CAPITOLO

7

Monomi e polinomi

Un esempio mostra che una cosa è vera una volta. Una lettera permette di dire che è vera sempre.

OBIETTIVI

1. Tradurre frasi in espressioni letterali, calcolarne il valore numerico e stabilirne le condizioni di esistenza.
2. Riconoscere un monomio, scriverlo in forma normale, indicarne coefficiente, parte letterale e grado.
3. Eseguire le operazioni con i monomi e calcolarne MCD e mcm.
4. Ridurre, ordinare e classificare un polinomio; sommare e moltiplicare polinomi.
5. Usare i prodotti notevoli, anche con la loro interpretazione geometrica.
6. Usare il calcolo letterale per dimostrare proprietà dei numeri.

INDICE DEL CAPITOLO

7.1 Perché le lettere 2
7.2 I monomi 4
7.3 Operazioni con i monomi 6
7.4 I polinomi 8
7.5 I prodotti notevoli 10
7.6 Polinomi come funzioni e come strumenti di dimostrazione 17

Matematica 1 · Parte III · Il calcolo letterale · versione 1.0
Capitolo 7: Monomi e polinomi · pagine 183–204 del volume completo · estratto per lo studio

Nei capitoli precedenti abbiamo lavorato con i numeri: li abbiamo sommati, moltiplicati, elevati a potenza, confrontati. Ma molte delle cose più interessanti che abbiamo detto non riguardavano un numero particolare. Quando abbiamo scritto la proprietà commutativa come $a + b = b + a$, non stavamo parlando di 3 e 5, o di -2 e $\frac{1}{4}$: stavamo dicendo qualcosa che vale per *tutti* i numeri. Le lettere ci hanno permesso di dirlo in una riga.

In questo capitolo le lettere diventano protagoniste. Impareremo a costruire espressioni con numeri e lettere, a calcolarle, a semplificarle. Partiremo dai **monomi** e arriveremo ai **polinomi**, che sono somme di monomi, e ai prodotti notevoli, «scorciatoie» di calcolo con un semplice significato geometrico. Infine useremo il calcolo letterale per fare qualcosa che con i soli esempi numerici è impossibile: *dimostrare* che una proprietà vale per infiniti numeri.

7.1 Perché le lettere

7.1.1 Formule e generalizzazione

Conosci già molte formule: l'area di un rettangolo è $A = b \cdot h$, il perimetro di un quadrato è $p = 4l$, in fisica la distanza percorsa a velocità costante è $s = v \cdot t$. Le lettere stanno al posto di numeri che possono cambiare: la formula vale per tutti i rettangoli, tutti i quadrati, tutti i moti a velocità costante. Una lettera usata così si chiama **variabile**.

Una **espressione letterale** (o algebrica) è una scrittura che contiene numeri e lettere legati dai simboli delle operazioni, come $3a + 2b$, $\frac{x+1}{x-2}$ oppure $(a - b)^2$. Le lettere rappresentano numeri; per ora, salvo avviso contrario, numeri razionali. Su di esse valgono quindi tutte le proprietà delle operazioni che conosci: commutativa, associativa, distributiva, le proprietà delle potenze.

L'uso sistematico delle lettere in matematica è relativamente recente. Per secoli i calcoli furono descritti a parole; l'idea di indicare con lettere sia le quantità note sia quelle incognite si deve soprattutto al francese François Viète, alla fine del Cinquecento. Da allora, scrivere una regola generale è diventato questione di pochi simboli.

7.1.2 Dal linguaggio naturale al linguaggio simbolico

Saper tradurre una frase in un'espressione letterale è la prima abilità dell'algebra, e servirà moltissimo per risolvere i problemi. Bisogna fare attenzione all'ordine in cui si leggono le operazioni: l'ultima operazione nominata nella frase è spesso la *prima* della frase stessa. «Il doppio della somma di un numero e 3» è $2(x + 3)$: si fa prima la somma e poi si raddoppia. Invece «la somma del doppio di un numero e 3» è $2x + 3$.

Tabella 7.1 Alcune traduzioni dal linguaggio naturale a quello simbolico (x, y, n indicano numeri qualsiasi; n un numero naturale).

Frase	Espressione
il triplo del cubo di un numero	$3x^3$
il cubo del triplo di un numero	$(3x)^3 = 27x^3$
il quadrato della differenza di due numeri	$(x - y)^2$
la differenza dei quadrati di due numeri	$x^2 - y^2$
la metà del successivo di un numero naturale	$\frac{n+1}{2}$
un numero pari; un numero dispari	$2n$; $2n + 1$
tre numeri naturali consecutivi	n, $n + 1$, $n + 2$
il reciproco della somma di due numeri	$\frac{1}{x+y}$

Le ultime righe della tabella sono preziose. Ogni numero pari si può scrivere come $2n$ per un opportuno n naturale, e ogni dispari come $2n + 1$: in queste due scritture c'è la *definizione* di pari e dispari, ed è grazie a loro che nel paragrafo 7.6 potremo dimostrare proprietà dei numeri.

COLLEGAMENTI

Le formule della fisica sono espressioni letterali. In fisica ogni lettera ha un significato e un'unità di misura: m la massa, t il tempo, v la velocità. L'energia cinetica di un corpo è $E = \frac{1}{2} m\, v^2$. Se la velocità raddoppia, l'energia diventa $\frac{1}{2} m\, (2v)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} m\, v^2$, cioè quattro volte tanto: ecco perché una piccola differenza di velocità conta così tanto negli incidenti stradali. Il calcolo letterale permette di trarre questa conclusione senza conoscere i valori di m e v.

7.1.3 Valore numerico e condizioni di esistenza

Se in un'espressione letterale si sostituisce a ogni lettera un numero e si eseguono i calcoli, si ottiene il **valore numerico** dell'espressione per quei valori delle lettere. Per esempio il valore di $2a^2 - 3b$ per $a = -1$ e $b = 2$ è $2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot 2 = 2 - 6 = -4$.

Quando si sostituisce un numero negativo o una frazione bisogna sempre scriverlo *tra parentesi*: le parentesi ricordano che l'esponente si applica a tutto il numero, segno compreso. Dimenticarle è uno degli errori più comuni di tutto il calcolo letterale.

Non sempre il valore numerico esiste. L'espressione $\frac{3}{x-2}$ per $x = 2$ diventa $\frac{3}{0}$, e la divisione per zero è impossibile. Si chiamano **condizioni di esistenza** (C.E.) le condizioni che le lettere devono rispettare perché l'espressione abbia significato; per ora l'unica che incontreremo è che *ogni denominatore sia diverso da zero*. Per $\frac{3}{x-2}$ la C.E. è $x \neq 2$. Le espressioni senza lettere al denominatore, come $2a^2 - 3b$, si dicono **espressioni intere** e hanno significato per qualsiasi valore delle lettere; quelle con lettere al denominatore si dicono **espressioni fratte**, e le studieremo a fondo nel capitolo 9.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Data l'espressione $E = \frac{a^2 - 2b}{a + b}$, stabilisci le condizioni di esistenza e calcola il valore di E per $a = -3$, $b = 1$ e per $a = 2$, $b = -2$.

Condizioni di esistenza. Il denominatore deve essere diverso da zero: $a + b \neq 0$, cioè $b \neq -a$.

Primo caso. $a + b = -3 + 1 = -2 \neq 0$: il valore esiste. Sostituendo con le parentesi: $E = \frac{(-3)^2 - 2 \cdot 1}{(-3) + 1} = \frac{9 - 2}{-2} = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}$.

Secondo caso. $a + b = 2 + (-2) = 0$: la C.E. non è rispettata, quindi per questi valori l'espressione *non ha significato*. Non è «zero» né «infinito»: semplicemente non esiste.

ERRORE FREQUENTE

Il segno meno e l'esponente. Se $a = -3$, quanto vale $-a^2$? Per la convenzione sull'ordine delle operazioni, la potenza si calcola prima del cambio di segno: $-a^2 = -(a^2) = -(-3)^2 = -9$. Invece $(-a)^2 = 3^2 = 9$. Allo stesso modo, per $x = -2$ si ha $3x^2 = 3 \cdot (-2)^2 = 3 \cdot 4 = 12$: non $(3 \cdot (-2))^2 = 36$ e nemmeno -12. Ricorda la regola già vista nel capitolo 2: $-2^2 = -4$ ma $(-2)^2 = 4$.

7.2 I monomi

7.2.1 Definizione e forma normale

Un **monomio** è un'espressione letterale in cui numeri e lettere sono legati soltanto dalla moltiplicazione; le lettere possono comparire con esponenti naturali. Sono monomi $5a^2b$, $-\frac{2}{3}xy^3$, a, 7. Non sono monomi $a + b$ (c'è un'addizione), $\frac{3}{x}$ (c'è una divisione per una lettera) e $a^{-2}b$ (l'esponente di a è negativo, quindi in realtà a sta al denominatore).

Un monomio è scritto in **forma normale** quando compare un solo fattore numerico, scritto per primo, e ogni lettera compare una sola volta. Per ridurre un monomio a forma normale si

usano le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione e la regola del prodotto di potenze con la stessa base:

$$3a \cdot (-2)\, b \cdot a^2 = 3 \cdot (-2) \cdot a \cdot a^2 \cdot b = -6a^3b$$

In un monomio in forma normale il fattore numerico si chiama **coefficiente**, l'insieme delle lettere con i loro esponenti si chiama **parte letterale** (figura 7.1). In $-6a^3b$ il coefficiente è -6, la parte letterale è a^3b. Se il coefficiente è 1 non si scrive (a^2b significa $1 \cdot a^2b$); se è -1 si scrive solo il segno ($-xy$ significa $-1 \cdot xy$). Un monomio senza lettere, come 7, è semplicemente un numero; un monomio con coefficiente 0 è uguale a 0 qualunque sia la parte letterale e si chiama **monomio nullo**.

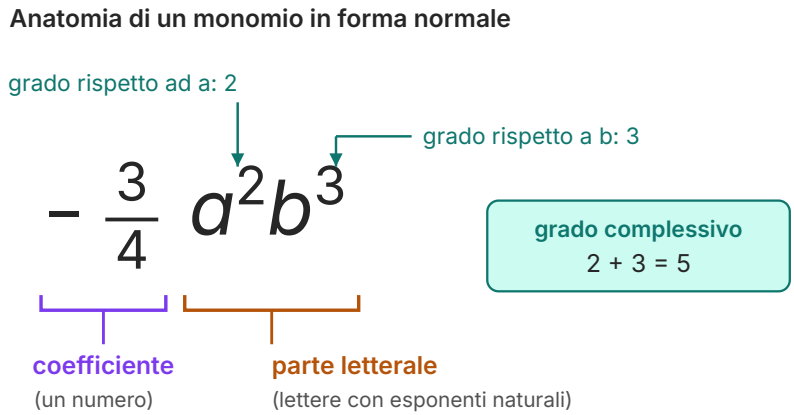


Figura 7.1 Le parti del monomio $-\frac{3}{4}a^2b^3$: il coefficiente, la parte letterale e i gradi.

7.2.2 Il grado

Il **grado di un monomio rispetto a una lettera** è l'esponente con cui quella lettera compare nella forma normale; se la lettera non compare, il grado rispetto a essa è 0. Il **grado complessivo** (o semplicemente grado) è la somma degli esponenti di tutte le lettere. Così $-\frac{3}{4}a^2b^3$ ha grado 2 rispetto ad a, 3 rispetto a b, 0 rispetto a c, e grado complessivo 5. Un numero diverso da zero, come 7, è un monomio di grado 0 (si può pensare $7 = 7a^0$). Il monomio nullo, invece, *non ha grado*: si può scrivere $0 = 0 \cdot a^5 = 0 \cdot a^{12}$ e così via, quindi non c'è un esponente «giusto» da scegliere.

Attenzione: per trovare il grado bisogna prima ridurre il monomio a forma normale. Il monomio $2x \cdot x^3 \cdot y$ ha grado 5, perché la sua forma normale è $2x^4y$.

7.2.3 Monomi simili, uguali, opposti

Due monomi sono **simili** se hanno la stessa parte letterale (dopo la riduzione a forma normale): $5a^2b$, $-a^2b$ e $\frac{1}{3}b\,a^2$ sono simili tra loro, perché in tutti e tre compaiono a con esponente 2 e b con esponente 1. Non sono simili $5a^2b$ e $5ab^2$: hanno lo stesso coefficiente e lo stesso grado, ma lettere con esponenti diversi.

Due monomi simili sono uguali se hanno anche lo stesso coefficiente, e sono **opposti** se hanno coefficienti opposti, come $4xy^2$ e $-4xy^2$. La somma di due monomi opposti è il monomio nullo. Nota che due monomi simili hanno necessariamente lo stesso grado, mentre due monomi dello stesso grado non sono necessariamente simili: x^3 e xy^2 hanno entrambi grado 3.

7.3 Operazioni con i monomi

7.3.1 Somma algebrica

La somma algebrica di monomi simili è un monomio simile a essi, che ha per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti. È una conseguenza diretta della proprietà distributiva:

$$5a^2b - 7a^2b + a^2b = (5 - 7 + 1)a^2b = -a^2b$$

Se i monomi non sono simili, invece, la somma non si può semplificare: $3x + 2y$ resta $3x + 2y$. Non è un monomio, perché contiene un'addizione: è un *polinomio*, come vedremo tra poco. Un errore da evitare: $3x + 2x = 5x$, non $5x^2$. Sommare monomi simili non cambia gli esponenti; li cambia solo la moltiplicazione.

7.3.2 Prodotto, quoziente e potenza

Il **prodotto** di due o più monomi è il monomio che ha per coefficiente il prodotto dei coefficienti e per parte letterale il prodotto delle parti letterali, cioè ogni lettera con esponente uguale alla somma degli esponenti con cui compare nei fattori:

$$(-2a^2b)\cdot(3ab^4) = -6a^3b^5 \qquad \left(\frac{2}{3}xy\right)\cdot\left(-\frac{9}{4}x^2\right) = -\frac{3}{2}x^3y$$

Il grado del prodotto è la somma dei gradi dei fattori: nel primo esempio $3 + 5 = 8$.

Il **quoziente** tra due monomi, con il divisore diverso dal monomio nullo, si ottiene dividendo i coefficienti e sottraendo gli esponenti delle lettere uguali, come nella proprietà $a^m : a^n = a^{m-n}$. Per poter dividere supponiamo che le lettere del divisore siano diverse da zero.

$$12a^5b^3 : (-4a^2b) = -3a^3b^2 \qquad 10x^3y : (5x^3) = 2y$$

Nel secondo esempio la lettera x «sparisce», perché $x^3 : x^3 = x^0 = 1$. Il quoziente di due monomi è ancora un monomio soltanto se *ogni lettera del divisore compare nel dividendo con esponente maggiore o uguale*. Se questo non succede, come in $6a^2b : (3a^3)$, il risultato $\frac{2b}{a}$ non è un monomio ma una frazione algebrica: si dice allora che il dividendo *non è divisibile* per il divisore.

La **potenza** di un monomio si ottiene elevando a potenza il coefficiente e moltiplicando ogni esponente delle lettere per l'esponente della potenza:

$$(-2a^2b)^3 = (-2)^3\, a^6b^3 = -8a^6b^3 \qquad \left(-\frac{1}{3}x\,y^2\right)^2 = \frac{1}{9}x^2y^4$$

Il grado della potenza n-esima è n volte il grado del monomio. Ricorda la regola dei segni: una potenza con base negativa è positiva se l'esponente è pari, negativa se è dispari.

Tabella 7.2 Operazioni con i monomi (A, B monomi; n naturale).

Operazione	Coefficiente	Parte letterale	Grado del risultato
Somma algebrica (solo simili)	somma algebrica dei coefficienti	la stessa	lo stesso (se il risultato non è nullo)
Prodotto $A \cdot B$	prodotto dei coefficienti	esponenti sommati	somma dei gradi
Quoziente $A : B$ ($B \neq 0$)	quoziente dei coefficienti	esponenti sottratti	differenza dei gradi
Potenza A^n	potenza del coefficiente	esponenti moltiplicati per n	n volte il grado

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Semplifica $E = (-2x^2y)^3 : (4x^5y^2) - \frac{1}{2}x \cdot (-6y) + (3x)^2y : x$ e calcolane il valore per $x = \frac{1}{2}$, $y = -2$.

Potenze. $(-2x^2y)^3 = -8x^6y^3$ e $(3x)^2 = 9x^2$.

Prodotti e quozienti, da sinistra a destra. $-8x^6y^3 : (4x^5y^2) = -2xy$; $-\frac{1}{2}x \cdot (-6y) = +3xy$; $9x^2y : x = 9xy$.

Somma dei monomi simili. $E = -2xy + 3xy + 9xy = 10xy$.

Valore numerico. $E = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2) = -10$. Conviene sempre semplificare *prima* di sostituire: sostituendo direttamente nell'espressione di partenza avremmo dovuto calcolare potenze come $(\frac{1}{2})^6$, con molte più occasioni di errore.

7.3.3 MCD e mcm di monomi

Come per i numeri naturali (capitolo 1), anche per i monomi si definiscono un massimo comune divisore e un minimo comune multiplo; ci serviranno nel capitolo 9 per sommare le frazioni algebriche.

- Il **MCD di monomi** ha per parte letterale il prodotto delle sole lettere *comuni* a tutti i monomi, ciascuna con l'esponente *minimo*.
- Il **mcm di monomi** ha per parte letterale il prodotto di *tutte* le lettere che compaiono, comuni e non comuni, ciascuna con l'esponente *massimo*.
- Per il coefficiente si usa questa convenzione: se tutti i coefficienti sono interi si prende il MCD (o il mcm) dei loro valori assoluti; se qualche coefficiente è frazionario si prende 1. Il segno si sceglie positivo.

Per esempio, per $12a^3b^2$ e $18a^2b^4c$: le lettere comuni sono a e b; MCD(12, 18) = 6 e mcm(12, 18) = 36. Quindi MCD = $6a^2b^2$ e mcm = $36a^3b^4c$. Puoi controllare che il MCD divide entrambi i monomi e che il mcm è divisibile per entrambi. Per $\frac{1}{2}ab^2$ e $3a^2b$, invece, c'è un coefficiente frazionario: MCD = ab e mcm = a^2b^2.

7.4 I polinomi

7.4.1 Definizione e forma normale

Un **polinomio** è una somma algebrica di monomi, che si chiamano termini del polinomio. Un polinomio con due termini si dice *binomio* ($a + b$), con tre *trinomio* ($x^2 - 5x + 6$), con quattro *quadrinomio*; un monomio si può considerare un polinomio con un solo termine.

Un polinomio è in **forma normale** (o ridotto) quando tutti i suoi termini sono in forma normale e non contiene monomi simili. Per ridurre un polinomio si sommano tra loro i termini simili:

$$3x^2 - 5x + 2x^3 - x^2 + 4 - 2x^3 + x = 2x^2 - 4x + 4$$

Se dopo la riduzione tutti i termini si annullano, il risultato è il **polinomio nullo**, cioè 0.

7.4.2 Grado e classificazione

Il **grado di un polinomio** (ridotto a forma normale) è il grado più alto tra quelli dei suoi termini. Il grado rispetto a una lettera è il più alto esponente con cui quella lettera compare. Il polinomio

$$P = 3x^3y - 2x^2y^2 + 5xy - 7$$

ha termini di grado 4, 4, 2 e 0: ha quindi grado 4; rispetto a x ha grado 3, rispetto a y grado 2. Il termine senza lettere, qui -7, si chiama **termine noto**. Un polinomio si dice:

- **omogeneo** se tutti i suoi termini hanno lo stesso grado: $a^2 + 2ab + b^2$ è omogeneo di grado 2, mentre P non lo è;
- **ordinato** rispetto a una lettera se i suoi termini sono scritti secondo le potenze decrescenti (o crescenti) di quella lettera: P è ordinato secondo le potenze decrescenti di x (esponenti 3, 2, 1, 0), ma non rispetto a y, i cui esponenti sono nell'ordine 1, 2, 1, 0;
- **completo** rispetto a una lettera se contiene tutte le potenze di quella lettera, dal grado massimo fino a 0 (il termine in cui la lettera non compare): $x^3 - 2x^2 + x - 5$ è completo, $x^3 - 2x + 5$ non lo è, perché manca il termine in x^2.

DA RICORDARE

Un polinomio si classifica *dopo* averlo ridotto a forma normale. Un numero diverso da zero è un polinomio di grado 0; il polinomio nullo non ha grado. Un polinomio non completo si può «completare» aggiungendo i termini mancanti con coefficiente 0: $x^3 - 2x + 5 = x^3 + 0x^2 - 2x + 5$. Questa scrittura ci sarà utile per la divisione tra polinomi (capitolo 8).

7.4.3 Somma algebrica di polinomi

Per sommare algebricamente dei polinomi si eliminano le parentesi, con le regole già viste per i numeri interi (capitolo 2): una parentesi preceduta dal segno + si toglie lasciando invariati i segni dei termini, una parentesi preceduta dal segno − si toglie *cambiando* il segno di tutti i termini. Poi si riducono i termini simili:

$$(3a^2 - 2ab + b^2) - (a^2 + ab - 4b^2) + (-2a^2 + 3ab) = 3a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - ab + 4b^2 - 2a^2 + 3ab = 5b^2$$

Il risultato è un monomio: i termini in a^2 e in ab si sono annullati. In generale il grado della somma è al massimo il grado più alto degli addendi, ma può anche essere minore, come in questo caso.

7.4.4 Prodotti

Per moltiplicare un **monomio per un polinomio** si applica la proprietà distributiva: si moltiplica il monomio per ciascun termine del polinomio e si sommano i prodotti ottenuti.

$$-2a(3a^2 - ab + 4b^2) = -6a^3 + 2a^2b - 8ab^2$$

Per moltiplicare **due polinomi** si applica la proprietà distributiva due volte: si moltiplica *ogni* termine del primo per *ogni* termine del secondo, poi si riducono i termini simili. Se il primo polinomio ha 2 termini e il secondo 3, prima della riduzione si ottengono $2 \cdot 3 = 6$ termini.

$$(2x-3)(x^2+x-1) = 2x^3+2x^2-2x-3x^2-3x+3 = 2x^3-x^2-5x+3$$

Il grado del prodotto di due polinomi non nulli è la somma dei loro gradi: qui $1+2=3$. Il motivo è che il termine di grado massimo del prodotto nasce soltanto dal prodotto dei due termini di grado massimo, e non può essere cancellato da nessun altro termine.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola $(2a-3b)(a^2+ab-2b^2)$ e controlla il risultato con un valore numerico.

Distributiva. Moltiplichiamo $2a$ per i tre termini del secondo fattore, poi $-3b$ per i tre termini:

$$2a^3+2a^2b-4ab^2-3a^2b-3ab^2+6b^3$$

Riduzione. $2a^2b-3a^2b=-a^2b$ e $-4ab^2-3ab^2=-7ab^2$, quindi il prodotto è $2a^3-a^2b-7ab^2+6b^3$: un polinomio omogeneo di grado 3, come ci aspettavamo (prodotto di due polinomi omogenei di gradi 1 e 2).

Controllo. Per $a=2$, $b=1$: i fattori valgono $2\cdot 2-3=1$ e $4+2-2=4$, il prodotto vale 4. Il risultato vale $16-4-14+6=4$. I valori coincidono. Il controllo non *dimostra* che il calcolo è giusto, ma scopre quasi tutti gli errori.

7.5 I prodotti notevoli

Alcuni prodotti tra polinomi compaiono così spesso che conviene conoscerne il risultato a memoria. Si chiamano **prodotti notevoli**. Nelle formule che seguono A, B, C indicano monomi qualsiasi (o anche polinomi): $A=3x$, $B=-2y^2$ e così via.

7.5.1 Somma per differenza

Moltiplichiamo la somma di due termini per la loro differenza: $(A+B)(A-B) = A^2-AB+AB-B^2 = A^2-B^2$. I due termini «misti» sono opposti e si annullano.

$$(A+B)(A-B) = A^2-B^2$$

Per esempio $(2x^2-5y)(2x^2+5y) = 4x^4-25y^2$. La figura 7.2 mostra il significato geometrico della formula quando a e b sono lunghezze con $a>b$: da un quadrato di lato a si toglie un quadrato di lato b; la parte che rimane si può tagliare in due rettangoli e ricomporre in un unico rettangolo di lati $a+b$ e $a-b$.

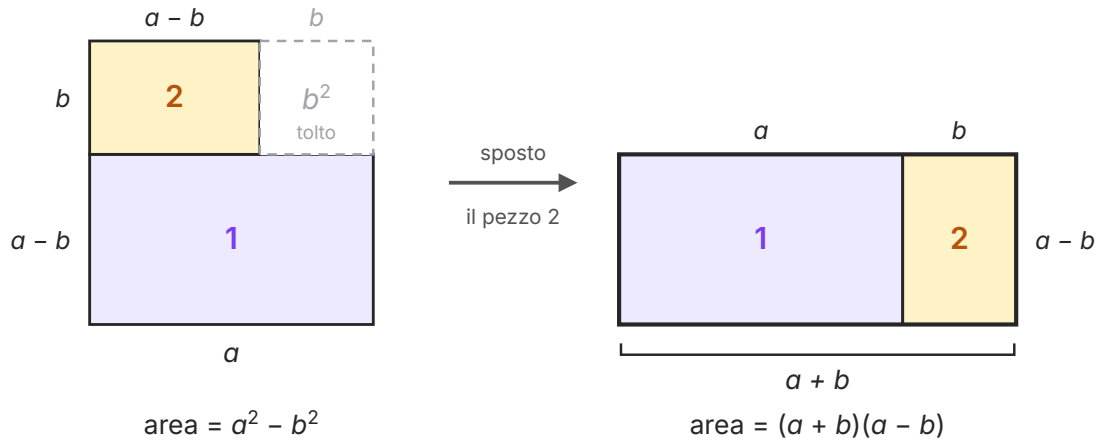


Figura 7.2 Somma per differenza. A sinistra: il quadrato di lato a senza l'angolo b^2 è formato dai pezzi 1 e 2. A destra: spostando il pezzo 2 si ottiene un rettangolo di lati $a + b$ e $a - b$. Le due aree sono uguali.

7.5.2 Quadrato di un binomio

Calcoliamo $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Allo stesso modo $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

In parole: il quadrato di un binomio è uguale al quadrato del primo termine, più il *doppio prodotto* del primo per il secondo, più il quadrato del secondo. La figura 7.3 lo rende evidente: un quadrato di lato $a + b$ si divide in un quadrato a^2, un quadrato b^2 e due rettangoli uguali di area ab.

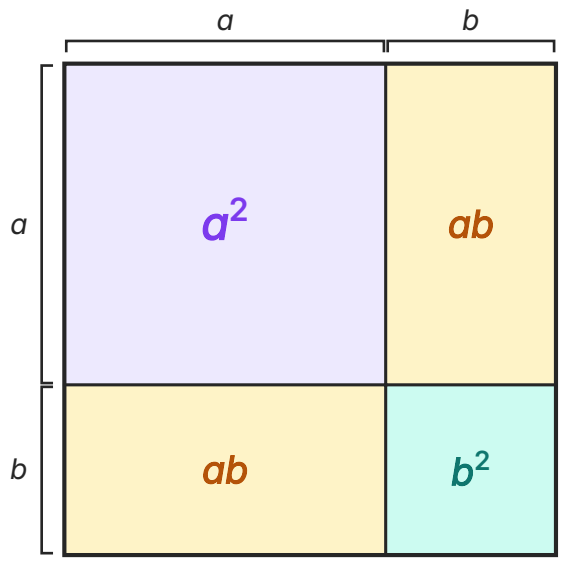


Figura 7.3 Il quadrato di lato $a + b$ è formato da un quadrato di area a^2, uno di area b^2 e due rettangoli di area ab: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Quando i termini hanno coefficienti o segni, conviene individuare con cura A e B. In $(\frac{1}{2}a - 4b)^2$ si ha $A = \frac{1}{2}a$ e $B = 4b$, quindi il risultato è $\frac{1}{4}a^2 - 4ab + 16b^2$ (il doppio prodotto è $2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot 4b = 4ab$, con il segno meno). Osserva che $(-A - B)^2 = (A + B)^2$ e $(B - A)^2 = (A - B)^2$: un quadrato non cambia se si cambia il segno della base.

ERRORE FREQUENTE

$(a + b)^2$ non è $a^2 + b^2$. È l'errore più diffuso del calcolo letterale: dimenticare il doppio prodotto. Basta un esempio per convincersi: per $a = 3$ e $b = 4$ si ha $(3 + 4)^2 = 49$, mentre $3^2 + 4^2 = 25$. La differenza, 24, è proprio $2ab$. La figura 7.3 mostra dove sono finiti i due rettangoli dimenticati. Per lo stesso motivo la radice quadrata di $a^2 + b^2$ non è $a + b$: la radice di 25 è 5, non 7. E vale anche per il cubo: $(a + b)^3 \neq a^3 + b^3$.

7.5.3 Quadrato di un trinomio

Con lo stesso ragionamento si trova il quadrato di un trinomio (figura 7.4):

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

Il quadrato di un trinomio è la somma dei quadrati dei tre termini e dei loro tre doppi prodotti, presi a due a due. Il segno di ogni doppio prodotto dipende dai segni dei due termini: per esempio

$$(a - 2b + 1)^2 = a^2 + 4b^2 + 1 - 4ab + 2a - 4b$$

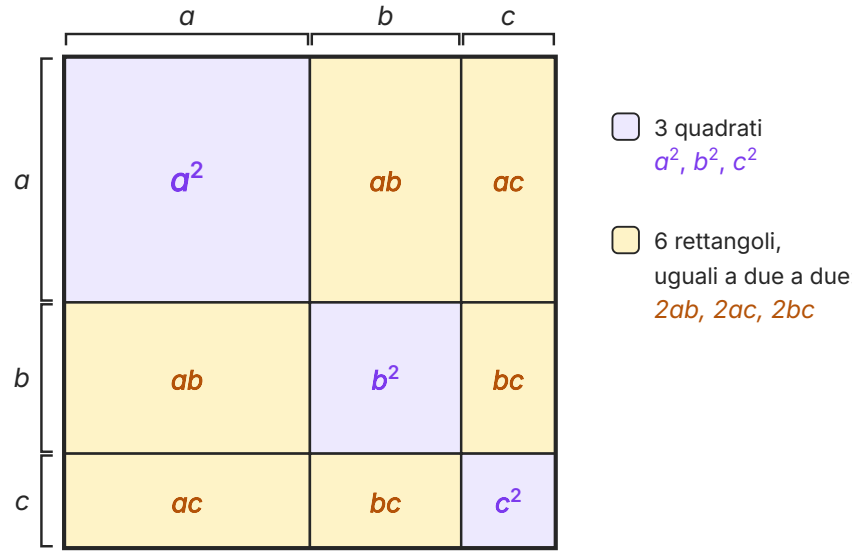


Figura 7.4 Il quadrato di lato $a + b + c$ è diviso in nove parti: tre quadrati sulla diagonale e sei rettangoli, uguali a due a due.

7.5.4 Cubo di un binomio

Per calcolare $(A + B)^3$ moltiplichiamo il quadrato per $A + B$: $(A^2 + 2AB + B^2)(A + B) = A^3 + A^2B + 2A^2B + 2AB^2 + AB^2 + B^3$. Riducendo:

$$(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$$

Nel cubo della differenza i segni si alternano: +, −, +, −. Per esempio $(2a - b)^3 = 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$; infatti $3 \cdot (2a)^2 \cdot b = 12a^2b$ e $3 \cdot 2a \cdot b^2 = 6ab^2$. Anche il cubo ha un'interpretazione geometrica: un cubo di spigolo $a + b$ si scompone in un cubo a^3, un cubo b^3, tre parallelepipedi $a \cdot a \cdot b$ e tre parallelepipedi $a \cdot b \cdot b$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Semplifica $(2x-1)^2-(x+3)(x-3)-3x(x-2)$.

Riconosci i prodotti notevoli. $(2x-1)^2$ è un quadrato di binomio: $4x^2-4x+1$. $(x+3)(x-3)$ è una somma per differenza: x^2-9. L'ultimo è un prodotto monomio per polinomio: $3x^2-6x$.

Togli le parentesi. I due ultimi prodotti sono preceduti dal segno meno, quindi conviene scriverli prima tra parentesi e poi cambiare tutti i segni:

$$4x^2-4x+1-(x^2-9)-(3x^2-6x)=4x^2-4x+1-x^2+9-3x^2+6x$$

Riduci. $(4-1-3)x^2+(-4+6)x+(1+9)=2x+10$. I termini di secondo grado si sono annullati.

APPROFONDIMENTO · POTENZA DI UN BINOMIO E TRIANGOLO DI TARTAGLIA

I prodotti notevoli del paragrafo si possono vedere come i primi casi di una regola generale. Scriviamo uno sotto l'altro gli sviluppi delle prime potenze di $a + b$:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Si notano alcune regolarità. Lo sviluppo di $(a + b)^n$ ha $n + 1$ termini ed è un polinomio omogeneo di grado n; gli esponenti di a scendono da n a 0, quelli di b salgono da 0 a n. Restano da trovare i coefficienti, e qui viene in aiuto il **triangolo di Tartaglia** (figura 7.5): ogni riga comincia e finisce con 1, e ogni numero interno è la somma dei due numeri che gli stanno sopra. Se si numerano le righe a partire da 0 (la riga 0 è quella con un solo 1, cioè $(a + b)^0 = 1$), la riga n contiene i coefficienti dello sviluppo di $(a + b)^n$.

Per esempio, dalla riga 4 (1, 4, 6, 4, 1):

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Per la potenza di una differenza i coefficienti sono gli stessi, ma i segni si alternano, cominciando con +. Per esempio, con $A = x$ e $B = 2$:

$$(x-2)^4 = x^4 - 4 \cdot 2x^3 + 6 \cdot 4x^2 - 4 \cdot 8x + 16 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$$

Una curiosità che è anche un controllo: la somma dei numeri della riga n è 2^n. Infatti, ponendo $a = b = 1$ nello sviluppo di $(a + b)^n$ si ottiene proprio la somma dei coefficienti, e d'altra parte $(1 + 1)^n = 2^n$. Nella riga 6: $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$.

Un triangolo con molti nomi. In Italia il triangolo dei coefficienti binomiali porta il nome di Niccolò Fontana, detto Tartaglia (Brescia, circa 1499 – Venezia, 1557), matematico autodidatta che lo pubblicò nel suo *General trattato di numeri et misure*. In Francia e nei paesi di lingua inglese si chiama invece triangolo di Pascal, dal *Traité du triangle arithmétique* scritto da Blaise Pascal nel 1654. Ma il triangolo era noto molto prima: matematici cinesi, persiani e arabi lo conoscevano già nel Medioevo. I nomi dei risultati matematici raccontano spesso la storia della loro diffusione in Europa più che quella della loro scoperta.

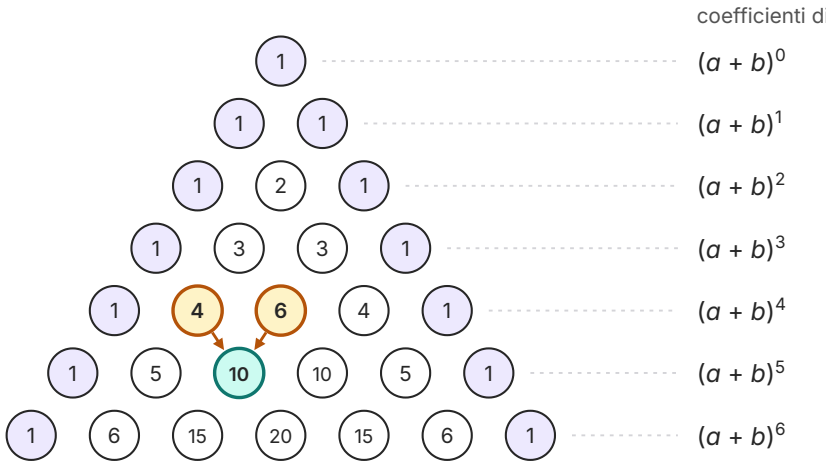


Figura 7.5 Il triangolo di Tartaglia fino alla riga 6. Ogni numero interno è la somma dei due soprastanti (in evidenza: 4 + 6 = 10). La riga n dà i coefficienti di $(a + b)^n$.

Tabella 7.3 I prodotti notevoli in sintesi.

Nome	Formula	Esempio
Somma per differenza	$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$	$(3x + 1)(3x - 1) = 9x^2 - 1$
Quadrato di binomio	$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$	$(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$
Quadrato di trinomio	$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$	$(x + y + 1)^2 = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y$
Cubo di binomio	$(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$	$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

COLLEGAMENTI

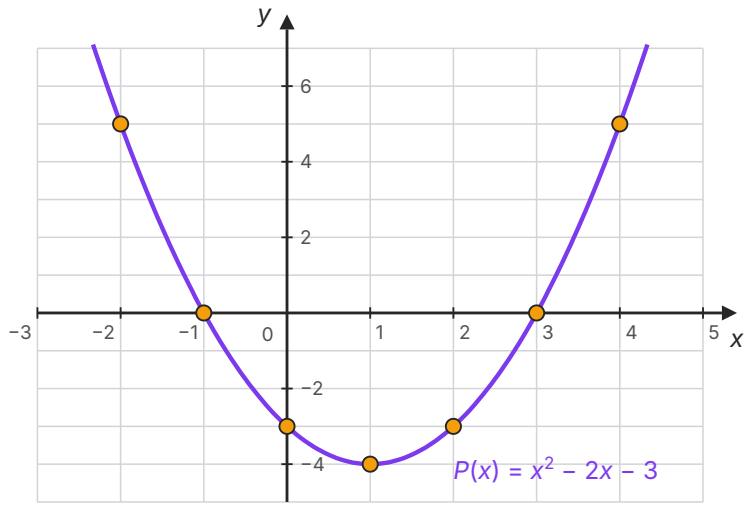
Calcolo mentale con i prodotti notevoli. I prodotti notevoli valgono anche tra numeri, e permettono calcoli a mente sorprendenti. $51 \cdot 49 = (50 + 1)(50 - 1) = 2500 - 1 = 2499$. $98^2 = (100 - 2)^2 = 10 000 - 400 + 4 = 9604$. $1003 \cdot 997 = 1 000 000 - 9 = 999 991$. E il quadrato di un numero che finisce per 5? $35^2 = (30 + 5)^2 = 900 + 300 + 25 = 1225$: in generale $(10d + 5)^2 = 100d(d + 1) + 25$, cioè si moltiplica la cifra delle decine per la successiva e si scrive 25 dopo ($3 \cdot 4 = 12$, quindi 1225).

7.6 Polinomi come funzioni e come strumenti di dimostrazione

7.6.1 Funzioni polinomiali

Un polinomio in una sola lettera, come $x^2 - 2x - 3$, si indica spesso con un nome e la lettera tra parentesi: $P(x) = x^2 - 2x - 3$. La scrittura $P(4)$ indica il valore numerico del polinomio per $x = 4$: $P(4) = 16 - 8 - 3 = 5$. In questo modo il polinomio diventa una **funzione polinomiale**: a ogni numero x associa il numero $P(x)$, esattamente come le funzioni studiate nel capitolo 6.

Come per ogni funzione numerica, possiamo costruire una tabella di valori e disegnare il grafico (figura 7.6). La curva che si ottiene per $P(x) = x^2 - 2x - 3$ è della stessa famiglia del grafico di $y = ax^2$ visto nel capitolo 6, ma spostata. Dal grafico si leggono cose interessanti: per esempio la curva incontra l'asse x nei punti in cui $P(x) = 0$, cioè per $x = -1$ e $x = 3$. Questi valori si chiamano *zeri* del polinomio, e nel capitolo 8 scoprirai che sono legati alla possibilità di scomporlo in fattori: infatti $(x + 1)(x - 3) = x^2 - 3x + x - 3 = x^2 - 2x - 3$.



x	$P(x)$
−2	5
−1	0
0	−3
1	−4
2	−3
3	0
4	5

Figura 7.6 Grafico della funzione polinomiale $P(x) = x^2 - 2x - 3$, costruito dalla tabella di valori a destra. La curva taglia l'asse x in -1 e 3, dove $P(x) = 0$.

COLLEGAMENTI

Come un computer calcola un polinomio. Per calcolare $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$ in $x = 4$ i programmi di calcolo usano un metodo che porta il nome dell'inglese W. G. Horner e riscrive il polinomio «a scatole cinesi» raccogliendo ripetutamente x: $P(x) = ((2x - 3)x + 1)x - 5$. Si parte dal primo coefficiente, si moltiplica per x, si aggiunge il coefficiente successivo, e così via: $2 \cdot 4 - 3 = 5$; $5 \cdot 4 + 1 = 21$; $21 \cdot 4 - 5 = 79$. Quindi $P(4) = 79$, con solo tre moltiplicazioni (controlla: $128 - 48 + 4 - 5 = 79$). È lo stesso schema che ritroverai nella regola di Ruffini.

7.6.2 Dimostrare con le lettere

Prova a sommare due numeri dispari: $3 + 5 = 8$, $7 + 11 = 18$, $13 + 21 = 34$. Il risultato è sempre pari. Ma nessun numero di esempi basta per esserne sicuri: i dispari sono infiniti, e potrebbe sempre esserci una coppia mai provata per cui la regola non vale. Per una certezza serve una **dimostrazione**, un ragionamento che valga per *tutti* i casi. Il calcolo letterale ce la dà.

IN SINTESI

Teorema. La somma di due numeri dispari è pari.

Ipotesi: p e q sono numeri dispari. **Tesi:** $p + q$ è pari.

Dimostrazione. Poiché p e q sono dispari, esistono due numeri naturali m e n tali che $p = 2m + 1$ e $q = 2n + 1$. Usiamo due lettere diverse perché i due dispari possono essere diversi. Allora $p + q = 2m + 1 + 2n + 1 = 2m + 2n + 2 = 2(m + n + 1)$. Il numero $m + n + 1$ è naturale, quindi $p + q$ è il doppio di un numero naturale, cioè è pari. c.v.d.

Lo stesso metodo funziona per moltissime proprietà.

Il quadrato di un numero dispari, diminuito di 1, è multiplo di 8. Sia $2k + 1$ il numero dispari. Allora $(2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k + 1)$. Ora, k e $k + 1$ sono due naturali consecutivi, quindi uno dei due è pari, e il loro prodotto $k(k + 1)$ è pari: $k(k + 1) = 2h$ per qualche naturale h. Dunque $(2k + 1)^2 - 1 = 4 \cdot 2h = 8h$. Per esempio $7^2 - 1 = 48 = 8 \cdot 6$ e $9^2 - 1 = 80 = 8 \cdot 10$. In altre parole, il quadrato di un dispari è sempre della forma $8h + 1$. c.v.d.

Il prodotto di tre numeri naturali consecutivi è multiplo di 6. Siano n, $n + 1$, $n + 2$ i tre numeri. Tra due naturali consecutivi uno è pari, quindi il prodotto è multiplo di 2. Tra tre naturali consecutivi uno è multiplo di 3 (i resti della divisione per 3 sono, in qualche ordine, 0, 1 e 2), quindi il prodotto è multiplo di 3. Essendo multiplo di 2 e di 3, che sono primi tra loro, è multiplo di $2 \cdot 3 = 6$. Per esempio $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 = 6 \cdot 20$. c.v.d.

Infine, una proprietà che spiega un fatto curioso sui quadrati: la differenza tra i quadrati di due naturali consecutivi è $(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$, cioè un numero dispari, anzi la somma dei due numeri. Per questo i quadrati 0, 1, 4, 9, 16, 25, … distano tra loro 1, 3, 5, 7, 9, …: la successione dei dispari.

SINTESI

- Le lettere rappresentano numeri qualsiasi e permettono di scrivere regole generali. Il valore numerico di un'espressione si ottiene sostituendo i numeri alle lettere, mettendo tra parentesi i negativi e le frazioni.
- Le condizioni di esistenza (C.E.) di un'espressione richiedono che ogni denominatore sia diverso da zero.
- Un monomio è un prodotto di numeri e lettere con esponenti naturali; in forma normale ha un coefficiente e una parte letterale.
- Il grado di un monomio è la somma degli esponenti delle lettere; un numero non nullo ha grado 0, il monomio nullo non ha grado.
- Monomi simili hanno la stessa parte letterale; solo i monomi simili si sommano in un unico monomio.
- Nel prodotto di monomi gli esponenti si sommano, nel quoziente si sottraggono, nella potenza si moltiplicano. Il quoziente è un monomio solo se ogni lettera del divisore compare nel dividendo con esponente non minore.
- MCD di monomi: lettere comuni con l'esponente minimo; mcm: tutte le lettere con l'esponente massimo.
- Un polinomio è una somma algebrica di monomi; il suo grado è il massimo grado dei termini dopo la riduzione. Può essere omogeneo, ordinato, completo.
- Due polinomi si moltiplicano moltiplicando ogni termine del primo per ogni termine del secondo; il grado del prodotto è la somma dei gradi.
- Prodotti notevoli: $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$; $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$; $(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$; quadrato di trinomio. Per le potenze di binomio di grado più alto si usa il triangolo di Tartaglia (approfondimento).
- Con il calcolo letterale si dimostrano proprietà valide per infiniti numeri: un pari si scrive $2n$, un dispari $2n+1$.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Quale delle seguenti espressioni è un monomio?

   A. $-\frac{2}{5}a^3b$

   B. $3a + b$

   C. $\frac{2}{x}$

   D. $a^{-2}b$

2. ● Il grado complessivo del monomio $-4x^2y^3z$ è:
   A. 3
   B. 5
   C. 6
   D. -4

3. ● Quale monomio è simile a $5a^2b$?
   A. $5ab^2$
   B. $-\frac{1}{3}b\,a^2$
   C. $5a^2b^2$
   D. $5a^3$

4. ● $(-2a^2b)^3$ è uguale a:
   A. $-6a^6b^3$
   B. $-8a^5b^3$
   C. $8a^6b^3$
   D. $-8a^6b^3$

5. ● $(x-3)^2$ è uguale a:
   A. x^2-9
   B. x^2+9
   C. x^2-6x+9
   D. x^2-3x+9

6. ●● Il grado del polinomio $3x^4y-2x^2y^3+y^5-7$ è:
   A. 4
   B. 5
   C. 6
   D. 3

7. ●● *(approfondimento)* Nello sviluppo di $(x+y)^4$ il coefficiente di x^2y^2 è:
   A. 4
   B. 12
   C. 1
   D. 6

8. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Due monomi simili hanno lo stesso grado. b) Due monomi con lo stesso grado sono simili. c) Il polinomio nullo ha grado 0. d) $(a+b)^2=a^2+b^2$. e) Il polinomio x^3-2x+5 è completo rispetto a x. f) $a^2+2ab+b^2$ è omogeneo di grado 2.

9. ● Completa. a) Il quoziente $A : B$ di due monomi è un monomio se ogni lettera di B _____. b) $(A + B)(A - B) =$ _____. c) *(approfondimento)* La riga 4 del triangolo di Tartaglia è _____. d) Il valore numerico di $2a^2 - b$ per $a = -3$, $b = 4$ è _____.

Calcolare

10. ● Riduci a forma normale e indica coefficiente, parte letterale e grado complessivo: a) $3a \cdot (-2)ab^2$; b) $-\frac{1}{2}x^2y \cdot 4xy^3 \cdot y$; c) $(-a)^3 \cdot (2b)^2 \cdot a$.

11. ● Calcola: a) $5a^2b - 7a^2b + a^2b$; b) $\frac{2}{3}x\,y^2 - \frac{1}{2}x\,y^2 + x\,y^2$; c) $3x - (2x - 5x) + (-x)$.

12. ●● Calcola: a) $(-3a^2b)^2$; b) $(-\frac{1}{2}x^3y)^3$; c) $12a^5b^3 : (-4a^2b)$; d) $-\frac{2}{3}x^4y^2 : (\frac{4}{9}x^3y^2)$; e) stabilisci se $6a^2b : (3a^3)$ è un monomio.

13. ●● Semplifica: a) $(2a^2b)^3 : (4a^3b^2) - 3a \cdot (-a^2b) - (2a)^2 \cdot \frac{1}{4}ab$; b) $[(-x^2y)^2 - 3x^4y^2] : (-2x^3y)$.

14. ● Calcola MCD e mcm: a) $12a^3b^2$ e $18a^2b^4c$; b) $4x^2y$, $6xy^3$ e $10x^3$; c) $\frac{1}{2}ab^2$ e $3a^2b$.

15. ●● Riduci a forma normale, ordina secondo le potenze decrescenti di x, indica il grado e stabilisci se il polinomio è omogeneo e se è completo rispetto a x: a) $3x^2 - 5x + 2x^3 - x^2 + 4 - 2x^3 + x$; b) $x^4 - 2x^2y^2 + 3x^3y - x^4 + y^4$.

16. ●● Calcola: a) $(3a^2 - 2ab + b^2) - (a^2 + ab - 4b^2) + (-2a^2 + 3ab)$; b) $(x^3 - 2x + 1) - [(2x^2 - x) - (x^3 + x^2 - 3)]$.

17. ●● Esegui i prodotti: a) $-2a(3a^2 - ab + 4b^2)$; b) $(2x - 3)(x^2 + x - 1)$; c) $(a + 2b)(a - b)(a + b)$.

18. ●● Sviluppa con i prodotti notevoli: a) $(3x + 2)^2$; b) $(\frac{1}{2}a - 4b)^2$; c) $(2x^2 - 5y)(2x^2 + 5y)$; d) $(a - 2b + 1)^2$; e) $(x + 3)^3$; f) $(2a - b)^3$.

19. ●● *(approfondimento)* Usa il triangolo di Tartaglia per sviluppare: a) $(2a + b)^4$; b) $(x - 1)^4$; c) $(x + y)^4 - (x - y)^4$.

20. ●● Semplifica: a) $(x + 2)^2 - (x - 1)(x + 1) - (x + 3)(x - 1)$; b) $(2a - b)^2 - (2a + b)(2a - b) + 4ab$.

21. ● Dato $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 5$, calcola $P(0)$, $P(1)$, $P(-2)$ e $P(\frac{1}{2})$.

Dimostrare e argomentare

22. ● Dimostra che la somma di tre numeri naturali consecutivi è un multiplo di 3.

23. ●● Dimostra che la differenza tra i quadrati di due numeri dispari consecutivi è un multiplo di 8.

24. ● Trova l'errore. Uno studente scrive: «$(2x + 3)^2 = 4x^2 + 9$». Mostra con un valore numerico che il risultato è sbagliato, spiega quale termine manca e scrivi lo sviluppo corretto.

25. ●● Spiega perché il grado del prodotto di due polinomi non nulli è la somma dei gradi, mentre il grado della somma di due polinomi può essere minore del grado più alto degli addendi. Fai un esempio per il secondo caso.

26. ●●● Verifica l'identità $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ sviluppando i due membri. Usala per scrivere $65 = 5 \cdot 13$ come somma di due quadrati, sapendo che $5 = 1^2 + 2^2$ e $13 = 2^2 + 3^2$.

Problemi

27. ● Una stanza rettangolare ha i lati lunghi $x + 3$ e $x - 1$ metri (con $x > 1$). Scrivi i polinomi che esprimono l'area e il perimetro della stanza e calcolali per $x = 5$.

28. ●● Un quadrato ha il lato di x cm. Si allunga un lato di 2 cm e si accorcia l'altro di 2 cm (con $x > 2$), ottenendo un rettangolo. L'area aumenta o diminuisce? Di quanto? La risposta dipende da x?

29. ●● Lo spigolo di un cubo di x cm viene aumentato di 1 cm. Esprimi l'aumento di volume con un polinomio e calcolalo per $x = 10$.

30. ●● Un capitale C viene investito per due anni al tasso annuo r con interesse composto: dopo due anni diventa $C(1 + r)^2$. Sviluppa l'espressione e spiega il significato di ciascun termine. Calcola il montante per $C = 1000$ euro e $r = 0{,}03$, e il valore del termine Cr^2.

31. ●●● Da un foglio quadrato di cartone di lato 20 cm si ritagliano ai quattro angoli quattro quadrati di lato x cm e si piegano i bordi per formare una scatola senza coperchio. Esprimi il volume $V(x)$ della scatola come polinomio ridotto, indica il suo grado e calcola $V(2)$, $V(3)$ e $V(5)$. Quali valori di x hanno senso nel problema?

Verso la verifica

32. ●● Dimostra che $(x - 2y)^2 - (x + 2y)^2 + 8xy$ è uguale a 0 per qualsiasi valore di x e y.

33. ●● Semplifica $(a - 1)^3 - a(a - 3)(a + 1)$ e calcolane il valore per $a = -1$.

34. ●● a) Trova il monomio M tale che $(2x^2y) \cdot M = -6x^5y^3$. b) Trova i monomi N tali che $N^2 = 9a^4b^6$.

35. ●●● Sfida. a) Calcola a mente 1001^2 usando il quadrato di un binomio. b) Dimostra che il prodotto di quattro numeri naturali consecutivi, aumentato di 1, è sempre un quadrato: precisamente $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$. Verifica la formula per $n = 2$.

PER APPROFONDIRE

- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: la nascita del simbolismo algebrico, da Diofanto a Viète, e la matematica italiana del Cinquecento.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: come si imposta un problema con le lettere e come si controlla un risultato.
- [CR] Courant e Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le dimostrazioni sui numeri interi e i coefficienti binomiali.

Glossario del capitolo

Coefficiente
Fattore numerico di un monomio in forma normale.

Condizioni di esistenza (C.E.)
Condizioni che le lettere devono rispettare perché un'espressione abbia significato; per un'espressione fratta, ogni denominatore deve essere diverso da zero.

Espressione letterale
Scrittura che contiene numeri e lettere legati dai simboli delle operazioni, per esempio $3a + 2b$.

Forma normale di un monomio
Scrittura con un solo coefficiente numerico, scritto per primo, e ogni lettera presente una sola volta.

Funzione polinomiale
Funzione che a ogni numero x associa il valore numerico $P(x)$ di un polinomio.

Grado di un monomio
Somma degli esponenti delle sue lettere; un numero non nullo ha grado 0, il monomio nullo non ha grado.

Grado di un polinomio
Il più alto grado dei suoi termini dopo la riduzione a forma normale; il polinomio nullo non ha grado.

Monomi opposti
Monomi simili con coefficienti opposti; la loro somma è il monomio nullo.

Monomi simili
Monomi con la stessa parte letterale; solo i monomi simili si sommano in un unico monomio.

Monomio
Espressione letterale in cui numeri e lettere sono legati solo da moltiplicazioni, con esponenti naturali.

Parte letterale
Insieme delle lettere di un monomio in forma normale, con i rispettivi esponenti.

Polinomio
Somma algebrica di monomi, detti termini del polinomio.

Polinomio completo
Polinomio che, rispetto a una lettera, contiene tutte le potenze di quella lettera dal grado massimo fino al grado 0.

Polinomio omogeneo
Polinomio i cui termini hanno tutti lo stesso grado.

Prodotti notevoli
Prodotti tra polinomi di uso frequente il cui risultato si scrive direttamente, come $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

Termine noto
Termine di un polinomio che non contiene lettere.

Triangolo di Tartaglia
Tabella triangolare di numeri in cui ogni numero interno è la somma dei due soprastanti; la riga n dà i coefficienti di $(a + b)^n$.

Valore numerico
Numero che si ottiene sostituendo alle lettere di un'espressione dei numeri ed eseguendo i calcoli.

Variabile
Lettera che in una formula o in un'espressione rappresenta un numero qualsiasi di un insieme dato.

Soluzioni

1. A. $-\frac{2}{5}a^3b$ contiene solo prodotti con esponenti naturali; B ha un'addizione, C una divisione per una lettera, D un esponente negativo.

2. C. 2 + 3 + 1 = 6 (z ha esponente 1).

3. B. $-\frac{1}{3}b\,a^2 = -\frac{1}{3}a^2b$ ha la stessa parte letterale a^2b.

4. D. $(-2)^3 = -8$; esponenti: $a^{2\cdot 3} = a^6$, b^3.

5. C. Quadrato di binomio:
$x^2 - 2 \cdot 3x + 9 = x^2 - 6x + 9$.

6. B. I termini hanno grado 5, 5, 5 e 0: il grado è 5 (il polinomio non è omogeneo per il termine noto).

7. D. Riga 4 del triangolo: 1, 4, 6, 4, 1; il termine centrale è $6x^2y^2$.

8. a) V. b) F: x^3 e xy^2 hanno grado 3 ma non sono simili; due monomi sono simili se hanno la stessa parte letterale. c) F: il polinomio nullo non ha grado; ha grado 0 un numero diverso da zero. d) F: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. e) F: manca il termine in x^2, quindi il polinomio non è completo. f) V.

9. a) compare in A con esponente maggiore o uguale. b) $A^2 - B^2$. c) 1, 4, 6, 4, 1. d)
$2 \cdot (-3)^2 - 4 = 18 - 4 = 14$.

10. a) $-6a^2b^2$: coefficiente −6, parte letterale a^2b^2, grado 4. b) $-2x^3y^5$: coefficiente −2, parte letterale x^3y^5, grado 8. c) $-a^3 \cdot 4b^2 \cdot a = -4a^4b^2$: coefficiente −4, parte letterale a^4b^2, grado 6.

11. a) $(5 - 7 + 1)a^2b = -a^2b$. b) $(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 1)x\,y^2 = \frac{7}{6}x\,y^2$. c) $3x - (-3x) - x = 5x$.

12. a) $9a^4b^2$. b) $-\frac{1}{8}x^9y^3$. c) $-3a^3b^2$. d) $-\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}x = -\frac{3}{2}x$. e) No: a compare nel divisore con esponente 3, maggiore di 2; il risultato $\frac{2b}{a}$ è una frazione algebrica.

13. a) $8a^6b^3 : (4a^3b^2) = 2a^3b$; $-3a \cdot (-a^2b) = 3a^3b$; $-4a^2 \cdot \frac{1}{4}ab = -a^3b$; totale $4a^3b$. b) $(x^4y^2 - 3x^4y^2) : (-2x^3y) = -2x^4y^2 : (-2x^3y) = xy$.

14. a) MCD = $6a^2b^2$, mcm = $36a^3b^4c$. b) MCD = $2x$ (y non compare in $10x^3$), mcm = $60x^3y^3$. c) coefficiente frazionario, quindi coefficiente 1: MCD = ab, mcm = a^2b^2.

15. a) $2x^2 - 4x + 4$: grado 2, non omogeneo, completo rispetto a x. b) I termini x^4 si annullano: $3x^3y - 2x^2y^2 + y^4$, grado 4, omogeneo di grado 4; rispetto a x ha grado 3 e non è completo (manca il termine di primo grado in x).

16. a) $5b^2$. b) $x^3 - 2x + 1 - [2x^2 - x - x^3 - x^2 + 3] = x^3 - 2x + 1 - [-x^3 + x^2 - x + 3] = 2x^3 - x^2 - x - 2$.

17. a) $-6a^3 + 2a^2b - 8ab^2$. b) $2x^3 - x^2 - 5x + 3$. c) $(a + 2b)(a^2 - b^2) = a^3 + 2a^2b - ab^2 - 2b^3$.

18. a) $9x^2 + 12x + 4$. b) $\frac{1}{4}a^2 - 4ab + 16b^2$. c) $4x^4 - 25y^2$. d) $a^2 + 4b^2 + 1 - 4ab + 2a - 4b$. e) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$. f) $8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$.

19. a) $16a^4 + 32a^3b + 24a^2b^2 + 8ab^3 + b^4$ (coefficienti 1, 4, 6, 4, 1 moltiplicati per 2^4, 2^3, 2^2, 2, 1). b) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$. c) I termini con esponente pari di y si cancellano e quelli con esponente dispari raddoppiano: $8x^3y + 8xy^3$.

20. a) $x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 1) - (x^2 + 2x - 3) = -x^2 + 2x + 8$. b) $4a^2 - 4ab + b^2 - (4a^2 - b^2) + 4ab = 2b^2$.

21. $P(0) = -5$; $P(1) = 2 - 1 + 3 - 5 = -1$; $P(-2) = -16 - 4 - 6 - 5 = -31$; $P(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 5 = -\frac{7}{2}$.

22. I numeri sono n, $n + 1$, $n + 2$; la somma è $3n + 3 = 3(n + 1)$, multiplo di 3 perché $n + 1$ è naturale. c.v.d.

23. Due dispari consecutivi: $2n + 1$ e $2n + 3$. $(2n + 3)^2 - (2n + 1)^2 = 4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 - 4n - 1 = 8n + 8 = 8(n +$

1), multiplo di 8. c.v.d.

24. Per $x = 1$: $(2 + 3)^2 = 25$, mentre $4 + 9 = 13$. Manca il doppio prodotto $2 \cdot 2x \cdot 3 = 12x$. Corretto: $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.

25. Traccia: il termine di grado massimo del prodotto nasce solo dal prodotto dei due termini di grado massimo dei fattori, che non è nullo e ha grado uguale alla somma dei gradi; nessun altro prodotto parziale ha quel grado, quindi non può essere cancellato. Nella somma, invece, i termini di grado massimo possono essere opposti e annullarsi: $(x^2 + 3x) + (-x^2 + 1) = 3x + 1$, di grado 1 anche se gli addendi hanno grado 2.

26. Primo membro: $a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$. Secondo membro: $a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2$, uguale al primo perché i doppi prodotti si annullano. Con $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 3$: $ac - bd = 2 - 6 = -4$, $ad + bc = 3 + 4 = 7$, quindi $65 = (-4)^2 + 7^2 = 4^2 + 7^2 = 16 + 49$.

27. Area $(x + 3)(x - 1) = x^2 + 2x - 3$; perimetro $2[(x + 3) + (x - 1)] = 4x + 4$. Per $x = 5$: area $8 \cdot 4 = 32$ m^2, perimetro 24 m.

28. Il rettangolo ha area $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$: l'area diminuisce sempre di 4 cm^2, qualunque sia x.

29. Aumento $(x + 1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$; per $x = 10$: $300 + 30 + 1 = 331$ cm^3 (da 1000 a 1331 cm^3).

30. $C(1 + r)^2 = C + 2Cr + Cr^2$: C è il capitale iniziale, $2Cr$ sono gli interessi semplici dei due anni, Cr^2 è l'interesse del secondo anno sugli interessi del primo. Per $C = 1000$, $r = 0{,}03$: montante $1000 \cdot 1{,}03^2 = 1060{,}90$ euro; $Cr^2 = 1000 \cdot 0{,}0009 = 0{,}90$ euro.

31. La base è un quadrato di lato $20 - 2x$, l'altezza è x: $V(x) = x(20 - 2x)^2 = 4x^3 - 80x^2 + 400x$, di grado 3. $V(2) = 2 \cdot 16^2 = 512$ cm^3; $V(3) = 3 \cdot 14^2 = 588$ cm^3; $V(5) = 5 \cdot 10^2 = 500$ cm^3. Hanno senso i valori con $0 < x < 10$.

32. $x^2 - 4xy + 4y^2 - (x^2 + 4xy + 4y^2) + 8xy = -8xy + 8xy = 0$ per ogni x e y.

33. $a^3 - 3a^2 + 3a - 1 - a(a^2 - 2a - 3) = a^3 - 3a^2 + 3a - 1 - a^3 + 2a^2 + 3a = -a^2 + 6a - 1$. Per $a = -1$: $-1 - 6 - 1 = -8$.

34. a) $M = -6x^5y^3 : (2x^2y) = -3x^3y^2$. b) $N = 3a^2b^3$ oppure $N = -3a^2b^3$.

35. a) $(1000 + 1)^2 = 1$ 000 000 + 2000 + $1 = 1$ 002 001. b) Raggruppa $n(n + 3) = n^2 + 3n$ e $(n + 1)(n + 2) = n^2 + 3n + 2$; posto $t = n^2 + 3n$, il prodotto più 1 è $t(t + 2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2 = (n^2 + 3n + 1)^2$. c.v.d. Per $n = 2$: $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 121 = 11^2$ e $n^2 + 3n + 1 = 4 + 6 + 1 = 11$.