) mcm 12: $3(x + 1) - 4(x - 2) \ge 12$, $-x + 11 \ge 12$, $-x \ge 1$, $x \le -1$. c) mcm 6: $2(2x - 1) + 3 < x + 2$, $4x + 1 < x + 2$, $3x < 1$, $x < \frac{1}{3}$.

12. a) $x + 2 > x + 1$, cioè $0 \cdot x > -1$: sempre verificata. b) $3x - 6 \ge 3x$, cioè $0 \cdot x \ge 6$: impossibile. c) $3x - 5 \le 3x - 5$, cioè $0 \cdot x \le 0$: sempre verificata. d) $x^2 - 4x + 4 > x^2 - 4x + 4$, cioè $0 \cdot x > 0$: impossibile.

13. a) $4x + 4 < 12$, $x < 2$. b) $x^2 - 9 \ge x^2 - 2x + 1$, $2x \ge 10$, $x \ge 5$. c) $4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 + 4x \le 13$, $8x \le 12$, $x \le \frac{3}{2}$.

14. a) $x > 2$ e $x \le 6$: $]2; 6]$. b) $x \le 2$ e $x > -2$: $]-2; 2]$. c) $x < 3$ e $x > 4$: impossibile, $S = \varnothing$. d) $x \ge 1$, $x > -3$, $x \ge -2$: $[1; +\infty[$.

15. a) $-4 \le 2x < 6$, $-2 \le x < 3$: $[-2; 3[$. b) $-5 < -x \le -1$, quindi $1 \le x < 5$: $[1; 5[$.

16. a) Fattori positivi per $x > 4$ e per $x > -1$; prodotto positivo per $x < -1$ oppure $x > 4$. b) $2x - 3 > 0$ per $x > \frac{3}{2}$; $5 - x > 0$ per $x < 5$; prodotto positivo o nullo per $\frac{3}{2} \le x \le 5$. c) Zeri −3, 0, 2; segni da sinistra: −, +, −, +; soluzioni $x < -3$ oppure $0 < x < 2$.

17. a) $(x - 4)(x + 4) \le 0$: $-4 \le x \le 4$. b) $x(x + 2) > 0$: $x < -2$ oppure $x > 0$. c) $(x - 3)^2 > 0$: ogni $x \ne 3$. d) $x^2 + 4 \ge 4$ per ogni x: impossibile, $S = \varnothing$.

18. a) C.E. $x \ne -3$; soluzioni $x < -3$ oppure $x > 2$. b) C.E. $x \ne \frac{1}{2}$; $4 - x > 0$ per $x < 4$, $2x - 1 > 0$ per $x > \frac{1}{2}$; soluzioni $\frac{1}{2} < x \le 4$. c) C.E. $x \ne 1$; il numeratore 3 è positivo, quindi la frazione è negativa quando $x - 1 < 0$: $x < 1$. d) C.E. $x \ne 1$, $x \ne -4$; zeri −4 (D), −2 (N), 1 (D); segni da sinistra: −, +, −, +; soluzioni $-4 < x \le -2$ oppure $x > 1$.

19. a) C.E. $x \ne 1$; $\frac{x + 3 - 2(x - 1)}{x - 1} \ge 0$, cioè $\frac{5 - x}{x - 1} \ge 0$: $1 < x \le 5$. b) C.E. $x \ne 0$; $\frac{1 - 3x}{x} < 0$: $x < 0$ oppure $x > \frac{1}{3}$. c) C.E. $x \ne -2$; $\frac{2x - x - 2}{x + 2} \le 0$, cioè $\frac{x - 2}{x + 2} \le 0$: $-2 < x \le 2$.

20. Prima disequazione: $-1 < x < 3$; seconda: $x \ge \frac{1}{2}$. Intersezione: $\frac{1}{2} \le x < 3$, cioè $[\frac{1}{2}; 3[$.

21. a) Se $a > 0$: $x < \frac{3}{a}$; se $a < 0$: $x > \frac{3}{a}$; se $a = 0$: $0 < 3$, sempre verificata. b) $a^2 - 4 = (a - 2)(a + 2)$. Se $a > -2$: $x \ge a - 2$; se $a < -2$: $x \le a - 2$; se $a = -2$: $0 \ge 0$, sempre verificata.

22. Da $a < b$, aggiungendo c ai due membri: $a + c < b + c$. Da $c < d$, aggiungendo b: $b + c < b + d$. Per

la proprietà transitiva, $a + c < b + d$.

23. Per $x = 0$ (che soddisfa $x \le \frac{7}{2}$) la frazione vale $\frac{1}{-2} = -0{,}5$, che non è maggiore o uguale a 3. L'errore: $x - 2$ è negativo per $x < 2$ e in quel caso il verso andrebbe cambiato; inoltre Luca ha dimenticato le C.E. Correttamente: C.E. $x \neq 2$; $\frac{x + 1 - 3(x - 2)}{x - 2} \ge 0$, cioè $\frac{7 - 2x}{x - 2} \ge 0$; numeratore positivo per $x < \frac{7}{2}$, denominatore positivo per $x > 2$; soluzioni $2 < x \le \frac{7}{2}$.

24. Moltiplicando $a < b$ per $a > 0$: $a^2 < a\,b$. Moltiplicando $a < b$ per $b > 0$: $a\,b < b^2$. Per la proprietà transitiva $a^2 < b^2$. Controesempio: $-5 < 1$, ma $(-5)^2 = 25 > 1$.

25. Da $a < b$, aggiungendo a: $2a < a + b$; dividendo per 2 (positivo): $a < \frac{a + b}{2}$. Da $a < b$, aggiungendo b: $a + b < 2b$, quindi $\frac{a + b}{2} < b$. Si giustifica la densità di $\mathbb{Q}$: tra due razionali distinti c'è sempre un altro razionale (la loro media), quindi infiniti.

26. Il segno di x non è noto: per $x < 0$ dividere per x cambierebbe il verso, e per $x = 0$ la divisione è impossibile. Correttamente: $x^2 - x > 0$, $x(x - 1) > 0$, soluzioni $x < 0$ oppure $x > 1$. Dividendo per x si otterrebbe solo $x > 1$ e si perderebbe, per esempio, $x = -1$ ($1 > -1$, vero).

27. Con n ingressi (n naturale): $30 + 6n < 10n$, $4n > 30$, $n > 7{,}5$. La formula A conviene da 8 ingressi in poi.

28. a) $\frac{4{,}5 + 6 + x}{3} \ge 6$, $10{,}5 + x \ge 18$, $x \ge 7{,}5$: serve almeno 7,5. b) $\frac{4{,}5 + 6 + 2x}{4} \ge 6$, $10{,}5 + 2x \ge 24$, $x \ge 6{,}75$: basta almeno 6,75.

29. a) $x < 7 + 12 = 19$ e $12 < 7 + x$, cioè $x > 5$: $5 < x < 19$ (la condizione $7 < 12 + x$ è sempre vera). b) Le misure intere da 6 a 18: 13 valori. c) $19 + x < 35$ dà $x < 16$: restano le misure da 6 a 15, cioè 10 valori.

30. Altezza h (cm), con $h > 0$; base $h + 4$. $2(h + h + 4) \le 40$, $4h + 8 \le 40$, $h \le 8$. Quindi $0 < h \le 8$.

31. a) La funzione è crescente: per 15 °C, $F = 27 + 32 = 59$; per 25 °C, $F = 45 + 32 = 77$. Quindi $59 \le F \le 77$ (°F). b) $\frac{9}{5}C + 32 > 100$, $\frac{9}{5}C > 68$, $C > \frac{340}{9} \approx 37{,}8$ °C.

32. Con k km ($k \ge 0$): $40 + 0{,}20k < 25 + 0{,}35k$, $15 < 0{,}15k$, $k > 100$. La tariffa A conviene per più di 100 km in un giorno; per 100 km le due tariffe costano uguale (60 €).

33. Prima: mcm 6, $3(x - 1) - 2(x + 1) \le 6$, $x - 5 \le 6$, $x \le 11$. Seconda: $x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4x - 4 > 8$, $8x > 8$, $x > 1$. Sistema: $1 < x \le 11$, cioè $]1; 11]$: pallino vuoto in 1, pieno in 11.

34. $\frac{(x - 2)(x + 2)}{x(x - 3)} \ge 0$, C.E. $x \neq 0$, $x \neq 3$. Zeri -2, 2 (numeratore) e 0, 3 (denominatore). Segni da sinistra: + ($x < -2$), − ($-2 < x < 0$), + ($0 < x < 2$), − ($2 < x < 3$), + ($x > 3$). Soluzioni: $x \le -2$ oppure $0 < x \le 2$ oppure $x > 3$, cioè $]-\infty; -2] \cup]0; 2] \cup]3; +\infty[$.

35. a) Per $k = 2$ l'equazione diventa $0 \cdot x = 3$: impossibile. b) Per $k \neq 2$, $x = \frac{k + 1}{k - 2}$. Deve essere $\frac{k + 1}{k - 2} > 0$: numeratore positivo per $k > -1$, denominatore per $k > 2$; la frazione è positiva per $k < -1$ oppure $k > 2$. (Per $k = -1$ la soluzione è $x = 0$, che non è positiva.)