CAPITOLO

9

Frazioni algebriche

Prima di toccare una frazione, guarda dove si annulla il suo denominatore: è lì che si nascondono gli errori.

OBIETTIVI

1. Riconoscere una frazione algebrica e determinarne le condizioni di esistenza e il dominio.
2. Semplificare una frazione algebrica scomponendo numeratore e denominatore, senza mai semplificare addendi.
3. Ridurre più frazioni allo stesso denominatore e calcolarne la somma algebrica con il mcm.
4. Moltiplicare, dividere ed elevare a potenza frazioni algebriche, tenendo conto delle condizioni di esistenza.
5. Semplificare espressioni con frazioni algebriche, anche a più piani.
6. Ricavare una variabile da una formula di fisica o di geometria.

INDICE DEL CAPITOLO

9.1 Che cos'è una frazione algebrica 2
9.2 Frazioni equivalenti e semplificazione 5
9.3 Riduzione allo stesso denominatore e somma algebrica 9
9.4 Moltiplicazione, divisione e potenza 13
9.5 Le frazioni algebriche nelle formule 16

Matematica 1 · Parte III · Il calcolo letterale · versione 1.0
Capitolo 9: Frazioni algebriche · pagine 227–252 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo 3 hai imparato a lavorare con le frazioni numeriche: semplificarle, ridurle allo stesso denominatore, sommarle, moltiplicarle, dividerle. Nei capitoli 7 e 8 hai imparato a calcolare con i polinomi e, soprattutto, a *scomporli* in fattori. In questo capitolo le due strade si incontrano. Una **frazione algebrica** è una frazione il cui numeratore e il cui denominatore sono polinomi, come $\frac{x+1}{x-2}$ o $\frac{a^2-b^2}{a\,b}$.

La buona notizia è che le regole di calcolo sono esattamente quelle delle frazioni numeriche: il mcm dei denominatori serve ancora per sommare, il prodotto si fa ancora «numeratore per numeratore e denominatore per denominatore», il quoziente si ottiene ancora moltiplicando per il reciproco. La novità è una sola, ma importante: il denominatore contiene lettere, e per alcuni valori delle lettere può diventare zero. Per quei valori la frazione non ha significato. Per questo ogni calcolo con le frazioni algebriche comincia con una domanda: *quali valori dobbiamo escludere?*

Le frazioni algebriche non sono un esercizio fine a se stesso. Compaiono ogni volta che una grandezza si ottiene dividendo: la velocità è uno spazio diviso un tempo, la densità una massa divisa un volume, la resistenza equivalente di due resistori in parallelo si calcola con una somma di reciproci. Alla fine del capitolo userai le frazioni algebriche per ricavare una grandezza da una formula, e scoprirai perché la velocità media di un viaggio di andata e ritorno *non* è la media delle due velocità.

9.1 Che cos'è una frazione algebrica

9.1.1 Dalle frazioni numeriche alle frazioni algebriche

Si chiama **frazione algebrica** il quoziente di due polinomi A e B, con B diverso dal polinomio nullo, scritto nella forma $\frac{A}{B}$. Il polinomio A è il *numeratore*, il polinomio B il *denominatore*. Sono frazioni algebriche, per esempio:

$$\frac{3}{x} \qquad \frac{x^2-9}{x+3} \qquad \frac{2a-b}{a^2+a\,b} \qquad \frac{x+1}{5}$$

L'ultima ha un denominatore numerico: $\frac{x+1}{5}$ è semplicemente il polinomio $\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$, che ha significato per qualsiasi valore di x. Più in generale, ogni polinomio A si può pensare come la frazione algebrica $\frac{A}{1}$: i polinomi sono frazioni algebriche particolari, così come i numeri interi sono frazioni particolari con denominatore 1. Le frazioni che contengono lettere al denomi-

natore sono le espressioni *fratte* già incontrate nel capitolo 7, ed è su di esse che concentreremo l'attenzione.

Le frazioni algebriche nascono in modo naturale anche fuori dalla matematica. Un piccolo laboratorio stampa magliette: l'impianto di stampa costa 500 € una volta per tutte e ogni maglietta costa 2 € di materiale. Per n magliette la spesa totale è $500 + 2n$ euro, e il costo medio di una maglietta è la frazione algebrica $\frac{500 + 2n}{n}$. Per 100 magliette vale $\frac{700}{100} = 7$ €, per 1000 magliette vale $\frac{2500}{1000} = 2{,}5$ €: più magliette si stampano, più la spesa fissa si divide e il costo medio si avvicina a 2 €. Osserva anche che la frazione non ha senso per $n = 0$: senza magliette non c'è nessun costo medio da calcolare.

Una frazione algebrica è un'espressione fratta, non un monomio né un polinomio: $\frac{3}{x} = 3x^{-1}$ ha un esponente negativo, e i monomi, per definizione, hanno esponenti naturali. Questa è la ragione per cui nel capitolo 7 abbiamo detto che il quoziente di due monomi non sempre è un monomio: quando non lo è, è una frazione algebrica.

9.1.2 Le condizioni di esistenza

Una frazione algebrica rappresenta, per ogni scelta dei valori delle lettere, un numero: il quoziente tra il valore del numeratore e quello del denominatore. Ma la divisione per zero è impossibile. Le **condizioni di esistenza** (C.E.) di una frazione algebrica sono le condizioni che le lettere devono rispettare perché il denominatore sia diverso da zero.

Se il denominatore è di primo grado, basta un controllo diretto: in $\frac{5}{2x - 8}$ il denominatore si annulla quando $2x = 8$, cioè per $x = 4$; la C.E. è $x \neq 4$. Se il denominatore è più complicato, lo strumento decisivo è la **scomposizione in fattori** del capitolo 8, insieme a una proprietà dei numeri che conosci bene:

> **DA RICORDARE**
> Un prodotto di numeri è uguale a zero se e solo se almeno uno dei fattori è zero. Quindi un prodotto è **diverso** da zero se e solo se **tutti** i fattori sono diversi da zero. Per scrivere le C.E. si scompone il denominatore e si impone che ogni fattore sia diverso da zero.

Consideriamo $\frac{x + 1}{x^2 - 9}$. Il denominatore è una differenza di quadrati: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$. Il prodotto è diverso da zero se $x - 3 \neq 0$ e $x + 3 \neq 0$, cioè se $x \neq 3$ e $x \neq -3$. Si scrive in breve: C.E. $x \neq \pm 3$. Osserva che il numeratore non conta: per $x = -1$ la frazione vale $\frac{0}{-8} = 0$, che è un numero rispettabilissimo. Un numeratore nullo dà una frazione nulla; un denominatore nullo dà una frazione *senza significato*.

Ci sono denominatori che non si annullano mai. In $\frac{5}{x^2+9}$, per qualsiasi valore di x il quadrato x^2 è maggiore o uguale a zero, quindi $x^2 + 9 \geq 9$: il denominatore è sempre positivo e la frazione ha significato per ogni x. In questo caso si scrive «C.E.: nessuna condizione», oppure «C.E.: $\forall x$».

Se le lettere sono più di una, le condizioni riguardano tutte le lettere coinvolte. Per $\frac{a+b}{a^2 - a\,b}$ si scompone $a^2 - a\,b = a(a - b)$ e si ottiene: C.E. $a \neq 0$ e $a \neq b$. La lettera b da sola può assumere qualsiasi valore; quello che non si può fare è scegliere b uguale ad a.

9.1.3 Il dominio e il valore numerico

L'insieme dei valori delle lettere che soddisfano le C.E. si chiama **dominio** della frazione (o insieme di definizione). È la stessa idea di dominio naturale di una funzione vista nel capitolo 6: là, per $y = \frac{6}{x}$, avevamo escluso $x = 0$. In questo volume le lettere rappresentano numeri razionali, quindi per $\frac{x+1}{x^2-9}$ il dominio è $\mathbb{Q} \setminus \{-3, 3\}$.

Una volta stabilito il dominio, si può calcolare il **valore numerico** della frazione per qualsiasi valore ammesso, sostituendo come si fa per i polinomi (con le parentesi attorno ai numeri negativi e alle frazioni). La figura 9.1 rappresenta sulla retta i valori esclusi nell'esempio che segue.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Determina le condizioni di esistenza e il dominio della frazione $\frac{x+3}{x^3-4x}$; calcolane il valore per $x = 1$ e per $x = -3$. Che cosa succede per $x = 2$?

Scomposizione del denominatore. Raccogliamo x e riconosciamo una differenza di quadrati: $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$.

Condizioni di esistenza. Ogni fattore deve essere diverso da zero: $x \neq 0$, $x \neq 2$, $x \neq -2$. Il dominio è $\mathbb{Q} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

Valori numerici. Per $x = 1$ (ammesso): $\frac{1+3}{1-4} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$. Per $x = -3$ (ammesso): il numeratore vale 0, quindi la frazione vale 0. Per $x = 2$ il denominatore vale $8 - 8 = 0$: il valore non esiste, perché 2 non appartiene al dominio.

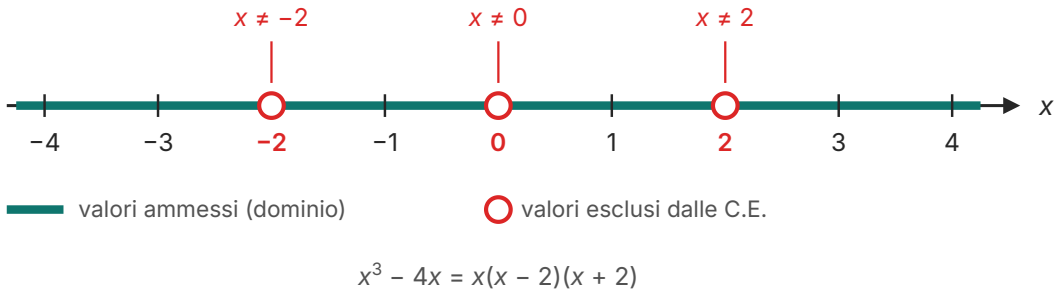


Figura 9.1 Il dominio della frazione $\frac{x+3}{x^3-4x}$: tutti i numeri della retta tranne −2, 0 e 2, dove il denominatore $x(x-2)(x+2)$ si annulla. I pallini vuoti indicano i valori esclusi.

9.2 Frazioni equivalenti e semplificazione

9.2.1 La proprietà invariantiva

Due frazioni algebriche si dicono **frazioni equivalenti** se assumono lo stesso valore per tutti i valori delle lettere che soddisfano le condizioni di esistenza di entrambe. Per le frazioni numeriche sappiamo che $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15}$: moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore per lo stesso numero diverso da zero si ottiene una frazione equivalente. Lo stesso vale per le frazioni algebriche.

In simboli, se M è un polinomio non nullo,

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M} \quad \text{per tutti i valori per cui } B \neq 0 \text{ e } M \neq 0.$$

Questa uguaglianza, letta da sinistra a destra, serve per **ridurre allo stesso denominatore**; letta da destra a sinistra serve per **semplificare**.

La **proprietà invariantiva** ha una clausola che non va mai dimenticata: M deve essere diverso da zero. Per esempio $\frac{3}{x}$ e $\frac{3(x-1)}{x(x-1)}$ hanno lo stesso valore per ogni x diverso da 0 e da 1; per $x = 1$ la prima vale 3, mentre la seconda non ha significato. Sono equivalenti nel senso della definizione: dove sono definite entrambe, coincidono.

9.2.2 Semplificare: solo fattori

Semplificare una frazione algebrica significa dividere numeratore e denominatore per un loro fattore comune. Una frazione è **ridotta ai minimi termini** quando numeratore e denominatore

non hanno più fattori comuni, né letterali né numerici: il loro MCD, calcolato come nel capitolo 8, è 1. La procedura è sempre la stessa:

1. si scompongono in fattori il numeratore e il denominatore;
2. si scrivono le C.E. guardando il denominatore *così com'è*, prima di semplificare;
3. si dividono numeratore e denominatore per i fattori comuni.

Per esempio:

$$\frac{4x-12}{x^2-9} = \frac{4(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{4}{x+3} \qquad \text{C.E. } x \neq \pm 3$$

Nella frazione semplificata il fattore $x-3$ è sparito, ma la condizione $x \neq 3$ resta: la frazione di partenza per $x = 3$ non esiste, e l'uguaglianza vale solo nel suo dominio. Torneremo su questo punto tra poco, con un grafico.

Il punto 1 non è una formalità. Si possono semplificare soltanto *fattori*, cioè termini che moltiplicano tutto il numeratore e tutto il denominatore. Un termine che compare in una somma (un *addendo*) non si semplifica mai. La figura 9.2 mette a confronto semplificazioni corrette e sbagliate.

ERRORE FREQUENTE

Semplificare gli addendi. Scrivere $\frac{x+6}{x+3} = \frac{6}{3} = 2$ è sbagliato: x non è un fattore del numeratore né del denominatore, è un addendo. Basta una prova: per $x = 1$ la frazione vale $\frac{7}{4}$, non 2. Allo stesso modo $\frac{x^2+4}{x+2}$ non si semplifica: $x^2 + 4$ non contiene il fattore $x + 2$ (anzi, è irriducibile), e $\frac{x^2+4}{x+2} \neq x + 2$. La regola da tenere a mente è quella delle frazioni numeriche: in $\frac{3+5}{3} = \frac{8}{3}$ nessuno si sognerebbe di «cancellare i 3».

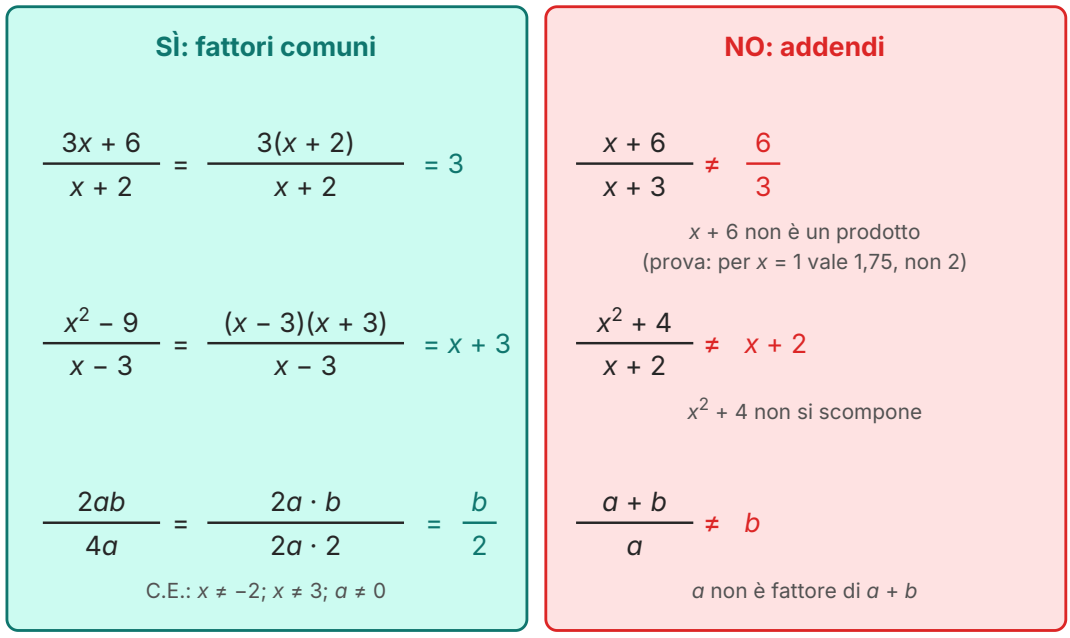


Figura 9.2 Semplificare: sì o no? A sinistra il numeratore e il denominatore sono prodotti con un fattore comune, che si può dividere (con le C.E. della frazione di partenza). A destra le lettere compaiono come addendi: nessuna semplificazione è lecita.

9.2.3 Il cambio di segno

Spesso numeratore e denominatore contengono fattori *opposti*, come $a - b$ e $b - a$. Non sono uguali, ma differiscono solo per il segno:

$$b - a = -(a - b)$$

Raccogliendo il segno meno si fa comparire il fattore comune. Per esempio, con C.E. $a \neq b$:

$$\frac{a-b}{b-a} = \frac{a-b}{-(a-b)} = -1$$

Questo **cambio di segno** si usa continuamente, insieme a due osservazioni. La prima: nei quadrati il segno sparisce, perché $(b - a)^2 = [-(a - b)]^2 = (a - b)^2$; nei cubi invece resta, $(b - a)^3 = -(a - b)^3$. La seconda: in una frazione il segno meno si può spostare a piacere tra la frazione, il numeratore e il denominatore,

$$-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}$$

ma cambiando il segno di *uno solo* dei tre elementi; cambiare il segno di due di essi lascia la frazione invariata: $\frac{-A}{-B} = \frac{A}{B}$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Semplifica, indicando le C.E.: a) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$; b) $\frac{2a^2-2ab}{b^2-a^2}$.

a) Il numeratore è il quadrato di un binomio, il denominatore una differenza di quadrati:

$$\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = \frac{x-3}{x+3} \qquad \text{C.E. } x \neq \pm 3$$

b) Raccogliamo $2a$ al numeratore e scomponiamo il denominatore: $\frac{2a(a-b)}{(b-a)(b+a)}$. Le C.E. si leggono dal denominatore: $a \neq b$ e $a \neq -b$, cioè $a \neq \pm b$. I fattori $a-b$ e $b-a$ sono opposti: scriviamo $b-a = -(a-b)$ e semplifichiamo:

$$\frac{2a(a-b)}{-(a-b)(a+b)} = -\frac{2a}{a+b}$$

Controllo. Per $a=2$, $b=1$: la frazione di partenza vale $\frac{8-4}{1-4} = -\frac{4}{3}$; il risultato vale $-\frac{4}{3}$. Un controllo numerico non dimostra che il calcolo è giusto, ma scova quasi sempre un errore.

9.2.4 Perché le C.E. si scrivono prima di semplificare

Consideriamo la funzione $y = \frac{x^2-1}{x-1}$. Il suo dominio è $\mathbb{Q} \setminus \{1\}$. Semplificando:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 \quad \text{con } x \neq 1$$

Per ogni x diverso da 1 la funzione dà lo stesso valore di $y = x+1$: per $x=0$ vale 1, per $x=2$ vale 3, per $x=3$ vale 4. Il suo grafico è quindi la retta $y = x+1$, a cui però manca un punto: quello di ascissa 1, che sulla retta sarebbe $(1;2)$. La figura 9.3 mostra questo «buco». Se avessimo semplificato senza scrivere la C.E., avremmo ottenuto la retta intera e attribuito alla frazione il valore 2 per $x=1$: un valore che la frazione di partenza non ha.

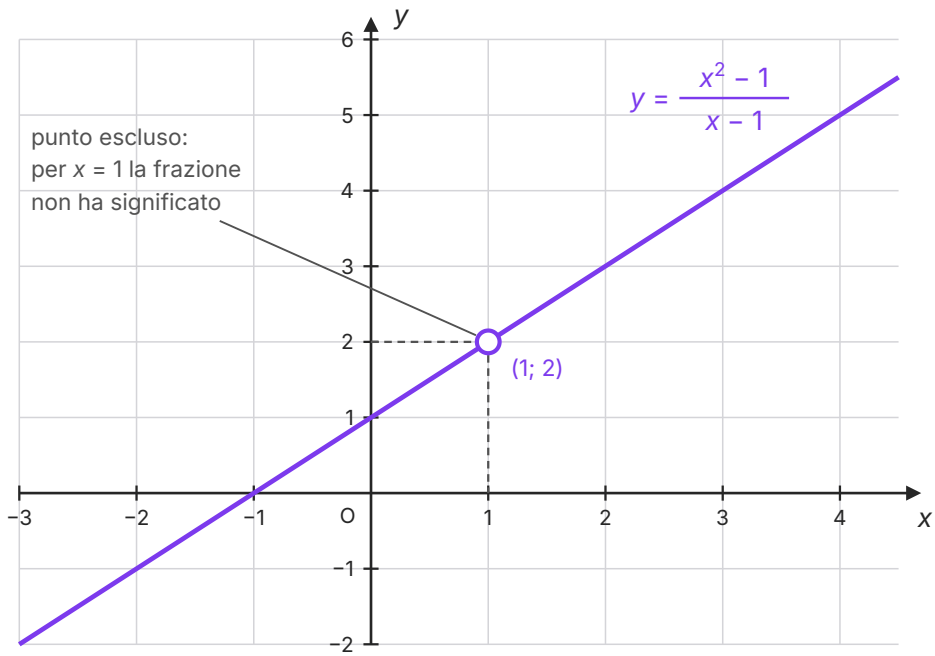


Figura 9.3 Il grafico di $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, calcolato dalla sua equazione, coincide con la retta $y = x + 1$ privata del punto (1; 2), segnato con un pallino vuoto: per $x = 1$ la frazione non è definita.

Ecco perché le C.E. si scrivono sempre sulla frazione *di partenza*, prima di qualsiasi semplificazione, e si portano con sé fino al risultato. Lo stesso accadrà con le equazioni fratte del capitolo 10: dimenticare una C.E. può far accettare come soluzione un numero che non lo è.

9.3 Riduzione allo stesso denominatore e somma algebrica

9.3.1 Il denominatore comune

Per sommare $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ si sceglie come denominatore comune il mcm(4, 6) = 12 e si scrive $\frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$: ogni frazione viene trasformata con la proprietà invariantiva, moltiplicando numeratore e denominatore per il «fattore mancante» (12 : 4 = 3 e 12 : 6 = 2). Con le frazioni algebriche si fa esattamente lo stesso, usando il mcm di polinomi del capitolo 8. **Ridurre allo stesso denominatore** più frazioni significa scrivere frazioni equivalenti a esse che abbiano

tutte lo stesso denominatore, detto **denominatore comune**; il più semplice è il mcm dei denominatori.

Riduciamo allo stesso denominatore $\frac{x}{x^2-4}$, $\frac{1}{x+2}$ e $\frac{2}{x-2}$. I denominatori scomposti sono $(x-2)(x+2)$, $x+2$ e $x-2$; il mcm è $(x-2)(x+2)$. Dividendo il mcm per ciascun denominatore si trovano i fattori mancanti (figura 9.4): nessuno per la prima frazione, $x-2$ per la seconda, $x+2$ per la terza. Quindi:

$$\frac{x}{(x-2)(x+2)}, \quad \frac{x-2}{(x-2)(x+2)}, \quad \frac{2(x+2)}{(x-2)(x+2)} \qquad \text{C.E. } x \neq \pm 2$$

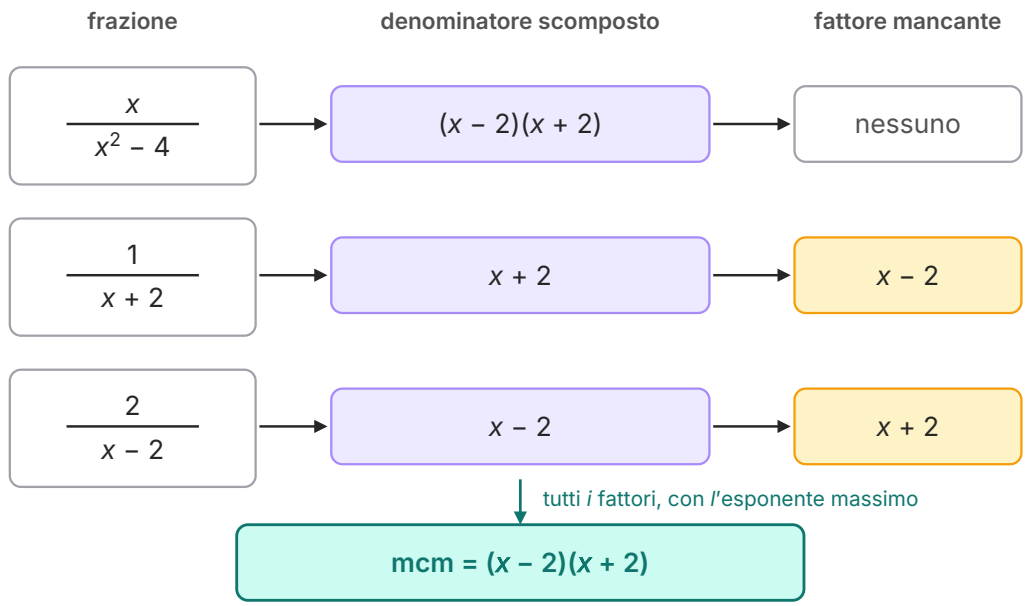


Figura 9.4 La ricerca del denominatore comune per le frazioni dell'esempio svolto del paragrafo 9.3.2. Si scompongono i denominatori (la terza frazione, $-\frac{2}{2-x}$, viene prima riscritta come $\frac{2}{x-2}$), si calcola il mcm e, per ogni frazione, il fattore per cui moltiplicare numeratore e denominatore.

9.3.2 La somma algebrica

Se due frazioni hanno lo stesso denominatore, la loro somma algebrica ha lo stesso denominatore e per numeratore la somma algebrica dei numeratori: $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} = \frac{A \pm C}{B}$. Se i denominatori sono diversi, prima si riducono allo stesso denominatore. La **somma algebrica di frazioni algebriche** segue quindi una procedura in sei passi.

IN SINTESI

Somma algebrica di frazioni algebriche.

1. Scomponi in fattori tutti i denominatori (e, se è facile, i numeratori: a volte si può semplificare subito).
2. Scrivi le C.E.: ogni fattore di ogni denominatore diverso da zero.
3. Calcola il mcm dei denominatori: sarà il denominatore comune.
4. Dividi il mcm per ciascun denominatore e moltiplica il risultato per il numeratore corrispondente.
5. Somma i nuovi numeratori, con le parentesi: un segno meno davanti a una frazione cambia il segno di *tutti* i termini del suo numeratore.
6. Riduci il numeratore, scomponilo e, se ha fattori in comune con il denominatore, semplifica.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola $\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}-\frac{2}{2-x}$.

Passi 1 e 2. Scomponiamo: $x^2-4=(x-2)(x+2)$. Nella terza frazione conviene cambiare segno al denominatore: $-\frac{2}{2-x}=-\frac{2}{-(x-2)}=+\frac{2}{x-2}$. C.E. $x\neq\pm2$.

Passi 3 e 4. Il mcm è $(x-2)(x+2)$; i fattori mancanti sono quelli della figura 9.4.

$$\frac{x+(x-2)+2(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

Passi 5 e 6. Il numeratore vale $x+x-2+2x+4=4x+2=2(2x+1)$. Non ha fattori in comune con il denominatore, quindi il risultato è

$$\frac{2(2x+1)}{(x-2)(x+2)}=\frac{4x+2}{x^2-4} \quad \text{C.E. } x\neq\pm2$$

Controllo. Per $x=0$ l'espressione di partenza vale $0+\frac{1}{2}-\frac{2}{2}=-\frac{1}{2}$, e il risultato vale $\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$.

ERRORE FREQUENTE

Il meno davanti alla frazione. In $\frac{3x}{x-1} - \frac{x+2}{x-1}$ il segno meno riguarda *tutto* il numeratore $x+2$. Il calcolo corretto è $\frac{3x-(x+2)}{x-1} = \frac{2x-2}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$, con $x \neq 1$. Chi scrive $3x - x + 2$ dimentica la parentesi e ottiene $\frac{2x+2}{x-1}$, che è un'altra frazione.

Sommare numeratori e denominatori. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ non è $\frac{2}{x+y}$: con $x = y = 1$ la prima vale 2 e la seconda 1. Il risultato corretto è $\frac{y+x}{xy}$.

Perché insistere sul mcm, quando anche il prodotto dei denominatori è un denominatore comune? Perché il prodotto porta con sé fattori inutili, che poi bisogna eliminare. Sommiamo $\frac{1}{x^2-x} + \frac{1}{x^2-1}$, con C.E. $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$. I denominatori sono $x(x-1)$ e $(x-1)(x+1)$; il mcm è $x(x-1)(x+1)$ e i fattori mancanti sono $x+1$ e x:

$$\frac{(x+1)+x}{x(x-1)(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x-1)(x+1)}$$

Con il prodotto dei denominatori, $x(x-1)^2(x+1)$, il numeratore sarebbe stato $(x^2-1)+(x^2-x) = 2x^2-x-1 = (2x+1)(x-1)$: si arriva allo stesso risultato, ma solo dopo aver scomposto un trinomio e semplificato il fattore $x-1$ che il mcm aveva evitato fin dall'inizio.

Un caso che si presenta spesso è la somma di una frazione e di un polinomio. Il polinomio si scrive con denominatore 1 e si procede come sempre: per esempio, con $x \neq 0$,

$$x + 1 - \frac{1}{x} = \frac{x^2+x-1}{x}$$

APPROFONDIMENTO

Le frazioni egizie. Gli antichi Egizi scrivevano le frazioni quasi sempre come somme di frazioni con numeratore 1, tutte diverse tra loro, dette oggi *frazioni unitarie*. Il papiro di Rhind, un manuale di calcolo copiato dallo scriba Ahmes intorno al 1650 a.C. e conservato al British Museum di Londra, si apre con una tabella che scompone in questo modo le frazioni $\frac{2}{n}$ per i numeri dispari n fino a 101. Vi si trova, per esempio, $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.

Con le frazioni algebriche si dimostra in una riga che ogni frazione unitaria si può spezzare in due frazioni unitarie diverse. Per ogni n naturale non nullo:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}$$

Per $n = 3$: $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$; per $n = 4$: $\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$. Una sola identità letterale vale per infiniti casi numerici, come nelle dimostrazioni del capitolo 7.

9.4 Moltiplicazione, divisione e potenza

9.4.1 Il prodotto

Il **prodotto di frazioni algebriche** è la frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D} \quad \text{C.E. } B \neq 0, D \neq 0$$

Nella pratica non conviene moltiplicare subito: prima si scompongono tutti i numeratori e i denominatori, poi si semplificano i fattori comuni, anche «in croce» (un fattore di un numeratore con un fattore dell'altro denominatore), e solo alla fine si moltiplica ciò che resta. Per esempio:

$$\frac{x^2-1}{x+2} \cdot \frac{x^2+4x+4}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+2} \cdot \frac{(x+2)^2}{x-1} = (x+1)(x+2) \quad \text{C.E. } x \neq -2, x \neq 1$$

Il risultato è un polinomio, ma le C.E. restano: per $x = 1$ o $x = -2$ l'espressione di partenza non ha significato.

9.4.2 Il quoziente

Il **reciproco** della frazione $\frac{C}{D}$ è $\frac{D}{C}$, e ha senso solo se anche C è diverso da zero. Come per le frazioni numeriche, il **quoziente di frazioni algebriche** si calcola moltiplicando la prima per il

reciproco della seconda:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C} \quad \text{C.E. } B \neq 0,\ D \neq 0,\ C \neq 0$$

La terza condizione è la novità della divisione: oltre ai denominatori, deve essere diverso da zero anche il **numeratore del divisore**, perché non si può dividere per una frazione nulla. È la condizione che si dimentica più spesso.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola $\frac{x^2-1}{x^2+2x} : \frac{x^2-x}{x^2-4}$.

Scomposizioni. $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$; $x^2 + 2x = x(x+2)$; $x^2 - x = x(x-1)$; $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

Condizioni di esistenza. Denominatore del dividendo: $x \neq 0$, $x \neq -2$. Denominatore del divisore: $x \neq \pm 2$. Numeratore del divisore: $x \neq 0$, $x \neq 1$. In tutto: $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq \pm 2$.

Calcolo. Moltiplichiamo per il reciproco e semplifichiamo $x-1$ e $x+2$:

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x(x+2)} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-1)} = \frac{(x+1)(x-2)}{x^2}$$

Osservazione. Il risultato avrebbe significato anche per $x = 1$, $x = 2$ e $x = -2$, ma l'espressione di partenza no: le C.E. sono quelle trovate all'inizio.

9.4.3 La potenza

Per elevare una frazione algebrica a un esponente naturale si elevano numeratore e denominatore:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n} \quad \text{C.E. } B \neq 0$$

Per esempio $\left(-\frac{2a}{b^2}\right)^3 = -\frac{8a^3}{b^6}$, con $b \neq 0$: l'esponente dispari conserva il segno meno. Con un esponente intero negativo vale, come nel capitolo 3, $\left(\frac{A}{B}\right)^{-n} = \left(\frac{B}{A}\right)^n$; ora però si passa al reciproco, quindi serve anche $A \neq 0$. Così $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-2} = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$ con C.E. $x \neq \pm 1$.

Tabella 9.1 Le operazioni con le frazioni algebriche e le relative condizioni di esistenza (A, B, C, D polinomi; n naturale).

Operazione	Regola	Condizioni di esistenza
somma algebrica	$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{A\,D \pm B\,C}{B\,D}$ (meglio con il mcm)	$B \neq 0$, $D \neq 0$
prodotto	$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A\,C}{B\,D}$	$B \neq 0$, $D \neq 0$
quoziente	$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A\,D}{B\,C}$	$B \neq 0$, $D \neq 0$, $C \neq 0$
potenza	$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$	$B \neq 0$
potenza a esponente negativo	$\left(\frac{A}{B}\right)^{-n} = \frac{B^n}{A^n}$	$B \neq 0$, $A \neq 0$

9.4.4 Espressioni e frazioni a più piani

Nelle espressioni con frazioni algebriche valgono le solite regole sull'ordine delle operazioni: prima le parentesi più interne, poi le potenze, poi moltiplicazioni e divisioni, infine addizioni e sottrazioni. Le C.E. si raccolgono tutte all'inizio, guardando ogni denominatore e ogni divisore che compare.

A volte il numeratore o il denominatore di una frazione contengono a loro volta frazioni: si parla di **frazione a più piani**. La linea di frazione principale, più lunga delle altre, indica una divisione: $\dfrac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}$ significa $\frac{A}{B} : \frac{C}{D}$. Per semplificarla si calcolano separatamente il numeratore e il denominatore, poi si esegue la divisione.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Semplifica la frazione a più piani $\dfrac{x - \dfrac{4}{x}}{1 + \dfrac{2}{x}}$.

Condizioni di esistenza. I denominatori «piccoli» richiedono $x \neq 0$. La linea principale è una divisione: il divisore $1 + \dfrac{2}{x} = \dfrac{x+2}{x}$ deve essere diverso da zero, quindi $x \neq -2$. C.E.: $x \neq 0$, $x \neq -2$.

Numeratore e denominatore. $x - \dfrac{4}{x} = \dfrac{x^2 - 4}{x} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x}$ e $1 + \dfrac{2}{x} = \dfrac{x+2}{x}$.

Divisione.

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x} \cdot \frac{x}{x+2} = x - 2 \quad \text{C.E. } x \neq 0,\ x \neq -2$$

Controllo. Per $x = 2$: $\dfrac{2-2}{1+1} = 0$ e $x - 2 = 0$. Per $x = 1$: $\dfrac{1-4}{1+2} = -1$ e $x - 2 = -1$.

Un'avvertenza pratica sul risultato. Una frazione algebrica ridotta ai minimi termini si può lasciare con il denominatore scomposto, come $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2}$, oppure con i prodotti svolti, $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2}$: le due scritture sono equivalenti, ma la forma scomposta rende visibili le C.E. e le eventuali semplificazioni successive, ed è di solito preferita.

9.5 Le frazioni algebriche nelle formule

9.5.1 Ricavare una variabile da una formula

In fisica e in geometria capita di continuo di conoscere tutte le grandezze di una formula tranne una e di doverla ricavare. Dalla formula della velocità nel moto uniforme, $v = \dfrac{s}{t}$, si ricava per esempio il tempo impiegato a percorrere un certo spazio. Una formula ottenuta in questo modo si chiama **formula inversa**.

Il principio che si usa è semplice: se si applica la stessa operazione ai due membri di un'uguaglianza vera, si ottiene ancora un'uguaglianza vera, purché non si moltiplichi o si divida per zero. Nel capitolo 10 questo principio diventerà lo strumento per risolvere le equazioni; qui lo usiamo sulle formule, ricordando che le lettere sono grandezze fisiche positive (un tempo, una velocità, una lunghezza) e quindi diverse da zero.

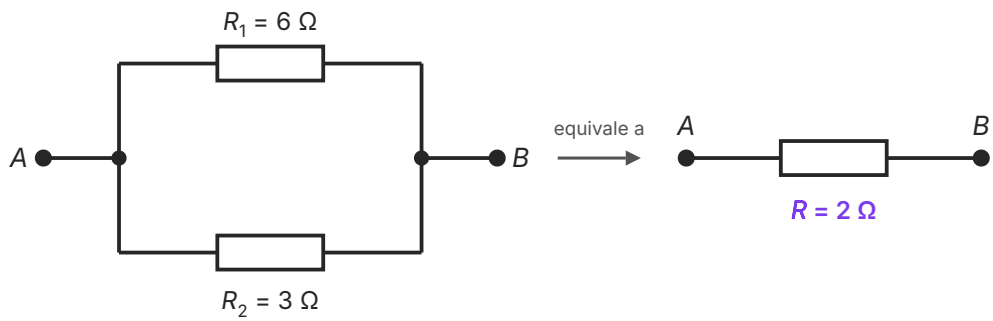
- Da $v = \frac{s}{t}$, moltiplicando i due membri per t: $v\,t = s$. Dividendo per v: $t = \frac{s}{v}$. Per percorrere 150 km a 60 km/h servono $\frac{150}{60} = 2{,}5$ h.
- Dall'area del trapezio, $A = \frac{(B+b)\,h}{2}$, moltiplicando per 2 e dividendo per $B + b$: $h = \frac{2A}{B+b}$. Un trapezio di area 36 cm^2 e basi 10 cm e 8 cm ha altezza $\frac{72}{18} = 4$ cm.
- Dalla densità, $d = \frac{m}{V}$: $m = d\,V$ e $V = \frac{m}{d}$.

Una formula inversa è a sua volta una frazione algebrica, e la sua C.E. ha quasi sempre un significato fisico: $t = \frac{s}{v}$ richiede $v \neq 0$, perché un corpo fermo non percorre lo spazio s in nessun tempo, per quanto lungo.

9.5.2 Resistori in parallelo

In un circuito elettrico, due resistori si dicono collegati *in parallelo* quando sono collegati agli stessi due punti A e B (figura 9.5). La fisica insegna che i due resistori, insieme, si comportano come un unico resistore, la cui **resistenza equivalente** R soddisfa la relazione

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Figura 9.5 Due resistori collegati in parallelo tra i punti A e B, con $R_1 = 6\ \Omega$ e $R_2 = 3\ \Omega$, equivalgono a un unico resistore da 2 Ω. La resistenza equivalente si ricava dalla somma dei reciproci.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Ricava R in funzione di R_1 e R_2 e calcolalo per $R_1 = 6\ \Omega$ e $R_2 = 3\ \Omega$.

Somma dei reciproci. Il mcm dei denominatori è $R_1\,R_2$:

$$\frac{1}{R} = \frac{R_2 + R_1}{R_1\,R_2}$$

Passaggio al reciproco. Due numeri diversi da zero sono uguali se e solo se lo sono i loro reciproci, quindi

$$R = \frac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2}$$

Calcolo. $R = \dfrac{6 \cdot 3}{6 + 3} = \dfrac{18}{9} = 2\ \Omega$. Controllo con la formula di partenza: $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{6} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, il reciproco di 2.

La formula $R = \dfrac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2}$ permette di ragionare in generale. Scritta come $R = R_1 \cdot \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$, mostra che R è uguale a R_1 moltiplicato per un numero minore di 1 (il numeratore è minore del denominatore): la resistenza equivalente è sempre minore di R_1, e per lo stesso motivo minore di R_2. Aggiungere un resistore in parallelo abbassa la resistenza, perché offre alla corrente una strada in più. La figura 9.6 mostra come varia R al crescere di R_2, tenendo fisso $R_1 = 6\ \Omega$: il grafico, una funzione nel senso del capitolo 6, sale sempre più lentamente e resta sotto la retta $R = 6$.

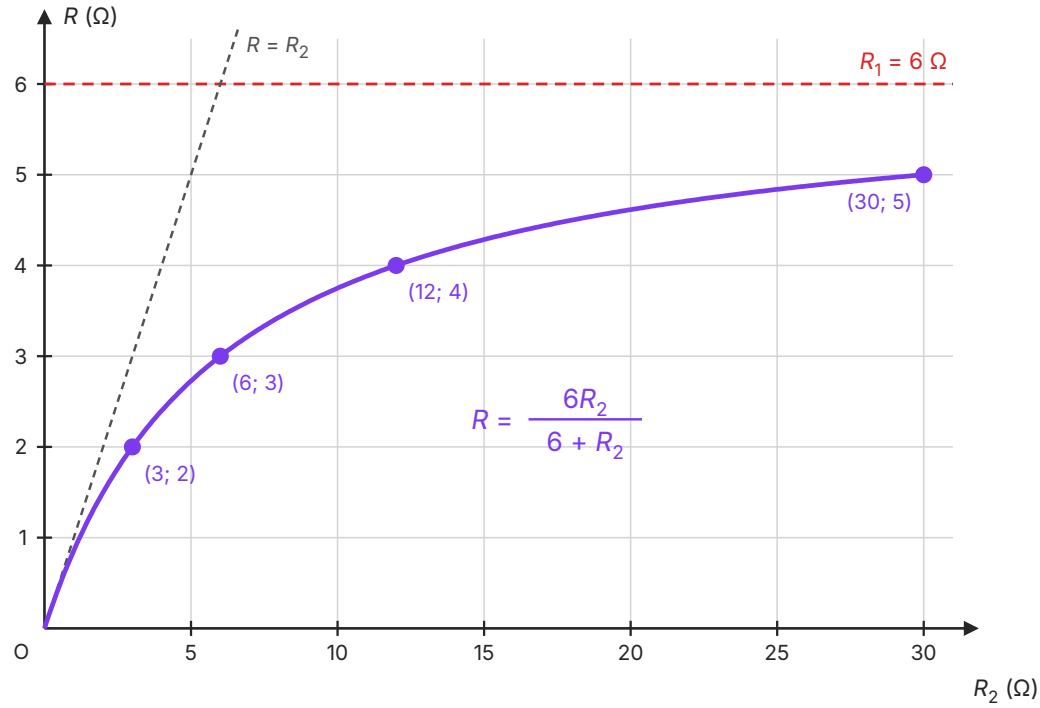


Figura 9.6 La resistenza equivalente $R = \dfrac{6R_2}{6 + R_2}$ in funzione di R_2, con $R_1 = 6\ \Omega$ fisso, calcolata dalla formula. La curva resta sotto la retta tratteggiata $R = R_2$ e sotto la retta $R = 6$: la resistenza equivalente è minore di entrambe le resistenze. I punti segnati sono (3; 2), (6; 3), (12; 4) e (30; 5).

9.5.3 La media armonica

Un'automobile percorre i 120 km da una città a un'altra alla velocità costante di 60 km/h e torna indietro a 40 km/h. Qual è la velocità media sull'intero viaggio? La risposta istintiva, 50 km/h, è sbagliata. La velocità media è lo spazio totale diviso il tempo totale: l'andata dura $\dfrac{120}{60} = 2$ h, il ritorno $\dfrac{120}{40} = 3$ h, quindi la velocità media è $\dfrac{240}{5} = 48$ km/h. Al ritorno l'auto viaggia più lentamente e quindi *più a lungo*: la velocità più bassa «pesa» di più.

Con le frazioni algebriche possiamo rispondere una volta per tutte. Se la distanza è d e le due velocità sono v_1 e v_2, il tempo totale è $\dfrac{d}{v_1} + \dfrac{d}{v_2}$ e la velocità media è

$$v_m = \frac{2d}{\dfrac{d}{v_1} + \dfrac{d}{v_2}} = \frac{2d}{\dfrac{d(v_1 + v_2)}{v_1\, v_2}} = 2d \cdot \frac{v_1\, v_2}{d(v_1 + v_2)} = \frac{2v_1\, v_2}{v_1 + v_2}$$

La distanza d si è semplificata: la velocità media non dipende dalla lunghezza del viaggio. Il numero $\frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$ si chiama **media armonica** di v_1 e v_2: è il reciproco della media aritmetica dei reciproci, perché $\frac{1}{v_m} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)$. Con $v_1 = 60$ e $v_2 = 40$ si ritrova $\frac{2 \cdot 60 \cdot 40}{100} = 48$.

COLLEGAMENTI

Somme di reciproci in fisica. La struttura «il reciproco del risultato è la somma dei reciproci» ricorre spesso. Nel moto, la media armonica dà la velocità media su tratti di uguale lunghezza. In elettrotecnica si sommano i reciproci delle resistenze in parallelo, mentre per i resistori in serie si sommano direttamente le resistenze: $R = R_1 + R_2$. Lo stesso schema compare nel lavoro: se un rubinetto riempie una vasca in a ore e un altro in b ore, in un'ora riempiono insieme $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ della vasca, e quindi la riempiono in $\frac{a\,b}{a+b}$ ore, la stessa formula dei resistori. Più avanti, studiando l'ottica, incontrerai la legge delle lenti sottili, costruita ancora con una somma di reciproci.

Le formule di questo paragrafo mostrano il senso del capitolo. Le regole di calcolo delle frazioni algebriche sono le regole di sempre, applicate a lettere invece che a numeri; ma proprio perché le lettere rappresentano qualsiasi numero, un unico calcolo letterale risponde a infinite domande numeriche, e le C.E. ricordano ogni volta dove la risposta smette di avere senso.

SINTESI

- Una frazione algebrica è il quoziente $\frac{A}{B}$ di due polinomi, con B non nullo; i polinomi sono frazioni algebriche con denominatore 1.
- Le condizioni di esistenza (C.E.) richiedono che il denominatore sia diverso da zero: si scompone il denominatore e si impone che ogni fattore sia diverso da zero. L'insieme dei valori ammessi è il dominio.
- Un numeratore nullo dà una frazione uguale a zero; un denominatore nullo dà una frazione senza significato.
- Proprietà invariantiva: $\frac{A}{B} = \frac{A\,M}{B\,M}$ per $M \neq 0$. Serve per semplificare e per ridurre allo stesso denominatore.
- Si semplificano solo fattori comuni, mai addendi; prima si scompongono numeratore e denominatore.
- Le C.E. si scrivono sulla frazione di partenza, prima di semplificare, e valgono anche per il risultato: $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$ solo per $x \neq 1$.
- Cambio di segno: $b-a = -(a-b)$; $(b-a)^2 = (a-b)^2$; $-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}$.
- Per la somma algebrica si usa come denominatore comune il mcm dei denominatori; un meno davanti a una frazione cambia il segno di tutto il numeratore.
- Prodotto: numeratori per numeratori, denominatori per denominatori, semplificando prima. Quoziente: si moltiplica per il reciproco, e anche il numeratore del divisore deve essere diverso da zero.
- Potenza: $\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$; con esponente negativo si passa al reciproco e serve anche $A \neq 0$.
- Una frazione a più piani è una divisione: si calcolano numeratore e denominatore, poi si divide.
- Nelle formule si ricava una variabile applicando la stessa operazione ai due membri, mai moltiplicando o dividendo per zero: $t = \frac{s}{v}$, $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, $v_m = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Le condizioni di esistenza della frazione $\frac{x+2}{x^2-9}$ sono:

   A. $x \neq 3$
   B. $x \neq -2$
   C. $x \neq \pm 3$
   D. $x \neq -2$, $x \neq \pm 3$

2. ● Quale semplificazione è corretta?

   A. $\frac{3x+6}{x+2} = 3$, con $x \neq -2$
   B. $\frac{x+3}{x} = 3$, con $x \neq 0$
   C. $\frac{x^2+4}{x+2} = x+2$, con $x \neq -2$
   D. $\frac{a+b}{a} = b$, con $a \neq 0$

3. ● La somma $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ è uguale a:

   A. $\frac{2}{x+y}$
   B. $\frac{1}{x+y}$
   C. $\frac{2}{xy}$
   D. $\frac{x+y}{xy}$

4. ●● Per $a \neq b$, la frazione $\frac{a-b}{b-a}$ vale:

   A. 1
   B. −1
   C. 0
   D. non si può semplificare

5. ●● Le condizioni di esistenza del quoziente $\frac{x}{x-1} : \frac{x+2}{x-3}$ sono:

   A. $x \neq 1$, $x \neq 3$
   B. $x \neq 1$, $x \neq -2$
   C. $x \neq 1$, $x \neq 3$, $x \neq -2$
   D. $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 3$

6. ●● Il mcm dei denominatori di $\frac{1}{x^2-1}$, $\frac{3}{x+1}$ e $\frac{x}{2x-2}$ è:

   A. $2(x-1)(x+1)$
   B. $2(x-1)^2(x+1)^2$
   C. $(x-1)(x+1)$
   D. $2(x-1)^2(x+1)$

7. ●● Quale frazione ha significato per ogni valore di x?

   A. $\frac{1}{x^2-1}$
   B. $\frac{x}{x^2-2x}$
   C. $\frac{x+1}{x^3}$
   D. $\frac{x-1}{x^2+4}$

8. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Una frazione con denominatore x^2+1 ha significato per ogni x. b) $\frac{x+5}{x+3}=\frac{5}{3}$ per $x\neq -3$. c) Le C.E. si stabiliscono dopo aver semplificato la frazione. d) $(x-2)^2=(2-x)^2$ per ogni x. e) Il reciproco di $\frac{x-1}{x+2}$ è $\frac{x+2}{x-1}$, con $x\neq 1$ e $x\neq -2$. f) Ogni polinomio è una frazione algebrica.

9. ● Completa. a) $\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=$ _____, con C.E. _____. b) $-(a-b)=$ _____. c) $(\frac{A}{B})^{-2}=$ _____, con $A\neq 0$ e $B\neq 0$. d) Le C.E. di $\frac{x+1}{x(x-5)}$ sono _____.

Calcolare

10. ● Scrivi le condizioni di esistenza: a) $\frac{3}{2x-8}$; b) $\frac{x+1}{x^2-25}$; c) $\frac{2x}{x^2+3x}$; d) $\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}$; e) $\frac{5}{x^2+9}$.

11. ● Semplifica, indicando le C.E.: a) $\frac{6a^2b}{9ab^3}$; b) $\frac{4x-12}{x^2-9}$; c) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$; d) $\frac{a^2-ab}{b^2-ab}$.

12. ●● Semplifica, indicando le C.E.: a) $\frac{x^3-8}{x^2-4}$; b) $\frac{x^2+5x+6}{x^2+x-6}$; c) $\frac{ax+ay-bx-by}{a^2-b^2}$; d) $\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$.

13. ● Riduci allo stesso denominatore le frazioni $\frac{1}{x-2}$, $\frac{x}{x^2-4}$, $\frac{3}{2x+4}$.

14. ●● Calcola, indicando le C.E.: a) $\frac{3x}{x-1} - \frac{3}{x-1}$; b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$; c) $\frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a}$; d) $\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$.

15. ●● Calcola, indicando le C.E.: a) $\frac{x}{x-3} - \frac{6x}{x^2-9}$; b) $\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}$; c) $\frac{a+1}{a^2-a} + \frac{1}{1-a} - \frac{1}{a}$.

16. ● Calcola i prodotti, indicando le C.E.: a) $\frac{4x^2}{3y} \cdot \frac{9y^2}{2x}$; b) $\frac{x^2-1}{x+2} \cdot \frac{x^2+4x+4}{x-1}$; c) $\frac{a^2-ab}{a+b} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2}$.

17. ●● Calcola i quozienti, indicando le C.E.: a) $\frac{x^2-9}{2x} : \frac{x+3}{4x^2}$; b) $\frac{a^2-4}{a^2+2a} : \frac{a-2}{a^2}$; c) $\frac{x^2-x}{x+1} : (x^2-1)$.

18. ●● Calcola, indicando le C.E.: a) $\left(-\frac{2a}{b^2}\right)^3$; b) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-2}$; c) $\left(\frac{a-b}{b-a}\right)^5$.

19. ●● Semplifica le espressioni, indicando le C.E.: a) $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) : \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right)$; b) $\left(x + \frac{1}{x-2}\right) \cdot \frac{x-2}{(x-1)^2}$.

20. ●● Semplifica la frazione a più piani $\frac{1+\frac{1}{a}}{a-\frac{1}{a}}$, indicando le C.E.

21. ●●● Semplifica $\left(\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2}\right) \cdot \frac{x^2-4}{4x}$, indicando le C.E.

Dimostrare e argomentare

22. ● Trova l'errore. a) Marta scrive: «$\frac{x+6}{x+3} = 2$, perché semplifico le x e poi $6 : 3 = 2$». b) Luca scrive: «$\frac{x^2-4}{x-2} = x + 2$, quindi per $x = 2$ la frazione vale 4». Spiega che cosa sbaglia ciascuno, con un controllo numerico per Marta.

23. ●● Dimostra che, per ogni naturale $n \geq 1$, vale $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$. Usa questa identità per calcolare senza fatica $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{9 \cdot 10}$.

24. ●● Spiega perché le funzioni $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ e $g(x) = x + 1$ non sono la stessa funzione, anche se danno lo stesso valore per ogni $x \neq 1$. Come differiscono i loro grafici?

25. ●● Verifica l'identità $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = a - b$ e stabilisci per quali valori di a e b vale.

26. ●●● Dimostra che se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (con $b \neq 0$, $d \neq 0$ e $b + d \neq 0$), allora anche $\frac{a+c}{b+d}$ è uguale a $\frac{a}{b}$. Suggerimento: chiama k il valore comune dei due rapporti, così che $a = k\,b$ e $c = k\,d$. Verifica con $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$.

Problemi

27. ● Un ciclista percorre una salita di 12 km alla velocità media di 12 km/h e la ridiscende alla velocità media di 36 km/h. a) Calcola la velocità media sull'intero percorso usando lo spazio totale e il tempo totale. b) Controlla il risultato con la formula della media armonica $v_m = \frac{2v_1\,v_2}{v_1 + v_2}$. c) Perché il risultato non è 24 km/h?

28. ●● a) Calcola la resistenza equivalente di due resistori da 12 Ω e 4 Ω collegati in parallelo. b) Per tre resistori in parallelo vale $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$: ricava R in funzione di R_1, R_2, R_3 e calcolalo per 6 Ω, 3 Ω e 2 Ω.

29. ●● Ricava la variabile indicata: a) dalla formula dell'area del trapezio $A = \frac{(B+b)\,h}{2}$, ricava h e poi b; calcolali per $A = 36$ cm², $B = 10$ cm, $b = 8$ cm (per h) e per $A = 36$ cm², $B = 10$ cm, $h = 4$ cm (per b). b) Dalla formula $d = \frac{m}{V}$, ricava V; quanto volume occupano 540 g di alluminio, la cui densità è 2,7 g/cm³?

30. ●● Un rubinetto riempie una vasca in 3 ore, un secondo rubinetto in 6 ore. a) Quale frazione della vasca riempiono insieme in un'ora? b) In quanto tempo la riempiono aprendoli insieme? c) Dimostra che, se i tempi sono a e b ore, aprendo i due rubinetti insieme servono $\frac{a\,b}{a+b}$ ore.

31. ●● Un gruppo di n amici deve dividere in parti uguali il costo di un regalo da 120 €. All'ultimo momento si aggiungono altri 2 amici. a) Scrivi, come frazione algebrica ridotta, di quanto diminuisce la quota di ciascuno. b) Calcola la diminuzione per $n = 6$, sia con la formula sia direttamente.

Verso la verifica

32. ●● Semplifica, indicando le C.E.: $\frac{x^3 - x}{x^3 + 2x^2 + x}$.

33. ●● Semplifica, indicando le C.E.: $\left(\frac{2}{x-1} - \frac{x+3}{x^2-1}\right) : \frac{1}{x^2+x}$.

34. ●● Dimostra che l'espressione $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{a\,b}{a^2-b^2}$ ha lo stesso valore per tutti i valori ammessi delle lettere e trova questo valore. Quanto vale per $a = 2$ e $b = 2$?

35. ●●● Sfida. a) Verifica che, per $x \neq \pm 1$, vale $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$. b) Usa l'identità per calcolare la somma $\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \ldots + \frac{1}{10^2-1}$ come frazione ridotta ai minimi termini.

PER APPROFONDIRE

- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: la matematica egizia e il papiro di Rhind, con le sue tabelle di frazioni unitarie.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: come si imposta un problema con le lettere e come si controlla un risultato, anche con un caso numerico.
- [CR] Courant e Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le medie (aritmetica, geometrica, armonica) e le disuguaglianze che le legano.

Glossario del capitolo

Cambio di segno
Uso dell'uguaglianza $b - a = -(a - b)$ per far comparire fattori comuni; in una frazione $-A/B = (-A)/B = A/(-B)$.

Condizioni di esistenza di una frazione algebrica
Condizioni che le lettere devono rispettare perché un'espressione abbia significato; per una frazione algebrica, ogni fattore del denominatore deve essere diverso da zero.

Denominatore comune
Polinomio che è multiplo di tutti i denominatori di un gruppo di frazioni; il più semplice è il loro mcm.

Dominio di una frazione algebrica
Insieme dei valori delle lettere che soddisfano le condizioni di esistenza; per $(x + 3)/(x^3 - 4x)$ è $\mathbb{Q} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

Formula inversa
Formula ottenuta ricavando una variabile da un'altra formula, applicando la stessa operazione ai due membri senza moltiplicare o dividere per zero; da $v = s/t$ si ricava $t = s/v$.

Frazione a più piani
Frazione il cui numeratore o denominatore contiene altre frazioni; la linea principale indica una divisione.

Frazione algebrica
Quoziente A/B di due polinomi, con B diverso dal polinomio nullo. Ogni polinomio è una frazione algebrica con denominatore 1.

Frazione ridotta ai minimi termini
Frazione il cui numeratore e denominatore non hanno fattori comuni (sono primi tra loro).

Frazioni algebriche equivalenti
Frazioni che assumono lo stesso valore per tutti i valori delle lettere che soddisfano le condizioni di esistenza di entrambe.

Media armonica
Reciproco della media aritmetica dei reciproci; per due numeri è $2ab/(a + b)$. Dà la velocità media su due tratti di uguale lunghezza.

Proprietà invariantiva (frazioni algebriche)
Moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore per uno stesso polinomio non nullo si ottiene una frazione equivalente: $A/B = (A \cdot M)/(B \cdot M)$, con $M \neq 0$.

Quoziente di frazioni algebriche
$(A/B) : (C/D) = (A \cdot D)/(B \cdot C)$, con $B \neq 0$, $D \neq 0$ e anche $C \neq 0$ (numeratore del divisore).

Reciproco di una frazione algebrica
Il reciproco di C/D è D/C; esiste solo se anche il numeratore C è diverso da zero.

Resistenza equivalente (in parallelo)
Resistenza R di un unico resistore che sostituisce due resistori in parallelo: $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$, cioè $R = R_1R_2/(R_1 + R_2)$.

Riduzione allo stesso denominatore
Trasformazione di più frazioni in frazioni equivalenti con lo stesso denominatore, moltiplicando numeratore e denominatore di ciascuna per il fattore mancante rispetto al mcm.

Semplificazione di una frazione algebrica
Divisione di numeratore e denominatore per un loro fattore comune, dopo averli scomposti. Si semplificano solo fattori, mai addendi.

Somma algebrica di frazioni algebriche
Frazione che ha per denominatore il denominatore comune (di solito il mcm) e per numeratore la somma algebrica dei numeratori trasformati.

Soluzioni

1. C. $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$, quindi $x \neq \pm 3$. Il numeratore non impone condizioni.

2. A. $\frac{3(x+2)}{x+2} = 3$ con $x \neq -2$. Nelle altre si semplificano addendi; $x^2 + 4$ non contiene il fattore $x + 2$.

3. D. Con il denominatore comune xy: $\frac{y+x}{xy}$, con $x \neq 0$, $y \neq 0$.

4. B. $b - a = -(a - b)$, quindi la frazione vale -1.

5. C. Denominatori: $x \neq 1$, $x \neq 3$; numeratore del divisore: $x + 2 \neq 0$, cioè $x \neq -2$.

6. A. $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, $x + 1$, $2x - 2 = 2(x-1)$: tutti i fattori con l'esponente massimo, che è 1, e il coefficiente 2.

7. D. $x^2 + 4 \geq 4$ per ogni x. Le altre escludono rispettivamente $x = \pm 1$; $x = 0$ e $x = 2$; $x = 0$.

8. a) V ($x^2 + 1 \geq 1$). b) F: x è un addendo e non si semplifica; per $x = 1$ la frazione vale $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, non $\frac{5}{3}$. c) F: si stabiliscono prima di semplificare, sulla frazione di partenza. d) V: $(2 - x)^2 = [-(x-2)]^2 = (x-2)^2$. e) V. f) V: ogni polinomio A è la frazione $\frac{A}{1}$.

9. a) $\frac{AD}{BC}$, con $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$. b) $b - a$. c) $(\frac{B}{A})^2 = \frac{B^2}{A^2}$. d) $x \neq 0$ e $x \neq 5$.

10. a) $x \neq 4$. b) $x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$: $x \neq \pm 5$. c) $x^2 + 3x = x(x+3)$: $x \neq 0$, $x \neq -3$. d) $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$: $a \neq b$. e) Nessuna condizione: $x^2 + 9 \geq 9$.

11. a) $\frac{2a}{3b^2}$, con $a \neq 0$, $b \neq 0$. b) $\frac{4(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{4}{x+3}$, con $x \neq \pm 3$. c) $\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}$, con $x \neq \pm 2$. d) $\frac{a(a-b)}{b(b-a)} = -\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$, $a \neq b$.

12. a) $\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+2x+4}{x+2}$, con $x \neq \pm 2$. b) $\frac{(x+2)(x+3)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x+2}{x-2}$, con $x \neq -3$, $x \neq 2$. c) Raccoglimento parziale: $\frac{(a-b)(x+y)}{(a-b)(a+b)} = \frac{x+y}{a+b}$, con $a \neq \pm b$. d) $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$: $\frac{2x+1}{x+1}$, con $x \neq \pm 1$.

13. Denominatori: $x - 2$, $(x-2)(x+2)$, $2(x+2)$; mcm $= 2(x-2)(x+2)$; C.E. $x \neq \pm 2$. Frazioni: $\frac{2(x+2)}{2(x-2)(x+2)}$, $\frac{2x}{2(x-2)(x+2)}$, $\frac{3(x-2)}{2(x-2)(x+2)}$.

14. a) $\frac{3x-3}{x-1} = 3$, con $x \neq 1$. b) $\frac{x+1+x}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$, con $x \neq 0$, $x \neq -1$. c) $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a-b} = \frac{a-b}{a-b} = 1$, con $a \neq b$. d) $\frac{2-(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x+1}$, con $x \neq \pm 1$.

15. a) $\frac{x(x+3)-6x}{(x-3)(x+3)} = \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x}{x+3}$, con $x \neq \pm 3$. b) $\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$, con $x \neq \pm 2$. c) mcm $= a(a-1)$, con $\frac{1}{1-a} = -\frac{1}{a-1}$: $\frac{a+1-a-(a-1)}{a(a-1)} = \frac{2-a}{a(a-1)}$, con $a \neq 0$, $a \neq 1$.

16. a) $6xy$, con $x \neq 0$, $y \neq 0$. b) $\frac{(x-1)(x+1)}{x+2} \cdot \frac{(x+2)^2}{x-1} = (x+1)(x+2)$, con $x \neq -2$, $x \neq 1$. c) $\frac{a(a-b)}{a+b} \cdot \frac{(a-b)(a+b)}{a^2} = \frac{(a-b)^2}{a}$, con $a \neq 0$, $a \neq -b$.

17. a) $\frac{(x-3)(x+3)}{2x} \cdot \frac{4x^2}{x+3} = 2x(x-3)$, con $x \neq 0$, $x \neq -3$. b) $\frac{(a-2)(a+2)}{a(a+2)} \cdot \frac{a^2}{a-2} = a$, con $a \neq 0$ e $a \neq -2$ (denominatore del dividendo) e $a \neq 2$ (nume-

ratore del divisore). c) $\frac{x(x-1)}{x+1} \cdot \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{(x+1)^2}$, con $x \neq \pm 1$.

18. a) $-\frac{8a^3}{b^6}$, con $b \neq 0$. b) $\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$, con $x \neq \pm 1$. c) La base vale -1, quindi la potenza vale $(-1)^5 = -1$, con $a \neq b$.

19. a) $\frac{y-x}{xy} : \frac{y^2-x^2}{x^2y^2} = \frac{y-x}{xy} \cdot \frac{x^2y^2}{(y-x)(y+x)} = \frac{xy}{x+y}$, con $x \neq 0$, $y \neq 0$, $y \neq \pm x$. b) $x + \frac{1}{x-2} = \frac{x^2-2x+1}{x-2} = \frac{(x-1)^2}{x-2}$; moltiplicando per $\frac{x-2}{(x-1)^2}$ si ottiene 1, con $x \neq 1$, $x \neq 2$.

20. $\frac{\frac{a+1}{a}}{\frac{a^2-1}{a}} = \frac{a+1}{a} \cdot \frac{a}{(a-1)(a+1)} = \frac{1}{a-1}$, con $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$.

21. $\frac{(x+2)^2-(x-2)^2}{x^2-4} = \frac{8x}{x^2-4}$; moltiplicando per $\frac{x^2-4}{4x}$ si ottiene 2. C.E.: $x \neq \pm 2$, $x \neq 0$.

22. a) Marta semplifica degli addendi: x non è un fattore né del numeratore né del denominatore. Controllo: per $x = 1$ la frazione vale $\frac{7}{4}$, non 2; per $x = 0$ vale $\frac{6}{3} = 2$ solo per caso. La frazione non si semplifica. b) La semplificazione di Luca è corretta solo con la C.E. $x \neq 2$: per $x = 2$ la frazione di partenza ha denominatore 0 e non ha significato, quindi non vale 4.

23. $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$. Scrivendo ogni addendo come differenza, la somma diventa $(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{9} - \frac{1}{10})$: i termini intermedi si cancellano e resta $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.

24. Una funzione è definita anche dal suo dominio. Il dominio di f è $\mathbb{Q} \setminus \{1\}$, quello di g è tutto $\mathbb{Q}$: le due funzioni non sono uguali, anche se coincidono per $x \neq 1$. Il grafico di g è la retta $y = x + 1$; quello di f è la stessa retta privata del punto $(1; 2)$ (figura 9.3).

25. $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2-b^2}{ab}$ e $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$. Il quoziente è $\frac{(a-b)(a+b)}{ab} \cdot \frac{ab}{a+b} = a - b$. Vale per $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $a \neq -b$ (il divisore non deve essere nullo).

26. Sia k il valore comune: $a = k\,b$, $c = k\,d$. Allora $a + c = k\,b + k\,d = k(b + d)$ e, poiché $b + d \neq 0$, $\frac{a+c}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k = \frac{a}{b}$. Verifica: $\frac{2+6}{3+9} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

27. a) Salita: $\frac{12}{12} = 1$ h; discesa: $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ h; tempo totale $\frac{4}{3}$ h; spazio 24 km; $v_m = 24 : \frac{4}{3} = 18$ km/h. b) $\frac{2 \cdot 12 \cdot 36}{12 + 36} = \frac{864}{48} = 18$ km/h. c) La media aritmetica (24 km/h) varrebbe se i due tratti durassero lo stesso tempo; invece la salita, più lenta, dura tre volte la discesa e pesa di più.

28. a) $R = \frac{12 \cdot 4}{12 + 4} = \frac{48}{16} = 3\ \Omega$. b) $\frac{1}{R} = \frac{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}{R_1R_2R_3}$, quindi $R = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$. Con 6, 3, 2: $R = \frac{36}{18 + 12 + 6} = 1\ \Omega$.

29. a) $h = \frac{2A}{B+b} = \frac{72}{18} = 4$ cm; $b = \frac{2A}{h} - B = \frac{72}{4} - 10 = 8$ cm. b) $V = \frac{m}{d} = \frac{540}{2{,}7} = 200\ \text{cm}^3$.

30. a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ della vasca. b) In 2 ore. c) In un'ora riempiono $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$ della vasca; per riempirla serve il reciproco di questa frazione, cioè $\frac{ab}{a+b}$ ore. Con $a = 3$, $b = 6$: $\frac{18}{9} = 2$.

31. a) $\frac{120}{n} - \frac{120}{n+2} = \frac{120(n+2) - 120n}{n(n+2)} = \frac{240}{n(n+2)}$ euro. b) Per $n = 6$: $\frac{240}{48} = 5$ €. Direttamente: 120 : 6 = 20 € e 120 : 8 = 15 €, differenza 5 €.

32. $\frac{x(x-1)(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1}$, con $x \neq 0$, $x \neq -1$.

33. Parentesi: $\frac{2(x+1)-(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$. Divisione: $\frac{1}{x+1} \cdot x(x+1) = x$. C.E.: $x \neq \pm 1$ e, dal divisore $\frac{1}{x(x+1)}$, $x \neq 0$.

34. Parentesi: $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a^2-b^2} = \frac{4a\,b}{a^2-b^2}$. Quoziente: $\frac{4a\,b}{a^2-b^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a\,b} = 4$. C.E.: $a \neq \pm b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Per $a = b = 2$ l'espressione non ha significato (il denominatore $a - b$ si annulla): non vale 4.

35. a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1}$. b) La somma è $\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\ldots+(\frac{1}{9}-\frac{1}{11})]$; restano $\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}) = \frac{36}{55}$.