CAPITOLO

10

Equazioni di primo grado

Un'equazione è una domanda scritta in simboli: risolverla vuol dire trasformarla, un passo alla volta, finché la risposta non si legge da sola.

OBIETTIVI

1. Distinguere uguaglianze, identità ed equazioni e classificare un'equazione come determinata, indeterminata o impossibile.
2. Applicare i due principi di equivalenza e le loro conseguenze per trasformare un'equazione.
3. Risolvere equazioni numeriche intere di primo grado e, con la legge di annullamento del prodotto, equazioni di grado superiore scomposte in fattori.
4. Risolvere equazioni fratte, stabilendo le condizioni di esistenza e controllando le soluzioni.
5. Risolvere e discutere semplici equazioni letterali.
6. Impostare e risolvere problemi con un'equazione, verificando l'accettabilità della soluzione.

INDICE DEL CAPITOLO

10.1 Uguaglianze, identità ed equazioni 2
10.2 I principi di equivalenza 3
10.3 Equazioni numeriche intere 5
10.4 Equazioni fratte 9
10.5 Equazioni letterali 11
10.6 Problemi risolubili con le equazioni 13

Matematica 1 · Parte IV · Equazioni e disequazioni · versione 1.0
Capitolo 10: Equazioni di primo grado · pagine 257–278 del volume completo · estratto per lo studio

«Penso un numero, lo moltiplico per 3, aggiungo 7 e ottengo 25. Che numero ho pensato?» Probabilmente rispondi subito 6, perché procedi a ritroso: tolgo 7 e ho 18, divido per 3 e ho 6. Senza accorgertene hai risolto un'*equazione*. Scritto in simboli, l'indovinello diventa $3x + 7 = 25$, e il tuo ragionamento a ritroso corrisponde esattamente alle regole che studieremo in questo capitolo.

Le equazioni sono uno degli strumenti più potenti della matematica perché permettono di trovare una quantità sconosciuta a partire dalle informazioni che la legano a quantità note. Quando un problema diventa troppo complicato per il ragionamento a ritroso, la traduzione in un'equazione e qualche regola sicura fanno quasi tutto il lavoro. Tutto ciò che hai imparato nei capitoli precedenti, dalle frazioni ai prodotti notevoli, dalla scomposizione in fattori alle condizioni di esistenza delle frazioni algebriche, troverà qui la sua applicazione più naturale.

10.1 Uguaglianze, identità ed equazioni

10.1.1 Uguaglianze e identità

Un'**uguaglianza** è una scrittura formata da due espressioni collegate dal segno «=». Se le espressioni sono numeriche, l'uguaglianza è semplicemente vera o falsa: $3 + 4 \cdot 5 = 23$ è vera, $2^3 = 6$ è falsa. Le cose si fanno più interessanti quando compaiono delle lettere, perché la verità dell'uguaglianza può dipendere dai valori che assegniamo a esse.

Consideriamo $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Qualunque coppia di numeri sostituiamo ad a e b, otteniamo un'uguaglianza vera: è il quadrato di binomio del capitolo 7. Un'uguaglianza tra espressioni letterali che risulta vera per *tutti* i valori attribuiti alle lettere (per i quali le espressioni hanno significato) si chiama **identità**. Le proprietà delle operazioni e i prodotti notevoli sono identità: per esempio $3(x + 2) = 3x + 6$ è un'identità, perché esprime la proprietà distributiva.

L'uguaglianza $2x + 1 = 7$, invece, è vera se al posto di x mettiamo 3 ($2 \cdot 3 + 1 = 7$) ed è falsa per qualunque altro valore: per $x = 0$ diventa $1 = 7$, per $x = 5$ diventa $11 = 7$. Qui non stiamo affermando un fatto generale: stiamo ponendo una domanda.

10.1.2 Che cos'è un'equazione

Un'**equazione** è un'uguaglianza tra due espressioni contenenti una o più lettere, dette **incognite**, per la quale ci si chiede per quali valori delle incognite essa risulta vera. In questo capitolo le equazioni hanno una sola incognita, che indichiamo di solito con x. L'espressione a sinistra del segno «=» è il **primo membro**, quella a destra il secondo membro.

Un numero che, sostituito all'incognita, rende vera l'uguaglianza si chiama **soluzione** (o radice) dell'equazione. L'insieme di tutte le soluzioni si chiama **insieme delle soluzioni** e si indica

di solito con S. **Risolvere** un'equazione significa trovarne l'insieme delle soluzioni.

Come hai visto nel capitolo 5, la risposta dipende dall'insieme numerico in cui cerchiamo le soluzioni. L'equazione $2x = 5$ non ha soluzioni in $\mathbb{N}$ né in $\mathbb{Z}$, mentre in $\mathbb{Q}$ ha la soluzione $\frac{5}{2}$; l'equazione $x^2 = 4$ ha $S = \{2\}$ in $\mathbb{N}$ e $S = \{-2, 2\}$ in $\mathbb{Z}$. In questo volume, se non è detto altro, cerchiamo le soluzioni in $\mathbb{Q}$; dal prossimo anno, quando conoscerai i numeri reali, l'ambiente naturale sarà $\mathbb{R}$.

C'è poi un secondo aspetto. Nell'equazione $\frac{3}{x-2} = 1$ il primo membro non ha significato per $x = 2$, perché il denominatore si annulla. L'insieme dei valori per i quali entrambi i membri hanno significato si chiama **dominio** (o insieme di definizione) dell'equazione; le soluzioni vanno cercate solo lì. Per l'equazione precedente il dominio è $\mathbb{Q} \setminus \{2\}$.

Stabilire se un numero è soluzione è facile: basta sostituirlo e calcolare separatamente i due membri. Questa operazione si chiama **verifica**. Per esempio, $x = -1$ è soluzione di $5x + 3 = x - 1$, perché il primo membro vale $5 \cdot (-1) + 3 = -2$ e il secondo $-1 - 1 = -2$.

10.1.3 Come si classificano le equazioni

Secondo il numero delle soluzioni, un'equazione si dice:

- **determinata** se ha un numero finito di soluzioni (per esempio $2x + 1 = 7$, con $S = \{3\}$);
- **indeterminata** se ha infinite soluzioni; nel caso delle equazioni di primo grado questo accade quando *ogni* numero del dominio è soluzione, come per $2(x + 1) = 2x + 2$, che è in realtà un'identità: $S = \mathbb{Q}$;
- **impossibile** se non ha soluzioni, come $x + 1 = x + 3$ (un numero aumentato di 1 non può essere uguale allo stesso numero aumentato di 3): $S = \varnothing$.

Un'equazione si dice **intera** se l'incognita non compare in nessun denominatore, **fratta** (o frazionaria) se l'incognita compare in almeno un denominatore. Si dice **numerica** se, oltre all'incognita, contiene solo numeri; **letterale** se contiene altre lettere, che rappresentano numeri dati e si chiamano **parametri**. Infine, un'equazione intera che si può scrivere nella forma $P(x) = 0$, con $P(x)$ polinomio ridotto a forma normale, ha come **grado** il grado del polinomio. Le equazioni di questo capitolo sono quasi tutte di *primo grado*, cioè riconducibili alla forma $ax + b = 0$ con $a \neq 0$.

10.2 I principi di equivalenza

10.2.1 Equazioni equivalenti

Due equazioni nella stessa incognita si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme delle soluzioni. Per esempio $2x = 6$ e $x + 1 = 4$ sono equivalenti, perché entrambe hanno $S = \{3\}$; invece $x^2 = 9$ e $x = 3$ non lo sono, perché la prima ha anche la soluzione -3.

L'idea per risolvere un'equazione è proprio questa: sostituirla con una catena di equazioni equivalenti, sempre più semplici, fino ad arrivare a un'equazione del tipo «x = numero», di cui la soluzione si legge subito. Servono regole che garantiscano che ogni trasformazione non faccia né perdere né guadagnare soluzioni. Sono i due principi di equivalenza.

10.2.2 Il primo principio

Una bilancia a due piatti in equilibrio è il modello più intuitivo di un'equazione. Se aggiungiamo o togliamo lo stesso peso da entrambi i piatti, l'equilibrio resta (figura 10.1). Lo stesso vale per i due membri di un'equazione.

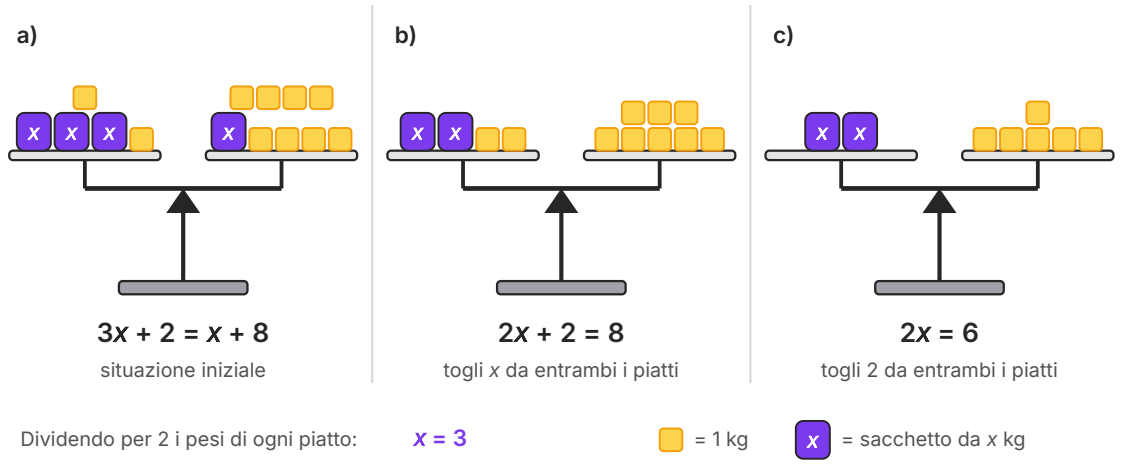


Figura 10.1 L'equazione $3x + 2 = x + 8$ come bilancia in equilibrio. Togliendo da entrambi i piatti un sacchetto e poi 2 kg, l'equilibrio resta (primo principio); dividendo infine a metà il contenuto dei piatti si trova $x = 3$ (secondo principio).

IN SINTESI

Primo principio di equivalenza. Aggiungendo o sottraendo a entrambi i membri di un'equazione uno stesso numero, o una stessa espressione contenente l'incognita definita in tutto il dominio, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Secondo principio di equivalenza. Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un'equazione per uno stesso numero *diverso da zero*, o per una stessa espressione definita e diversa da zero in tutto il dominio, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Perché il primo principio funziona? Se un numero c rende vera $A(x) = B(x)$, cioè $A(c) = B(c)$, allora è vera anche $A(c) + k = B(c) + k$; viceversa, se è vera la seconda, togliendo k a entrambi i membri torna vera la prima. Le soluzioni quindi sono le stesse.

Dal primo principio discendono due regole pratiche che userai di continuo.

- **Regola del trasporto**: un termine si può spostare da un membro all'altro cambiandogli il segno. Infatti in $3x + 2 = x + 8$, sottraendo x e 2 a entrambi i membri si ottiene $3x - x = 8 - 2$: il termine x è «passato» a sinistra come $-x$ e il termine 2 è passato a destra come -2.
- **Regola di cancellazione**: due termini uguali che compaiono in entrambi i membri si possono eliminare. In $x^2 + 5x = x^2 - 10$, togliendo x^2 a entrambi i membri, resta $5x = -10$.

Con la regola del trasporto si può sempre portare tutto al primo membro e scrivere un'equazione nella forma $P(x) = 0$: è così che si stabilisce il grado di un'equazione intera.

10.2.3 Il secondo principio

Anche il secondo principio si giustifica allo stesso modo: se $A(c) = B(c)$, allora $k \cdot A(c) = k \cdot B(c)$; viceversa, se $k \neq 0$, dividendo per k si torna all'uguaglianza di partenza. La condizione $k \neq 0$ è essenziale: moltiplicando per 0 qualsiasi equazione diventa $0 = 0$, vera per ogni x, e tutta l'informazione va perduta. Le conseguenze più utili sono tre.

- **Cambiare segno a tutti i termini** (cioè moltiplicare per -1): $-2x + 3 = -7$ equivale a $2x - 3 = 7$.
- **Eliminare i denominatori numerici**, moltiplicando entrambi i membri per il loro mcm: $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5$, moltiplicata per 6, diventa $3x + 2x = 30$.
- **Dividere per il coefficiente dell'incognita**, se è diverso da zero: da $5x = 30$ si ottiene $x = 6$.

> **ERRORE FREQUENTE**
>
> **Dividere (o moltiplicare) per un'espressione che contiene l'incognita.** Per risolvere $x^2 = 3x$ qualcuno «semplifica» dividendo per x e ottiene $x = 3$. Ma x potrebbe valere 0, e il secondo principio vieta di dividere per zero: infatti $x = 0$ è soluzione ($0 = 0$) ed è andata perduta. Il modo corretto è portare tutto al primo membro e scomporre: $x^2 - 3x = 0$, $x(x - 3) = 0$, quindi $S = \{0, 3\}$ (paragrafo 10.3.4).
>
> L'errore opposto aggiunge soluzioni: moltiplicando $x = 2$ per $x - 1$ si ottiene $x(x - 1) = 2(x - 1)$, che ha come soluzioni 2 *e* 1. La soluzione 1, che non risolve l'equazione di partenza, si dice **soluzione estranea**.

10.3 Equazioni numeriche intere

10.3.1 La forma normale e la discussione

Applicando i principi di equivalenza, ogni equazione intera di primo grado (o che si riduce al primo grado) si può scrivere nella **forma normale**

$$ax = b$$

dove a è il coefficiente dell'incognita e b il termine noto. Che cosa succede ora dipende dai valori di a e b. Se $a \neq 0$, possiamo dividere per a e troviamo l'unica soluzione $x = \frac{b}{a}$. Se invece $a = 0$, il primo membro vale $0 \cdot x = 0$ per ogni x, e l'equazione diventa $0 = b$: è vera per ogni x se $b = 0$, falsa per ogni x se $b \neq 0$. Questo esame dei casi possibili si chiama **discussione** dell'equazione (tabella 10.1).

Tabella 10.1 Discussione dell'equazione in forma normale $ax = b$.

Caso	L'equazione diventa	Insieme delle soluzioni	L'equazione è
$a \neq 0$	$x = \frac{b}{a}$	$S = \{\frac{b}{a}\}$	determinata
$a = 0, b \neq 0$	$0 \cdot x = b$	$S = \varnothing$	impossibile
$a = 0, b = 0$	$0 \cdot x = 0$	$S = \mathbb{Q}$	indeterminata

Ne segue un fatto importante: un'equazione di primo grado vera e propria (con $a \neq 0$) ha sempre *una e una sola* soluzione. Non può averne due, e nemmeno nessuna.

10.3.2 Il procedimento risolutivo

Per risolvere un'equazione numerica intera conviene seguire sempre lo stesso ordine:

1. svolgere i calcoli ed eliminare le parentesi (prodotti, prodotti notevoli, potenze);
2. se ci sono denominatori numerici, ridurre allo stesso denominatore ed eliminarli (secondo principio);
3. trasportare i termini con l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo (primo principio);
4. sommare i termini simili, ottenendo la forma normale $ax = b$;
5. discutere: se $a \neq 0$, dividere per a; altrimenti riconoscere se l'equazione è impossibile o indeterminata;
6. verificare la soluzione nell'equazione di partenza.

Un primo esempio: $3(x - 2) - (2x - 5) = 4 - 2(x - 1)$. Eliminando le parentesi: $3x - 6 - 2x + 5 = 4 - 2x + 2$, cioè $x - 1 = 6 - 2x$. Trasportando: $x + 2x = 6 + 1$, quindi $3x = 7$ e $x = \frac{7}{3}$. Osserva che una soluzione frazionaria è del tutto normale: in $\mathbb{Q}$ l'equazione ha soluzione.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Risolvi $\frac{x-1}{3} - \frac{2x+1}{4} = \frac{x}{6} - 1$.

Denominatori. Il mcm di 3, 4 e 6 è 12. Moltiplichiamo entrambi i membri per 12, cioè moltiplichiamo ogni termine per 12 e semplifichiamo: $4(x-1) - 3(2x+1) = 2x - 12$. Attenzione al segno meno davanti alla seconda frazione: riguarda *tutto* il numeratore, per questo lo scriviamo tra parentesi.

Calcoli. $4x - 4 - 6x - 3 = 2x - 12$, cioè $-2x - 7 = 2x - 12$.

Trasporto. $-2x - 2x = -12 + 7$, quindi $-4x = -5$.

Soluzione. Dividendo per -4: $x = \frac{5}{4}$. L'equazione è determinata, $S = \{\frac{5}{4}\}$.

Verifica. Primo membro: $\frac{1}{4} : 3 - \frac{7}{2} : 4 = \frac{1}{12} - \frac{7}{8} = \frac{2-21}{24} = -\frac{19}{24}$. Secondo membro: $\frac{5}{24} - 1 = -\frac{19}{24}$. I due membri coincidono.

Vediamo ora due equazioni che non sono determinate. In $2(x+3) - x = x + 4$ i calcoli danno $x + 6 = x + 4$, cioè $0 \cdot x = -2$: l'equazione è impossibile. In $3(x-1) + 2 = 3x - 1$ si ottiene $3x - 1 = 3x - 1$, cioè $0 \cdot x = 0$: l'equazione è indeterminata, anzi è un'identità. Attenzione a non confondere questi casi con un'equazione la cui soluzione è zero: $3x = 0$ è determinata e ha $S = \{0\}$.

DA RICORDARE

La verifica non è un optional. Bastano due sostituzioni per scoprire un errore di segno che altrimenti resterebbe invisibile. E se un'equazione «sparisce» lasciando $0 \cdot x =$ numero, non hai sbagliato per forza: forse è impossibile o indeterminata. Controlla i calcoli, poi trai la conclusione.

10.3.3 Equazioni che si riducono al primo grado

Talvolta un'equazione sembra di secondo grado, ma dopo lo sviluppo dei prodotti notevoli i termini di secondo grado si cancellano. Per esempio:

$$(x+3)^2 - (x-1)(x+1) = 4x$$

Sviluppando il quadrato di binomio e la somma per differenza: $x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 1) = 4x$, cioè $x^2 + 6x + 9 - x^2 + 1 = 4x$. I termini x^2 e $-x^2$ si cancellano e resta $6x + 10 = 4x$, quindi $2x = -10$ e $x = -5$. Verifica: $(-2)^2 - (-6)(-4) = 4 - 24 = -20$ e $4 \cdot (-5) = -20$. Il grado di un'equazione, dunque, si stabilisce solo dopo averla ridotta a forma normale.

10.3.4 La legge di annullamento del prodotto

Le equazioni di secondo grado e di grado superiore si studieranno in modo sistematico il prossimo anno. Molte di esse, però, si possono già risolvere ora, grazie alla scomposizione in fattori del capitolo 8 e a una proprietà dei numeri che conosci da sempre.

IN SINTESI

Legge di annullamento del prodotto. Un prodotto di numeri è uguale a zero se e solo se almeno uno dei fattori è uguale a zero:

$$A \cdot B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0 \vee B = 0$$

Per risolvere un'equazione intera di grado superiore al primo si porta tutto al primo membro, si scompone il polinomio in fattori di primo grado e si uguaglia a zero ciascun fattore. Ogni fattore di primo grado fornisce una soluzione. Per esempio $(2x - 1)(x + 3) = 0$ ha $S = \{\frac{1}{2}, -3\}$; $x^2 - 5x = 0$ diventa $x(x - 5) = 0$, con $S = \{0, 5\}$; $x^3 - 4x = 0$ diventa $x(x - 2)(x + 2) = 0$, con $S = \{-2, 0, 2\}$.

La legge vale solo quando il secondo membro è *zero*. Da $(x - 1)(x - 2) = 6$ non si può dedurre che $x - 1 = 6$ oppure $x - 2 = 6$: un prodotto può valere 6 in infiniti modi.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Risolvi $x^3 - 2x^2 = x - 2$.

Forma $P(x) = 0$. Trasportiamo: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$. È un'equazione di terzo grado.

Scomposizione. Raccoglimento parziale: $x^2(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(x^2 - 1) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)$.

Annullamento del prodotto. $x - 2 = 0$ oppure $x - 1 = 0$ oppure $x + 1 = 0$, quindi $S = \{-1, 1, 2\}$.

Verifica (per $x = -1$): primo membro $-1 - 2 = -3$, secondo membro $-1 - 2 = -3$. Le altre si controllano allo stesso modo.

10.3.5 Equazioni e grafici

Nel capitolo 6 hai disegnato il grafico della funzione lineare $y = mx + q$, una retta. Risolvere l'equazione $mx + q = 0$ significa chiedersi per quale x la funzione vale zero, cioè in quale punto la retta incontra l'asse x. Per esempio la soluzione di $2x - 5 = 0$ è $x = \frac{5}{2} = 2{,}5$, e la retta $y = 2x - 5$ taglia l'asse delle ascisse proprio nel punto $(2{,}5;\ 0)$ (figura 10.2). Un valore di x in cui una funzione si annulla si chiama **zero della funzione**.

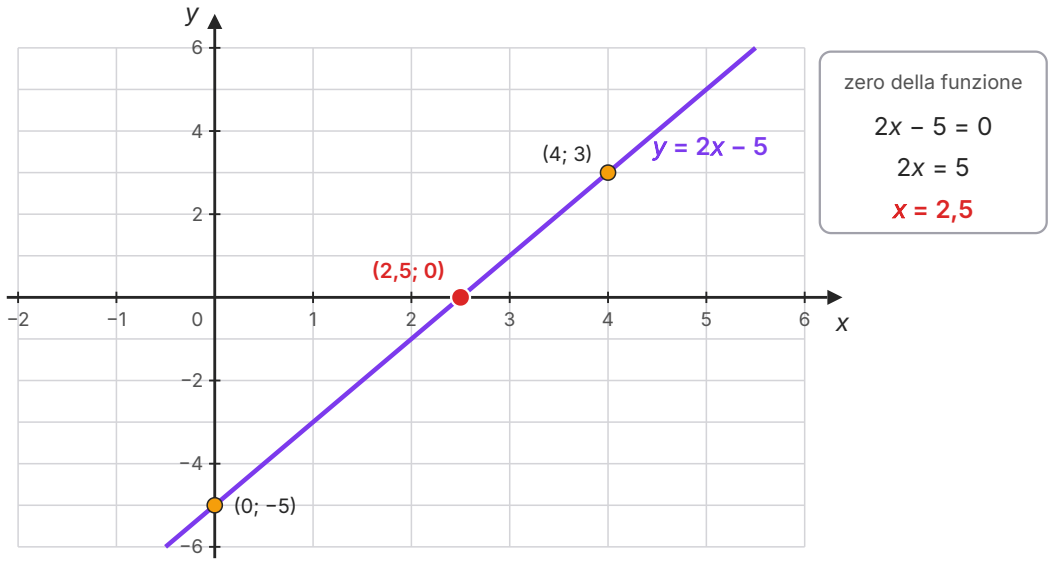


Figura 10.2 Il grafico di $y = 2x - 5$, calcolato dall'equazione. La retta interseca l'asse y in $(0; -5)$ e l'asse x in $(2{,}5; 0)$: l'ascissa 2,5 è la soluzione dell'equazione $2x - 5 = 0$.

Lo stesso vale per il confronto tra due funzioni. Nel capitolo 6 abbiamo confrontato due piani tariffari, con costi mensili $C_A = 0{,}05t + 6$ e $C_B = 0{,}15t$ (in euro, con t in minuti), osservando sul grafico che le due rette si incontrano. Ora possiamo trovare il punto d'incontro con un'equazione: $0{,}05t + 6 = 0{,}15t$, cioè $6 = 0{,}10t$, da cui $t = 60$. Per 60 minuti di conversazione i due piani costano uguale, 9 €. Il grafico dà un'idea, l'equazione dà il valore esatto.

10.4 Equazioni fratte

10.4.1 Condizioni di esistenza e procedimento

In un'equazione fratta l'incognita compare al denominatore. Come per le frazioni algebriche del capitolo 9, la prima cosa da fare è stabilire le **condizioni di esistenza** (C.E.): i valori che annullano un denominatore non appartengono al dominio e non possono essere soluzioni. Poi si procede così:

1. si scompongono i denominatori in fattori;
2. si scrivono le C.E., imponendo che ogni fattore che contiene l'incognita sia diverso da zero;
3. si calcola il mcm dei denominatori e si moltiplicano per esso entrambi i membri: per il secondo principio è lecito, perché nel dominio il mcm non si annulla mai;
4. si risolve l'equazione intera ottenuta;

5. si confrontano le soluzioni trovate con le C.E.: si accettano quelle che le rispettano, si scartano le altre.

Un esempio semplice: $\frac{3}{x-2} = \frac{2}{x+1}$. C.E.: $x \neq 2$ e $x \neq -1$. Moltiplicando per $(x-2)(x+1)$: $3(x+1) = 2(x-2)$, cioè $3x + 3 = 2x - 4$, da cui $x = -7$. Il valore -7 rispetta le C.E. ed è accettabile: $S = \{-7\}$.

10.4.2 Il controllo delle soluzioni

Il passo 5 non è una formalità. Consideriamo

$$\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$$

Poiché $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, le C.E. sono $x \neq 1$ e $x \neq -1$, e il mcm è $(x-1)(x+1)$. Moltiplicando: $2(x+1) + (x-1) = 4$, cioè $3x + 1 = 4$, quindi $x = 1$. Ma 1 è escluso dalle C.E.: sostituendolo, i denominatori si annullano. L'unica «soluzione» trovata va scartata, e l'equazione è impossibile: $S = \varnothing$.

Che cosa è successo? Moltiplicando per un'espressione contenente l'incognita abbiamo ottenuto un'equazione intera che ha una soluzione in più, quella che annulla il mcm: è una soluzione estranea, come nell'Errore frequente del paragrafo 10.2.3. Le C.E. servono proprio a riconoscerla.

Può succedere anche che un'equazione fratta sia indeterminata nel suo dominio. Per $\frac{x+2}{x-3} - 1 = \frac{5}{x-3}$, con C.E. $x \neq 3$, si ottiene $x + 2 - (x-3) = 5$, cioè $5 = 5$: ogni numero diverso da 3 è soluzione, e $S = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Risolvi $\frac{x}{x-2} + \frac{2}{x} = \frac{4}{x^2-2x}$.

Scomposizione e C.E. $x^2 - 2x = x(x-2)$. C.E.: $x \neq 0$ e $x \neq 2$. Il mcm è $x(x-2)$.

Eliminazione dei denominatori. Moltiplicando entrambi i membri per $x(x-2)$: $x \cdot x + 2(x-2) = 4$, cioè $x^2 + 2x - 4 = 4$, quindi $x^2 + 2x - 8 = 0$.

Risoluzione. L'equazione intera è di secondo grado, ma il trinomio si scompone (capitolo 8: due numeri con somma 2 e prodotto -8 sono 4 e -2): $(x+4)(x-2) = 0$, quindi $x = -4$ oppure $x = 2$.

Controllo. $x = 2$ viola le C.E. e va scartato; $x = -4$ è accettabile. $S = \{-4\}$.

Verifica. Primo membro: $\frac{-4}{-6} + \frac{2}{-4} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Secondo membro: $\frac{4}{16+8} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$.

ERRORE FREQUENTE

Dimenticare le C.E. o scriverle dopo aver semplificato. Le condizioni di esistenza si scrivono sull'equazione di partenza, prima di qualsiasi trasformazione, e vanno controllate alla fine. Chi risolve $\frac{x}{x-3} = \frac{3}{x-3}$ «togliendo i denominatori» trova $x = 3$ e conclude $S = \{3\}$; invece 3 annulla i denominatori e l'equazione è impossibile.

10.5 Equazioni letterali

10.5.1 Parametri e discussione

In un'equazione letterale, accanto all'incognita compaiono altre lettere, i parametri, che rappresentano numeri fissati ma non specificati. Per evitare equivoci si dichiara sempre quale lettera è l'incognita. Risolvere un'equazione letterale significa trovare le soluzioni in funzione dei parametri, e *discuterla* significa stabilire per quali valori dei parametri essa è determinata, impossibile o indeterminata.

Il procedimento è quello delle equazioni numeriche, con una cautela in più: non si può dividere per un'espressione che contiene i parametri senza chiedersi se essa possa valere zero. Consideriamo, nell'incognita x, l'equazione $ax = 3$. Se $a \neq 0$ la soluzione è $x = \frac{3}{a}$; se $a = 0$ l'equazione diventa $0 \cdot x = 3$, impossibile. Un'unica scrittura, $x = \frac{3}{a}$, sarebbe incompleta, perché per $a = 0$ non ha significato.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Risolvi e discuti, nell'incognita x, l'equazione $(a^2 - 1)x = a + 1$.

Coefficiente. L'equazione è già in forma normale, con coefficiente $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$, che si annulla per $a = 1$ e per $a = -1$. Esaminiamo i casi (figura 10.3).

Se $a \neq 1$ e $a \neq -1$, il coefficiente è diverso da zero e possiamo dividere: $x = \frac{a+1}{(a-1)(a+1)} = \frac{1}{a-1}$. L'equazione è determinata.

Se $a = 1$, sostituendo: $0 \cdot x = 2$. L'equazione è impossibile.

Se $a = -1$, sostituendo: $0 \cdot x = 0$. L'equazione è indeterminata.

Controllo. Per $a = 3$ l'equazione è $8x = 4$, con soluzione $\frac{1}{2}$; la formula dà $\frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$.

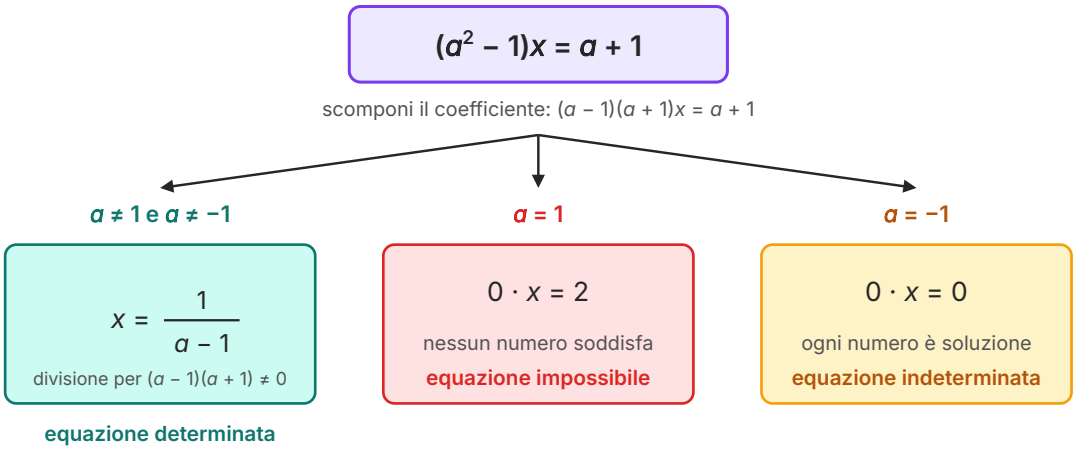


Figura 10.3 Lo schema della discussione di $(a^2 - 1)x = a + 1$: i valori del parametro che annullano il coefficiente dell'incognita vanno esaminati a parte.

Se un parametro compare al denominatore, le sue condizioni vanno poste fin dall'inizio, ma sono condizioni sul *parametro*, non sull'incognita. Per esempio, nell'equazione $\frac{x}{a} - 1 = \frac{x}{2}$ deve essere $a \neq 0$. Moltiplicando per $2a$: $2x - 2a = ax$, cioè $(2 - a)x = 2a$. Se $a \neq 2$ (e $a \neq 0$), $x = \frac{2a}{2 - a}$; se $a = 2$ si ottiene $0 \cdot x = 4$, impossibile; per $a = 0$ l'equazione non ha significato.

APPROFONDIMENTO · EQUAZIONI FRATTE LETTERALI

Nelle equazioni fratte letterali le C.E. riguardano l'incognita, e alla fine bisogna controllare per quali valori del parametro la soluzione trovata le rispetta. Un esempio semplice: $\frac{a}{x - 1} = 2$, nell'incognita x. C.E.: $x \neq 1$. Moltiplicando per $x - 1$: $a = 2x - 2$, quindi $x = \frac{a + 2}{2}$. Questa soluzione è accettabile solo se è diversa da 1, cioè se $a + 2 \neq 2$, ossia $a \neq 0$. In conclusione: se $a \neq 0$, $S = \{\frac{a + 2}{2}\}$; se $a = 0$ l'equazione è impossibile (in effetti diventa $\frac{0}{x - 1} = 2$, cioè $0 = 2$ per ogni x ammesso).

COLLEGAMENTI

Fisica: formule inverse e una temperatura speciale. Ogni formula della fisica è un'equazione letterale, e ricavarne una grandezza (capitolo 9) significa risolverla rispetto a quella grandezza. Dalla legge del moto uniforme $s = s_0 + vt$ si ottiene, per $v \neq 0$, $t = \frac{s - s_0}{v}$.

Le scale di temperatura Celsius e Fahrenheit sono legate dalla formula $F = 1{,}8C + 32$. Esiste una temperatura che si esprime con lo stesso numero nelle due scale? Ponendo $F = C = x$ si ottiene $x = 1{,}8x + 32$, cioè $-0{,}8x = 32$, quindi $x = -40$: −40 °C corrispondono esattamente a −40 °F.

10.6 Problemi risolubili con le equazioni

10.6.1 Un metodo in quattro fasi

Saper risolvere un'equazione è solo metà del lavoro: nella vita e nelle scienze le equazioni non arrivano già scritte, bisogna costruirle a partire da un testo. Conviene procedere con ordine, in quattro fasi (figura 10.4).

1. **Comprendere.** Leggere con attenzione il testo, individuare i dati e la domanda, scegliere l'incognita (dichiarando che cosa rappresenta e in quale unità di misura) e scrivere le **limitazioni**, cioè le condizioni che l'incognita deve soddisfare perché abbia senso nel problema: un numero di persone è un naturale, una lunghezza è positiva, un'età non supera un certo valore.
2. **Tradurre.** Esprimere le altre quantità in funzione dell'incognita e scrivere l'equazione che traduce la relazione del testo, detta **equazione risolvente**.
3. **Risolvere** l'equazione con i principi di equivalenza.
4. **Controllare.** Stabilire se la soluzione rispetta le limitazioni (**accettabilità**) e verificarla nel testo del problema, non solo nell'equazione: se l'equazione è sbagliata, la verifica nell'equazione non lo rivela.

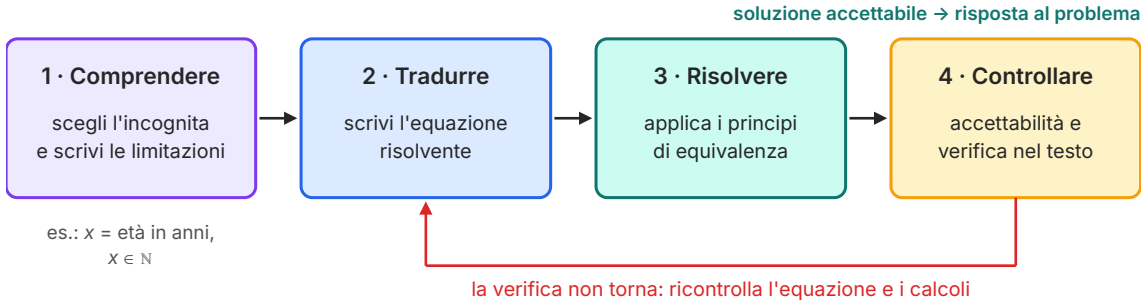


Figura 10.4 Le quattro fasi della risoluzione di un problema con un'equazione. Se la verifica nel testo non torna, l'errore è di solito nella traduzione: si torna alla fase 2.

APPROFONDIMENTO

Da al-jabr all'algebra. Nel IX secolo il matematico persiano Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, attivo a Baghdad, scrisse un trattato sulla risoluzione delle equazioni il cui titolo contiene due parole chiave: *al-jabr* e *al-muqabala*. La prima indica il «ripristino», cioè l'operazione di portare nell'altro membro un termine sottratto, rendendolo positivo: è la nostra regola del trasporto. La seconda indica il «confronto», cioè la cancellazione dei termini uguali nei due membri. Dalla parola *al-jabr* deriva il nostro «algebra», e dal nome di al-Khwarizmi la parola «algoritmo».

Al-Khwarizmi scriveva tutto a parole, senza simboli. Il segno «=» fu introdotto solo nel 1557 dal gallese Robert Recorde, che scelse due segmenti paralleli e uguali perché, spiegava, nessuna coppia di cose può essere più uguale. L'uso sistematico delle lettere per le quantità, sia incognite sia note, si affermò alla fine del Cinquecento con il francese François Viète.

10.6.2 Problemi di numeri e di età

Tre numeri naturali consecutivi hanno per somma 87. Quali sono? Sia x il minore, con la limitazione $x \in \mathbb{N}$; gli altri sono $x + 1$ e $x + 2$. L'equazione risolvente è $x + (x + 1) + (x + 2) = 87$, cioè $3x + 3 = 87$, da cui $x = 28$. La soluzione è accettabile e i numeri sono 28, 29, 30; verifica: $28 + 29 + 30 = 87$. Se la somma fosse 100, avremmo $3x = 97$ e $x = \frac{97}{3}$, che non è naturale: il problema non avrebbe soluzione, anche se l'equazione ne ha una. È qui che le limitazioni fanno la differenza.

Marta ha 14 anni e sua madre 42. Tra quanti anni l'età della madre sarà il doppio di quella di Marta? Sia x il numero di anni, con $x \geq 0$. Tra x anni le età saranno $14 + x$ e $42 + x$, quindi $42 + x = 2(14 + x)$, cioè $42 + x = 28 + 2x$ e $x = 14$. Verifica: tra 14 anni Marta avrà 28 anni e la madre 56, che è il doppio. Una curiosità: chiedendosi «quanti anni fa l'età della madre era il triplo?»,

con y anni fa, si ottiene $42 - y = 3(14 - y)$, da cui $y = 0$. Nessun errore: il triplo è proprio adesso, perché $42 = 3 \cdot 14$.

10.6.3 Percentuali e miscugli

Dopo uno sconto del 20%, un paio di scarpe costa 68 €. Qual era il prezzo iniziale? Sia x il prezzo iniziale in euro, $x > 0$. Uno sconto del 20% lascia l'80% del prezzo (capitolo 4), quindi $0{,}8x = 68$ e $x = 85$. Verifica: il 20% di 85 € è 17 €, e $85 - 17 = 68$. Un errore tipico è calcolare il 20% di 68 e aggiungerlo, ottenendo 81,60 €: ma lo sconto si calcola sul prezzo iniziale, non su quello finale.

Una torrefazione vuole ottenere 30 kg di miscela da vendere a 14 €/kg, mescolando un caffè da 18 €/kg e uno da 12 €/kg. Quanti chilogrammi di ciascuno deve usare? Siano x i chilogrammi del primo caffè, con $0 \le x \le 30$; il secondo pesa $30 - x$. Il valore della miscela deve essere uguale alla somma dei valori dei componenti: $18x + 12(30 - x) = 14 \cdot 30$. Si ottiene $18x + 360 - 12x = 420$, quindi $6x = 60$ e $x = 10$. Servono 10 kg del primo caffè e 20 kg del secondo; verifica: $180 + 240 = 420$ €, come $14 \cdot 30$.

10.6.4 Problemi di moto e di lavoro

Nei problemi di moto si usa la relazione del moto uniforme, spazio = velocità · tempo. Conviene sempre fissare un'origine dei tempi e un'origine delle distanze e disegnare uno schema.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Due città A e B distano 180 km. Alle 9:00 un'auto parte da A verso B a 60 km/h; alle 9:30 un'altra auto parte da B verso A a 90 km/h. Supponendo velocità costanti, a che ora e dove si incontrano?

Incognita. Sia t il tempo, in ore, trascorso dalle 9:00 fino all'incontro. Limitazioni: la seconda auto deve essere partita, quindi $t \ge 0{,}5$, e la prima non deve aver superato B, quindi $t \le 3$.

Posizioni. Misuriamo le distanze da A. La prima auto si trova a $60t$ km da A; la seconda viaggia da $t - 0{,}5$ ore, ha percorso $90(t - 0{,}5)$ km partendo da 180, quindi si trova a $180 - 90(t - 0{,}5)$ km da A.

Equazione. Le auto si incontrano quando sono nello stesso punto: $60t = 180 - 90(t - 0{,}5)$, cioè $60t = 225 - 90t$, da cui $150t = 225$ e $t = 1{,}5$.

Risposta e verifica. $t = 1{,}5$ rispetta le limitazioni: l'incontro avviene alle 10:30, a $60 \cdot 1{,}5 = 90$ km da A. Controllo: la seconda auto ha viaggiato un'ora a 90 km/h, cioè 90 km da B, e $180 - 90 = 90$. La figura 10.5 mostra lo schema e il grafico spazio-tempo: l'incontro è il punto comune delle due rette.

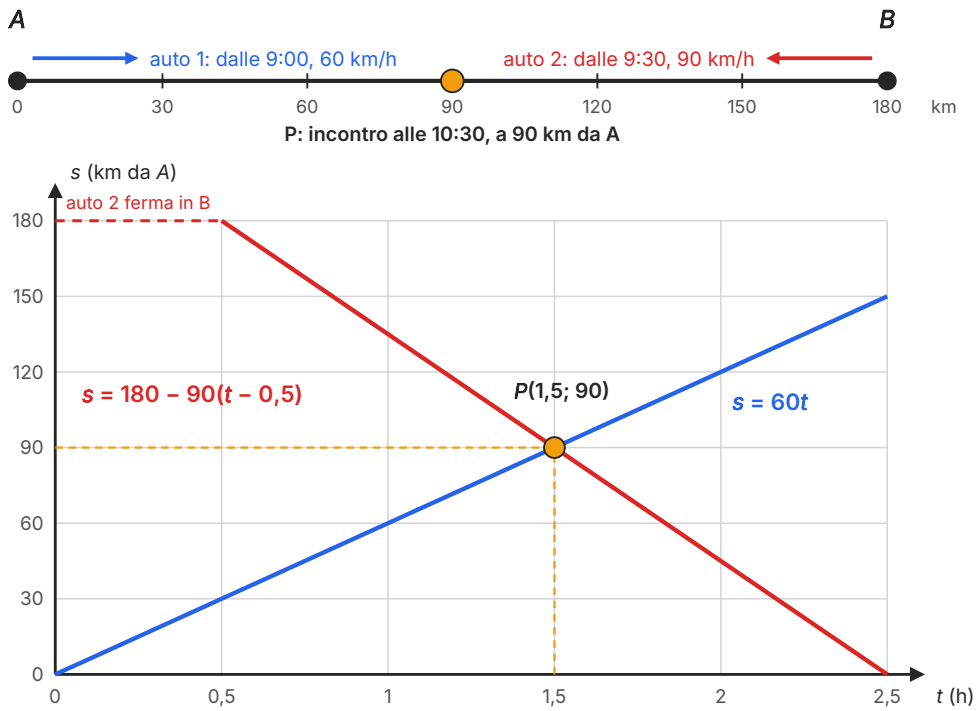


Figura 10.5 Sopra, lo schema del moto delle due auto dell'Esempio svolto; sotto, la distanza da A in funzione del tempo trascorso dalle 9:00. L'auto 2 resta in B fino a $t = 0{,}5$; le due rette si incontrano in $P(1{,}5;\ 90)$, cioè alle 10:30 a 90 km da A.

Nei problemi di **lavoro** si ragiona sulla frazione di lavoro svolta nell'unità di tempo. **Un rubinetto riempie una vasca in 4 ore, un altro in 6 ore. Aprendoli insieme, quanto tempo serve?** In un'ora il primo riempie $\frac{1}{4}$ della vasca e il secondo $\frac{1}{6}$. Se t sono le ore necessarie ($t > 0$), insieme riempiono $\frac{t}{4} + \frac{t}{6}$ della vasca, che deve essere l'intera vasca: $\frac{t}{4} + \frac{t}{6} = 1$. Moltiplicando per 12: $3t + 2t = 12$, quindi $t = \frac{12}{5} = 2{,}4$ ore, cioè 2 ore e 24 minuti. È ragionevole: meno delle 4 ore del rubinetto più veloce.

10.6.5 Problemi di geometria

Un rettangolo ha perimetro 46 cm e la base supera di 3 cm il triplo dell'altezza. Trova le dimensioni. Sia h l'altezza in centimetri, con $h > 0$; la base è $3h + 3$. Il perimetro è il doppio della somma delle dimensioni: $2(h + 3h + 3) = 46$, cioè $8h + 6 = 46$, quindi $h = 5$. L'altezza è 5 cm e la base 18 cm; verifica: $2(5 + 18) = 46$ e $18 = 3 \cdot 5 + 3$. Nei problemi di geometria le limitazioni sono

spesso decisive: una lunghezza negativa o nulla segnala che il problema, con quei dati, non ha soluzione.

SINTESI

- Un'identità è un'uguaglianza tra espressioni letterali vera per tutti i valori delle lettere; un'equazione è un'uguaglianza di cui si cercano i valori dell'incognita che la rendono vera.
- Le soluzioni si cercano nel dominio dell'equazione e nell'insieme numerico fissato (qui $\mathbb{Q}$); l'insieme delle soluzioni si indica con S.
- Un'equazione è determinata, indeterminata o impossibile se ha un numero finito di soluzioni, infinite soluzioni o nessuna.
- Primo principio: aggiungendo o togliendo la stessa quantità ai due membri si ottiene un'equazione equivalente (regola del trasporto, cancellazione).
- Secondo principio: moltiplicando o dividendo i due membri per una stessa quantità diversa da zero si ottiene un'equazione equivalente (cambio di segno, eliminazione dei denominatori numerici).
- La forma normale è $ax = b$: se $a \neq 0$, $x = \frac{b}{a}$; se $a = 0$ e $b \neq 0$ è impossibile; se $a = b = 0$ è indeterminata.
- Legge di annullamento del prodotto: $AB = 0$ se e solo se $A = 0$ o $B = 0$; permette di risolvere equazioni di grado superiore scomposte in fattori di primo grado.
- La soluzione di $mx + q = 0$ è l'ascissa del punto in cui la retta $y = mx + q$ taglia l'asse x.
- Equazioni fratte: C.E. sull'equazione di partenza, eliminazione del mcm, controllo finale delle soluzioni.
- Equazioni letterali: si discutono i casi in cui il coefficiente dell'incognita, che dipende dai parametri, si annulla.
- Problemi: comprendere e scegliere l'incognita con le limitazioni, tradurre, risolvere, controllare accettabilità e verifica nel testo.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Quale delle seguenti uguaglianze è un'identità?

   A. $2x + 3 = 5$

   B. $(x - 1)^2 = x^2 - 1$

   C. $3(x + 2) = 3x + 6$

   D. $x + 1 = x$

2. ● Il numero -2 è soluzione dell'equazione:

   A. $2x - 4 = 0$

   B. $x^2 + 4 = 0$

   C. $5 - x = 3$

   D. $3x + 6 = 0$

3. ● L'equazione $0 \cdot x = 5$ è:

   A. determinata

   B. impossibile

   C. indeterminata

   D. di secondo grado

4. ● Dall'equazione $-3x = 12$, applicando il secondo principio, si ottiene:

   A. $x = -4$

   B. $x = 4$

   C. $x = 15$

   D. $x = -\frac{1}{4}$

5. ●● Le condizioni di esistenza dell'equazione $\frac{x}{x^2 - 9} = \frac{1}{x + 3}$ sono:

   A. $x \neq 3$ e $x \neq -3$

   B. solo $x \neq 3$

   C. $x \neq 9$

   D. nessuna condizione

6. ●● Quale coppia è formata da equazioni equivalenti in $\mathbb{Q}$?

   A. $x = 3$ e $x^2 = 9$

   B. $2x - 1 = 5$ e $x + 4 = 7$

   C. $x(x - 1) = 0$ e $x - 1 = 0$

   D. $\frac{x}{x} = 1$ e $0 \cdot x = 0$

7. ●● Nell'incognita x, l'equazione $ax = 2a$ per $a = 0$ è:

   A. impossibile

   B. determinata, con $x = 2$

   C. indeterminata

   D. priva di significato

8. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Moltiplicando entrambi i membri di un'equazione per 0 si ottiene un'equazione equivalente. b) Un'equazione di primo grado $ax = b$ con $a \neq 0$ ha una e una sola soluzione. c) Le equazioni $x^2 = 3x$ e $x = 3$ sono equivalenti. d) Se $AB = 0$, allora $A = 0$ e $B = 0$. e) In un'equazione fratta le soluzioni che non rispettano le C.E. vanno scartate. f) L'equazione $x + 2 = x + 2$ è impossibile.

9. ● Completa. a) Un'uguaglianza tra espressioni letterali vera per tutti i valori delle lettere si chiama _____. b) La regola del trasporto è una conseguenza del _____ principio di equivalenza. c) L'equazione $ax = b$ con $a = 0$ e $b \neq 0$ è _____. d) Per eliminare i denominatori numerici si moltiplicano i due membri per il _____ dei denominatori. e) In un problema, le condizioni che l'incognita deve rispettare per avere senso si chiamano _____.

Calcolare

10. ● Risolvi e verifica. a) $5x - 3 = 2x + 9$ b) $7 - 2x = 3x + 22$ c) $4(x - 1) = 3(x + 2) - 5$ d) $2(3x - 1) - (x + 4) = 3x$

11. ● Risolvi e stabilisci se ciascuna equazione è determinata, impossibile o indeterminata. a) $3x + 2(x - 4) = 5x - 8$ b) $2(x + 1) - 3 = 2x + 5$ c) $3(2 - x) = -(3x - 6) + x$

12. ●● Risolvi le equazioni con denominatori numerici. a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$ b) $\frac{x-1}{4} - \frac{x+2}{6} = 1$ c) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-2}{2} = \frac{x}{6} + 1$ d) $0{,}5x - 1{,}2 = 0{,}3x + 0{,}4$

13. ●● Risolvi, sviluppando i prodotti notevoli. a) $(x + 2)^2 - x^2 = 16$ b) $(x - 3)(x + 3) - (x - 1)^2 = 2$ c) $(2x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 8x$ d) $(x + 1)^3 - x^3 = 3x^2 + 4$

14. ●● Risolvi con la legge di annullamento del prodotto. a) $(x - 4)(3x + 2) = 0$ b) $x^2 - 7x = 0$ c) $4x^2 - 9 = 0$ d) $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$ e) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

15. ● Stabilisci, senza risolvere, se il numero indicato è soluzione dell'equazione. a) $3x - 7 = 2 - x$, $x = \frac{9}{4}$ b) $x^2 - 2x = 3$, $x = -1$ c) $\frac{x+1}{x-2} = 4$, $x = 3$ d) $\frac{x^2-4}{x-2} = 4$, $x = 2$

16. ●● Risolvi le equazioni fratte. a) $\frac{4}{x-1} = \frac{3}{x-2}$ b) $\frac{x+3}{x-1} = 2$ c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{2}{x^2-4}$

17. ●● Risolvi le equazioni fratte, controllando con cura le soluzioni. a) $\frac{x}{x-3} = \frac{3}{x-3}$ b) $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+3}{x^2-1}$ c) $\frac{x}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}$ d) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$

18. ●● Risolvi e discuti, nell'incognita x (le altre lettere sono parametri). a) $ax = a^2$ b) $(a + 2)x = a^2 - 4$ c) $a(x - 1) = 2(x + 1)$ d) $(b^2 - 9)x = b - 3$

19. ●● Risolvi e discuti, nell'incognita x: $\frac{x}{a} + x = 2$.

20. ●●● *(approfondimento)* Risolvi e discuti, nell'incognita x, l'equazione fratta $\frac{2}{x-a} = \frac{1}{x}$.

21. ● Ricava la grandezza indicata (supponi diverse da zero le grandezze per cui dividi). a) $v = v_0 + at$, rispetto a t b) $A = \frac{(B+b)h}{2}$, rispetto a b c) $P = 2(b+h)$, rispetto a h

Dimostrare e argomentare

22. ●● Trova l'errore. Sara deve risolvere $x^2 = 5x$: divide entrambi i membri per x e scrive «$x = 5$, $S = \{5\}$». Spiega che cosa ha sbagliato e qual è l'insieme delle soluzioni corretto.

23. ●● Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione $x = 3$ per $x - 1$ si ottiene $x(x-1) = 3(x-1)$. Risolvi la nuova equazione e spiega, citando il secondo principio, perché le due equazioni non sono equivalenti.

24. ●● Dimostra che l'equazione $ax + b = 0$, con $a \neq 0$, ha una e una sola soluzione. (Suggerimento: per l'unicità, supponi che x_1 e x_2 siano due soluzioni e sottrai le uguaglianze $ax_1 + b = 0$ e $ax_2 + b = 0$.)

25. ●●● Trova l'errore in questa «dimostrazione» che 2 = 1. Siano a e b due numeri uguali e diversi da zero: $a = b$. Moltiplico per a: $a^2 = ab$. Sottraggo b^2: $a^2 - b^2 = ab - b^2$. Scompongo: $(a+b)(a-b) = b(a-b)$. Divido per $a - b$: $a + b = b$. Poiché $a = b$: $2b = b$, e dividendo per b: $2 = 1$.

Problemi

26. ● Trova tre numeri dispari consecutivi la cui somma è 75.

27. ● Un padre ha 45 anni e il figlio 13. Tra quanti anni l'età del padre sarà il triplo di quella del figlio? E tra quanti anni sarà il doppio?

28. ●● Un giubbotto viene scontato del 25% e poi, sul prezzo già scontato, di un ulteriore 10%. Ora costa 81 €. Qual era il prezzo iniziale? Lo sconto complessivo è del 35%?

29. ●● Alle 8:00 un ciclista parte da una località A e procede a 18 km/h. Alle 8:40 parte da A, sulla stessa strada e nello stesso verso, un motorino che va a 30 km/h. A che ora e a quale distanza da A il motorino raggiunge il ciclista?

30. ●● (Chimica) Quanta acqua bisogna aggiungere a 6 L di una soluzione che contiene il 15% di alcol per ottenere una soluzione al 10%?

31. ●● Una stampante stampa un lotto di volantini in 30 minuti, una seconda stampante lo stesso lotto in 45 minuti. Quanto tempo impiegano lavorando insieme?

32. ●● In un triangolo isoscele il perimetro è 50 cm e la base supera di 5 cm ciascuno dei lati obliqui. Trova la lunghezza dei lati e controlla che la base sia minore della somma degli altri due lati.

Verso la verifica

33. ●● Risolvi. a) $\frac{x-1}{2} - \frac{(x+2)(x-2)}{4} = \frac{1-x^2}{4} + \frac{x}{3}$ b) $\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-1}{x+2} = \frac{12}{x^2-4}$

34. ●● Risolvi e discuti, nell'incognita x: a) $(a^2-4)x = a^2+2a$; b) $(a-1)x+2 = a(x+1)$.

35. ●●● Sfida. Una tradizione antica, raccolta in un epigramma greco, racconta così la vita del matematico Diofanto di Alessandria: la sua infanzia durò un sesto della vita; dopo un altro dodicesimo gli spuntò la barba; dopo un ulteriore settimo si sposò; cinque anni dopo il matrimonio gli nacque un figlio, che visse la metà degli anni del padre; Diofanto morì quattro anni dopo il figlio. Quanti anni visse Diofanto? A che età si sposò e a che età nacque il figlio?

PER APPROFONDIRE

- [POL] Il metodo di Pólya (comprendere, concepire un piano, eseguirlo, guardare indietro) è il fondamento delle quattro fasi del paragrafo 10.6.
- [BOY] Per la storia dell'algebra: da Diofanto ad al-Khwarizmi, fino alla notazione simbolica di Viète.
- [CR] Courant e Robbins mostrano come le equazioni algebriche abbiano spinto ad ampliare gli insiemi numerici.

Glossario del capitolo

Accettabilità
Proprietà di una soluzione di rispettare le limitazioni imposte dal testo di un problema (per esempio essere un numero naturale o una lunghezza positiva).

Discussione
Esame dei casi possibili di un'equazione (determinata, impossibile, indeterminata) al variare dei coefficienti o dei parametri.

Dominio di un'equazione
Insieme dei valori dell'incognita per i quali entrambi i membri hanno significato.

Equazione
Uguaglianza tra due espressioni contenenti un'incognita, di cui si cercano i valori che la rendono vera.

Equazione determinata
Equazione che ha un numero finito di soluzioni; un'equazione di primo grado $ax = b$ con $a \neq 0$ ne ha esattamente una, $x = b/a$.

Equazione fratta
Equazione in cui l'incognita compare in almeno un denominatore.

Equazione impossibile
Equazione che non ha soluzioni: il suo insieme delle soluzioni è vuoto.

Equazione indeterminata
Equazione che ha infinite soluzioni; al primo grado accade quando ogni numero del dominio è soluzione.

Equazione letterale
Equazione che contiene, oltre all'incognita, altre lettere (parametri) che rappresentano numeri dati.

Equazioni equivalenti
Equazioni che hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

Forma normale
Scrittura $ax = b$ di un'equazione di primo grado, ottenuta con i principi di equivalenza.

Identità
Uguaglianza tra espressioni letterali vera per tutti i valori delle lettere per cui le espressioni hanno significato.

Legge di annullamento del prodotto
Un prodotto è zero se e solo se almeno uno dei fattori è zero: $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ oppure $B = 0$.

Limitazioni
In un problema, condizioni che l'incognita deve soddisfare perché abbia senso nella situazione concreta (per esempio essere un numero naturale o una lunghezza positiva).

Primo principio di equivalenza
Aggiungendo o sottraendo una stessa quantità a entrambi i membri si ottiene un'equazione equivalente; ne deriva la regola del trasporto.

Regola del trasporto
Un termine può essere spostato da un membro all'altro di un'equazione cambiandogli il segno.

Secondo principio di equivalenza
Moltiplicando o dividendo entrambi i membri per una stessa quantità diversa da zero si ottiene un'equazione equivalente.

Soluzione
Valore dell'incognita che, sostituito, rende vera l'uguaglianza; si dice anche radice dell'equazione.

Soluzione estranea
Valore che risolve un'equazione trasformata ma non quella di partenza; compare moltiplicando per un'espressione che può annullarsi.

Soluzioni

1. C. È la proprietà distributiva, vera per ogni x. A è un'equazione ($x = 1$); B è falsa in generale, perché $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$; D è un'equazione impossibile.

2. D. $3 \cdot (-2) + 6 = 0$. Per le altre: $-8 \neq 0$; $4 + 4 = 8 \neq 0$; $5 + 2 = 7 \neq 3$.

3. B. Nessun numero moltiplicato per 0 dà 5.

4. A. Dividendo entrambi i membri per -3: $x = 12 : (-3) = -4$.

5. A. $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$; i denominatori si annullano per $x = 3$ e per $x = -3$.

6. B. Entrambe hanno $S = \{3\}$. In A la seconda ha anche -3; in C la prima ha anche 0; in D la prima ha $S = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, la seconda $S = \mathbb{Q}$.

7. C. Per $a = 0$ l'equazione diventa $0 \cdot x = 0$, vera per ogni x.

8. a) F: si ottiene $0 = 0$; il secondo principio richiede un fattore diverso da zero. b) V. c) F: $x^2 = 3x$ ha $S = \{0, 3\}$, mentre $x = 3$ ha $S = \{3\}$. d) F: basta che almeno uno dei fattori sia 0 ($A = 0$ *oppure* $B = 0$). e) V. f) F: è indeterminata (un'identità), $S = \mathbb{Q}$.

9. a) identità. b) primo. c) impossibile. d) mcm (minimo comune multiplo). e) limitazioni (condizioni di accettabilità).

10. a) $3x = 12$, $x = 4$. b) $-5x = 15$, $x = -3$. c) $4x - 4 = 3x + 1$, $x = 5$. d) $6x - 2 - x - 4 = 3x$, $2x = 6$, $x = 3$.

11. a) $5x - 8 = 5x - 8$, $0 \cdot x = 0$: indeterminata, $S = \mathbb{Q}$. b) $2x - 1 = 2x + 5$, $0 \cdot x = 6$: impossibile, $S = \varnothing$. c) $6 - 3x = -3x + 6 + x$, quindi $0 = x$: determinata, $S = \{0\}$.

12. a) Per 6: $3x + 2x = 60$, $x = 12$. b) Per 12: $3(x-1) - 2(x+2) = 12$, $x - 7 = 12$, $x = 19$. c) Per 6: $2(2x+1) - 3(x-2) = x + 6$, $x + 8 = x + 6$, $0 \cdot x = -2$: impossibile. d) Per 10: $5x - 12 = 3x + 4$, $2x = 16$, $x = 8$.

13. a) $4x + 4 = 16$, $x = 3$. b) $x^2 - 9 - x^2 + 2x - 1 = 2$, $2x = 12$, $x = 6$. c) $8x = 8x$: indeterminata, $S = \mathbb{Q}$. d) $3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 + 4$, $3x = 3$, $x = 1$.

14. a) $S = \{4, -\frac{2}{3}\}$. b) $x(x-7) = 0$, $S = \{0, 7\}$. c) $(2x-3)(2x+3) = 0$, $S = \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$. d) $x(x-3)^2 = 0$, $S = \{0, 3\}$. e) $x^2(x+2) - (x+2) = (x+2)(x-1)(x+1) = 0$, $S = \{-2, -1, 1\}$.

15. a) Sì: entrambi i membri valgono $-\frac{1}{4}$. b) Sì: $1 + 2 = 3$. c) Sì: $\frac{4}{1} = 4$. d) No: per $x = 2$ il denominatore si annulla; 2 non appartiene al dominio.

16. a) C.E. $x \neq 1$, $x \neq 2$; $4(x-2) = 3(x-1)$, $x = 5$, accettabile. b) C.E. $x \neq 1$; $x + 3 = 2x - 2$, $x = 5$, accettabile. c) C.E. $x \neq 0$; per $4x$: $4 + 2 = 3x$, $x = 2$, accettabile. d) C.E. $x \neq \pm 2$; $3(x-2) - (x+2) = 2$, $2x - 8 = 2$, $x = 5$, accettabile.

17. a) C.E. $x \neq 3$; $x = 3$ va scartato: impossibile, $S = \varnothing$. b) C.E. $x \neq \pm 1$; $2(x+1) - (x-1) = x + 3$, cioè $x + 3 = x + 3$: indeterminata nel dominio, $S = \mathbb{Q} \setminus \{-1, 1\}$. c) C.E. $x \neq \pm 3$; $x(x-3) = 18$, $x^2 - 3x - 18 = 0$, $(x-6)(x+3) = 0$; $x = -3$ va scartato, $S = \{6\}$. d) C.E. $x \neq \pm 1$; $(x+1) + (x-1) = 2$, $x = 1$, da scartare: impossibile.

18. a) Se $a \neq 0$: $x = a$; se $a = 0$: indeterminata. b) $(a+2)x = (a-2)(a+2)$: se $a \neq -2$, $x = a - 2$; se $a = -2$: indeterminata. c) $(a-2)x = a + 2$: se $a \neq 2$, $x = \frac{a+2}{a-2}$; se $a = 2$: $0 \cdot x = 4$, impossibile. d) $(b-3)(b+3)x = b - 3$: se $b \neq \pm 3$, $x = \frac{1}{b+3}$; se $b = 3$: $0 \cdot x = 0$, indeterminata; se $b = -3$: $0 \cdot x = -6$, impossibile.

19. Deve essere $a \neq 0$. Moltiplicando per a: $(a+1)x = 2a$. Se $a \neq 0$ e $a \neq -1$: $x = \frac{2a}{a+1}$; se $a = -1$: $0 \cdot x = -2$, impossibile; per $a = 0$ l'equazione non ha significato.

20. C.E. $x \neq a$, $x \neq 0$. Moltiplicando per $x(x-a)$: $2x = x - a$, quindi $x = -a$. Deve essere $-a \neq 0$ e $-a \neq a$, cioè $a \neq 0$. Se $a \neq 0$: $S = \{-a\}$; se $a = 0$: impossibile.

21. a) $t = \frac{v - v_0}{a}$. b) $2A = (B + b)h$, $b = \frac{2A}{h} - B$. c) $h = \frac{P}{2} - b$.

22. Ha diviso per x, che può valere 0: il secondo principio permette di dividere solo per quantità diverse da zero, e così ha perso la soluzione $x = 0$. Corretto: $x^2 - 5x = 0$, $x(x - 5) = 0$, $S = \{0, 5\}$.

23. $x(x - 1) - 3(x - 1) = 0$, $(x - 1)(x - 3) = 0$, $S = \{1, 3\}$, mentre $x = 3$ ha $S = \{3\}$. Il secondo principio vale per un fattore diverso da zero; $x - 1$ si annulla per $x = 1$, che è una soluzione estranea.

24. Esistenza: $x = -\frac{b}{a}$ (che esiste perché $a \neq 0$) è soluzione, perché $a \cdot (-\frac{b}{a}) + b = -b + b = 0$. Unicità: se $ax_1 + b = 0$ e $ax_2 + b = 0$, sottraendo si ha $a(x_1 - x_2) = 0$; poiché $a \neq 0$, per la legge di annullamento del prodotto $x_1 - x_2 = 0$, cioè $x_1 = x_2$.

25. Poiché $a = b$, si ha $a - b = 0$: il passaggio «divido per $a - b$» è una divisione per zero, vietata dal secondo principio. Fino a $(a + b)(a - b) = b(a - b)$ tutto è corretto (entrambi i membri valgono 0); da lì in poi no.

26. Sia x il primo, dispari: $x + (x + 2) + (x + 4) = 75$, $3x = 69$, $x = 23$. I numeri sono 23, 25, 27.

27. Triplo: $45 + x = 3(13 + x)$, $2x = 6$, $x = 3$ (48 e 16 anni). Doppio: $45 + y = 2(13 + y)$, $y = 19$ (64 e 32 anni).

28. $0{,}75 \cdot 0{,}90 \cdot x = 81$, cioè $0{,}675x = 81$, $x = 120$ €. Lo sconto complessivo non è del 35%: il prezzo finale è il 67,5% dell'iniziale, quindi lo sconto è del 32,5%.

29. Sia t il tempo in ore dalle 8:00, $t \geq \frac{2}{3}$: $18t = 30(t - \frac{2}{3})$, $12t = 20$, $t = \frac{5}{3}$ h = 1 h 40 min. Il sorpasso avviene alle 9:40, a $18 \cdot \frac{5}{3} = 30$ km da A (il motorino ha viaggiato 1 ora a 30 km/h).

30. L'alcol resta lo stesso: $0{,}15 \cdot 6 = 0{,}10(6 + x)$, $0{,}9 = 0{,}6 + 0{,}1x$, $x = 3$ L.

31. $\frac{t}{30} + \frac{t}{45} = 1$; per 90: $3t + 2t = 90$, $t = 18$ minuti.

32. Lato obliquo l ($l > 0$): $2l + (l + 5) = 50$, $3l = 45$, $l = 15$ cm; base 20 cm. Controllo: $20 < 15 + 15 = 30$.

33. a) Per 12: $6(x - 1) - 3(x^2 - 4) = 3(1 - x^2) + 4x$, cioè $6x + 6 = 4x + 3$, $x = -\frac{3}{2}$. b) C.E. $x \neq \pm 2$; $(x + 1)(x + 2) - (x - 1)(x - 2) = 12$, cioè $6x = 12$, $x = 2$, da scartare: impossibile, $S = \varnothing$.

34. a) $(a - 2)(a + 2)x = a(a + 2)$. Se $a \neq \pm 2$: $x = \frac{a}{a - 2}$; se $a = 2$: $0 \cdot x = 8$, impossibile; se $a = -2$: $0 \cdot x = 0$, indeterminata. b) $ax - x + 2 = ax + a$, quindi $-x = a - 2$ e $x = 2 - a$: l'equazione è determinata per ogni valore di a.

35. Detta x la durata della vita: $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$. Per 84: $14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 = 84x$, cioè $75x + 756 = 84x$, $x = 84$. Diofanto visse 84 anni; si sposò a 14 + 7 + 12 = 33 anni; il figlio nacque quando il padre aveva 38 anni (e visse 42 anni: 38 + 42 + 4 = 84).