CAPITOLO

5

Insiemi e logica

Prima di calcolare bisogna sapere di che cosa si parla e che cosa si sta affermando.

OBIETTIVI

1. Rappresentare un insieme per elencazione, per proprietà caratteristica e con un diagramma di Eulero-Venn.
2. Eseguire intersezione, unione, differenza, complementare e prodotto cartesiano, e usarne le proprietà.
3. Risolvere problemi di conteggio con i diagrammi di Venn a due e a tre insiemi.
4. Riconoscere le proposizioni, usare i connettivi logici e costruire tavole di verità.
5. Usare e negare correttamente i quantificatori «per ogni» ed «esiste».
6. Distinguere condizione necessaria e sufficiente, implicazione inversa e contronominale, e leggere la struttura di un teorema.

INDICE DEL CAPITOLO

5.1 Gli insiemi 2
5.2 Le operazioni con gli insiemi 5
5.3 Contare con i diagrammi di Venn 9
5.4 La logica delle proposizioni 12
5.5 Enunciati aperti e quantificatori 16
5.6 Condizioni, teoremi e dimostrazioni 18

Matematica 1 · Parte II · Insiemi, logica e funzioni · versione 1.0
Capitolo 5: Insiemi e logica · pagine 125–150 del volume completo · estratto per lo studio

«Gli studenti che hanno la sufficienza in matematica *o* in fisica possono partecipare alla gara.» Chi ha la sufficienza in tutte e due le materie può partecipare? E chi non ce l'ha in nessuna delle due? Sembrano domande banali, eppure nel linguaggio di tutti i giorni la parola «o» a volte significa «uno dei due, ma non tutti e due», altre volte «almeno uno dei due». Un regolamento, un contratto, un programma per computer e, soprattutto, un ragionamento matematico non possono permettersi ambiguità di questo genere.

In questo capitolo costruiremo due strumenti che accompagnano tutta la matematica. Il primo è il linguaggio degli **insiemi**, con cui si raccolgono gli oggetti di cui si parla e si descrivono le relazioni fra gruppi di oggetti. Il secondo è la **logica**, che stabilisce con precisione che cosa significa che un'affermazione è vera e come si combinano più affermazioni fra loro. Vedrai che i due linguaggi sono strettamente imparentati: «e» corrisponde all'intersezione, «o» all'unione, «non» al complementare. Alla fine del capitolo userai questi strumenti per capire come è fatto un teorema e come si dimostra: è la preparazione necessaria per la geometria della Parte V.

5.1 Gli insiemi

5.1.1 Il concetto di insieme

In matematica la parola **insieme** è un *concetto primitivo*: non la si definisce a partire da parole più semplici, ma se ne chiarisce il significato con esempi e con le regole d'uso. Intuitivamente, un insieme è una raccolta di oggetti, detti elementi, considerata come un tutto unico. La regola fondamentale è una sola: deve essere sempre possibile stabilire *in modo oggettivo* se un oggetto appartiene o no all'insieme.

Così «i divisori di 18», «le vocali dell'alfabeto italiano», «i pianeti del sistema solare» sono insiemi: chiunque, dato un oggetto, può decidere senza discussioni se ne fa parte. Invece «i numeri grandi», «le canzoni più belle dell'anno» o «i ragazzi alti della classe» non sono insiemi in senso matematico, perché l'appartenenza dipende dal giudizio di chi parla: 1000 è un numero grande? Per un bambino sì, per un astronomo no.

Gli insiemi si indicano di solito con lettere maiuscole (A, B, U…) e i loro elementi con lettere minuscole o con i simboli stessi degli oggetti. Per dire che l'elemento a appartiene all'insieme A si scrive $a \in A$ (si legge «a appartiene ad A»); per dire che non vi appartiene si scrive $a \notin A$. Se V è l'insieme delle vocali, allora $e \in V$ e $m \notin V$. Alcuni insiemi numerici hanno un simbolo proprio, che conosci dai capitoli precedenti: $\mathbb{N}$ (numeri naturali, compreso lo 0), $\mathbb{Z}$ (numeri interi), $\mathbb{Q}$ (numeri razionali). Per esempio $-3 \in \mathbb{Z}$, ma $-3 \notin \mathbb{N}$; $\frac{2}{5} \in \mathbb{Q}$, ma $\frac{2}{5} \notin \mathbb{Z}$.

5.1.2 Tre modi per rappresentare un insieme

Per elencazione. Si scrivono tutti gli elementi tra parentesi graffe, separati da virgole: $V = \{a, e, i, o, u\}$. In un insieme l'ordine non conta e ogni elemento compare una sola volta: {1, 2, 3}, {3, 1, 2} e {1, 1, 2, 3} indicano lo stesso insieme. L'elencazione è comoda quando gli elementi sono pochi; per insiemi grandi si usano i puntini solo se la regola è chiara senza ambiguità, come in {0, 2, 4, 6, ...}.

Per proprietà caratteristica. Si indica una proprietà che hanno tutti e soli gli elementi dell'insieme. Si scrive

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$$

e si legge «A è l'insieme degli x appartenenti a $\mathbb{N}$ tali che x è minore di 4». Per elencazione, $A = \{0, 1, 2, 3\}$. La barra verticale si legge «tale che» (alcuni testi usano i due punti). Questa rappresentazione è indispensabile per gli insiemi infiniti: l'insieme dei numeri pari si scrive $\{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$.

Con un diagramma di Eulero-Venn. Si disegna una linea chiusa e si mettono all'interno, come punti, gli elementi dell'insieme; gli oggetti che non appartengono all'insieme stanno fuori. Il diagramma rende visibili a colpo d'occhio i rapporti fra più insiemi, come nella figura 5.1.

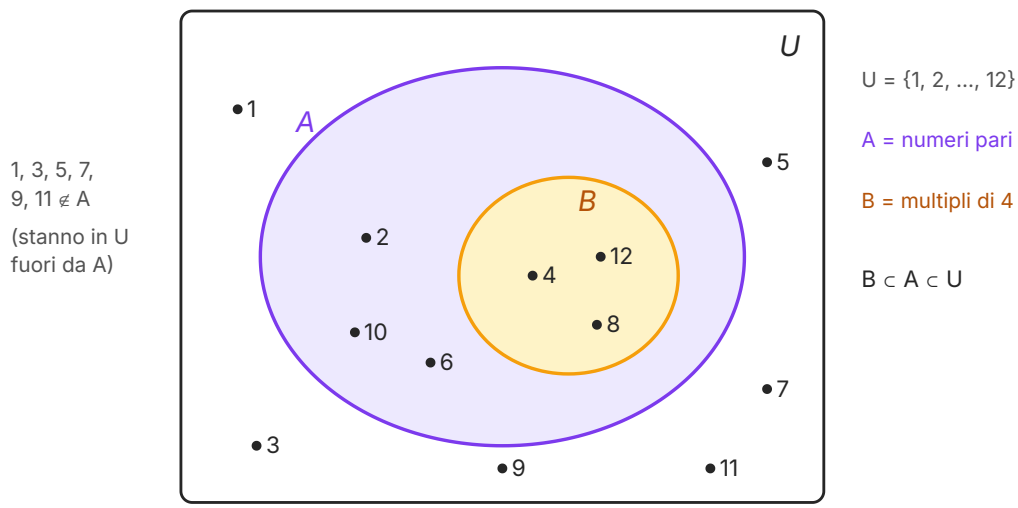


Figura 5.1 Diagramma di Eulero-Venn. Nell'universo U dei numeri da 1 a 12, l'insieme B dei multipli di 4 è contenuto nell'insieme A dei numeri pari: $B \subset A \subset U$.

Un insieme è individuato soltanto dai suoi elementi. Due insiemi sono **uguali** se hanno esattamente gli stessi elementi, indipendentemente dall'ordine in cui li scriviamo e dal modo in cui li descriviamo: $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è un divisore di } 6\} = \{1, 2, 3, 6\} = \{6, 3, 2, 1\}$.

5.1.3 Insieme vuoto, insieme universo, insiemi finiti e infiniti

Può succedere che nessun oggetto abbia una certa proprietà: per esempio, non esiste un numero naturale x tale che $x + 5 = 2$. L'insieme che non ha elementi si chiama **insieme vuoto** e si indica con $\varnothing$. Attenzione: $\varnothing$ è diverso da $\{0\}$, che ha un elemento (il numero zero), ed è diverso anche da $\{\varnothing\}$, che ha un elemento (l'insieme vuoto stesso).

Quando si studiano più insiemi, conviene fissare un ambiente che li contenga tutti: lo si chiama **insieme universo** e lo si indica con U. Nei diagrammi è il rettangolo che racchiude tutto il resto. L'universo dipende dal problema: in una ricerca sui gusti musicali di una classe, U è l'insieme degli studenti della classe; in un problema di aritmetica potrebbe essere $\mathbb{N}$.

Un insieme è finito se i suoi elementi si possono contare e il conteggio termina; in questo caso il numero degli elementi si chiama **cardinalità** dell'insieme e si indica con $|A|$. Per esempio $|\{a, e, i, o, u\}| = 5$ e $|\varnothing| = 0$. Un insieme che non è finito si dice infinito: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e l'insieme dei numeri primi (capitolo 1) sono infiniti.

5.1.4 Sottoinsiemi e insieme delle parti

Un insieme B è un **sottoinsieme** di A se ogni elemento di B è anche elemento di A. Si scrive $B \subseteq A$ e si legge «B è contenuto (o incluso) in A». Nella figura 5.1 l'insieme B dei multipli di 4 è contenuto nell'insieme A dei numeri pari: ogni multiplo di 4 è pari. Se $B \subseteq A$ e in più A ha almeno un elemento che non sta in B, si parla di inclusione stretta e si scrive $B \subset A$. Valgono $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, come hai visto nel capitolo 3.

Due osservazioni discendono subito dalla definizione. Ogni insieme è sottoinsieme di sé stesso: $A \subseteq A$. L'insieme vuoto è sottoinsieme di qualunque insieme: $\varnothing \subseteq A$, perché non ha elementi che possano «uscire» da A. Questi due sottoinsiemi, A e $\varnothing$, si chiamano **sottoinsiemi impropri** di A; tutti gli altri si dicono sottoinsiemi propri. Attenzione ai nomi: l'inclusione stretta $B \subset A$ chiede soltanto che B sia diverso da A, quindi vale anche $\varnothing \subset A$ quando A non è vuoto, e per questo molti testi chiamano «proprio» ogni sottoinsieme diverso da A. In questo libro, invece, i sottoinsiemi propri escludono sia A sia $\varnothing$. Infine, $A = B$ se e solo se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$: è il modo standard per dimostrare che due insiemi sono uguali.

L'insieme di tutti i sottoinsiemi di A si chiama **insieme delle parti** di A e si indica con $\mathcal{P}(A)$. Se $A = \{r, s, t\}$, i suoi sottoinsiemi sono

$$\varnothing, \quad \{r\}, \{s\}, \{t\}, \quad \{r, s\}, \{r, t\}, \{s, t\}, \quad \{r, s, t\}$$

cioè $8 = 2^3$. Non è un caso. Per costruire un sottoinsieme bisogna decidere, per ciascun elemento, se prenderlo o lasciarlo: due scelte per il primo elemento, due per il secondo, due per il terzo, in tutto $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ possibilità. Lo stesso ragionamento vale per un insieme di n elementi:

$$\text{se } |A| = n, \text{ allora } |\mathcal{P}(A)| = 2^n.$$

Un insieme di 5 elementi ha quindi $2^5 = 32$ sottoinsiemi; un insieme di 10 elementi ne ha 1024. Anche l'insieme vuoto rientra nella formula: $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ ha $2^0 = 1$ elemento.

ERRORE FREQUENTE

Non confondere $\in$ con $\subseteq$. Il simbolo $\in$ lega un *elemento* a un insieme, il simbolo $\subseteq$ lega due *insiemi*. Se $A = \{1, 2, 3\}$, è corretto scrivere $2 \in A$ e $\{2\} \subseteq A$; sono sbagliate le scritture $\{2\} \in A$ (l'insieme $\{2\}$ non è uno degli elementi di A) e $2 \subseteq A$ (2 non è un insieme). Invece $\{2\} \in \mathcal{P}(A)$ è corretto: gli elementi di $\mathcal{P}(A)$ sono proprio i sottoinsiemi di A.

5.2 Le operazioni con gli insiemi

Come con i numeri si costruiscono nuovi numeri con le operazioni, così con gli insiemi si costruiscono nuovi insiemi. In tutto il paragrafo A e B sono sottoinsiemi di un universo U; la figura 5.2 mostra in viola il risultato di ciascuna operazione.

5.2.1 Intersezione e unione

L'**intersezione** di A e B è l'insieme degli elementi che appartengono *sia* ad A *sia* a B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, allora $A \cap B = \{3, 4\}$. Quando due insiemi non hanno elementi in comune, cioè $A \cap B = \varnothing$, si dicono insiemi disgiunti: tali sono, in $\mathbb{N}$, l'insieme dei numeri pari e quello dei dispari.

L'**unione** di A e B è l'insieme degli elementi che appartengono ad *almeno uno* dei due insiemi:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Con gli insiemi di prima, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: gli elementi comuni 3 e 4 si scrivono una volta sola. Nota che la «o» della definizione è inclusiva: un elemento che sta in entrambi gli insiemi appartiene all'unione. Dalla definizione segue che $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$; inoltre, se $B \subseteq A$, allora $A \cap B = B$ e $A \cup B = A$.

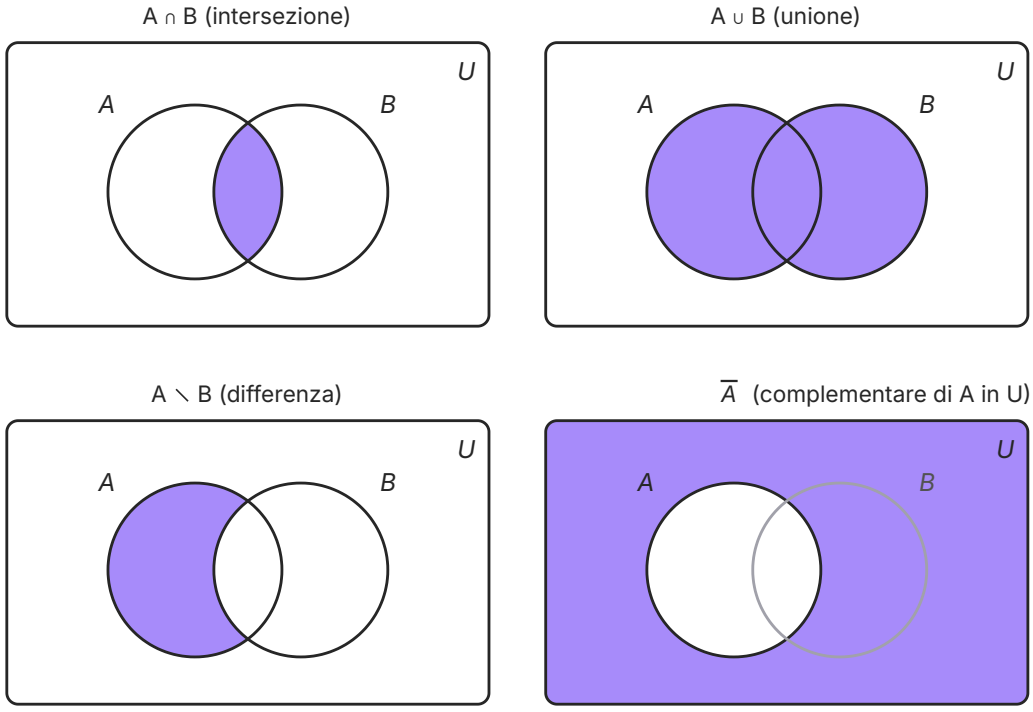


Figura 5.2 Le operazioni fra due insiemi A e B dell'universo U: in viola il risultato di intersezione, unione, differenza e complementare.

5.2.2 Differenza e complementare

La **differenza** tra A e B è l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Con $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$ si ottiene $A \setminus B = \{1, 2\}$, mentre $B \setminus A = \{5\}$: la differenza, come la sottrazione fra numeri, non è commutativa.

Se $A \subseteq U$, la differenza $U \setminus A$ si chiama **complementare** di A rispetto a U: è formata dagli elementi dell'universo che non stanno in A. In questo libro lo indichiamo con una linea sopra la lettera, $\overline{A}$; molti testi usano anche la scrittura $\mathrm{C}_U A$. Per esempio, se $U = \mathbb{N}$ e A è l'insieme dei numeri pari, $\overline{A}$ è l'insieme dei numeri dispari. Il complementare dipende dall'universo: se invece $U = \mathbb{Z}$, il complementare dei pari è l'insieme dei dispari, positivi e negativi. Valgono sempre

$$A \cap \overline{A} = \varnothing, \quad A \cup \overline{A} = U, \quad \text{il complementare di } \overline{A} \text{ è } A.$$

5.2.3 Le proprietà delle operazioni

Intersezione e unione hanno proprietà molto simili a quelle della moltiplicazione e dell'addizione fra numeri, ma con qualche sorpresa. Si possono verificare tutte disegnando i diagrammi di Venn dei due membri e controllando che le zone colorate coincidano.

IN SINTESI

Proprietà di intersezione, unione e complementare

Commutativa: $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$.

Associativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Distributive: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Elementi particolari: $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap U = A$, $A \cup U = U$, $A \cap A = A \cup A = A$.

Leggi di De Morgan: il complementare di $A \cup B$ è $\overline{A} \cap \overline{B}$; il complementare di $A \cap B$ è $\overline{A} \cup \overline{B}$.

La sorpresa è la seconda proprietà distributiva: fra i numeri la moltiplicazione si distribuisce rispetto all'addizione, ma non viceversa ($3 + 2 \cdot 5 \neq (3 + 2) \cdot (3 + 5)$); fra gli insiemi, invece, ciascuna delle due operazioni si distribuisce rispetto all'altra. Le leggi di De Morgan, dal nome del matematico inglese Augustus De Morgan (1806–1871), dicono come si comporta il complementare: il complementare «scambia» unione e intersezione. Leggile così: non stare in $A \cup B$ significa non stare né in A né in B; non stare in $A \cap B$ significa non stare in A *oppure* non stare in B. La figura 5.3 illustra la seconda legge.

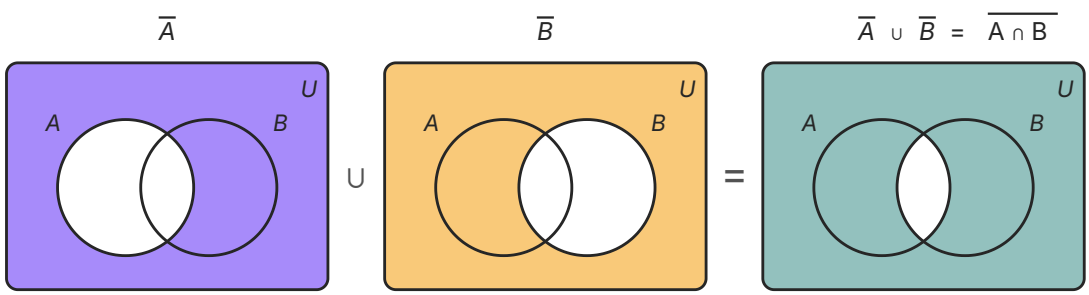


Figura 5.3 Seconda legge di De Morgan: l'unione dei complementari di A e di B è il complementare di $A \cap B$.

ESEMPIO SVOLTO

Operazioni su insiemi e verifica di De Morgan

Sia $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \le x \le 10\}$, $A = \{x \in U \mid x \text{ è pari}\}$, $B = \{x \in U \mid x \text{ è un divisore di } 12\}$. Calcola $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$ e verifica la prima legge di De Morgan.

1. Elenca gli insiemi. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$; i divisori di 12 sono 1, 2, 3, 4, 6, 12, ma $12 \notin U$, quindi $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

2. Operazioni. $A \cap B = \{2, 4, 6\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$; $A \setminus B = \{8, 10\}$; $B \setminus A = \{1, 3\}$; $\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

3. De Morgan. Il complementare di $A \cup B$ contiene gli elementi di U che mancano in $A \cup B$: $\{5, 7, 9\}$. D'altra parte $\overline{B} = \{5, 7, 8, 9, 10\}$ e $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{5, 7, 8, 9, 10\} = \{5, 7, 9\}$. I due insiemi coincidono, come prevede la legge.

5.2.4 Partizione di un insieme

Una **partizione** di un insieme A è una suddivisione di A in sottoinsiemi che rispettano tre condizioni: ciascuno è non vuoto; sono a due a due disgiunti; la loro unione è tutto A. In parole semplici: ogni elemento di A finisce in uno e in un solo «cassetto», e non ci sono cassetti vuoti.

Gli studenti di una scuola sono ripartiti nelle classi: è una partizione, perché nessuno studente sta in due classi, nessuno resta fuori e nessuna classe è vuota. L'insieme $\mathbb{N}$ è ripartito nei pari e nei dispari. Anche i resti della divisione per 3 producono una partizione di $\mathbb{N}$ in tre parti: i numeri con resto 0 ($\{0, 3, 6, \ldots\}$), con resto 1 ($\{1, 4, 7, \ldots\}$) e con resto 2 ($\{2, 5, 8, \ldots\}$). Invece i sottoinsiemi «multipli di 2» e «multipli di 3» non formano una partizione di $\mathbb{N}$: hanno in comune 6, 12, 18… e non contengono 1, 5, 7…. Ritroverai le partizioni nel capitolo 6, studiando le relazioni di equivalenza.

5.2.5 Il prodotto cartesiano

Finora abbiamo combinato insiemi per ottenere altri insiemi degli stessi oggetti. Il prodotto cartesiano crea invece oggetti nuovi: le coppie. Una coppia ordinata $(a; b)$ è formata da due elementi presi in un ordine preciso, il primo e il secondo. A differenza degli insiemi, nelle coppie l'ordine conta: $(1; 2) \neq (2; 1)$, mentre $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. Due coppie sono uguali solo se hanno uguali i primi elementi e uguali i secondi.

Il **prodotto cartesiano** di A e B è l'insieme di tutte le coppie ordinate con il primo elemento in A e il secondo in B:

$$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$, si ha $A \times B = \{(1; a), (1; b), (2; a), (2; b), (3; a), (3; b)\}$. Il prodotto cartesiano si rappresenta bene con una tabella a doppia entrata oppure con una griglia di punti, come

nella figura 5.4: gli elementi di A stanno su una linea orizzontale, quelli di B su una verticale, e ogni coppia è un incrocio. La tabella mostra anche perché

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|:$$

le righe sono $|B|$, le colonne $|A|$, le caselle sono il loro prodotto. In generale $A \times B \neq B \times A$ (le coppie sono «rovesciate»), e se uno dei due insiemi è vuoto anche il prodotto è vuoto. Il prodotto $A \times A$ si scrive anche A^2.

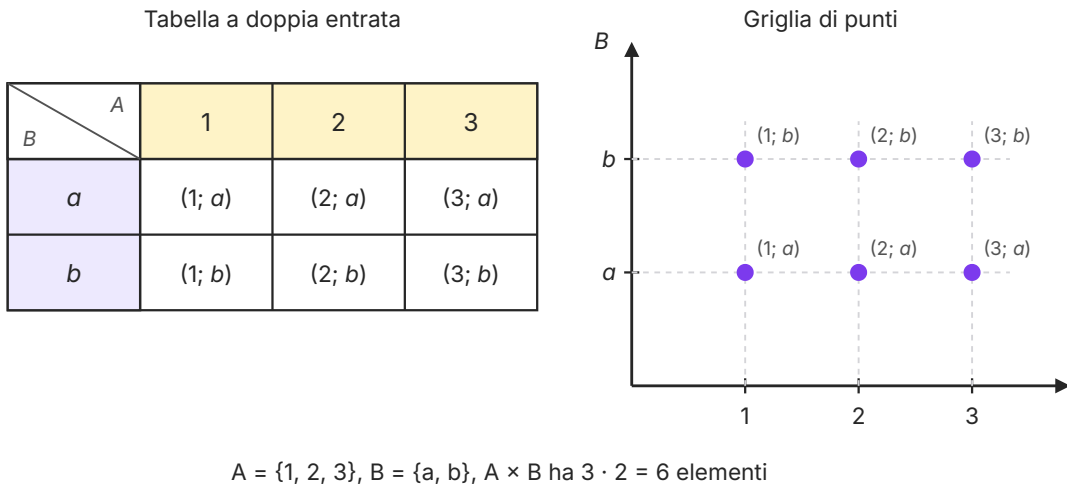


Figura 5.4 Il prodotto cartesiano $A \times B$ con $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$, rappresentato con una tabella a doppia entrata e con una griglia di punti.

Il nome viene dal filosofo e matematico francese René Descartes (1596–1650), in latino *Cartesius*: la griglia di punti della figura è un piccolo pezzo di quello che, nel prossimo capitolo, diventerà il *piano cartesiano*, in cui ogni punto corrisponde a una coppia di numeri.

5.3 Contare con i diagrammi di Venn

Molti problemi chiedono di contare gli elementi di insiemi che si sovrappongono: quanti studenti praticano almeno uno sport, quante persone leggono un giornale ma non l'altro. Il diagramma di Venn è lo strumento ideale, purché si segua un principio: **nelle regioni del diagramma si scrive il numero di elementi che stanno *solo* in quella regione**.

5.3.1 Due insiemi

Se sommiamo $|A|$ e $|B|$, gli elementi dell'intersezione vengono contati due volte, una come elementi di A e una come elementi di B. Per ottenere $|A \cup B|$ bisogna toglierli una volta:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

La formula si chiama principio di inclusione-esclusione. Se A e B sono disgiunti, si riduce a $|A \cup B| = |A| + |B|$.

ESEMPIO SVOLTO

Una classe e due attività

In una classe di 27 studenti, 16 frequentano il corso di teatro, 12 il corso di scacchi e 5 frequentano entrambi. Quanti studenti non frequentano nessuno dei due corsi? Quanti frequentano solo teatro?

1. Dati. U = studenti della classe, $|U| = 27$; T = teatro, $|T| = 16$; S = scacchi, $|S| = 12$; $|T \cap S| = 5$.

2. Dall'interno verso l'esterno. Nella zona comune scriviamo 5. Solo teatro: $16 - 5 = 11$. Solo scacchi: $12 - 5 = 7$.

3. Unione e complementare. $|T \cup S| = 11 + 5 + 7 = 23$, oppure con la formula $16 + 12 - 5 = 23$. Non frequentano nessun corso $27 - 23 = 4$ studenti.

Risposta: 4 studenti non frequentano corsi; 11 frequentano solo teatro. **Controllo:** $11 + 5 + 7 + 4 = 27$.

5.3.2 Tre insiemi

Con tre insiemi le regioni del diagramma diventano otto, compresa quella esterna. Il metodo non cambia, ma l'ordine conta: conviene riempire il diagramma *partendo dal centro*, cioè dalla regione comune a tutti e tre gli insiemi, poi le intersezioni a due, poi le parti «solo».

ESEMPIO SVOLTO

Un sondaggio sugli sport

In una scuola si intervistano 120 studenti (dati inventati). 52 giocano a calcio, 36 praticano il nuoto, 42 la pallavolo; 12 fanno calcio e nuoto, 14 calcio e pallavolo, 10 nuoto e pallavolo; 4 praticano tutti e tre gli sport. Quanti non praticano nessuno dei tre sport? Quanti praticano esattamente uno sport?

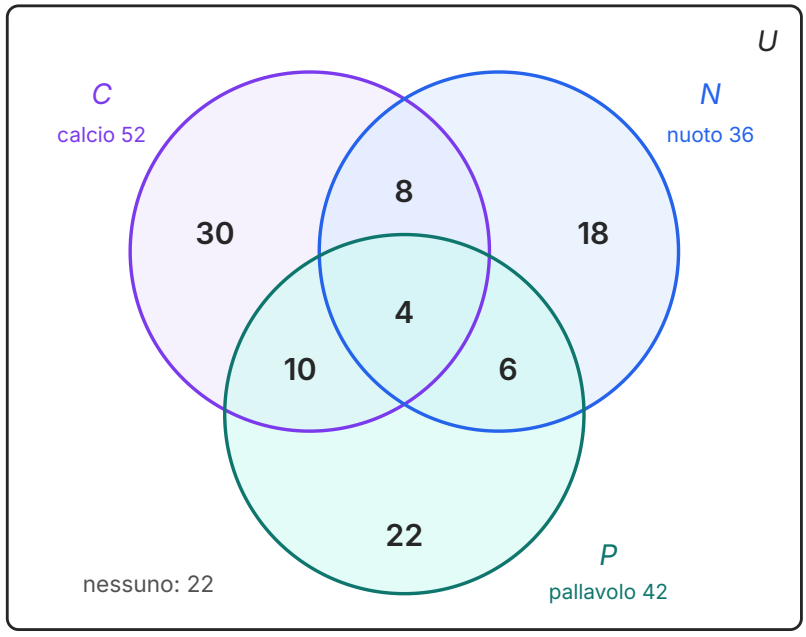
1. Centro. Nella regione comune ai tre insiemi scriviamo 4.

2. Intersezioni a due. Dei 12 che fanno calcio e nuoto, 4 fanno anche pallavolo: solo calcio e nuoto $12 - 4 = 8$. Allo stesso modo solo calcio e pallavolo $14 - 4 = 10$, solo nuoto e pallavolo $10 - 4 = 6$.

3. Un solo sport. Solo calcio: $52 - 8 - 10 - 4 = 30$. Solo nuoto: $36 - 8 - 6 - 4 = 18$. Solo pallavolo: $42 - 10 - 6 - 4 = 22$.

4. Unione ed esterno. Almeno uno sport: $30 + 18 + 22 + 8 + 10 + 6 + 4 = 98$. Nessuno sport: $120 - 98 = 22$.

Risposta: 22 studenti non praticano sport; esattamente uno sport: $30 + 18 + 22 = 70$ studenti. Il diagramma completo è nella figura 5.5.



Totale: 30 + 18 + 22 + 8 + 10 + 6 + 4 + 22 = 120 studenti

Figura 5.5 Diagramma di Venn del sondaggio sugli sport (dati inventati): in ogni regione il numero di studenti che appartengono solo a quella regione.

APPROFONDIMENTO · LA FORMULA PER TRE INSIEMI

Anche la formula di $|A \cup B|$ si può estendere. Sommando le tre cardinalità, le intersezioni a due vengono contate due volte, perciò si sottraggono; ma così gli elementi comuni a tutti e tre, contati tre volte e poi tolti tre volte, sparirebbero del tutto, e vanno aggiunti di nuovo:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Nell'esempio degli sport: $52 + 36 + 42 - 12 - 14 - 10 + 4 = 98$, come nel diagramma.

5.4 La logica delle proposizioni

5.4.1 Proposizioni

In logica si chiama **proposizione** (o enunciato) un'affermazione di cui si può stabilire in modo oggettivo se è vera o falsa. «Roma è la capitale d'Italia» è una proposizione vera; «7 è un numero pari» è una proposizione falsa; «il numero $2^{100} - 1$ è primo» è una proposizione (falsa, anche se per saperlo bisogna fare dei calcoli). Non sono proposizioni le domande («Che ore sono?»), gli

ordini («Apri la finestra!»), i giudizi personali («La matematica è la materia più bella») e le frasi in cui compare una variabile di cui non si conosce il valore, come «x è maggiore di 3»: di queste ultime ci occuperemo nel paragrafo 5.5.

La logica che studiamo, detta *bivalente*, si fonda su due principi. Per il principio di non contraddizione una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa; per il principio del terzo escluso una proposizione è vera oppure falsa, e non c'è una terza possibilità. I due valori di verità si indicano con V (vero) e F (falso), le proposizioni con lettere minuscole p, q, r...

Le proposizioni come «7 è un numero pari» si dicono *atomiche*, o semplici. Con le parole «non», «e», «o», «se... allora» si costruiscono proposizioni *composte*, il cui valore di verità dipende soltanto dai valori delle proposizioni componenti. Queste parole, tradotte in simboli, sono i connettivi logici; per ciascuno, il modo in cui funziona si descrive con una **tavola di verità**, che elenca tutte le combinazioni possibili di valori delle proposizioni componenti (con due proposizioni, $2 \cdot 2 = 4$ righe).

5.4.2 Negazione, congiunzione e disgiunzione

La **negazione** di p, indicata con $\neg p$ («non p»), è vera quando p è falsa e falsa quando p è vera. La negazione di «7 è pari» è «7 non è pari», che è vera. Negare due volte riporta al punto di partenza: $\neg(\neg p)$ ha lo stesso valore di p.

La **congiunzione** $p \wedge q$ («p e q») è vera solo quando p e q sono entrambe vere. «15 è dispari e 15 è multiplo di 5» è vera; «15 è dispari e 15 è primo» è falsa, perché la seconda parte è falsa.

La **disgiunzione** $p \vee q$ («p o q») è vera quando almeno una delle due proposizioni è vera; è falsa solo se sono false entrambe. In matematica la «o» è sempre **inclusiva**: «15 è dispari o 15 è multiplo di 5» è vera, anche se le due parti sono entrambe vere. Quando invece si vuole dire «o l'uno o l'altro, ma non tutti e due», si usa la **disgiunzione esclusiva** $p \veebar q$ («aut p aut q»), vera quando le due proposizioni hanno valori di verità diversi. I latini distinguevano le due «o» con due parole diverse, *vel* (inclusiva) e *aut* (esclusiva); secondo una spiegazione diffusa, il simbolo $\vee$ ricorda l'iniziale di *vel*.

Il problema dell'inizio del capitolo si risolve così: nel regolamento della gara la «o» è inclusiva, quindi chi ha la sufficienza in entrambe le materie può partecipare. Al ristorante, invece, «menù con primo o secondo» di solito significa «aut»: un piatto solo.

5.4.3 Implicazione e doppia implicazione

L'**implicazione** $p \Rightarrow q$ («se p, allora q», oppure «p implica q») è falsa in un solo caso: quando p è vera e q è falsa. La proposizione p si chiama antecedente (o premessa), q si chiama conseguente (o conclusione).

Per capire perché la tavola è fatta così, pensa a una promessa: «Se domani c'è il sole, andiamo al mare». Domani c'è il sole e andiamo al mare: promessa mantenuta (V). C'è il sole e non andiamo: promessa tradita (F). Se domani piove, qualunque cosa facciamo la promessa non è stata violata, perché non diceva nulla sui giorni di pioggia: in entrambi i casi l'implicazione è

vera. In particolare, **un'implicazione con antecedente falso è sempre vera**: «Se 2 + 2 = 5, allora la Luna è di formaggio» è, dal punto di vista logico, una proposizione vera. Questo significato si chiama *implicazione materiale*: non richiede che fra p e q ci sia un legame di causa ed effetto, ma riguarda solo i valori di verità.

La doppia implicazione $p \Leftrightarrow q$ («p se e solo se q») è vera quando p e q hanno lo stesso valore di verità; equivale a $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Per esempio: «un numero naturale è divisibile per 6 se e solo se è divisibile sia per 2 sia per 3». La tabella 5.1 riassume i sei connettivi.

Tabella 5.1 Tavola di verità dei connettivi logici.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V	V

COLLEGAMENTI

Informatica e fisica: i connettivi «al lavoro»

In tutti i linguaggi di programmazione esistono gli operatori AND, OR e NOT, che corrispondono a $\wedge$, $\vee$ e $\neg$ e seguono esattamente le tavole di verità della tabella 5.1; un'istruzione come «se il voto è almeno 6 AND le assenze sono meno di 10, allora promuovi» è una congiunzione. Anche i motori di ricerca e i cataloghi delle biblioteche permettono ricerche con AND, OR e NOT.

In fisica, una lampadina collegata a una pila tramite due interruttori *in serie* si accende solo se entrambi gli interruttori sono chiusi: è una congiunzione. Con due interruttori *in parallelo* basta che se ne chiuda uno: è una disgiunzione inclusiva. I circuiti logici dei computer realizzano i connettivi con milioni di minuscoli interruttori elettronici.

5.4.4 Tautologie, contraddizioni ed equivalenze

Combinando i connettivi si ottengono proposizioni composte di cui si calcola la tavola di verità colonna per colonna, partendo dalle parti più interne. Alcune di esse sono speciali. Una **tautologia** è una proposizione composta vera per qualunque valore di verità delle componenti, come $p \vee \neg p$ (è il principio del terzo escluso). Una **contraddizione** è sempre falsa, come $p \wedge \neg p$. Due proposizioni composte sono logicamente equivalenti quando hanno la stessa tavola di verità, cioè quando la loro doppia implicazione è una tautologia.

ESEMPIO SVOLTO

Tre modi di dire la stessa implicazione

Dimostra con una tavola di verità che $p \Rightarrow q$, $\neg q \Rightarrow \neg p$ e $\neg p \vee q$ sono equivalenti, mentre $q \Rightarrow p$ non lo è.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$\neg p \vee q$	$q \Rightarrow p$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V

Nella colonna $\neg q \Rightarrow \neg p$, per esempio nella seconda riga, l'antecedente $\neg q$ è V e il conseguente $\neg p$ è F: l'implicazione è falsa. Le colonne 5, 6 e 7 sono identiche: le tre proposizioni sono equivalenti. L'ultima colonna differisce nella seconda e nella terza riga: $q \Rightarrow p$ **non** equivale a $p \Rightarrow q$.

Anche in logica valgono le leggi di De Morgan, e sono la chiave per **negare correttamente una proposizione composta**:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \qquad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \qquad \neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

Le prime due si verificano con una tavola di verità (esercizio 22); la terza segue dall'esempio svolto, perché $p \Rightarrow q$ equivale a $\neg p \vee q$, la cui negazione, per De Morgan, è $p \wedge \neg q$. Così la negazione di «Luca studia e supera la verifica» è «Luca non studia o non supera la verifica»; la negazione di «stasera vado al cinema o a teatro» è «stasera non vado né al cinema né a teatro»; la negazione di «se piove, prendo l'ombrello» non è «se non piove, non prendo l'ombrello», ma «piove e non prendo l'ombrello»: è l'unico caso in cui chi ha parlato ha detto il falso.

ERRORE FREQUENTE

La negazione di «p e q» **non** è «non p e non q». Se l'insegnante dice «Marco ha studiato storia e geografia» e la frase è falsa, non è detto che Marco non abbia studiato nessuna delle due materie: basta che ne abbia trascurata una. La negazione corretta è «Marco non ha studiato storia *o* non ha studiato geografia». Allo stesso modo, negare un'implicazione non significa negarne le due parti.

APPROFONDIMENTO

Da Aristotele a Boole

Lo studio dei ragionamenti corretti nasce nella Grecia antica: Aristotele (IV secolo a.C.) classificò i sillogismi, schemi di ragionamento come «tutti gli uomini sono mortali; Socrate è un uomo; dunque Socrate è mortale». Per oltre due millenni la logica fu soprattutto una disciplina filosofica. Nel 1854 il matematico inglese George Boole pubblicò *An Investigation of the Laws of Thought*, in cui trattava le proposizioni con un'algebra simile a quella dei numeri, con operazioni corrispondenti a «e», «o» e «non»: per questo oggi si parla di *algebra di Boole* e di variabili «booleane» nei linguaggi di programmazione. I diagrammi circolari per rappresentare i ragionamenti erano già stati usati da Leonhard Euler nelle sue *Lettere a una principessa tedesca*; John Venn li sistematizzò in un articolo del 1880.

5.5 Enunciati aperti e quantificatori

5.5.1 Predicati e insieme di verità

La frase «x è un numero pari» non è una proposizione: non si può dire se è vera o falsa finché non si sa chi è x. Diventa una proposizione quando a x si sostituisce un valore: con $x = 4$ è vera, con $x = 7$ è falsa. Una frase di questo tipo si chiama **enunciato aperto** (o predicato) e si indica con $p(x)$; la lettera x è la *variabile*, e l'insieme U in cui la si fa variare è l'universo, o *dominio*, del predicato.

L'insieme dei valori di U che rendono vero $p(x)$ si chiama **insieme di verità** del predicato. Se $p(x)$ è «$x + 3 < 7$» e $U = \mathbb{N}$, l'insieme di verità è $P = \{0, 1, 2, 3\}$. L'universo è decisivo: il predicato «$x^2 = 4$» ha insieme di verità $\{2\}$ in $\mathbb{N}$ e $\{-2, 2\}$ in $\mathbb{Z}$; il predicato «$2x = 5$» ha insieme di verità vuoto in $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Z}$, mentre in $\mathbb{Q}$ è $\left\{ \frac{5}{2} \right\}$. È la stessa idea della rappresentazione di un insieme per proprietà caratteristica: $\{x \in U \mid p(x)\}$ è proprio l'insieme di verità di $p(x)$. Quando studierai le equazioni (capitolo 10), l'insieme delle soluzioni sarà l'insieme di verità di un'uguaglianza con una incognita.

5.5.2 Logica e insiemi

Siano $p(x)$ e $q(x)$ due predicati sullo stesso universo U, con insiemi di verità P e Q. Un elemento rende vero $p(x) \wedge q(x)$ se e solo se sta sia in P sia in Q: l'insieme di verità della congiunzione è $P \cap Q$. Con lo stesso ragionamento si ottiene il dizionario della tabella 5.2, che spiega perché le proprietà degli insiemi e quelle dei connettivi si somigliano tanto: sono la stessa cosa vista da due lati.

Tabella 5.2 Corrispondenza fra connettivi logici e operazioni con gli insiemi di verità (P e Q sono gli insiemi di verità di $p(x)$ e $q(x)$ in U).

Logica	Insiemi	Esempio in $U = \{1, 2, \ldots, 10\}$, p: «x è pari», q: «$x > 6$»
$\neg p(x)$	$\overline{P}$	$\{1, 3, 5, 7, 9\}$
$p(x) \wedge q(x)$	$P \cap Q$	$\{8, 10\}$
$p(x) \vee q(x)$	$P \cup Q$	$\{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$p(x) \wedge \neg q(x)$	$P \setminus Q$	$\{2, 4, 6\}$
$p(x) \Rightarrow q(x)$ vera per ogni x	$P \subseteq Q$	falso: $2 \in P$ ma $2 \notin Q$
$p(x) \Leftrightarrow q(x)$ vera per ogni x	$P = Q$	falso

5.5.3 I quantificatori

Un enunciato aperto diventa una proposizione anche in un altro modo: dicendo per *quanti* elementi è vero. Il **quantificatore universale** $\forall$ si legge «per ogni»: la scrittura $\forall x \in U,\ p(x)$ significa «ogni elemento di U rende vero $p(x)$», ed è vera se l'insieme di verità è tutto U. Il **quantificatore esistenziale** $\exists$ si legge «esiste (almeno un)»: $\exists x \in U \mid p(x)$ significa «almeno un elemento di U rende vero $p(x)$», ed è vera se l'insieme di verità non è vuoto. Per esempio:

- «$\forall x \in \mathbb{N},\ x + 1 > x$» è vera;
- «$\forall x \in \mathbb{N},\ x$ è pari» è falsa: basta l'esempio $x = 3$;
- «$\exists x \in \mathbb{N} \mid x + 3 = 1$» è falsa, mentre «$\exists x \in \mathbb{Z} \mid x + 3 = 1$» è vera ($x = -2$).

Per dimostrare che una proposizione universale è falsa basta un solo caso in cui il predicato è falso: lo si chiama controesempio. Invece, per dimostrare che è vera, non bastano mille esempi: serve un ragionamento che valga per tutti i casi. Al contrario, per dimostrare che una proposizione esistenziale è vera basta esibire un esempio.

Questa osservazione contiene già le regole per la **negazione dei quantificatori**. Dire che «non è vero che tutti gli elementi hanno la proprietà» significa che *almeno uno* non ce l'ha; dire che «non esiste un elemento con la proprietà» significa che *tutti* non ce l'hanno:

$$\neg(\forall x,\ p(x)) \Leftrightarrow \exists x \mid \neg p(x) \qquad \neg(\exists x \mid p(x)) \Leftrightarrow \forall x,\ \neg p(x)$$

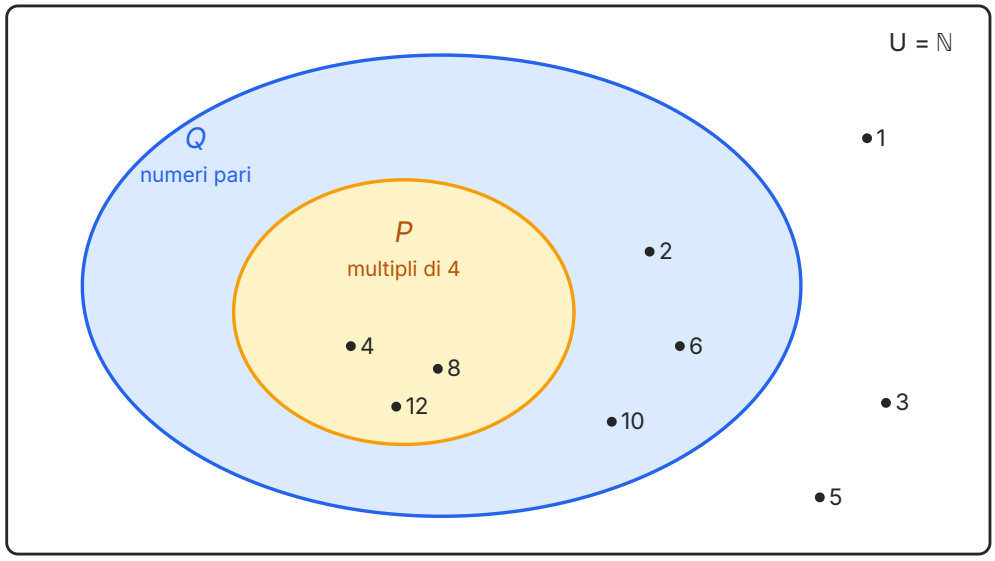
La negazione di «tutti i numeri primi sono dispari» è «esiste almeno un numero primo che non è dispari», ed è la negazione a essere vera: il controesempio è 2. La negazione di «esiste un numero naturale il cui quadrato è 2» è «per ogni numero naturale, il quadrato è diverso da 2».

La negazione di «Tutti gli studenti hanno consegnato il compito» **non** è «Nessuno studente ha consegnato il compito», ma «Almeno uno studente non ha consegnato il compito». «Nessuno» è un'affermazione molto più forte: significa «$\forall x,\ \neg p(x)$». Fai attenzione anche alla lingua parlata: «tutti i ragazzi non sono venuti» è ambiguo, e in matematica va evitato.

5.6 Condizioni, teoremi e dimostrazioni

5.6.1 Condizione necessaria e condizione sufficiente

Consideriamo in $\mathbb{N}$ i predicati $p(x)$: «x è multiplo di 4» e $q(x)$: «x è pari». Per ogni numero naturale vale $p(x) \Rightarrow q(x)$: ogni multiplo di 4 è pari. Come mostra la figura 5.6, ciò significa che l'insieme di verità P è contenuto in Q.



$P \subseteq Q$ significa $p(x) \Rightarrow q(x)$

p è condizione sufficiente per *q*; *q* è condizione necessaria per *p*

Figura 5.6 L'implicazione come inclusione: l'insieme di verità P di «x è multiplo di 4» è contenuto nell'insieme di verità Q di «x è pari».

Quando $p \Rightarrow q$ è vera si dice che:

- p è **condizione sufficiente** per q: *basta* sapere che un numero è multiplo di 4 per essere sicuri che sia pari;
- q è **condizione necessaria** per p: un numero *deve* essere pari per poter essere multiplo di 4; se non è pari, non può esserlo.

Essere multiplo di 4 non è però *necessario* per essere pari (6 è pari ma non è multiplo di 4), ed essere pari non è *sufficiente* per essere multiplo di 4. Quando valgono entrambe le implicazioni, p

$\Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$, si dice che p è condizione necessaria e sufficiente per q, e si scrive $p \Leftrightarrow q$; i due insiemi di verità coincidono. Per esempio, in $\mathbb{N}$: «x è divisibile per 10» $\Leftrightarrow$ «l'ultima cifra di x è 0».

Nella lingua di tutti i giorni le due condizioni si confondono spesso. «Per prendere la patente è necessario avere almeno 18 anni» è vero, ma compiere 18 anni non basta: bisogna anche superare gli esami. La maggiore età è condizione necessaria, non sufficiente.

5.6.2 Implicazione inversa, contraria e contronominale

A partire da un'implicazione $p \Rightarrow q$, detta implicazione diretta, se ne possono costruire altre tre scambiando o negando antecedente e conseguente. La tabella 5.3 le mette a confronto su un esempio.

Tabella 5.3 Le quattro implicazioni costruite a partire da p: «x è multiplo di 4», q: «x è pari» (in $\mathbb{N}$).

Nome	Forma	Esempio	Vera?
diretta	$p \Rightarrow q$	se x è multiplo di 4, allora è pari	sì
inversa	$q \Rightarrow p$	se x è pari, allora è multiplo di 4	no ($x = 6$)
contraria	$\neg p \Rightarrow \neg q$	se x non è multiplo di 4, allora non è pari	no ($x = 6$)
contronominale	$\neg q \Rightarrow \neg p$	se x non è pari, allora non è multiplo di 4	sì

La implicazione inversa $q \Rightarrow p$ scambia antecedente e conseguente; la contraria $\neg p \Rightarrow \neg q$ li nega; la **contronominale** $\neg q \Rightarrow \neg p$ li scambia e li nega. Come abbiamo dimostrato con la tavola di verità del paragrafo 5.4.4, **un'implicazione e la sua contronominale sono equivalenti**: sono vere o false insieme. L'inversa invece può essere falsa anche quando la diretta è vera. Dedurre da «se piove la strada è bagnata» che «se la strada è bagnata allora piove» è un errore di ragionamento: la strada può essere bagnata perché è passata l'autobotte che la lava.

5.6.3 Che cos'è un teorema

In matematica un **teorema** è una proposizione di cui si dimostra la verità a partire da definizioni, da proprietà già dimostrate e da proposizioni assunte come vere senza dimostrazione (gli *assiomi* o *postulati*, di cui parleremo nel capitolo 12). Quasi sempre un teorema ha la forma di un'implicazione $I \Rightarrow T$: la parte I si chiama ipotesi (ciò che si suppone vero), la parte T si chiama tesi (ciò che si vuole dimostrare). La dimostrazione è una catena di passaggi, ciascuno giustificato, che porta dall'ipotesi alla tesi. Quando anche l'implicazione inversa $T \Rightarrow I$ è vera e dimostrata, si ha il teorema inverso, e i due enunciati si riassumono con «se e solo se». Fra i modi di dimostrare ne vediamo tre.

Dimostrazione diretta. Si parte dall'ipotesi e, passo dopo passo, si arriva alla tesi. *Teorema:* se a e b sono numeri naturali pari, allora $a + b$ è pari. *Ipotesi:* a e b pari. *Tesi:* $a + b$ pari. Essere pari significa essere il doppio di un numero naturale: $a = 2m$ e $b = 2n$, con $m, n \in \mathbb{N}$. Allora, per la

proprietà distributiva, $a + b = 2m + 2n = 2(m + n)$, che è il doppio del numero naturale $m + n$, quindi è pari. Come vedi, nessun numero di esempi ($2 + 4$, $6 + 8$, ...) avrebbe potuto sostituire questo ragionamento, che vale per *tutte* le coppie di numeri pari.

Dimostrazione per contronominale. Poiché $I \Rightarrow T$ equivale a $\neg T \Rightarrow \neg I$, a volte è più comodo dimostrare quest'ultima.

IN SINTESI

Teorema. Se il quadrato di un numero naturale n è dispari, allora n è dispari.

Ipotesi: n^2 è dispari. **Tesi:** n è dispari.

Dimostrazione. Dimostriamo la contronominale: «se n è pari, allora n^2 è pari». Se n è pari, $n = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$. Per le proprietà delle potenze $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2)$, che è il doppio di un numero naturale, quindi pari. Poiché la contronominale è vera, è vero anche il teorema. c.v.d.

Dimostrazione per assurdo. Si suppone che la tesi sia falsa e si mostra che da questa supposizione, insieme all'ipotesi, discende una contraddizione, cioè una proposizione del tipo $r \wedge \neg r$; poiché una contraddizione non può essere vera, la supposizione era sbagliata e la tesi è vera. *Teorema:* non esiste un numero naturale più grande di tutti gli altri. *Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che esista un numero naturale M maggiore o uguale a ogni numero naturale. Anche $M + 1$ è un numero naturale, e $M + 1 > M$: allora M è maggiore o uguale a ogni naturale e, insieme, esiste un naturale maggiore di M. È una contraddizione; quindi il numero M non esiste. c.v.d. Hai già incontrato una celebre dimostrazione per assurdo: quella dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ (capitolo 3). Anche il ragionamento di Euclide sull'infinità dei numeri primi (capitolo 1) si può scrivere in questa forma: si suppone che i primi siano in numero finito, si costruisce il prodotto di tutti i primi aumentato di 1 e si arriva a una contraddizione.

ESEMPIO SVOLTO

Riconoscere la struttura di un enunciato

Considera l'enunciato: «Ogni numero naturale divisibile per 9 è divisibile per 3». Individua ipotesi e tesi, scrivi l'inversa e la contronominale e stabilisci quali sono vere.

1. Forma «se... allora». «Se $n \in \mathbb{N}$ è divisibile per 9, allora n è divisibile per 3.» Ipotesi: n divisibile per 9. Tesi: n divisibile per 3.

2. È vera? Se $n = 9k$, allora $n = 3 \cdot (3k)$: sì, la diretta è vera.

3. Inversa: «se n è divisibile per 3, allora è divisibile per 9». Falsa: controesempio $n = 6$.

4. Contronominale: «se n non è divisibile per 3, allora non è divisibile per 9». Vera, perché equivalente alla diretta.

Conclusione: la divisibilità per 9 è condizione sufficiente, ma non necessaria, per la divisibilità per 3.

APPROFONDIMENTO

Cantor, Russell e il barbiere

La teoria degli insiemi come disciplina matematica nasce con Georg Cantor (1845–1918), che nella seconda metà dell'Ottocento studiò anche gli insiemi infiniti, scoprendo che non sono tutti «grandi uguali». Nel 1901 Bertrand Russell si accorse che l'idea ingenua «ogni proprietà definisce un insieme» porta a una contraddizione. Considera l'insieme R di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi: R appartiene a R? Se sì, per definizione non dovrebbe appartenervi; se no, allora dovrebbe. Una versione divulgativa è il «paradosso del barbiere»: in un villaggio il barbiere rade tutti e soli gli uomini che non si radono da soli; chi rade il barbiere? Per evitare paradossi di questo tipo i matematici del Novecento hanno costruito teorie assiomatiche degli insiemi, più caute nel dire quali raccolte sono insiemi. Nel lavoro di tutti i giorni, fissare un universo U, come abbiamo fatto noi, basta a stare al sicuro.

SINTESI

- Un insieme è una raccolta di oggetti per cui si può stabilire in modo oggettivo l'appartenenza ($\in$, $\notin$); si rappresenta per elencazione, per proprietà caratteristica o con un diagramma di Eulero-Venn.
- $\varnothing$ non ha elementi ed è sottoinsieme di ogni insieme; $B \subseteq A$ se ogni elemento di B sta in A; un insieme di n elementi ha 2^n sottoinsiemi.
- Intersezione: elementi comuni; unione: elementi di almeno uno; differenza $A \setminus B$: elementi di A che non stanno in B; complementare: $U \setminus A$.
- Intersezione e unione sono commutative, associative e ciascuna distributiva rispetto all'altra; le leggi di De Morgan scambiano $\cap$ e $\cup$ passando ai complementari.
- Una partizione divide un insieme in parti non vuote, a due a due disgiunte, la cui unione è l'insieme.
- Il prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme delle coppie ordinate $(a; b)$; $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$; nei problemi con tre insiemi si riempie il diagramma partendo dal centro.
- Una proposizione è vera o falsa; i connettivi $\neg$, $\wedge$, $\vee$ (inclusivo), $\veebar$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ sono definiti dalle tavole di verità; $p \Rightarrow q$ è falsa solo se p è V e q è F.
- $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$; $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$; $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$.
- La negazione di «$\forall x,\ p(x)$» è «$\exists x \mid \neg p(x)$»; per smentire un'affermazione universale basta un controesempio.
- Se $p \Rightarrow q$, p è condizione sufficiente per q e q è necessaria per p; l'implicazione equivale alla contronominale, non all'inversa.
- Un teorema collega un'ipotesi a una tesi; si dimostra in modo diretto, per contronominale o per assurdo.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Quale delle seguenti raccolte è un insieme in senso matematico?

   A. I numeri molto grandi.

   B. Le città più belle d'Italia.

   C. I divisori di 18.

   D. Gli studenti simpatici della classe.

2. ● Sia $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$. Quale scrittura è corretta?

   A. $0 \in A$

   B. $4 \in A$

   C. $\{0\} \in A$

   D. $A = \{1, 2, 3\}$

3. ●● Un insieme ha 5 elementi. Quanti sono i suoi sottoinsiemi?

   A. 10

   B. 25

   C. 31

   D. 32

4. ●● Quale delle seguenti proposizioni è vera?

   A. 3 > 5 e 3 è dispari.

   B. Se 2 + 2 = 5, allora 7 è pari.

   C. 4 è primo o 4 è dispari.

   D. 9 è pari se e solo se 9 è divisibile per 3.

5. ●● La negazione di «Tutti i ragazzi della 1ª B hanno un cellulare» è:

   A. Nessun ragazzo della 1ª B ha un cellulare.

   B. Tutti i ragazzi della 1ª B non hanno un cellulare.

   C. Almeno un ragazzo della 1ª B ha un cellulare.

   D. Almeno un ragazzo della 1ª B non ha un cellulare.

6. ●● L'implicazione $p \Rightarrow q$ è logicamente equivalente a:

   A. $q \Rightarrow p$

   B. $\neg p \Rightarrow \neg q$

   C. $\neg q \Rightarrow \neg p$

   D. $p \wedge q$

7. ●● Per un numero naturale, «essere divisibile per 4» è, rispetto a «essere pari», una condizione:

   A. sufficiente ma non necessaria

   B. necessaria ma non sufficiente

   C. necessaria e sufficiente

   D. né necessaria né sufficiente

8. ●● **Vero o falso?** Correggi le affermazioni false.

   a) $\varnothing \subseteq A$ per ogni insieme A.

   b) $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3\}$.

   c) $A \setminus B = B \setminus A$ per ogni coppia di insiemi.

   d) La negazione di $p \wedge q$ è $\neg p \wedge \neg q$.

   e) Se p è falsa, $p \Rightarrow q$ è vera qualunque sia q.

   f) Per ogni coppia di insiemi finiti, $|A \cup B| = |A| + |B|$.

9. ● **Completa.**
a) Se ogni elemento di A appartiene anche a B, si scrive A _____ B.
b) Una proposizione composta vera per ogni valore di verità delle componenti si chiama _____ .
c) Nell'implicazione $p \Rightarrow q$, p si chiama _____ e q si chiama _____ .
d) L'insieme dei valori che rendono vero un enunciato aperto si chiama _____ .
e) Due insiemi senza elementi comuni si dicono _____ .

Calcolare

10. ● Rappresenta per elencazione.
a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è un divisore di } 20\}$ b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 8\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 2\}$ d) $D = \{x \mid x = 3n, n \in \mathbb{N}, n < 5\}$

11. ● Rappresenta per proprietà caratteristica.
a) $\{0, 5, 10, 15, 20\}$ b) $\{1, 4, 9, 16, 25\}$ c) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ d) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$

12. ●● a) Scrivi tutti i sottoinsiemi di $A = \{r, s, t\}$ e indica quali sono propri. b) Scrivi $\mathcal{P}(B)$ per $B = \{0, 1\}$.
c) Quanti elementi ha $\mathcal{P}(C)$ se $|C| = 7$?

13. ●● Sia $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 12\}$, A l'insieme dei divisori di 12 e B l'insieme dei numeri pari di U. Calcola: a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A \setminus B$ d) $B \setminus A$ e) $\overline{A}$ f) il complementare di $A \cup B$.

14. ●● Con gli insiemi dell'esercizio 13, verifica elencando gli elementi che il complementare di $A \cap B$ è uguale a $\overline{A} \cup \overline{B}$.

15. ● Siano $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$. a) Scrivi $A \times B$ e $B \times A$. b) Sono uguali? c) Quanti elementi ha $A \times A$?

16. ●● Sapendo che $A \times B = \{(1; 3), (1; 5), (2; 3), (2; 5), (4; 3), (4; 5)\}$, determina A e B e verifica che $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

17. ● Stabilisci il valore di verità.
a) 15 è multiplo di 3 e di 5. b) 8 è primo o 8 è pari. c) 6 è dispari aut 6 è divisibile per 3.
d) Se 10 è divisibile per 4, allora 10 è pari. e) 12 è divisibile per 6 $\Leftrightarrow$ 12 è divisibile per 2 e per 3.
f) Se $3 < 5$, allora $5 < 3$.

18. ●● Costruisci le tavole di verità di: a) $\neg p \vee q$ b) $p \wedge \neg q$ c) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ d) $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$, e confrontale.

19. ●● Stabilisci se ciascuna proposizione è una tautologia, una contraddizione o nessuna delle due.
a) $p \vee \neg p$ b) $(p \wedge q) \Rightarrow p$ c) $p \wedge \neg p$ d) $p \Rightarrow (p \wedge q)$ e) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

20. ●● Determina l'insieme di verità nell'universo indicato.
a) «x è un divisore di 18», in $\mathbb{N}$ b) «$x + 3 < 7$», in $\mathbb{N}$ c) «$x^2 = 4$», in $\mathbb{Z}$
d) «$x^2 = 4$», in $\mathbb{N}$ e) «$2x = 5$», in $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Q}$

21. ●● Scrivi la negazione di ciascuna proposizione e stabilisci se è vera la proposizione o la sua negazione.
a) $\forall x \in \mathbb{N}, x + 1 > x$ b) $\exists x \in \mathbb{N} \mid 2x = 7$ c) Tutti i numeri primi sono dispari.
d) 9 è dispari e 9 non è primo. e) Se 7 è primo, allora 7 è dispari.

Dimostrare e argomentare

22. ●● Dimostra con le tavole di verità le leggi di De Morgan $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ e $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$. Poi disegna i diagrammi di Venn che illustrano le corrispondenti leggi per gli insiemi.

23. ●● **Trova l'errore.** «Se un numero è divisibile per 6, allora è pari. 14 è pari. Quindi 14 è divisibile per 6.» Spiega quale regola logica è stata violata.

24. ●● Considera l'implicazione «Se un numero naturale termina con la cifra 0, allora è divisibile per 5». Scrivi l'inversa, la contraria e la contronominale, e stabilisci quali delle quattro sono vere, giustificando con un ragionamento o un controesempio.

25. ●● Dimostra in modo diretto che il prodotto di due numeri naturali pari è un multiplo di 4. Individua ipotesi e tesi.

26. ●●● Dimostra che, se il prodotto $a \cdot b$ di due numeri naturali è dispari, allora a e b sono entrambi dispari. (Suggerimento: scrivi la contronominale e usa la legge di De Morgan per negare «a e b sono dispari».)

Problemi

27. ● In una classe di 26 studenti, 15 giocano a pallavolo, 9 suonano uno strumento e 4 fanno entrambe le cose. Quanti studenti non fanno nessuna delle due attività? Quanti giocano solo a pallavolo?

28. ●● In un sondaggio (dati inventati) su 200 persone, 120 leggono notizie online, 95 su giornali di carta e 30 non leggono notizie in nessuno dei due modi. Quante persone leggono notizie in entrambi i modi? Quante solo online? Quante solo su carta?

29. ●● In una scuola di lingue con 80 iscritti, 50 studiano inglese, 30 francese e 20 tedesco; 12 studiano inglese e francese, 8 inglese e tedesco, 6 francese e tedesco, 3 tutte e tre le lingue. Disegna il diagramma di Venn e calcola quanti iscritti non studiano nessuna delle tre lingue (sono iscritti a un altro corso), quanti studiano esattamente una lingua e quanti esattamente due.

30. ●● In un piccolo archivio digitale (dati inventati), 900 documenti contengono la parola «Dante», 600 la parola «Petrarca» e 250 entrambe. Quanti documenti restituisce la ricerca: a) Dante OR Petrarca; b) Dante AND NOT Petrarca; c) Petrarca AND NOT Dante; d) Dante XOR Petrarca (cioè «aut»)?

31. ●● Una lampadina è comandata da due interruttori p e q; scrivi V per «interruttore chiuso» e per «lampadina accesa». a) Costruisci la tavola che descrive gli interruttori in serie e quella degli interruttori in parallelo, e riconosci i connettivi. b) Sulle scale di casa, una lampadina si comanda da due interruttori (in alto e in basso): è spenta quando entrambi gli interruttori sono aperti, e cambia stato ogni volta che si agisce su uno dei due. Quale connettivo descrive questo impianto?

32. ●● In una mensa si può scegliere un primo fra 3, un secondo fra 4 e un dolce fra 2. a) Quanti menù diversi «primo e secondo» si possono comporre? Rappresentali con una tabella a doppia entrata. b) Quanti menù «primo, secondo e dolce»? Spiega il legame con il prodotto cartesiano.

Verso la verifica

33. ●● Sia $U = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 15\}$, A l'insieme dei multipli di 3 e B l'insieme dei numeri dispari di U. a) Elenca A, B, $A \cap B$, $A \setminus B$ e il complementare di $A \cup B$. b) Verifica la formula $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. c) Quale predicato ha come insieme di verità $A \setminus B$? Scrivilo usando i connettivi.

34. ●● a) Costruisci la tavola di verità di $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$ e confrontala con quella di $p \Leftrightarrow q$. b) Scrivi la negazione di «Se studio, allora supero la verifica» e quella di «Esiste uno studente che ha preso 10».

35. ●●● **Sfida.** In un gruppo di 50 studenti ciascuno partecipa ad almeno una fra tre attività: teatro, coro e giornalino. Il teatro ha 22 partecipanti, il coro 25, il giornalino 20; 9 fanno teatro e coro, 7 teatro e giornalino, 8 coro e giornalino. a) Quanti partecipano a tutte e tre le attività? b) Completa il diagramma di Venn. c) Quanti studenti partecipano esattamente a due attività?

PER APPROFONDIRE

- [SMU] R. M. Smullyan, *Qual è il titolo di questo libro?*: indovinelli logici su cavalieri che dicono sempre il vero e furfanti che mentono sempre, per allenarsi con negazioni e implicazioni.
- [LRA] L. Lombardo Radice, *L'infinito*: gli insiemi infiniti e le idee di Cantor raccontate in modo accessibile.
- [BOY] C. B. Boyer, *Storia della matematica*: la nascita della logica simbolica con Boole e della teoria degli insiemi con Cantor.
- [CR] R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il capitolo sull'algebra degli insiemi e le sue applicazioni alla logica.

Glossario del capitolo

Complementare
Insieme degli elementi dell'universo U che non appartengono ad A; si indica con A sopralineato o con $C_U A$.

Condizione necessaria e condizione sufficiente
Se $p \Rightarrow q$ è vera, p è condizione sufficiente per q e q è condizione necessaria per p; se valgono $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$, p è condizione necessaria e sufficiente per q.

Contronominale
Data l'implicazione $p \Rightarrow q$, la contronominale è $\neg q \Rightarrow \neg p$; le due sono logicamente equivalenti.

Dimostrazione per assurdo
Dimostrazione in cui si nega la tesi e si ricava una contraddizione, concludendo che la tesi è vera.

Disgiunzione esclusiva
$p \veebar q$ (aut): vera quando p e q hanno valori di verità diversi.

Enunciato aperto
Frase che contiene una variabile e diventa una proposizione quando alla variabile si attribuisce un valore; detto anche predicato.

Implicazione materiale
$p \Rightarrow q$: falsa solo quando p è vera e q è falsa.

Insieme
Raccolta di oggetti (elementi) per la quale si può stabilire in modo oggettivo se un oggetto vi appartiene o no; concetto primitivo.

Insieme delle parti
Insieme $\mathcal{P}(A)$ di tutti i sottoinsiemi di A; se A ha n elementi, $\mathcal{P}(A)$ ne ha 2^n.

Insieme universo
Insieme U che contiene tutti gli insiemi considerati in un problema; nei diagrammi è il rettangolo esterno.

Insieme vuoto
Insieme privo di elementi, indicato con $\varnothing$; è sottoinsieme di ogni insieme.

Intersezione
$A \cap B$: insieme degli elementi che appartengono sia ad A sia a B.

Partizione
Suddivisione di un insieme in sottoinsiemi non vuoti, a due a due disgiunti, la cui unione è l'insieme stesso.

Prodotto cartesiano
$A \times B$: insieme delle coppie ordinate (a; b) con $a \in A$ e $b \in B$; ha $|A| \cdot |B|$ elementi.

Proposizione
Affermazione di cui si può stabilire in modo oggettivo se è vera o falsa.

Quantificatore
Simbolo che indica per quanti elementi vale un predicato: $\forall$ (per ogni) o $\exists$ (esiste almeno un).

Sottoinsieme
$B \subseteq A$ se ogni elemento di B appartiene ad A. $\varnothing$ e A sono i sottoinsiemi impropri di A.

Tautologia
Proposizione composta vera per qualunque valore di verità delle componenti, come $p \vee \neg p$.

Tavola di verità
Tabella che dà il valore di verità di una proposizione composta per ogni combinazione di valori delle componenti.

Unione
$A \cup B$: insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi.

Soluzioni

1. C. L'appartenenza ai divisori di 18 si stabilisce in modo oggettivo; nelle altre raccolte dipende da un giudizio personale.

2. A. $A = \{0, 1, 2, 3\}$: $0 \in A$. $4 \notin A$; $\{0\}$ è un sottoinsieme, non un elemento ($\{0\} \subseteq A$); nell'elenco D manca lo 0.

3. D. $2^5 = 32$ (compresi $\varnothing$ e l'insieme stesso).

4. B. L'antecedente «2 + 2 = 5» è falso, quindi l'implicazione è vera. A: F $\wedge$ V = F; C: F $\vee$ F = F; D: F $\Leftrightarrow$ V = F.

5. D. La negazione di «per ogni ragazzo vale...» è «esiste almeno un ragazzo per cui non vale...».

6. C. Un'implicazione equivale alla sua contronominale; A è l'inversa, B la contraria.

7. A. Ogni multiplo di 4 è pari (sufficiente), ma 6 è pari e non è multiplo di 4 (non necessaria).

8. a) V. b) F: $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ (è un sottoinsieme, non un elemento). c) F: con $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$, $A \setminus B = \{1\}$ e $B \setminus A = \{3\}$. d) F: è $\neg p \vee \neg q$. e) V. f) F: vale solo se $A \cap B = \varnothing$; in generale $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

9. a) $\subseteq$. b) tautologia. c) antecedente (premessa); conseguente (conclusione). d) insieme di verità. e) disgiunti.

10. a) {1, 2, 4, 5, 10, 20}. b) {3, 4, 5, 6, 7}. c) {−1, 0, 1, 2}. d) {0, 3, 6, 9, 12}.

11. Traccia (sono accettabili altre descrizioni corrette): a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ è multiplo di 5 e $x \leq 20\}$. b) $\{x \mid x = n^2, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$. c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}$. d) $\{x \mid x = 1/n, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 4\}$.

12. a) $\varnothing$, $\{r\}$, $\{s\}$, $\{t\}$, $\{r, s\}$, $\{r, t\}$, $\{s, t\}$, $\{r, s, t\}$: $8 = 2^3$. Propri: i 6 diversi da $\varnothing$ e da A. b) $\mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. c) $2^7 = 128$.

13. $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. a) {2, 4, 6, 12}. b) {1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12}. c) {1, 3}. d) {8, 10}. e) {5, 7, 8, 9, 10, 11}. f) {5, 7, 9, 11}.

14. Complementare di $A \cap B = U \setminus \{2, 4, 6, 12\} = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$. $\overline{A} = \{5, 7, 8, 9, 10, 11\}$, $\overline{B} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, la loro unione è {1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11}: coincide.

15. a) $A \times B = \{(1; a), (1; b), (2; a), (2; b), (3; a), (3; b)\}$; $B \times A = \{(a; 1), (a; 2), (a; 3), (b; 1), (b; 2), (b; 3)\}$. b) No: per esempio $(1; a) \neq (a; 1)$. c) $3 \cdot 3 = 9$.

16. A è formato dai primi elementi: {1, 2, 4}; B dai secondi: {3, 5}. $3 \cdot 2 = 6$ coppie.

17. a) V $\wedge$ V = V. b) F $\vee$ V = V. c) F $\veebar$ V = V. d) F $\Rightarrow$ V = V. e) V $\Leftrightarrow$ V = V. f) V $\Rightarrow$ F = F.

18. Righe nell'ordine (p, q) = (V, V), (V, F), (F, V), (F, F). a) V, F, V, V. b) F, V, F, F. c) V, F, F, V (è $p \Leftrightarrow q$). d) Entrambe F, F, F, V: sono equivalenti (legge di De Morgan).

19. a) Tautologia. b) Tautologia (V, V, V, V). c) Contraddizione. d) Nessuna delle due: V, F, V, V. e) Tautologia (un'implicazione equivale alla contronominale).

20. a) {1, 2, 3, 6, 9, 18}. b) {0, 1, 2, 3}. c) {−2, 2}. d) {2}. e) $\varnothing$ in $\mathbb{N}$; {5/2} in $\mathbb{Q}$.

21. a) $\exists x \in \mathbb{N} \mid x + 1 \leq x$: è vera la proposizione data. b) $\forall x \in \mathbb{N}$, $2x \neq 7$: è vera la negazione ($2x$ è sempre pari). c) «Esiste un numero primo che non è dispari»: è vera la negazione (2). d) «9 non è dispari o 9 è primo»: è vera la proposizione data ($9 = 3 \cdot 3$ non è primo). e) «7 è primo e 7 non è dispari»: è vera la proposizione data.

22. $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ hanno entrambe la colonna F, F, F, V; $\neg(p \wedge q)$ e $\neg p \vee \neg q$ hanno entrambe F, V, V, V. Venn: il complementare di $\overline{A} \cup \overline{B}$ è la zona esterna a entrambi i cerchi, uguale a $\overline{A \cap B}$; il complementare di $\overline{A \cap B}$ è tutto tranne la zona comune, uguale a $\overline{A} \cup \overline{B}$ (figura 5.3).

23. Dalla verità di $p \Rightarrow q$ e di q si è dedotta p: è come usare l'implicazione inversa $q \Rightarrow p$ («ogni pari è divisibile per 6»), che è falsa. Infatti $14 = 6 \cdot 2 + 2$ non è divisibile per 6. Da $p \Rightarrow q$ e q vera non si può concludere nulla su p.

24. Diretta: vera (se termina con 0 è multiplo di 10 = 2 · 5, quindi di 5). Inversa «se è divisibile per 5, termina con 0»: falsa (15). Contraria «se non termina con 0, non è divisibile per 5»: falsa (15). Contronominale «se non è divisibile per 5, non termina con 0»: vera, perché equivalente alla diretta.

25. Ipotesi: a e b pari. Tesi: $a \cdot b$ multiplo di 4. Da $a = 2m$ e $b = 2n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) segue $a \cdot b = 2m \cdot 2n = 4 \cdot (mn)$, multiplo di 4. c.v.d.

26. Contronominale: «se non è vero che a e b sono entrambi dispari, allora $a \cdot b$ è pari». Per De Morgan l'antecedente è «a è pari o b è pari». Se a è pari, $a = 2k$ e $a \cdot b = 2 \cdot (kb)$ è pari; se b è pari si ragiona allo stesso modo. La contronominale è vera, quindi lo è il teorema. c.v.d.

27. Almeno un'attività: 15 + 9 − 4 = 20; nessuna: 26 − 20 = 6. Solo pallavolo: 15 − 4 = 11.

28. Almeno un modo: 200 − 30 = 170. Entrambi: 120 + 95 − 170 = 45. Solo online: 120 − 45 = 75; solo carta: 95 − 45 = 50.

29. Centro 3. Solo inglese e francese 12 − 3 = 9; solo inglese e tedesco 8 − 3 = 5; solo francese e tedesco 6 − 3 = 3. Solo inglese 50 − 9 − 5 − 3 = 33; solo francese 30 − 9 − 3 − 3 = 15; solo tedesco 20 − 5 − 3 − 3 = 9. Almeno una lingua: 33 + 15 + 9 + 9 + 5 + 3 + 3 = 77; nessuna: 80 − 77 = 3. Esattamente una: 33 + 15 + 9 = 57; esattamente due: 9 + 5 + 3 = 17. Controllo: 57 + 17 + 3 + 3 = 80.

30. a) 900 + 600 − 250 = 1250. b) 900 − 250 = 650. c) 600 − 250 = 350. d) 650 + 350 = 1000.

31. a) Serie: accesa solo con (V, V): congiunzione $p \wedge q$. Parallelo: spenta solo con (F, F): disgiunzione inclusiva $p \vee q$. b) Spenta con (F, F); agendo su un interruttore si accende: (V, F) e (F, V) accesa; agendo anche sull'altro si spegne: (V, V) spenta. È accesa quando gli interruttori sono in posizioni diverse: disgiunzione esclusiva $p \veebar q$.

32. a) 3 · 4 = 12 menù: tabella con 3 righe (primi) e 4 colonne (secondi), una casella per menù. b) 3 · 4 · 2 = 24. Ogni menù è una terna ordinata (primo; secondo; dolce): l'insieme dei menù è il prodotto cartesiano dei tre insiemi, e il numero degli elementi è il prodotto delle cardinalità.

33. a) $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$; $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$; $A \cap B = \{3, 9, 15\}$; $A \setminus B = \{0, 6, 12\}$; complementare di $A \cup B = \{2, 4, 8, 10, 14\}$. b) 6 + 8 − 3 = 11, e infatti $A \cup B$ ha 16 − 5 = 11 elementi. c) «x è multiplo di 3 $\wedge$ $\neg$(x è dispari)», cioè x è un multiplo di 3 pari (multiplo di 6).

34. a) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$: V, F, F, V, identica a $p \Leftrightarrow q$: le due proposizioni sono equivalenti. b) «Studio e non supero la verifica»; «Nessuno studente ha preso 10» (cioè: ogni studente ha preso un voto diverso da 10).

35. a) Chiamiamo x il numero di chi fa tutte e tre le attività e riempiamo il diagramma dal centro: solo teatro e coro $9 - x$, solo teatro e giornalino $7 - x$, solo coro e giornalino $8 - x$; solo teatro $22 - (9 - x) - (7 - x) - x = 6 + x$, solo coro $8 + x$, solo giornalino $5 + x$. Tutti partecipano ad almeno un'attività, quindi la somma delle sette regioni è 50: sommando le sette espressioni le x si semplificano tutte tranne una, e resta $43 + x = 50$, e $x = 7$ (lo stesso risultato si ottiene con la formula per tre insiemi). b) Solo teatro e coro 9 − 7 = 2; solo teatro e giornalino 7 − 7 = 0; solo coro e giornalino 8 − 7 = 1; solo teatro 22 − 2 − 0 − 7 = 13; solo coro 25 − 2 − 1 − 7 = 15; solo giornalino 20 − 0 − 1 − 7 = 12 (somma 50). c) 2 + 0 + 1 = 3.