CAPITOLO

# 8

# Divisione tra polinomi e scomposizione in fattori

*Moltiplicare è costruire; scomporre è capire di quali pezzi è fatta la costruzione.*

**OBIETTIVI**

1. Dividere un polinomio per un monomio e per un polinomio, trovando quoziente e resto.
2. Applicare la regola di Ruffini e usare il teorema del resto e il teorema di Ruffini.
3. Scomporre un polinomio con il raccoglimento totale e parziale e riconoscendo i prodotti notevoli.
4. Scomporre trinomi di secondo grado e polinomi di grado superiore con la regola di Ruffini.
5. Seguire una strategia ordinata di scomposizione e riconoscere i polinomi irriducibili.
6. Calcolare MCD e mcm di polinomi.

**INDICE DEL CAPITOLO**


8.1 La divisione tra polinomi ..... 2
8.2 La regola di Ruffini e il teorema del resto ..... 4
8.3 Scomporre un polinomio: i raccoglimenti ..... 9
8.4 Scomporre con i prodotti notevoli ..... 11
8.5 Trinomi, Ruffini e la strategia di scomposizione ..... 12
8.6 MCD e mcm di polinomi ..... 17

**Matematica 1** · Parte III · Il calcolo letterale · versione 1.0
Capitolo 8: Divisione tra polinomi e scomposizione in fattori · pagine 205–226 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo 7 abbiamo imparato a moltiplicare i polinomi e a sviluppare i prodotti notevoli: partendo da $(x - 2)(x + 3)$ siamo arrivati a $x^2 + x - 6$. In questo capitolo facciamo il percorso al contrario. Dato un polinomio, ci chiediamo se si possa scrivere come *prodotto* di polinomi più semplici e, se sì, come trovarli.

Perché dovrebbe interessarci? Per la stessa ragione per cui nel capitolo 1 abbiamo scomposto i numeri in fattori primi. La scomposizione $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ ci ha permesso di trovare MCD e mcm, di semplificare frazioni, di capire subito quali sono i divisori di 360. Allo stesso modo, la scomposizione dei polinomi sarà lo strumento principale per semplificare le frazioni algebriche (capitolo 9) e per risolvere le equazioni di grado superiore al primo con la legge di annullamento del prodotto (capitolo 10). Prima, però, dobbiamo imparare a *dividere* i polinomi: anche tra i numeri, scoprire se 7 è un fattore di 91 significa fare una divisione e guardare il resto.

## 8.1 La divisione tra polinomi

### 8.1.1 Dividere un polinomio per un monomio

Il caso più semplice è la divisione di un polinomio per un monomio diverso da zero. Per la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione, basta dividere ogni termine del polinomio per il monomio e sommare i risultati:

$$(6x^4 - 9x^3 + 3x^2) : (3x^2) = 2x^2 - 3x + 1$$

Il risultato è un polinomio solo se *ogni* termine è divisibile per il monomio, cioè se ogni lettera del divisore compare in ciascun termine con esponente non minore (la regola vista per il quoziente di monomi nel capitolo 7). Per esempio $(4a^3b + 2ab) : (2ab) = 2a^2 + 1$, mentre $(x^3 + x) : x^2$ non dà un polinomio, perché il termine $x$ non è divisibile per $x^2$. Come controllo si può sempre moltiplicare: $3x^2(2x^2 - 3x + 1) = 6x^4 - 9x^3 + 3x^2$.

### 8.1.2 La divisione con resto

Quando dividiamo due numeri naturali, per esempio 47 per 5, troviamo un quoziente e un resto: $47 = 5 \cdot 9 + 2$, con il resto 2 minore del divisore 5. Per i polinomi in una variabile vale un risultato del tutto analogo, nel quale il ruolo della «grandezza» dei numeri è svolto dal grado.

**IN SINTESI**

**Divisione con resto tra polinomi.** Dati due polinomi $A(x)$ (**dividendo**) e $B(x)$ (**divisore**), con $B$ non nullo, esistono e sono unici due polinomi $Q(x)$ (**quoziente**) e $R(x)$ (**resto**) tali che

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

dove $R(x)$ è il polinomio nullo oppure ha grado minore del grado di $B(x)$. Se $R(x)$ è nullo si dice che $A(x)$ è **divisibile** per $B(x)$, e allora $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$.

Due osservazioni utili. Se il grado di $A$ è minore del grado di $B$, la divisione è immediata: $Q = 0$ e $R = A$. Se invece il grado di $A$ è maggiore o uguale a quello di $B$, il quoziente ha grado uguale alla differenza dei gradi: dividendo un polinomio di grado 5 per uno di grado 2 si ottiene un quoziente di grado 3. Il resto, infine, ha grado minore del divisore: se si divide per un polinomio di primo grado, il resto è *un numero*.

### 8.1.3 L'algoritmo della divisione in colonna

Per trovare quoziente e resto si usa un procedimento molto simile alla divisione in colonna tra numeri, detto **divisione in colonna** (o divisione lunga). Prima di cominciare, dividendo e divisore vanno **ordinati** secondo le potenze decrescenti della variabile, e il dividendo va **completato**, scrivendo con coefficiente 0 i termini mancanti: è la scrittura completa del capitolo 7. Poi si ripete sempre lo stesso ciclo di quattro passi:

1. si divide il primo termine del dividendo (o del resto parziale) per il primo termine del divisore: si ottiene un termine del quoziente;
2. si moltiplica questo termine per tutto il divisore;
3. si sottrae il prodotto dal dividendo (cambiando i segni e sommando), ottenendo un resto parziale;
4. se il resto parziale ha grado minore del divisore ci si ferma: è il resto; altrimenti si ricomincia dal passo 1.

La figura 8.1 mostra il procedimento per $(6x^3 + x^2 - 10x + 5) : (2x^2 + x - 3)$. Primo ciclo: $6x^3 : 2x^2 = 3x$; poi $3x(2x^2 + x - 3) = 6x^3 + 3x^2 - 9x$; sottraendo si ottiene $-2x^2 - x + 5$. Questo resto parziale ha ancora grado 2, quindi si continua: $-2x^2 : 2x^2 = -1$; poi $-1 \cdot (2x^2 + x - 3) = -2x^2 - x + 3$; sottraendo resta 2, che ha grado 0, minore di 2. Dunque $Q(x) = 3x - 1$ e $R = 2$.

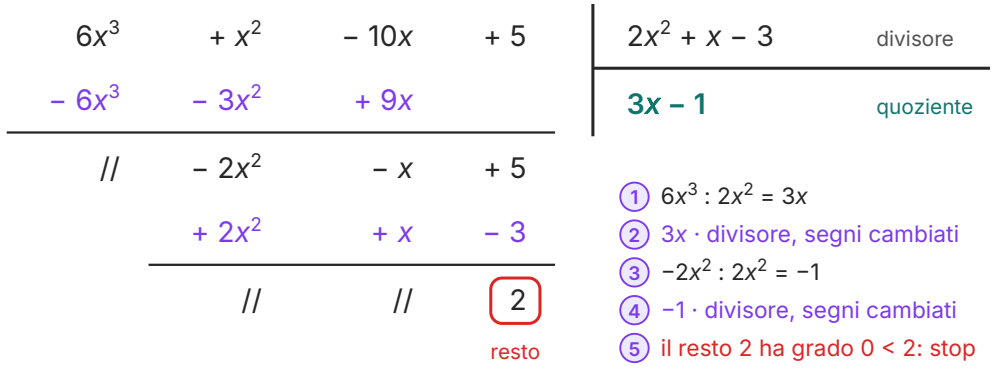



**Figura 8.1** Divisione in colonna di $6x^3 + x^2 - 10x + 5$ per $2x^2 + x - 3$. A destra il divisore e, sotto, il quoziente costruito termine per termine; le righe viola sono i prodotti da sottrarre, cambiati di segno.

La verifica si fa con la relazione fondamentale: $(2x^2 + x - 3)(3x - 1) + 2 = 6x^3 - 2x^2 + 3x^2 - x - 9x + 3 + 2 = 6x^3 + x^2 - 10x + 5$. È un controllo che conviene fare sempre: una sola svista di segno nelle sottrazioni basta a rovinare tutto il calcolo.

**ESEMPIO SVOLTO**

**Problema.** Esegui la divisione $(3x^4 - 2x^3 + x - 4) : (x^2 - x + 1)$ e verifica il risultato.

**Preparazione.** Il dividendo è ordinato ma non completo: manca il termine in $x^2$. Lo scriviamo come $3x^4 - 2x^3 + 0x^2 + x - 4$, così le colonne restano allineate.

**Primo ciclo.** $3x^4 : x^2 = 3x^2$; $3x^2(x^2 - x + 1) = 3x^4 - 3x^3 + 3x^2$; sottraendo: $(-2x^3 + 3x^3) + (0x^2 - 3x^2) + x - 4 = x^3 - 3x^2 + x - 4$.

**Secondo ciclo.** $x^3 : x^2 = x$; $x(x^2 - x + 1) = x^3 - x^2 + x$; sottraendo: $-2x^2 + 0x - 4$.

**Terzo ciclo.** $-2x^2 : x^2 = -2$; $-2(x^2 - x + 1) = -2x^2 + 2x - 2$; sottraendo: $-2x - 2$. Questo resto ha grado 1, minore di 2: ci fermiamo.

**Risultato.** $Q(x) = 3x^2 + x - 2$, $R(x) = -2x - 2$. **Verifica:** $(x^2 - x + 1)(3x^2 + x - 2) = 3x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 3x - 2$; aggiungendo $-2x - 2$ si ritrova $3x^4 - 2x^3 + x - 4$.

## 8.2 La regola di Ruffini e il teorema del resto

### 8.2.1 La regola di Ruffini

Il caso più frequente, e anche il più importante, è la divisione per un binomio di primo grado della forma $x - a$, dove $a$ è un numero. In questo caso la divisione in colonna si può abbreviare

in modo drastico: tutte le lettere si possono omettere e si lavora solo con i coefficienti. Il procedimento si chiama **regola di Ruffini**, dal matematico Paolo Ruffini, che insegnò all'Università di Modena.

Vediamolo su $(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2)$, illustrato nella figura 8.2. Si scrivono in una riga i coefficienti del dividendo, ordinato e completo: 1, −4, 1, 6. Il termine noto 6 si separa dagli altri con una linea verticale. A sinistra, una riga più in basso, si scrive il numero $a$, cioè 2 (attenzione: il divisore è $x - 2$, quindi $a = 2$, con il segno cambiato rispetto a quello che compare nel binomio). Poi:

1. si abbassa il primo coefficiente, 1, sotto la riga orizzontale;
2. lo si moltiplica per $a$: $1 \cdot 2 = 2$, e il prodotto si scrive sotto il coefficiente successivo, −4;
3. si sommano in colonna: $-4 + 2 = -2$, e il risultato si scrive sotto la riga;
4. si ripete: $-2 \cdot 2 = -4$, $1 + (-4) = -3$; poi $-3 \cdot 2 = -6$, $6 + (-6) = 0$.

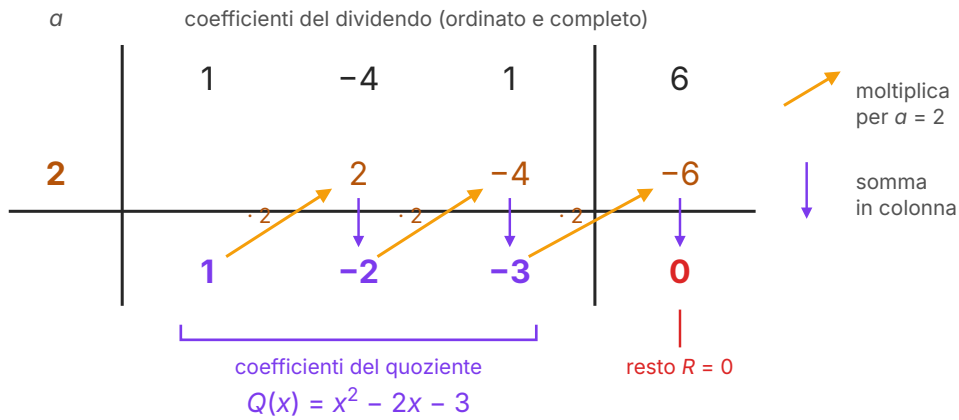



**Figura 8.2** La regola di Ruffini per $(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2)$. Le frecce oblique indicano «moltiplica per 2», quelle verticali «somma in colonna». Nell'ultima riga si leggono i coefficienti del quoziente e, dopo la linea verticale, il resto.

Nell'ultima riga si leggono i risultati. L'ultimo numero, separato dalla linea verticale, è il resto: $R = 0$. Gli altri numeri, 1, −2, −3, sono i coefficienti del quoziente, che ha grado inferiore di uno rispetto al dividendo: $Q(x) = x^2 - 2x - 3$. Dunque $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 2)(x^2 - 2x - 3)$, come si può verificare moltiplicando.

Perché funziona? I numeri della riga in basso sono esattamente i coefficienti che si otterrebbero nella divisione in colonna: ogni termine del quoziente, moltiplicato per $x - a$, produce un termine che si sottrae; poiché nel divisore c'è $-a$, sottrarre il prodotto equivale a *sommare* il prodotto per $+a$. Ecco perché nella tabella si scrive $a$, cioè il termine noto del divisore con il segno cambiato, e poi si somma invece di sottrarre.

**ESEMPIO SVOLTO**

**Problema.** Calcola quoziente e resto di $(x^4 - 5x^2 + 3x - 2) : (x + 2)$ con la regola di Ruffini.

**Coefficienti.** Il dividendo non ha il termine in $x^3$: i coefficienti, completi, sono 1, 0, −5, 3, −2. Il divisore è $x + 2 = x - (-2)$, quindi $a = -2$.

**Tabella.** Si abbassa 1. Poi $1 \cdot (-2) = -2$ e $0 + (-2) = -2$; $-2 \cdot (-2) = 4$ e $-5 + 4 = -1$; $-1 \cdot (-2) = 2$ e $3 + 2 = 5$; $5 \cdot (-2) = -10$ e $-2 + (-10) = -12$.

**Risultato.** Riga finale: 1, −2, −1, 5 | −12. Il quoziente ha grado 3: $Q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$; il resto è $R = -12$. Quindi $x^4 - 5x^2 + 3x - 2 = (x + 2)(x^3 - 2x^2 - x + 5) - 12$.

**ERRORE FREQUENTE**

**Dimenticare gli zeri o sbagliare il segno di *a*.** Nella regola di Ruffini ogni potenza della variabile deve avere il suo posto nella riga: se nell'esempio precedente avessimo scritto solo 1, −5, 3, −2, avremmo in pratica diviso $x^3 - 5x^2 + 3x - 2$, un altro polinomio. Il secondo errore tipico è il segno: per dividere per $x + 2$ si usa $a = -2$, per dividere per $x - 2$ si usa $a = 2$. Un controllo rapido è il teorema del resto del prossimo paragrafo: il resto deve essere uguale a $P(a)$.

**COLLEGAMENTI**

**Ruffini e Horner sono lo stesso calcolo.** Nel capitolo 7 abbiamo visto come un computer calcola $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$ in $x = 4$, scrivendo $P(x) = ((2x - 3)x + 1)x - 5$: i numeri intermedi erano 2, 5, 21, 79. Ora prova a dividere lo stesso polinomio per $x - 4$ con la regola di Ruffini: la riga finale è 2, 5, 21 | 79. Sono gli stessi numeri! Lo schema di Ruffini, letto in questo modo, è un algoritmo efficiente per calcolare il valore di un polinomio, che richiede una sola moltiplicazione e una sola addizione per ogni coefficiente. Il fatto che il resto sia proprio $P(4) = 79$ non è una coincidenza, come mostra il teorema seguente.

### 8.2.2 Il teorema del resto

**IN SINTESI**

**Teorema del resto.** Il resto della divisione di un polinomio $P(x)$ per il binomio $x - a$ è uguale a $P(a)$, il valore del polinomio per $x = a$.

La dimostrazione è breve. Il divisore $x - a$ ha grado 1, quindi il resto $R$ ha grado 0 oppure è nullo: in ogni caso è un numero. Per la divisione con resto vale l'uguaglianza

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$$

per *ogni* valore di $x$. In particolare vale per $x = a$: sostituendo, il primo addendo diventa $(a - a) \cdot Q(a) = 0 \cdot Q(a) = 0$, e resta $P(a) = R$. c.v.d.

Il **teorema del resto** permette di conoscere il resto *senza eseguire la divisione*. Il resto di $(x^5 - 3x^3 + 2) : (x + 1)$ è $P(-1) = -1 + 3 + 2 = 4$. Il resto di $(x^{20} - 1) : (x + 1)$ è $(-1)^{20} - 1 = 0$: possiamo concludere che la divisione è esatta senza scrivere una tabella di ventuno coefficienti.

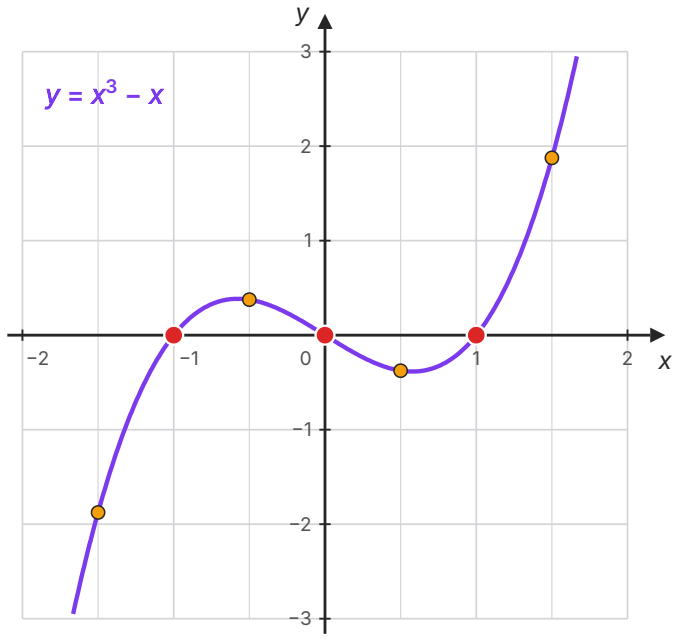
### 8.2.3 Il teorema di Ruffini

Un numero $a$ tale che $P(a) = 0$ si chiama **zero** (o **radice**) del polinomio $P(x)$. Dal teorema del resto segue subito il risultato più importante del capitolo.

> **IN SINTESI**
>
> **Teorema di Ruffini.** Un polinomio $P(x)$ è divisibile per $x - a$ se e solo se $P(a) = 0$.
>
> In altre parole: $x - a$ è un fattore di $P(x)$ esattamente quando $a$ è uno zero di $P(x)$.

Il teorema contiene due implicazioni, e le dimostriamo entrambe. Se $P(x)$ è divisibile per $x - a$, il resto è 0; ma il resto è $P(a)$, dunque $P(a) = 0$. Viceversa, se $P(a) = 0$, il resto della divisione per $x - a$ è $P(a) = 0$, quindi la divisione è esatta e $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$. c.v.d.

Il **teorema di Ruffini** collega due mondi: quello algebrico dei fattori e quello numerico (e grafico) dei valori. Consideriamo $P(x) = x^3 - x$. Si vede subito che $P(0) = 0$, $P(1) = 1 - 1 = 0$, $P(-1) = -1 + 1 = 0$: il polinomio ha tre zeri, e quindi i fattori $x$, $x - 1$ e $x + 1$. In effetti $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$. Nel grafico della funzione $y = x^3 - x$ (figura 8.3) gli zeri sono i punti in cui la curva taglia l'asse $x$: tre intersezioni, tre fattori di primo grado.




| $x$ | $y$ |
|---|---|
| −1,5 | −1,875 |
| −1 | 0 |
| −0,5 | 0,375 |
| 0 | 0 |
| 0,5 | −0,375 |
| 1 | 0 |
| 1,5 | 1,875 |

in rosso gli zeri

**Figura 8.3** Il grafico di $y = x^3 - x$, ottenuto da una tabella di valori. La curva taglia l'asse $x$ in −1, 0 e 1: sono gli zeri del polinomio, e infatti $x^3 - x = (x + 1)x(x - 1)$.

**APPROFONDIMENTO · DIVISIONE PER AX − B**

La regola di Ruffini e il teorema del resto valgono, così come li abbiamo enunciati, per divisori della forma $x - a$, con coefficiente di $x$ uguale a 1. Se il divisore è $ax - b$ con $a \neq 1$, si può scrivere $ax - b = a(x - \frac{b}{a})$: si divide per $x - \frac{b}{a}$ con la regola di Ruffini, e poi *si divide il quoziente per a*; il resto non cambia.

Per esempio, per dividere $6x^3 + x^2 - 4x + 1$ per $2x - 1$ usiamo il numero $\frac{1}{2}$. La tabella con i coefficienti 6, 1, −4, 1 dà la riga finale 6, 4, −2 | 0: dunque $6x^3 + x^2 - 4x + 1 = (x - \frac{1}{2})(6x^2 + 4x - 2)$. Dividendo il quoziente per 2 otteniamo il quoziente cercato: $(6x^3 + x^2 - 4x + 1) : (2x - 1) = 3x^2 + 2x - 1$, con resto 0. Infatti $(2x - 1)(3x^2 + 2x - 1) = (x - \frac{1}{2}) \cdot 2 \cdot (3x^2 + 2x - 1)$.

## 8.3 Scomporre un polinomio: i raccoglimenti

### 8.3.1 Che cosa significa scomporre

**Scomporre in fattori** un polinomio significa scriverlo come prodotto di polinomi di grado minore. Il lavoro è finito quando tutti i fattori sono irriducibili. Un polinomio di grado almeno 1 si dice **irriducibile** se non si può scrivere come prodotto di due polinomi entrambi di grado almeno 1. I polinomi irriducibili hanno, tra i polinomi, il ruolo che i numeri primi hanno tra i naturali.

Ogni polinomio di primo grado, come $2x - 5$, è irriducibile: un prodotto di due polinomi di grado almeno 1 ha grado almeno 2. I fattori numerici non contano: scrivere $2x - 6 = 2(x - 3)$ è utile, ma $2x - 6$ resta irriducibile, perché 2 ha grado 0. Come per i numeri, si può dimostrare che la scomposizione in fattori irriducibili è *unica*, a meno dell'ordine dei fattori e di costanti moltiplicative: $(x - 3) \cdot 2$ e $(2x - 6) \cdot 1$ sono la stessa scomposizione.

> **DA RICORDARE**
>
> Scomporre significa trasformare una **somma** in un **prodotto**. Un risultato come $x(x - 1) + 3(x - 1)$ non è ancora scomposto: l'ultima operazione è un'addizione. Lo diventa quando si scrive $(x - 1)(x + 3)$. E una scomposizione si verifica sempre allo stesso modo: moltiplicando i fattori si deve ritrovare il polinomio di partenza.

### 8.3.2 Il raccoglimento totale

Il primo metodo è la proprietà distributiva letta da destra verso sinistra: $ab + ac = a(b + c)$. Se tutti i termini di un polinomio hanno un fattore comune, lo si «raccoglie» fuori da una parentesi; dentro rimangono i quozienti dei singoli termini per il fattore raccolto. Questo è il **raccoglimento totale** (o raccoglimento a fattor comune).

Conviene raccogliere il fattore comune «più grande possibile», cioè il MCD dei termini, calcolato come nel capitolo 7: per $6a^3b - 9a^2b^2 + 3a^2b$ il MCD dei coefficienti è 3, la lettera $a$ compare in tutti i termini con esponente minimo 2, la lettera $b$ con esponente minimo 1. Dunque

$$6a^3b - 9a^2b^2 + 3a^2b = 3a^2b(2a - 3b + 1)$$

Nota l'1 nella parentesi: il termine $3a^2b$ diviso per se stesso dà 1, non 0. Il fattore comune può essere anche un polinomio: in $2x(x - 1) - 5(x - 1)$ entrambi i termini contengono $x - 1$, quindi $2x(x - 1) - 5(x - 1) = (x - 1)(2x - 5)$. Quando il primo coefficiente è negativo, spesso conviene raccogliere un segno meno: $-4x^2 + 6x = -2x(2x - 3)$.

### 8.3.3 Il raccoglimento parziale

Talvolta i termini non hanno un fattore comune a tutti, ma si possono dividere in gruppi che, dopo un raccoglimento all'interno di ciascun gruppo, mostrano un fattore comune. È il **raccoglimento parziale**:

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$$

La figura 8.4 ne dà un'immagine: un rettangolo di lati $a + b$ e $x + y$ è formato da quattro rettangoli più piccoli, di aree $ax$, $ay$, $bx$, $by$. Raggruppando le due parti della colonna di base $a$ e le due della colonna di base $b$ si ottengono due rettangoli di altezza comune $x + y$.

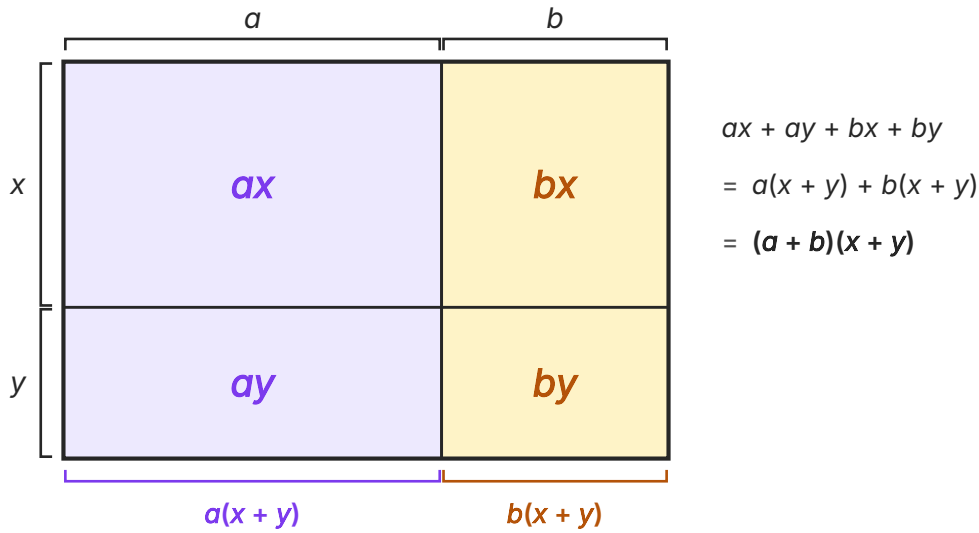



**Figura 8.4** Il raccoglimento parziale come somma di aree. I quattro rettangoli $ax$, $ay$, $bx$, $by$ formano, colonna per colonna, $a(x + y)$ e $b(x + y)$, cioè il rettangolo $(a + b)(x + y)$.

Per esempio $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = x^2(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 3)$. Il metodo funziona solo se, dopo il primo passo, le parentesi sono *identiche*; a volte serve raccogliere un segno meno per renderle uguali: in $2ax - 6a - x + 3$ dal secondo gruppo si raccoglie $-1$, e si ottiene $2a(x - 3) - (x - 3) = (x - 3)(2a - 1)$. Se le parentesi non coincidono, si prova un raggruppamento diverso, per esempio il primo termine con il terzo e il secondo con il quarto.

Spesso i due raccoglimenti si usano uno dopo l'altro. Per scomporre $3ax^2 - 6ax + 3bx - 6b$ si raccoglie prima il fattore 3, comune a tutti i coefficienti: $3(ax^2 - 2ax + bx - 2b)$. Poi, nella parentesi, si raggruppano i primi due termini (fattore comune $ax$) e gli ultimi due (fattore comune $b$):

$ax(x-2)+b(x-2)=(x-2)(ax+b)$. In conclusione $3ax^2-6ax+3bx-6b=3(x-2)(ax+b)$, e moltiplicando si ritrova il polinomio di partenza.

## 8.4 Scomporre con i prodotti notevoli

Ogni prodotto notevole del capitolo 7, letto da destra verso sinistra, è una regola di scomposizione. La difficoltà non sta nelle formule, che già conosci, ma nel *riconoscerle*: bisogna individuare quali termini sono quadrati o cubi e controllare che gli altri termini siano quelli giusti.

### 8.4.1 Differenza di quadrati

Un binomio che è la **differenza di due quadrati** si scompone nel prodotto della somma per la differenza delle basi: $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$. Per esempio $9x^2-25y^2=(3x)^2-(5y)^2=(3x+5y)(3x-5y)$, e $a^4-b^2=(a^2+b)(a^2-b)$.

A volte la scomposizione si può proseguire: $x^4-16=(x^2+4)(x^2-4)=(x^2+4)(x+2)(x-2)$. Il fattore $x^2+4$ invece si ferma qui: una *somma* di due quadrati come $x^2+4$ non ha fattori di primo grado, perché $x^2+4\geq 4$ per ogni $x$ e quindi non si annulla mai (per il teorema di Ruffini, un fattore $x-a$ richiederebbe uno zero $a$). Le basi $A$ e $B$ possono anche essere polinomi: $(x-3)^2-y^2=(x-3+y)(x-3-y)$.

### 8.4.2 Quadrato e cubo di un binomio, quadrato di un trinomio

Un trinomio è il **quadrato di un binomio** se due termini sono quadrati, $A^2$ e $B^2$, e il terzo è il loro doppio prodotto $\pm 2AB$. In $4x^2-12xy+9y^2$ i quadrati sono $(2x)^2$ e $(3y)^2$, e il doppio prodotto $2\cdot 2x\cdot 3y=12xy$ compare con il segno meno: dunque $4x^2-12xy+9y^2=(2x-3y)^2$. Il trinomio $x^2+4x+16$, invece, non è un quadrato: i quadrati sono $x^2$ e $4^2$, ma il doppio prodotto sarebbe $8x$, non $4x$.

Un quadrinomio è il **cubo di un binomio** se contiene due cubi, $A^3$ e $B^3$, e i due tripli prodotti $3A^2B$ e $3AB^2$, con segni coerenti: tutti positivi per $(A+B)^3$, alternati per $(A-B)^3$. Così $x^3+6x^2+12x+8=(x+2)^3$, perché $3\cdot x^2\cdot 2=6x^2$ e $3\cdot x\cdot 2^2=12x$; e $8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3=(2a-b)^3$.

Infine, un polinomio di sei termini con tre quadrati e tre doppi prodotti è il **quadrato di un trinomio**: $x^2+4y^2+1+4xy+2x+4y=(x+2y+1)^2$. I segni dei doppi prodotti devono essere compatibili con quelli dei termini del trinomio.

### 8.4.3 Somma e differenza di cubi

Per la somma e la differenza di due cubi vale una regola nuova, che non abbiamo incontrato tra i prodotti notevoli. Moltiplicando si verifica che

$$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)\qquad A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$$

Per esempio $(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3+A^2B+AB^2-A^2B-AB^2-B^3=A^3-B^3$: i termini intermedi si cancellano a coppie. Il secondo fattore assomiglia al quadrato di un binomio, ma ha il prodotto $AB$ e non il doppio prodotto: per questo si chiama **falso quadrato**. Un falso quadrato come $x^2+2x+4$ è irriducibile: si può scrivere $x^2+2x+4=(x+1)^2+3$, che vale almeno 3 e quindi non si annulla mai.

Esempi: $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$; $27a^3+1=(3a+1)(9a^2-3a+1)$. Per ricordare i segni: il binomio ha lo stesso segno della somma o della differenza di cubi; il falso quadrato ha il segno opposto davanti a $AB$, e sempre + davanti a $B^2$. Queste regole si chiamano anche **somma di cubi** e **differenza di cubi**.

**ERRORE FREQUENTE**

**Somma di cubi e cubo di una somma non sono la stessa cosa.** $a^3+b^3\neq(a+b)^3$: per $a=1$, $b=2$ si ha $1+8=9$ da una parte e $3^3=27$ dall'altra. Allo stesso modo $a^2+b^2$ non è $(a+b)^2$ e non si scompone come differenza di quadrati: $x^2+9$ è irriducibile. Infine, il falso quadrato $a^2-ab+b^2$ *non* è $(a-b)^2$: mancherebbe un $ab$.

**Tabella 8.1** Come riconoscere i prodotti notevoli in un polinomio da scomporre.

| Termini | Che cosa cercare | Scomposizione |
|---|---|---|
| 2 | due quadrati con segni opposti | $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ |
| 2 | due cubi | $A^3\pm B^3=(A\pm B)(A^2\mp AB+B^2)$ |
| 3 | due quadrati positivi e il doppio prodotto | $A^2\pm 2AB+B^2=(A\pm B)^2$ |
| 4 | due cubi e due tripli prodotti | $A^3\pm 3A^2B+3AB^2\pm B^3=(A\pm B)^3$ |
| 4 | un quadrato di binomio e un quadrato con segno meno | $(A\pm B)^2-C^2$, poi differenza di quadrati |
| 6 | tre quadrati e tre doppi prodotti | $(A+B+C)^2$ |

## 8.5 Trinomi, Ruffini e la strategia di scomposizione

### 8.5.1 Il trinomio speciale

Moltiplicando $(x+a)(x+b)$ si ottiene $x^2+(a+b)x+ab$: il coefficiente di $x$ è la *somma* di $a$ e $b$, il termine noto è il loro *prodotto*. Leggendo l'uguaglianza al contrario abbiamo un metodo per scomporre i trinomi di secondo grado con primo coefficiente 1, detti **trinomi speciali** (o caratteristici):

$$x^2+sx+p=(x+a)(x+b)\quad\text{se}\quad a+b=s\ \text{e}\ a\cdot b=p$$

Per scomporre $x^2 + 5x + 6$ cerchiamo due numeri con somma 5 e prodotto 6: sono 2 e 3, quindi $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$. La figura 8.5 mostra lo stesso fatto con le aree. Conviene partire dal prodotto, perché le coppie di fattori interi di un numero sono poche, e poi controllare la somma. Le regole dei segni aiutano: se il prodotto è positivo i due numeri sono concordi (entrambi positivi se la somma è positiva, entrambi negativi se è negativa); se il prodotto è negativo sono discordi. Così $x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$ (prodotto +10, somma −7) e $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$ (prodotto −12, somma −1).

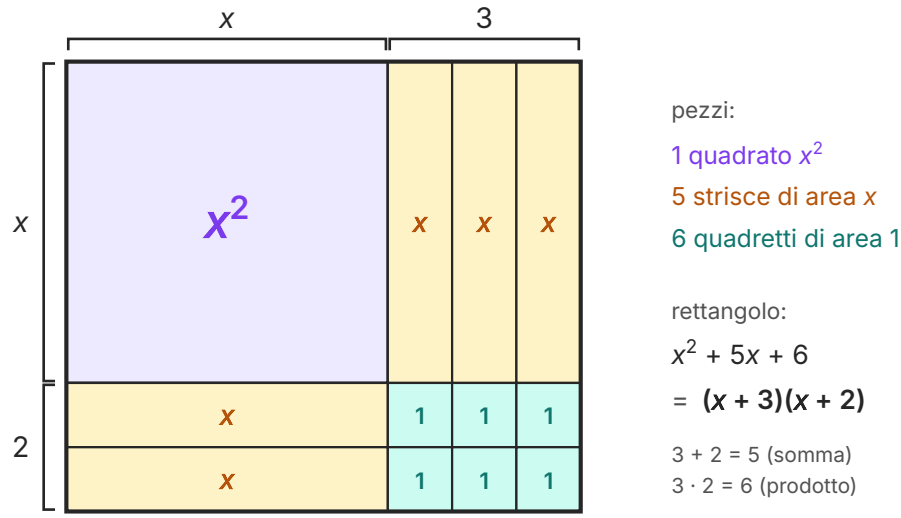



**Figura 8.5** Il trinomio $x^2 + 5x + 6$ come area: un quadrato $x^2$, cinque strisce di area $x$ e sei quadretti unitari si dispongono in un rettangolo di lati $x + 3$ e $x + 2$.

### 8.5.2 Il trinomio $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$

Se il primo coefficiente non è 1, si usa una variante detta **metodo somma-prodotto**. Si cercano due numeri $m$ e $n$ con somma uguale a $b$ e prodotto uguale ad $a \cdot c$; poi si spezza il termine di primo grado come $bx = mx + nx$ e si procede con un raccoglimento parziale.

**ESEMPIO SVOLTO**

**Problema.** Scomponi $6x^2 + x - 2$.

**Numeri cercati.** $a \cdot c = 6 \cdot (-2) = -12$, somma $b = 1$. Due numeri discordi con prodotto $-12$ e somma 1: 4 e $-3$.

**Spezzare il termine centrale.** $6x^2 + x - 2 = 6x^2 + 4x - 3x - 2$.

**Raccoglimento parziale.** $2x(3x + 2) - (3x + 2) = (3x + 2)(2x - 1)$.

**Verifica.** $(3x + 2)(2x - 1) = 6x^2 - 3x + 4x - 2 = 6x^2 + x - 2$.

Non tutti i trinomi di secondo grado si scompongono con numeri razionali. Per $x^2 + x + 1$ servirebbero due numeri con somma 1 e prodotto 1, e non esistono tra i razionali; anzi, poiché $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ non si annulla mai, il trinomio è irriducibile. Il prossimo anno, con le equazioni di secondo grado, imparerai a decidere in ogni caso se un trinomio è scomponibile.

### 8.5.3 Scomporre con la regola di Ruffini

Quando nessuno dei metodi precedenti funziona, il teorema di Ruffini offre una strada: se troviamo uno zero $a$ del polinomio, sappiamo che $x - a$ è un fattore, e la regola di Ruffini ci dà l'altro. Ma dove cercare gli zeri? Per un polinomio a coefficienti interi c'è una regola semplice.

**Zeri interi di un polinomio a coefficienti interi.** Se un numero intero $a$ è uno zero di un polinomio a coefficienti interi, allora $a$ è un divisore del termine noto. Gli zeri interi vanno quindi cercati soltanto tra i divisori del termine noto, positivi e negativi.

Giustifichiamo il caso degli zeri interi su un esempio. Se l'intero $a$ è uno zero di $x^3 - 7x + 6$, allora $a^3 - 7a + 6 = 0$, cioè $6 = 7a - a^3 = a(7 - a^2)$: 6 è il prodotto di $a$ per un intero, quindi $a$ è un divisore di 6. Lo stesso ragionamento vale per qualsiasi polinomio a coefficienti interi.

Per $x^3 - 7x + 6$ i candidati sono dunque $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Proviamo: $P(1) = 1 - 7 + 6 = 0$. Con la regola di Ruffini (coefficienti 1, 0, $-7$, 6 e $a = 1$) si ottiene la riga 1, 1, $-6$ | 0, cioè $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x^2 + x - 6)$. Il trinomio speciale si scompone a sua volta (somma 1, prodotto $-6$: i numeri 3 e $-2$): $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$.

**APPROFONDIMENTO · ZERI RAZIONALI**

Un polinomio può avere anche zeri frazionari. Vale questo risultato: se la frazione ridotta ai minimi termini $\frac{p}{q}$ è uno zero di un polinomio a coefficienti interi, allora $p$ è un divisore del termine noto e $q$ è un divisore del **coefficiente direttivo** (il coefficiente del termine di grado massimo). Se il coefficiente direttivo è 1, si ritrova la regola degli zeri interi.

Per esempio, per scomporre $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ i candidati sono $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm\frac{1}{2}$. Si trova $P(-1) = -2 - 3 + 3 + 2 = 0$; Ruffini con $a = -1$ dà la riga 2, −5, 2 | 0, cioè $P(x) = (x + 1)(2x^2 - 5x + 2)$, e il trinomio (somma −5, prodotto 4: −4 e −1) dà $(x - 2)(2x - 1)$. In tutto $(x + 1)(x - 2)(2x - 1)$: gli zeri sono −1, 2 e $\frac{1}{2}$, tutti nella lista dei candidati.

**APPROFONDIMENTO**

**Paolo Ruffini (1765–1822).** Matematico e medico, Ruffini studiò e insegnò all'Università di Modena, dove esercitò anche la professione medica. La regola che porta il suo nome fu da lui descritta all'inizio dell'Ottocento, nell'ambito di metodi per calcolare in modo approssimato le radici delle equazioni; un procedimento equivalente fu pubblicato in modo indipendente dall'inglese William George Horner nel 1819. Ma il contributo più profondo di Ruffini è un altro. Le equazioni di secondo, terzo e quarto grado si possono risolvere con formule che usano soltanto le quattro operazioni e le radici (le formule per il terzo e il quarto grado furono trovate da matematici italiani del Cinquecento, tra cui Tartaglia). Nel 1799 Ruffini sostenne che per l'equazione generale di quinto grado una formula di questo tipo *non può esistere*, e ne propose una dimostrazione. La sua dimostrazione era però incompleta; una dimostrazione rigorosa fu pubblicata nel 1824 dal norvegese Niels Henrik Abel, e oggi il risultato si chiama teorema di Abel-Ruffini.

### 8.5.4 Una strategia per scomporre

Davanti a un polinomio da scomporre non bisogna provare i metodi a caso. Conviene seguire sempre lo stesso ordine, riassunto nella figura 8.6.

1. **Raccoglimento totale.** È il primo controllo, sempre: semplifica tutti i passi successivi.
2. **Conta i termini** e cerca un prodotto notevole: con 2 termini differenza di quadrati o somma/differenza di cubi; con 3 termini quadrato di binomio o trinomio (speciale o con il metodo somma-prodotto); con 4 termini cubo di binomio, raccoglimento parziale, oppure un quadrato di binomio meno un quadrato; con 6 termini quadrato di trinomio o raccoglimento parziale.
3. **Regola di Ruffini**, se i metodi precedenti non funzionano: cerca uno zero tra i divisori del termine noto.

4. **Ricomincia** su ogni fattore ottenuto, finché tutti i fattori sono irriducibili.

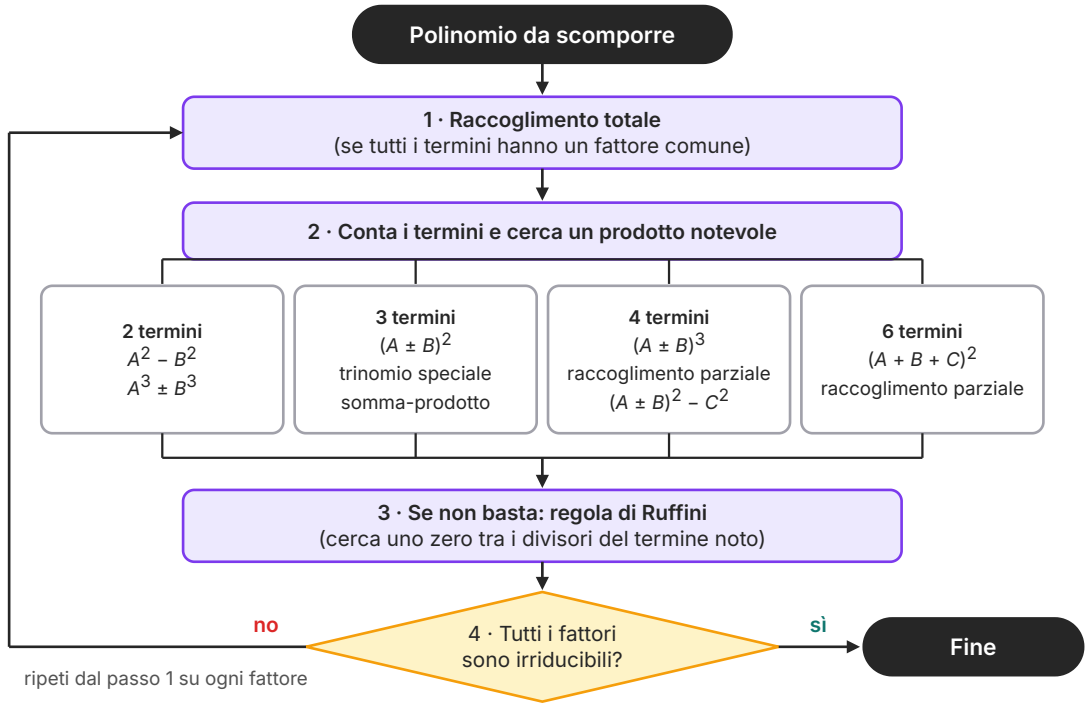



**Figura 8.6** Diagramma di flusso della strategia di scomposizione. Il ciclo si ripete su ogni fattore finché nessun fattore si può più scomporre.

Il passo 4 è quello che si dimentica più spesso. Prendiamo $2x^5 - 32x$. Raccoglimento totale: $2x(x^4 - 16)$. Il binomio è una differenza di quadrati: $2x(x^2 - 4)(x^2 + 4)$. Ma $x^2 - 4$ è *ancora* una differenza di quadrati, quindi la scomposizione completa è $2x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$. Un altro esempio: $x^4 - x^3 - x + 1 = x^3(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^3 - 1)$, e $x^3 - 1$ è una differenza di cubi: $(x - 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) = (x - 1)^2(x^2 + x + 1)$.

Un'ultima osservazione: scomporre è facile da verificare, ma difficile da trovare. Moltiplicare due fattori è un calcolo meccanico; risalire ai fattori partendo dal prodotto, invece, richiede tentativi, come hai visto con la ricerca degli zeri. Per i numeri interi questa asimmetria è enorme: moltiplicare due numeri primi di centinaia di cifre richiede a un computer una frazione di secondo, mentre nessun metodo noto riesce a ritrovare i due fattori in tempi ragionevoli. Su questa difficoltà si basa la sicurezza di sistemi crittografici molto diffusi, come RSA, usati ogni giorno per proteggere pagamenti e comunicazioni su internet.

## 8.6 MCD e mcm di polinomi

Come per i numeri e per i monomi, anche per i polinomi si definiscono il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo, e si calcolano a partire dalla scomposizione in fattori. Il **MCD di polinomi** è il prodotto dei fattori irriducibili *comuni* a tutti i polinomi, ciascuno preso con l'esponente *minimo*; il **mcm di polinomi** è il prodotto di *tutti* i fattori irriducibili, comuni e non comuni, ciascuno preso con l'esponente *massimo*. Per i fattori numerici si segue la stessa convenzione dei monomi: se i coefficienti sono interi si prendono MCD e mcm dei coefficienti, altrimenti si pone 1.

Calcoliamo MCD e mcm di $x^2 - 4$, $x^2 - 4x + 4$ e $3x - 6$. Le scomposizioni sono:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) \quad x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \quad 3x - 6 = 3(x - 2)$$

L'unico fattore comune ai tre polinomi è $x - 2$, con esponente minimo 1: MCD = $x - 2$. Il mcm contiene il 3, $(x - 2)^2$ (esponente massimo 2) e $x + 2$: mcm = $3(x - 2)^2(x + 2)$. Se il MCD è 1 (o un numero), i polinomi si dicono **primi tra loro**, come $x + 1$ e $x - 1$.

MCD e mcm di polinomi sono definiti a meno di un fattore numerico, e in particolare del segno. Questo diventa importante quando nei polinomi compaiono fattori opposti come $x - 2$ e $2 - x$. Prima di confrontare i fattori conviene scriverli tutti nello stesso modo, raccogliendo un segno meno: $2 - x = -(x - 2)$. Così $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x) = -(x - 2)(x + 2)$ ha in comune con $x^2 - 4x + 4$ il fattore $x - 2$. Il mcm sarà lo strumento per sommare le frazioni algebriche nel capitolo 9, esattamente come il mcm dei denominatori serve per sommare le frazioni numeriche.

Un altro esempio, con un fattore opposto e dei coefficienti numerici. Siano $A = 2x^3 - 2x$, $B = 4x^2 - 8x + 4$, $C = 1 - x$. Scomponendo: $A = 2x(x^2 - 1) = 2x(x - 1)(x + 1)$, $B = 4(x^2 - 2x + 1) = 4(x - 1)^2$, $C = -(x - 1)$. L'unico fattore comune è $x - 1$, con esponente minimo 1, e il MCD dei coefficienti 2, 4, 1 è 1: MCD = $x - 1$. Per il mcm prendiamo mcm(2, 4) = 4 e tutti i fattori con l'esponente massimo: mcm = $4x(x - 1)^2(x + 1)$.

**SINTESI**

- Dati due polinomi $A$ e $B$ (non nullo) esistono e sono unici $Q$ e $R$ con $A = B \cdot Q + R$ e $R$ nullo o di grado minore di $B$; se $R = 0$, $A$ è divisibile per $B$.
- Nella divisione in colonna il dividendo va ordinato e completato con i termini mancanti di coefficiente 0.
- La regola di Ruffini divide un polinomio per $x - a$ usando solo i coefficienti: si abbassa il primo, si moltiplica per $a$, si somma in colonna.
- Teorema del resto: il resto di $P(x) : (x - a)$ è $P(a)$.
- Teorema di Ruffini: $x - a$ è un fattore di $P(x)$ se e solo se $P(a) = 0$. Gli zeri di $P$ sono le intersezioni del grafico con l'asse $x$.
- Per dividere per $ax - b$ si usa $\begin{matrix} b \\ a \end{matrix}$ nella regola di Ruffini e poi si divide il quoziente per $a$.
- Scomporre significa scrivere un polinomio come prodotto di fattori irriducibili; ogni polinomio di primo grado è irriducibile.
- Raccoglimento totale: $ab + ac = a(b + c)$; parziale: $ax + ay + bx + by = (x + y)(a + b)$.
- Prodotti notevoli al contrario: $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$; quadrati e cubi di binomio; $A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$, con il falso quadrato irriducibile.
- Trinomio speciale: $x^2 + sx + p = (x + a)(x + b)$ con $a + b = s$, $ab = p$; con $a \neq 1$ si spezza il termine centrale (metodo somma-prodotto).
- Strategia: raccoglimento totale, prodotti notevoli secondo il numero di termini, Ruffini con i divisori del termine noto, e si ripete su ogni fattore.
- MCD di polinomi: fattori comuni con esponente minimo; mcm: tutti i fattori con esponente massimo.

## ESERCIZI

### Comprendere

1. ● Dividendo un polinomio di grado 5 per un polinomio di grado 2, il quoziente ha grado:

   **A.** 2

   **B.** 3

   **C.** 7

   **D.** $\frac{5}{2}$

2. ● Nella divisione di un polinomio per $x^2 + 1$, il resto può avere grado al massimo:

   **A.** 1

   **B.** 0

   **C.** 2

   **D.** dipende dal dividendo

3. ● Per dividere $P(x)$ per $x + 3$ con la regola di Ruffini si usa il numero:

   **A.** 3

   **B.** $\frac{1}{3}$

   **C.** $-3$

   **D.** 0

4. ● Il resto della divisione $(x^3 - 2x + 5) : (x - 2)$ è:

   **A.** 1

   **B.** 5

   **C.** $-9$

   **D.** 9

5. ●● Quale dei seguenti polinomi è divisibile per $x - 1$?

   **A.** $x^3 + x^2 + 1$

   **B.** $x^3 - 2x + 1$

   **C.** $x^2 + 1$

   **D.** $2x^3 - x - 3$

6. ●● Quale dei seguenti polinomi è irriducibile?

   **A.** $x^2 - 9$

   **B.** $x^3 + 8$

   **C.** $x^2 + 6x + 9$

   **D.** $x^2 + 9$

7. ●● $a^3 - 27$ è uguale a:

   **A.** $(a - 3)(a^2 + 3a + 9)$

   **B.** $(a - 3)^3$

   **C.** $(a - 3)(a^2 - 3a + 9)$

   **D.** $(a - 3)(a + 3)^2$

8. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Se $P(3) = 0$, allora $P(x)$ è divisibile per $x + 3$. b) Ogni polinomio di primo grado è irriducibile. c) $x(x + 2) + 5(x + 2)$ è un polinomio scomposto in fattori. d) $a^2 + b^2 = (a + b)(a - b)$. e) Nella divisione per un binomio di primo grado il resto è un numero. f) $x^2 + 2x + 4$ è il quadrato di $x + 2$.

9. ● Completa. a) Nella regola di Ruffini, il dividendo va _____ e _____. b) Un numero $a$ tale che $P(a) = 0$ si chiama _____ di $P(x)$. c) $x^2 + sx + p = (x + a)(x + b)$ se $a + b =$ _____ e $a \cdot b =$ _____. d) Il mcm di polinomi è il prodotto di tutti i fattori, comuni e non comuni, con l'esponente _____.

**Calcolare**

10. ● Esegui le divisioni per un monomio. a) $(12a^4b^2 - 8a^3b^3 + 4a^2b^2) : (4a^2b^2)$ b) $(-15x^5 + 10x^3 - 5x^2) : (-5x^2)$ c) $(\frac{3}{4}x^3y - \frac{1}{2}x^2y^2) : (\frac{1}{4}x^2y)$

11. ●● Esegui le divisioni in colonna, indica quoziente e resto e verifica. a) $(2x^3 - 7x^2 + 4x + 5) : (x - 3)$ b) $(x^4 - 3x^3 + 2x - 1) : (x^2 - x + 2)$ c) $(4x^3 - 8x^2 + 3x + 5) : (2x^2 - x + 1)$

12. ● Esegui le divisioni con la regola di Ruffini. a) $(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x - 2)$ b) $(2x^4 - 3x^3 + x - 7) : (x + 1)$ c) $(x^5 - 32) : (x - 2)$ d) *(approfondimento)* $(3x^3 - x^2 + 4x + 2) : (3x + 2)$

13. ●● Usa il teorema del resto, senza eseguire la divisione. a) Resto di $(x^4 - 3x^2 + 2x - 1) : (x - 2)$. b) Resto di $(x^{15} + x^{10} + 1) : (x + 1)$. c) Per quale valore di $k$ il polinomio $x^3 - kx^2 + 4x - 6$ è divisibile per $x - 3$?

14. ● Scomponi con il raccoglimento totale. a) $15x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5x^2y^2$ b) $-8a^4 + 12a^3 - 4a^2$ c) $3x(a - b) - 2y(a - b)$ d) $(x + 1)^2 - 4(x + 1)$

15. ●● Scomponi con il raccoglimento parziale. a) $ax - 2a + 3x - 6$ b) $x^3 + 3x^2 - 2x - 6$ c) $2ab - 3b - 2a + 3$ d) $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$

16. ● Scomponi come differenza di quadrati (anche ripetendo). a) $49a^2 - 4b^2$ b) $\frac{1}{9}x^2 - 1$ c) $a^4 - 81$ d) $(2x + 1)^2 - 9$

17. ●● Riconosci il prodotto notevole e scomponi. a) $9a^2 + 6a + 1$ b) $x^2 - x + \frac{1}{4}$ c) $27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$ d) $a^2 + b^2 + 4 - 2ab + 4a - 4b$

18. ●● Scomponi le somme e le differenze di cubi. a) $x^3 + 64$ b) $8a^3 - 1$ c) $x^6 - y^3$

19. ●● Scomponi i trinomi. a) $x^2 + 8x + 15$ b) $x^2 - 2x - 15$ c) $a^2 - 9a + 14$ d) $3x^2 + 5x - 2$ e) $x^4 - 5x^2 + 4$ (pensa a $x^2$ come a una nuova variabile)

20. ●● Scomponi con la regola di Ruffini. a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ b) $x^3 + x^2 - 4x - 4$ (prova anche con il raccoglimento parziale) c) $2x^3 + x^2 - 5x + 2$

21. ●● Calcola MCD e mcm dei polinomi. a) $x^2 - 9$; $x^2 + 6x + 9$ b) $2a^2 - 2a$; $a^2 - 1$; $3a - 3$ c) $x^3 - 8$; $x^2 - 4x + 4$; $6 - 3x$

### Dimostrare e argomentare

22. ●● Dimostra che un polinomio $P(x)$ è divisibile per $x - 1$ se e solo se la somma dei suoi coefficienti è 0. Usa poi questo criterio per stabilire, senza calcoli lunghi, se $3x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 1$ è divisibile per $x - 1$.

23. ●● Trova l'errore. Per dividere $x^3 - 2x + 4$ per $x + 2$, Luca scrive nella tabella di Ruffini i coefficienti 1, −2, 4 e il numero 2, e ottiene la riga 1, 0 | 4. Conclude: quoziente $x$, resto 4. Spiega i due errori commessi e trova il risultato corretto.

24. ●● Spiega perché il polinomio $x^4 + 3x^2 + 2$ non ha fattori di primo grado. Ha però fattori di secondo grado? Scomponilo.

25. ●●● Dimostra che, per ogni numero intero $n$, $n^3 - n$ è divisibile per 6 (suggerimento: scomponi e ricorda che tra due interi consecutivi uno è pari e tra tre consecutivi uno è multiplo di 3). Dimostra poi che, se $n$ è dispari, $n^2 - 1$ è divisibile per 8.

### Problemi

26. ● Un rettangolo ha area $x^2 + 7x + 12$ (in cm$^2$, con $x$ in cm) e un lato lungo $x + 3$. Trova l'altro lato e il perimetro. Calcola area e perimetro per $x = 5$.

27. ●● Da una lastra quadrata di lato 2,35 m si ritaglia un quadrato di lato 0,65 m. Calcola a mente l'area della parte rimanente usando la differenza di quadrati. Calcola nello stesso modo $1001^2 - 999^2$.

28. ●● Un cubo di legno di spigolo $x$ (in cm) viene svuotato togliendo un cubetto di spigolo 1 cm. Scrivi il volume rimasto come polinomio e scomponilo. Verifica la scomposizione per $x = 10$: in quali due fattori si scompone 999?

29. ●● Un sasso lanciato verso l'alto si trova, dopo $t$ secondi, all'altezza $h(t) = 20t - 5t^2$ metri dal punto di lancio (si approssima l'accelerazione di gravità a 10 m/s$^2$). Scomponi $h(t)$ e trova gli istanti in cui il sasso si trova all'altezza del punto di lancio.

30. ●●● Con un cartoncino quadrato di lato 20 cm si costruisce una scatola senza coperchio, ritagliando ai quattro angoli quadratini di lato $x$ e ripiegando i bordi. Il volume è $V(x) = 4x^3 - 80x^2 + 400x$. Scomponi $V(x)$ e interpreta i fattori come le tre dimensioni della scatola. Calcola il volume per $x = 3$.

### Verso la verifica

31. ●● Scomponi completamente. a) $3x^4 - 48$ b) $a^3 - 2a^2 - 9a + 18$ c) $2x^3 - 12x^2 + 18x$ d) $x^6 - 1$

32. ●● Determina $k$ in modo che $P(x) = x^3 + kx^2 - 4x + 4$ sia divisibile per $x - 2$; poi scomponi $P(x)$ per il valore trovato.

33. ●● Scomponi $A = x^3 - 4x$, $B = x^2 + 4x + 4$, $C = 2x^2 + 4x$ e calcolane MCD e mcm. Poi esegui la divisione $A : (x - 2)$ con la regola di Ruffini e confronta il risultato con la scomposizione di $A$.

34. ●●● Sfida. a) Usa il teorema di Ruffini per dimostrare che $x^n - 1$ è divisibile per $x - 1$ per ogni naturale $n \geq 1$, e trova il quoziente per $n = 4$. b) Deduci che $7^n - 1$ è divisibile per 6 per ogni $n \geq 1$. c) Per quali valori di $n$ il polinomio $x^n + 1$ è divisibile per $x + 1$?

## PER APPROFONDIRE

- [CR] Courant e Robbins, *Che cos'è la matematica?*: i polinomi, le loro radici e il problema della risolubilità delle equazioni algebriche.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: la storia dell'algebra, da Tartaglia e Cardano fino a Ruffini e Abel.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: come «provare e verificare» in modo ordinato, proprio come nella ricerca degli zeri di un polinomio.

# Glossario del capitolo

**Coefficiente direttivo**
Il coefficiente del termine di grado massimo di un polinomio.

**Differenza di quadrati**
Binomio $A^2 - B^2$, che si scompone in $(A + B)(A - B)$.

**Divisione con resto tra polinomi**
Dati A(x) e B(x) non nullo, esistono e sono unici Q(x) e R(x) con $A = B \cdot Q + R$, dove R è nullo o ha grado minore di B.

**Divisione in colonna**
Algoritmo per dividere due polinomi ordinati (il dividendo anche completo), che ripete: dividi i primi termini, moltiplica, sottrai.

**Falso quadrato**
Trinomio $A^2 \pm AB + B^2$, che compare nella scomposizione di somma e differenza di cubi; è irriducibile.

**MCD e mcm di polinomi**
MCD: prodotto dei fattori irriducibili comuni con l'esponente minimo; mcm: prodotto di tutti i fattori con l'esponente massimo.

**Metodo somma-prodotto**
Per $ax^2 + bx + c$ si cercano m, n con $m + n = b$ e $m \cdot n = a \cdot c$, si spezza bx in $mx + nx$ e si raccoglie parzialmente.

**Polinomio divisibile**
A(x) è divisibile per B(x) se il resto della divisione è il polinomio nullo, cioè se $A = B \cdot Q$.

**Polinomio irriducibile**
Polinomio di grado almeno 1 che non si può scrivere come prodotto di due polinomi di grado almeno 1; ogni polinomio di primo grado è irriducibile.

**Quoziente di due polinomi**
Il polinomio Q(x) della divisione $A = B \cdot Q + R$; se il grado di A non è minore di quello di B, il grado di Q è la differenza dei due gradi.

**Raccoglimento parziale**
Scomposizione per gruppi di termini che, dopo un raccoglimento in ciascun gruppo, mostrano un fattore comune: $ax + ay + bx + by = (x + y)(a + b)$.

**Raccoglimento totale**
Scomposizione che porta fuori da una parentesi il fattore comune a tutti i termini: $ab + ac = a(b + c)$.

**Regola di Ruffini**
Schema abbreviato per dividere un polinomio per $x - a$ usando solo i coefficienti: si abbassa il primo, si moltiplica per a, si somma in colonna.

**Resto di una divisione tra polinomi**
Il polinomio R(x) della divisione $A = B \cdot Q + R$: è nullo o ha grado minore del divisore; nella divisione per $x - a$ è un numero.

**Scomposizione in fattori**
Scrittura di un polinomio come prodotto di polinomi di grado minore, fino a fattori tutti irriducibili.

**Somma e differenza di cubi**
$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$ e $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$.

**Teorema del resto**
Il resto della divisione di P(x) per $x - a$ è uguale a P(a).

**Teorema di Ruffini**
P(x) è divisibile per $x - a$ se e solo se $P(a) = 0$.

**Trinomio speciale**
Trinomio $x^2 + sx + p$, che si scompone in $(x + a)(x + b)$ se $a + b = s$ e $a \cdot b = p$.

**Zero (radice) di un polinomio**
Numero a tale che $P(a) = 0$; corrisponde a un'intersezione del grafico di $y = P(x)$ con l'asse x.

# Soluzioni

**1.** B. Il grado del quoziente è la differenza dei gradi: $5 - 2 = 3$.

**2.** A. Il resto è nullo o ha grado minore di quello del divisore, che è 2: quindi grado al massimo 1.

**3.** C. $x + 3 = x - (-3)$, quindi $a = -3$.

**4.** D. Teorema del resto: $P(2) = 8 - 4 + 5 = 9$.

**5.** B. $P(1) = 1 - 2 + 1 = 0$; gli altri valgono in 1 rispettivamente 3, 2 e −2.

**6.** D. $x^2 + 9 \geq 9$ non si annulla mai e non è differenza di quadrati; gli altri sono $(x - 3)(x + 3)$, $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$, $(x + 3)^2$.

**7.** A. Differenza di cubi: $a^3 - 3^3 = (a - 3)(a^2 + 3a + 9)$.

**8.** a) F: se $P(3) = 0$, $P(x)$ è divisibile per $x - 3$. b) V. c) F: l'ultima operazione è una somma; scomposto è $(x + 2)(x + 5)$. d) F: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $a^2 + b^2$ non si scompone così. e) V (oppure il resto è nullo). f) F: $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$; $x^2 + 2x + 4$ è un falso quadrato, irriducibile.

**9.** a) ordinato, completo (termini mancanti con coefficiente 0). b) zero (o radice). c) $s$; $p$. d) massimo.

**10.** a) $3a^2 - 2ab + 1$. b) $3x^3 - 2x + 1$. c) $3x - 2y$.

**11.** a) $Q = 2x^2 - x + 1$, $R = 8$; verifica: $(x - 3)(2x^2 - x + 1) + 8 = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 3 + 8$. b) $Q = x^2 - 2x - 4$, $R = 2x + 7$ (dividendo completato: $x^4 - 3x^3 + 0x^2 + 2x - 1$); verifica: $(x^2 - x + 2)(x^2 - 2x - 4) = x^4 - 3x^3 + 0x^2 + 0x - 8$, più $2x + 7$. c) $Q = 2x - 3$, $R = -2x + 8$; verifica: $(2x^2 - x + 1)(2x - 3) = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 3$, più $-2x + 8$.

**12.** a) Riga 1, 4, 3 | 0: $Q = x^2 + 4x + 3$, $R = 0$. b) Coefficienti 2, −3, 0, 1, −7 con $a = -1$; riga 2, −5, 5, −4 | −3: $Q = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 4$, $R = -3$. c) Coefficienti 1, 0, 0, 0, 0, −32 con $a = 2$; riga 1, 2, 4, 8, 16 | 0: $Q = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$, $R = 0$. d) Si usa $a = -\frac{2}{3}$: riga 3, −3, 6 | −2; il quoziente per $x + \frac{2}{3}$ è $3x^2 - 3x + 6$, che diviso per 3 dà $Q = x^2 - x + 2$; $R = -2$.

**13.** a) $P(2) = 16 - 12 + 4 - 1 = 7$. b) $P(-1) = -1 + 1 + 1 = 1$. c) $P(3) = 27 - 9k + 12 - 6 = 33 - 9k = 0$, quindi $k = \frac{11}{3}$.

**14.** a) $5x^2y^2(3x - 2y + 1)$. b) $-4a^2(2a^2 - 3a + 1)$, e il trinomio si scompone ancora: $-4a^2(a - 1)(2a - 1)$. c) $(a - b)(3x - 2y)$. d) $(x + 1)(x + 1 - 4) = (x + 1)(x - 3)$.

**15.** a) $a(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(a + 3)$. b) $x^2(x + 3) - 2(x + 3) = (x + 3)(x^2 - 2)$. c) $b(2a - 3) - (2a - 3) = (2a - 3)(b - 1)$. d) $x^2(x - y) + y^2(x - y) = (x - y)(x^2 + y^2)$.

**16.** a) $(7a + 2b)(7a - 2b)$. b) $(\frac{1}{3}x + 1)(\frac{1}{3}x - 1)$. c) $(a^2 + 9)(a^2 - 9) = (a^2 + 9)(a + 3)(a - 3)$. d) $(2x + 1 + 3)(2x + 1 - 3) = (2x + 4)(2x - 2) = 4(x + 2)(x - 1)$.

**17.** a) $(3a + 1)^2$. b) $(x - \frac{1}{2})^2$. c) $(3x - 1)^3$: cubi $27x^3$ e $-1$, tripli prodotti $3 \cdot 9x^2 \cdot (-1) = -27x^2$ e $3 \cdot 3x \cdot 1 = 9x$. d) $(a - b + 2)^2$.

**18.** a) $(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$. b) $(2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)$. c) $(x^2)^3 - y^3 = (x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2)$.

**19.** a) Somma 8, prodotto 15: $(x + 3)(x + 5)$. b) Somma −2, prodotto −15: $(x - 5)(x + 3)$. c) Somma −9, prodotto 14: $(a - 2)(a - 7)$. d) $a \cdot c = -6$, somma 5: numeri 6 e −1; $3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(3x - 1)$. e) Con $x^2$ come variabile: somma −5, prodotto 4: $(x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$.

**20.** a) $P(1) = 0$; Ruffini: $(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$. b) $P(-1) = 0$; Ruffini: $(x + 1)(x^2 - 4) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$; con il raccoglimento parziale: $x^2(x + 1) - 4(x + 1)$, stesso risultato. c) $P(1) = 0$; Ruffini: $(x - 1)(2x^2 + 3x - 2)$; $a \cdot c = -4$, somma 3: numeri 4 e −1, $2x^2 + 4x - x - 2 = (x + 2)(2x - 1)$; quindi $(x - 1)(x + 2)(2x - 1)$.

**21.** a) $(x - 3)(x + 3)$ e $(x + 3)^2$: MCD $= x + 3$, mcm $= (x - 3)(x + 3)^2$. b) $2a(a - 1)$, $(a - 1)(a + 1)$, $3(a - 1)$: MCD $= a - 1$, mcm $= 6a(a - 1)(a + 1)$. c) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$, $(x - 2)^2$, $-3(x - 2)$: MCD $= x - 2$, mcm $= 3(x - 2)^2(x^2 + 2x + 4)$.

**22.** Per il teorema di Ruffini $P(x)$ è divisibile per $x - 1$ se e solo se $P(1) = 0$. Ma $P(1)$ si ottiene sostituendo 1 a ogni potenza di $x$, e ogni potenza di 1 vale 1: quindi $P(1)$ è la somma dei coefficienti. Per $3x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 1$: $3 - 4 + 2 - 1 = 0$, quindi è divisibile per $x - 1$.

**23.** Primo errore: manca il coefficiente 0 del termine in $x^2$; i coefficienti sono 1, 0, −2, 4. Secondo errore: per dividere per $x + 2$ si usa $a = -2$, non 2. Tabella corretta: 1, −2, 2 | 0, cioè $Q = x^2 - 2x + 2$, $R = 0$ (infatti $P(-2) = -8 + 4 + 4 = 0$).

**24.** Per ogni $x$ si ha $x^4 \geq 0$ e $3x^2 \geq 0$, quindi $x^4 + 3x^2 + 2 \geq 2$: il polinomio non si annulla mai, e per il teorema di Ruffini non ha fattori $x - a$. Ha però fattori di secondo grado: come trinomio in $x^2$ (somma 3, prodotto 2) si ha $(x^2 + 1)(x^2 + 2)$.

**25.** $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$, prodotto di tre interi consecutivi: tra due consecutivi uno è pari, quindi il prodotto è divisibile per 2; tra tre consecutivi uno è multiplo di 3, quindi è divisibile per 3; essendo 2 e 3 primi tra loro, è divisibile per 6. Se $n$ è dispari, $n = 2k + 1$: $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1) = 2k(2k + 2) = 4k(k + 1)$; poiché $k(k + 1)$ è pari, $4k(k + 1)$ è multiplo di 8.

**26.** $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$: l'altro lato è $x + 4$; perimetro $2(x + 3 + x + 4) = 4x + 14$. Per $x = 5$: area $8 \cdot 9 = 72$ cm$^2$, perimetro 34 cm.

**27.** $2{,}35^2 - 0{,}65^2 = (2{,}35 - 0{,}65)(2{,}35 + 0{,}65) = 1{,}7 \cdot 3 = 5{,}1$ m$^2$. $1001^2 - 999^2 = (1001 - 999)(1001 + 999) = 2 \cdot 2000 = 4000$.

**28.** $V = x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ cm$^3$. Per $x = 10$: $999 = 9 \cdot 111$.

**29.** $h(t) = 5t(4 - t)$. Il sasso è all'altezza del lancio quando $h(t) = 0$: per $t = 0$ s (lancio) e per $t = 4$ s (ritorno), perché un prodotto è nullo solo se lo è un fattore.

**30.** $V(x) = 4x(x^2 - 20x + 100) = 4x(x - 10)^2 = x(20 - 2x)^2$, perché $4(x - 10)^2 = (2(10 - x))^2 = (20 - 2x)^2$. Le dimensioni sono l'altezza $x$ e i due lati della base $20 - 2x$. $V(3) = 3 \cdot 14^2 = 588$ cm$^3$.

**31.** a) $3(x^4 - 16) = 3(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$. b) $a^2(a - 2) - 9(a - 2) = (a - 2)(a - 3)(a + 3)$. c) $2x(x^2 - 6x + 9) = 2x(x - 3)^2$. d) $(x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$.

**32.** $P(2) = 8 + 4k - 8 + 4 = 4k + 4 = 0$, quindi $k = -1$. $x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x - 1) - 4(x - 1) = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$.

**33.** $A = x(x - 2)(x + 2)$, $B = (x + 2)^2$, $C = 2x(x + 2)$. MCD $= x + 2$; mcm $= 2x(x - 2)(x + 2)^2$. Ruffini con coefficienti 1, 0, −4, 0 e $a = 2$: riga 1, 2, 0 | 0, quindi $A : (x - 2) = x^2 + 2x = x(x + 2)$, in accordo con la scomposizione.

**34.** a) $P(x) = x^n - 1$ ha $P(1) = 1^n - 1 = 0$, quindi è divisibile per $x - 1$. Per $n = 4$: $x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$. b) $x^n - 1 = (x - 1) \cdot Q(x)$, dove $Q(x)$ ha coefficienti interi (tutti uguali a 1); per $x = 7$: $7^n - 1 = 6 \cdot Q(7)$ con $Q(7)$ intero. c) $P(-1) = (-1)^n + 1$ è 0 se e solo se $n$ è dispari: $x^n + 1$ è divisibile per $x + 1$ per $n$ dispari.