CAPITOLO

4

Rapporti, proporzioni e percentuali

Un numero da solo dice poco: diventa interessante quando lo confronti con un altro.

OBIETTIVI

1. Calcolare e interpretare il rapporto tra numeri e tra grandezze, omogenee e non omogenee.
2. Usare le proprietà delle proporzioni per trovare un termine incognito.
3. Riconoscere grandezze direttamente e inversamente proporzionali e risolvere problemi del tre semplice.
4. Ripartire una quantità in parti direttamente o inversamente proporzionali.
5. Calcolare percentuali, aumenti, sconti e variazioni percentuali, distinguendo le percentuali dai punti percentuali.
6. Leggere e usare la scala di una carta o di un modello.

INDICE DEL CAPITOLO

4.1 Il rapporto 2
4.2 Le proporzioni 3
4.3 Grandezze direttamente e inversamente proporzionali 7
4.4 La ripartizione proporzionale 10
4.5 Le percentuali 12
4.6 Scale e ingrandimenti 15

Matematica 1 · Parte I · I numeri · versione 1.0
Capitolo 4: Rapporti, proporzioni e percentuali · pagine 99–120 del volume completo · estratto per lo studio

Sulla confezione di un succo di frutta leggi «1,5 l a 2,10 €», su quella accanto «1 l a 1,50 €»: quale conviene? In una ricetta per quattro persone servono 300 g di farina, ma a cena sarete in sei. Il navigatore dice che mancano 18 km e che arriverai tra 15 minuti. Sulla carta dei sentieri due rifugi distano 7 cm: quanto cammino ti aspetta davvero?

In tutte queste situazioni non conta un singolo numero, ma il *confronto* fra due numeri. Lo strumento matematico per confrontare è il **rapporto**; quando due rapporti sono uguali si ottiene una **proporzione**; e quando il confronto si fa con 100 si parla di **percentuale**. In questo capitolo userai ciò che sai sulle frazioni (capitolo 3) per affrontare problemi di tutti i giorni.

4.1 Il rapporto

4.1.1 Rapporto tra due numeri

Dati due numeri a e b, con $b \neq 0$, si chiama **rapporto** tra a e b il quoziente della divisione $a : b$, che possiamo scrivere anche come frazione $\frac{a}{b}$. Il primo numero, a, si chiama **antecedente**; il secondo, b, si chiama **conseguente**. Per esempio, il rapporto tra 12 e 8 è

$$12 : 8 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Il risultato ci dice che 12 è «una volta e mezza» 8. Scambiando antecedente e conseguente otteniamo il rapporto inverso, $8 : 12 = \frac{2}{3}$: questa volta leggiamo che 8 è i due terzi di 12. Il conseguente non può essere zero, per lo stesso motivo per cui non si può dividere per zero (capitolo 1).

Poiché un rapporto è una frazione, possiamo semplificarlo con la proprietà invariantiva: moltiplicando o dividendo antecedente e conseguente per lo stesso numero diverso da zero, il rapporto non cambia. Così $36 : 48 = 3 : 4$, e anche un rapporto tra numeri decimali o frazionari si può ridurre a un rapporto tra interi: $2{,}5 : 0{,}75 = 250 : 75 = 10 : 3$.

4.1.2 Grandezze omogenee e non omogenee

Molto spesso confrontiamo non numeri «puri», ma *grandezze*: lunghezze, masse, tempi, prezzi. Due grandezze si dicono **grandezze omogenee** quando sono dello stesso tipo e si possono misurare con la stessa unità di misura: due lunghezze, due masse, due durate. Il rapporto tra due grandezze omogenee è un numero puro, senza unità di misura, *a condizione* di esprimere en-

trambe le grandezze con la stessa unità. Il rapporto tra un'altezza di 2 m e una di 50 cm non è 2 : 50, ma

$$200\text{ cm} : 50\text{ cm} = 4,$$

cioè la prima altezza è quattro volte la seconda. Il rapporto tra 45 minuti e 2 ore è $45 : 120 = \frac{3}{8}$.

Il rapporto tra due grandezze non omogenee, cioè di tipo diverso, è invece una nuova grandezza, con una propria unità di misura. È così che nascono molte grandezze della fisica e dell'economia. Se un'auto percorre 150 km in 2 ore, il rapporto tra spazio e tempo è la sua velocità media:

$$v = \frac{150\text{ km}}{2\text{ h}} = 75\text{ km/h}.$$

Allo stesso modo il rapporto tra il prezzo di un prodotto e la sua massa è il prezzo unitario, in €/kg. È il numero giusto da confrontare al supermercato: un caffè da 250 g a 3,20 € costa 3,20 : 0,25 = 12,80 €/kg, quindi la confezione da 1 kg a 11,60 € conviene, anche se il suo prezzo totale è più alto. Il rapporto tra la distanza misurata su una carta geografica e la distanza reale corrispondente si chiama *scala*: lo studieremo nel paragrafo 4.6.

COLLEGAMENTI

Fisica: velocità e densità sono rapporti

Un blocchetto di alluminio di massa 54 g occupa un volume di 20 cm^3. Il rapporto tra massa e volume è la *densità*: $d = 54\text{ g} : 20\text{ cm}^3 = 2,7\text{ g/cm}^3$. Un blocchetto di alluminio grande il doppio ha massa doppia, ma il rapporto resta 2,7 g/cm^3: la densità non dipende dalla quantità, ma dal materiale. Per questo in laboratorio si usa per riconoscere una sostanza.

Anche le unità di misura si trasformano con i rapporti. Poiché 1 km = 1000 m e 1 h = 3600 s,

$$1\text{ m/s} = \frac{3600\text{ m}}{3600\text{ s}} = \frac{3,6\text{ km}}{1\text{ h}} = 3,6\text{ km/h}.$$

Un corridore che va a 5 m/s viaggia quindi a 18 km/h.

4.2 Le proporzioni

4.2.1 Definizione e proprietà fondamentale

I rapporti 6 : 8 e 9 : 12 sono diversi nella scrittura ma uguali nel valore: entrambi valgono $\frac{3}{4}$.

Un'uguaglianza tra due rapporti si chiama **proporzione**:

$$a : b = c : d \quad \text{si legge «}a\text{ sta a }b\text{ come }c\text{ sta a }d\text{»}.$$

I quattro numeri si chiamano *termini* della proporzione (supporremo sempre che siano diversi da zero). Il primo e il quarto, a e d, sono gli **estremi**; il secondo e il terzo, b e c, sono i **medi**. Nella proporzione $6 : 8 = 9 : 12$ gli estremi sono 6 e 12, i medi 8 e 9 (figura 4.1).

Osserva i prodotti: $6 \cdot 12 = 72$ e $8 \cdot 9 = 72$. Non è una coincidenza.

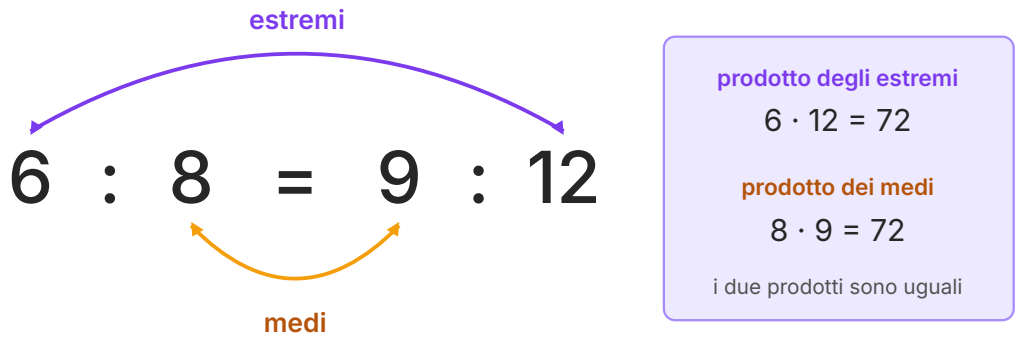


Figura 4.1 Nella proporzione $6 : 8 = 9 : 12$ gli estremi (6 e 12) sono il primo e l'ultimo termine, i medi (8 e 9) quelli centrali. Il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medi: 72 in entrambi i casi.

IN SINTESI

Proprietà fondamentale delle proporzioni. In ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi:

$$a : b = c : d \quad \Rightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c.$$

Vale anche il viceversa: se $a \cdot d = b \cdot c$ (con $b, d \neq 0$), allora $a : b = c : d$.

La dimostrazione è semplice. Scriviamo la proporzione come uguaglianza tra frazioni, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, e moltiplichiamo entrambi i membri per lo stesso numero bd (diverso da zero). Due numeri uguali, moltiplicati per lo stesso numero, danno risultati uguali:

$$\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd \quad \Rightarrow \quad ad = cb.$$

Per il viceversa basta percorrere la strada al contrario, dividendo entrambi i membri di $ad = bc$ per bd. La **proprietà fondamentale** ci offre quindi un modo rapido per *verificare* se quattro numeri formano una proporzione: $5 : 8 = 15 : 24$ è vera perché $5 \cdot 24 = 120 = 8 \cdot 15$, mentre $7 : 9 = 21 : 28$ è falsa perché $7 \cdot 28 = 196$ e $9 \cdot 21 = 189$.

4.2.2 Calcolo di un termine incognito

Il primo uso pratico della proprietà fondamentale è trovare un termine che non conosciamo, indicato con x. Dalla relazione $ad = bc$ si ricava:

- un **medio incognito** è uguale al prodotto degli estremi diviso per il medio noto;
- un **estremo incognito** è uguale al prodotto dei medi diviso per l'estremo noto.

Per esempio, in $15 : x = 6 : 8$ il termine incognito è un medio, quindi $x = (15 \cdot 8) : 6 = 120 : 6 = 20$. In $x : 4 = 21 : 12$ è un estremo, quindi $x = (4 \cdot 21) : 12 = 84 : 12 = 7$. Conviene sempre controllare: $7 : 4$ e $21 : 12$ valgono entrambi 1,75.

Lo stesso metodo funziona con termini frazionari o decimali. Nella proporzione $\frac{2}{3} : x = \frac{4}{5} : 6$ troviamo

$$x = \frac{2}{3} \cdot 6 : \frac{4}{5} = 4 \cdot \frac{5}{4} = 5.$$

4.2.3 Le altre proprietà

Dalla proprietà fondamentale discendono altre quattro proprietà, che permettono di trasformare una proporzione in un'altra ancora vera. Le riassumiamo nella tabella 4.1, usando come esempio la proporzione $6 : 8 = 9 : 12$.

Tabella 4.1 Le proprietà delle proporzioni, a partire da $a : b = c : d$.

Proprietà	Che cosa si fa	Proporzione ottenuta	Esempio
del permutare	si scambiano i medi (oppure gli estremi)	$a : c = b : d$ $(d : b = c : a)$	6 : 9 = 8 : 12
dell'invertire	si scambia ogni antecedente con il suo conseguente	$b : a = d : c$	8 : 6 = 12 : 9
del comporre	la somma dei primi due termini sta al primo (o al secondo) come la somma degli ultimi due sta al terzo (o al quarto)	$(a + b) : a = (c + d) : c$ $(a + b) : b = (c + d) : d$	14 : 6 = 21 : 9 14 : 8 = 21 : 12
dello scomporre	come il comporre, con la differenza al posto della somma ($a > b$, $c > d$)	$(a - b) : a = (c - d) : c$ $(a - b) : b = (c - d) : d$	da 8 : 6 = 12 : 9: 2 : 8 = 3 : 12; 2 : 6 = 3 : 9

Le proprietà del **permutare** e dell'**invertire** si giustificano subito con la proprietà fondamentale: in tutte le proporzioni ottenute il prodotto dei medi e quello degli estremi restano ad e bc. La

proprietà del **comporre** si dimostra aggiungendo 1 a entrambi i membri di $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$: si ottiene $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, cioè proprio $(a + b) : b = (c + d) : d$. In modo analogo, sottraendo 1, si dimostra la proprietà dello **scomporre**. Queste due proprietà sono utilissime quando di due numeri si conoscono il rapporto e la somma (o la differenza).

ESEMPIO SVOLTO

Somma e rapporto noti

Due numeri hanno somma 64 e stanno tra loro come 3 sta a 5. Quali sono?

1. Scriviamo la proporzione. Chiamiamo x e y i due numeri: $x : y = 3 : 5$, con $x + y = 64$.

2. Applichiamo il comporre, confrontando la somma con il primo termine: $(x + y) : x = (3 + 5) : 3$, cioè $64 : x = 8 : 3$.

3. Calcoliamo il medio incognito: $x = (64 \cdot 3) : 8 = 24$. Quindi $y = 64 - 24 = 40$.

4. Verifichiamo: $24 + 40 = 64$ e $24 : 40 = \frac{3}{5}$.

Con la *differenza* si usa lo scomporre. Se $x : y = 7 : 4$ e $x - y = 12$, allora $(x - y) : x = (7 - 4) : 7$, cioè $12 : x = 3 : 7$, da cui $x = 28$ e $y = 28 - 12 = 16$.

4.2.4 Medio proporzionale e catene di rapporti

Una proporzione in cui i due medi sono uguali, come $4 : 10 = 10 : 25$, si dice *continua*, e il termine ripetuto si chiama **medio proporzionale** tra gli estremi. Per trovarlo usiamo ancora la proprietà fondamentale: da $4 : x = x : 25$ segue $x \cdot x = 4 \cdot 25 = 100$, quindi cerchiamo un numero positivo che moltiplicato per sé stesso dia 100: $x = 10$. Il medio proporzionale tra 9 e 16 è 12, perché $12 \cdot 12 = 144 = 9 \cdot 16$.

Non sempre però il medio proporzionale tra due numeri razionali è razionale. Tra 2 e 1 dovremmo trovare un x con $x \cdot x = 2$: nel capitolo 3 hai visto che un numero razionale con questa proprietà non esiste. Problemi come questo porteranno, il prossimo anno, ai numeri reali e ai radicali.

Talvolta più di due rapporti sono uguali tra loro, come in $2 : 3 = 4 : 6 = 10 : 15$. Si parla allora di **catena di rapporti uguali**, e vale una proprietà molto utile: *la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come ciascun antecedente sta al proprio conseguente*. Nell'esempio, $(2 + 4 + 10) : (3 + 6 + 15) = 16 : 24 = 2 : 3$. Infatti, se tutti i rapporti valgono k, ogni antecedente è k volte il suo conseguente, e così anche le somme. Questa proprietà è alla base della ripartizione proporzionale (paragrafo 4.4).

APPROFONDIMENTO

Da Euclide al «tre» dei mercanti

La teoria delle proporzioni è antichissima. Il libro V degli *Elementi* di Euclide (Alessandria, circa 300 a.C.) è interamente dedicato ai rapporti tra grandezze e alle proporzioni; gli storici lo attribuiscono in buona parte al matematico Eudosso di Cnido, vissuto nel IV secolo a.C. I Greci avevano bisogno di una teoria raffinata perché avevano scoperto che esistono grandezze, come il lato e la diagonale del quadrato, il cui rapporto non si può esprimere con due numeri interi (capitolo 3).

Nel 1202 Leonardo Pisano, detto Fibonacci, scrisse il *Liber abaci*, il libro che diffuse in Europa le cifre indo-arabiche. Gran parte dell'opera è dedicata ai problemi dei mercanti: prezzi, cambi tra monete, divisione dei guadagni tra i soci di una compagnia. Per risolverli si usavano le proporzioni, e in particolare la «regola del tre», che incontrerai tra poco con il nome di *tre semplice*.

4.3 Grandezze direttamente e inversamente proporzionali

4.3.1 Proporzionalità diretta

Un quaderno costa 1,50 €. Due quaderni costano 3 €, tre quaderni 4,50 €, e così via. Se indichiamo con x il numero di quaderni e con y la spesa, possiamo costruire una tabella (figura 4.2, a sinistra). Raddoppiando x raddoppia y, triplicando x triplica y; soprattutto, il rapporto $y : x$ è sempre lo stesso, 1,5.

Due grandezze variabili x e y si dicono **direttamente proporzionali** se il loro rapporto è costante:

$$\frac{y}{x} = k \quad \text{cioè} \quad y = k \cdot x \quad (x \neq 0).$$

Il numero k si chiama **costante di proporzionalità**; nell'esempio dei quaderni è il prezzo di un quaderno. Sono direttamente proporzionali, per esempio, il lato e il perimetro di un quadrato ($k = 4$), la massa di un oggetto di alluminio e il suo volume ($k = 2{,}7$ g/cm^3), lo spazio percorso a velocità costante e il tempo impiegato (k è la velocità). Prendendo due coppie di valori corrispondenti, $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$, si ottiene sempre una proporzione: $y_1 : x_1 = y_2 : x_2$.

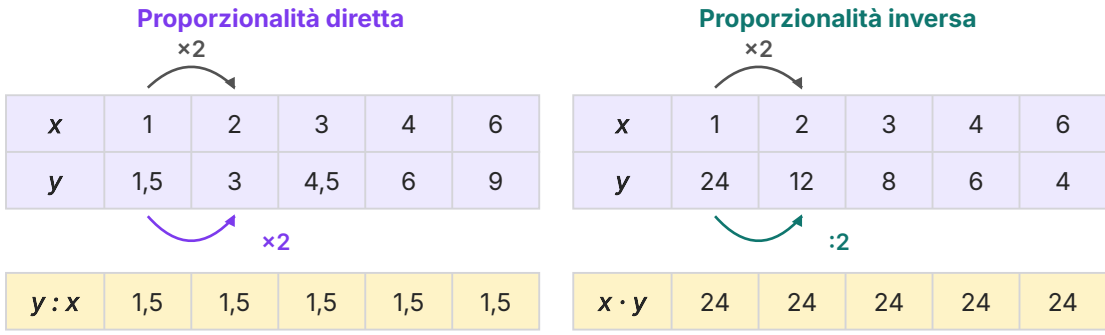


Figura 4.2 A sinistra, quaderni e spesa: il rapporto $y : x$ vale sempre 1,5 e, se x raddoppia, anche y raddoppia. A destra, base e altezza dei rettangoli di area 24: il prodotto $x \cdot y$ vale sempre 24 e, se x raddoppia, y si dimezza.

Attenzione: non basta che due grandezze «crescano insieme». Una corsa in taxi costa 3 € di quota fissa più 1,20 € per ogni chilometro: 1 km costa 4,20 €, 2 km costano 5,40 €. La spesa cresce con i chilometri, ma non raddoppia quando i chilometri raddoppiano, e i rapporti 4,20 : 1 e 5,40 : 2 = 2,70 sono diversi: le due grandezze *non* sono direttamente proporzionali. Nel capitolo 6 vedrai i grafici di queste relazioni.

4.3.2 Proporzionalità inversa

Disegna su un foglio a quadretti tutti i rettangoli formati da 24 quadretti, con lati interi: 1 per 24, 2 per 12, 3 per 8, 4 per 6, e così via (figura 4.3). Se la base raddoppia, l'altezza si dimezza; se la base triplica, l'altezza diventa un terzo. Questa volta a restare costante è il *prodotto*: base · altezza = 24.

Due grandezze variabili x e y si dicono **inversamente proporzionali** se il loro prodotto è costante:

$$x \cdot y = k \quad \text{cioè} \quad y = \frac{k}{x} \qquad (x \neq 0,\ k \neq 0).$$

Sono inversamente proporzionali, per esempio, la velocità media e il tempo impiegato per percorrere una distanza fissata: per fare 360 km servono 6 ore a 60 km/h, 4 ore a 90 km/h, 3 ore a 120 km/h (il prodotto è sempre 360 km). Lo sono anche il numero di persone che si dividono una spesa e la quota di ciascuno. In fisica, a temperatura costante, la pressione e il volume di un gas sono inversamente proporzionali (legge di Boyle). Con due coppie di valori corrispondenti si ottiene la proporzione $x_1 : x_2 = y_2 : y_1$, con i valori di y «in ordine inverso».

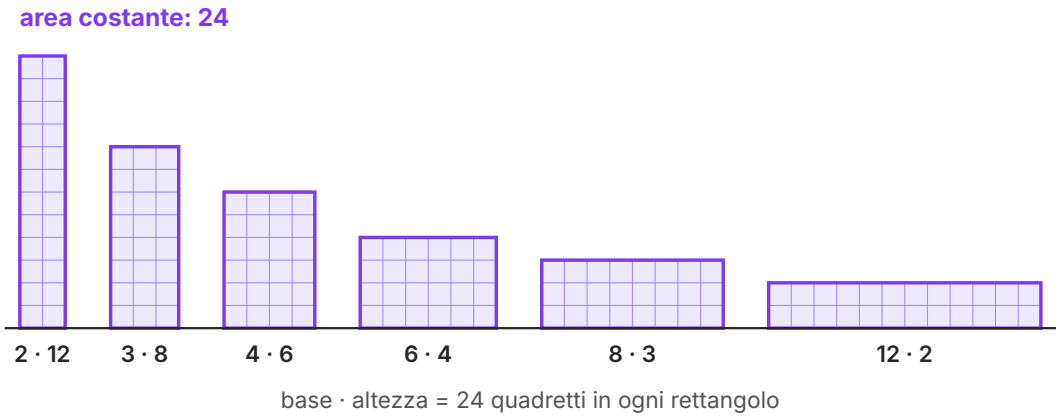


Figura 4.3 Sei rettangoli formati ciascuno da 24 quadretti. Base e altezza sono inversamente proporzionali: quando la base raddoppia (da 2 a 4, da 3 a 6, da 4 a 8, da 6 a 12) l'altezza si dimezza.

ERRORE FREQUENTE

«Una cresce e l'altra cala» non basta

Molti studenti pensano che due grandezze siano inversamente proporzionali ogni volta che, al crescere dell'una, l'altra diminuisce. Non è così. Considera $y = 10 - x$: per $x = 1$ si ha $y = 9$, per $x = 2$ si ha $y = 8$. La y diminuisce, ma il prodotto passa da $1 \cdot 9 = 9$ a $2 \cdot 8 = 16$: non è costante. Raddoppiando x, y non si è dimezzata. Per la proporzionalità inversa serve un **prodotto costante**; per quella diretta un **rapporto costante**. Controlla sempre con almeno due coppie di valori.

4.3.3 Il problema del tre semplice

Si chiama **tre semplice** il problema in cui, date due grandezze proporzionali, si conoscono tre valori e si cerca il quarto. Il primo passo è sempre capire se la proporzionalità è *diretta* o *inversa*: ragionando sulla situazione, chiediti che cosa succede alla seconda grandezza se la prima raddoppia.

Tre semplice diretto. Se 5 kg di mele costano 9,50 €, quanto costano 8 kg? Massa e prezzo sono direttamente proporzionali (il doppio delle mele costa il doppio), quindi il rapporto prezzo : massa è costante:

$$9{,}50 : 5 = x : 8 \quad \Rightarrow \quad x = (9{,}50 \cdot 8) : 5 = 15{,}20\ €.$$

Allo stesso risultato si arriva con la riduzione all'unità: 1 kg costa $9{,}50 : 5 = 1{,}90$ €, quindi 8 kg costano $1{,}90 \cdot 8 = 15{,}20$ €. Il valore «per unità» è proprio la costante di proporzionalità.

Tre semplice inverso. Se 6 operai finiscono un lavoro in 15 giorni, in quanti giorni lo finirebbero 9 operai che lavorano allo stesso ritmo? Più operai impiegano meno tempo: con il doppio

degli operai basterebbe metà del tempo. La proporzionalità è inversa, quindi è costante il prodotto operai · giorni:

$$6 \cdot 15 = 9 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = 90 : 9 = 10 \text{ giorni.}$$

Il prodotto $6 \cdot 15 = 90$ ha un significato concreto: il lavoro richiede 90 «giornate-operaio».

ESEMPIO SVOLTO

Diretta o inversa?

Un'automobile, alla velocità media di 80 km/h, impiega 4 ore e 30 minuti per un viaggio. a) Quanto tempo impiegherebbe a 120 km/h? b) Quanti litri di carburante consuma per percorrere 540 km, se in media fa 15 km con un litro?

a) Velocità e tempo, a parità di distanza, sono inversamente proporzionali. Scriviamo 4 h 30 min = 4,5 h. Il prodotto velocità · tempo è la distanza: $80 \cdot 4{,}5 = 360$ km. A 120 km/h il tempo è $t = 360 : 120 = 3$ h.

b) Distanza e litri consumati sono direttamente proporzionali (a parità di stile di guida): il rapporto distanza : litri vale 15 km/l. Dalla proporzione $15 : 1 = 540 : x$ si ottiene $x = 540 : 15 = 36$ litri.

Controllo di buon senso. Andando più veloce si impiega meno tempo (3 h < 4,5 h); per una distanza maggiore servono più litri. Entrambi i risultati sono coerenti.

4.4 La ripartizione proporzionale

4.4.1 Ripartizione diretta

Al termine di un torneo scolastico un premio di 1800 € deve essere diviso fra tre squadre in proporzione ai punti ottenuti: 12, 9 e 15. Dividerlo in parti uguali non sarebbe giusto; vogliamo invece che le tre quote a, b, c siano direttamente proporzionali ai punti. Si tratta di una **ripartizione proporzionale** diretta: dividere un numero in parti direttamente proporzionali a numeri dati.

Vogliamo che $a : 12 = b : 9 = c : 15$. Per la proprietà della catena di rapporti uguali,

$$(a + b + c) : (12 + 9 + 15) = a : 12 \quad \Rightarrow \quad 1800 : 36 = a : 12.$$

Il rapporto $1800 : 36 = 50$ è il valore di una «parte»: ogni punto vale 50 €. Quindi $a = 12 \cdot 50 = 600$ €, $b = 9 \cdot 50 = 450$ €, $c = 15 \cdot 50 = 750$ €. Controllo: $600 + 450 + 750 = 1800$. Possiamo pensare il premio come una striscia divisa in 36 parti uguali, di cui 12 vanno alla prima squadra, 9 alla seconda e 15 alla terza (figura 4.4, in alto).

4.4.2 Ripartizione inversa

In altre situazioni è giusto dare *di più* a chi ha un valore *più piccolo*: meno errori in una gara, meno tempo impiegato, meno assenze. Si parla allora di ripartizione *inversa*: le quote devono essere inversamente proporzionali ai numeri dati, cioè il prodotto quota · numero deve essere lo stesso per tutti. Poiché $a \cdot p = b \cdot q$ equivale ad $a : \frac{1}{p} = b : \frac{1}{q}$, il problema si riporta a una ripartizione diretta rispetto ai reciproci.

ESEMPIO SVOLTO

Un premio a chi sbaglia di meno

In una gara di matematica a squadre, un premio di 1300 € va diviso tra le tre squadre finaliste in modo inversamente proporzionale al numero di errori commessi: 2, 3 e 4.

1. Passiamo ai reciproci: le quote devono essere direttamente proporzionali a $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

2. Rendiamoli interi: il mcm dei denominatori è 12; moltiplicando per 12 otteniamo 6, 4, 3. (Moltiplicare tutti i termini per lo stesso numero non cambia i rapporti.)

3. Ripartizione diretta rispetto a 6, 4, 3: le parti sono 6 + 4 + 3 = 13, e una parte vale 1300 : 13 = 100 €. Le quote sono 600 €, 400 € e 300 €.

4. Verifichiamo che i prodotti quota · errori siano costanti: 600 · 2 = 400 · 3 = 300 · 4 = 1200. La squadra con meno errori riceve di più (figura 4.4, in basso).

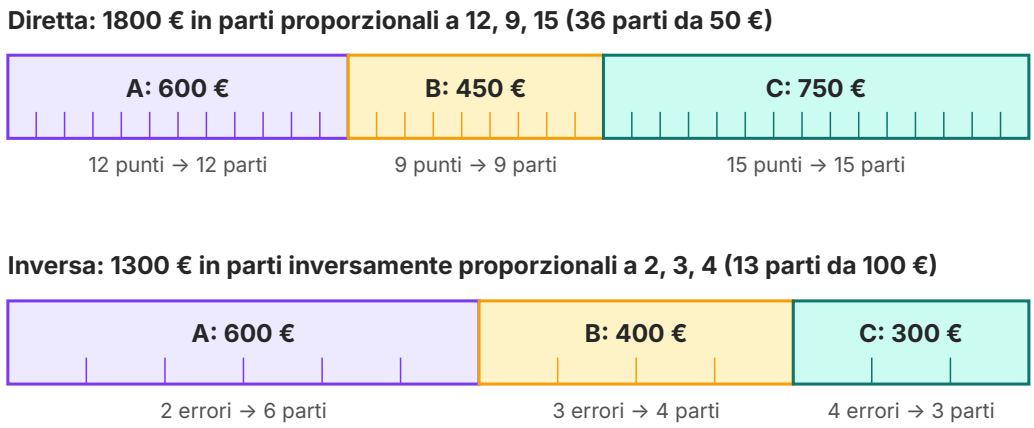


Figura 4.4 Due ripartizioni. In alto, 1800 € divisi in parti direttamente proporzionali a 12, 9, 15: 36 parti da 50 €. In basso, 1300 € divisi in parti inversamente proporzionali a 2, 3, 4, cioè direttamente proporzionali a 6, 4, 3: 13 parti da 100 €.

4.5 Le percentuali

4.5.1 Che cos'è una percentuale

Una **percentuale** è un rapporto con conseguente 100: «il 35%» significa «35 su 100», cioè la frazione $\frac{35}{100} = 0{,}35$. Usare sempre lo stesso conseguente rende facili i confronti: «75% contro 60%» è più chiaro di «18 su 24 contro 15 su 25».

Ogni percentuale si può scrivere come numero decimale o come frazione, e viceversa: $25\% = 0{,}25 = \frac{1}{4}$; $50\% = \frac{1}{2}$; $12{,}5\% = 0{,}125 = \frac{1}{8}$; $150\% = 1{,}5$. Una percentuale può superare 100%: dire che un prezzo è il 150% di un altro significa che è una volta e mezza l'altro.

In un problema con le percentuali compaiono sempre tre quantità: il *totale* (la quantità di riferimento), la *parte* e la *percentuale* p. Esse formano la proporzione

$$\text{parte} : \text{totale} = p : 100,$$

da cui, conoscendo due quantità, si ricava la terza.

Tabella 4.2 I tre problemi delle percentuali.

Che cosa si cerca	Formula	Esempio
la parte	parte = totale · p : 100	il 15% di 260 è 260 · 0,15 = 39
la percentuale	p = parte : totale · 100	18 su 24 è (18 : 24) · 100 = 75%
il totale	totale = parte · 100 : p	se 30 è il 12% del totale, il totale è 30 · 100 : 12 = 250

Una stessa percentuale non indica lo stesso numero se i totali sono diversi: il 35% di 1200 persone sono 420 persone, il 35% di 800 sono 280.

4.5.2 Aumenti e sconti: il fattore moltiplicativo

Un paio di scarpe costa 80 € ed è scontato del 25%. Lo sconto è 80 · 0,25 = 20 €, e il prezzo finale è 80 − 20 = 60 €. Possiamo arrivarci in un solo passaggio: se togliamo il 25%, resta il 75% del prezzo, quindi 80 · 0,75 = 60 €. Il numero 0,75 è il **fattore moltiplicativo** dello sconto.

IN SINTESI

Un **aumento** del p% equivale a moltiplicare per $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$; una **diminuzione** (sconto) del p% equivale a moltiplicare per $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

Esempi: +12% → × 1,12; +22% → × 1,22; −35% → × 0,65; −5% → × 0,95.

Due variazioni **successive** si combinano **moltiplicando** i fattori, non sommando le percentuali.

Il fattore moltiplicativo rende semplici anche i problemi «al contrario». Se dopo uno sconto del 20% un giubbotto costa 96 €, il prezzo originale P soddisfa $P \cdot 0{,}8 = 96$, quindi $P = 96 : 0{,}8 = 120$ €. Allo stesso modo, se dopo un aumento del 15% un biglietto costa 69 €, prima costava $69 : 1{,}15 = 60$ €.

Che cosa succede se un prezzo di 100 € aumenta del 20% e poi diminuisce del 20%? Si potrebbe pensare di tornare a 100 €. Invece $100 \cdot 1{,}2 = 120$ € e poi $120 \cdot 0{,}8 = 96$ €: il prezzo è sceso del 4%. Il motivo è che il secondo 20% si calcola su una base diversa, 120 € invece di 100 €. In termini di fattori: $1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96$. Poiché la moltiplicazione è commutativa, l'ordine non conta: anche diminuendo prima e aumentando poi si arriva a 96 € (figura 4.5).

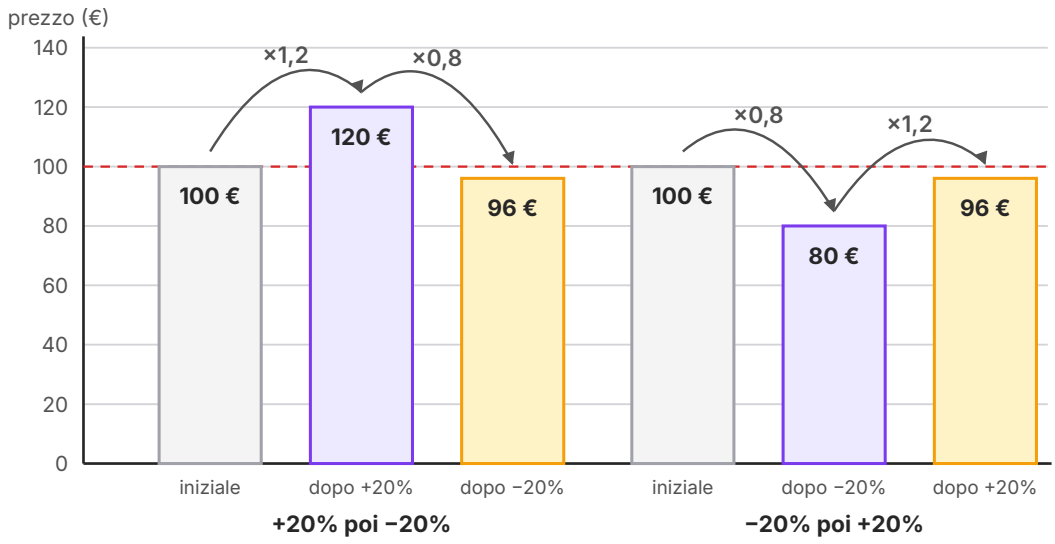


Figura 4.5 Un aumento del 20% seguito da uno sconto del 20%, e viceversa: in entrambi i casi il prezzo finale è 96 €, il 4% in meno del prezzo iniziale (linea tratteggiata), perché $1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}8 \cdot 1{,}2 = 0{,}96$.

ERRORE FREQUENTE

Le percentuali successive non si sommano

«Sconto del 30% e poi un ulteriore 20% sul prezzo scontato: in tutto il 50%.» Falso. I fattori sono 0,7 e 0,8, e $0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$: si paga il 56% del prezzo, cioè lo sconto totale è del 44%. Su un prezzo di 200 € si pagano 112 €, non 100 €.

Allo stesso modo, per tornare al prezzo originale dopo uno sconto non si aggiunge «la stessa percentuale»: se 96 € è il prezzo scontato del 20%, il prezzo originale è $96 : 0{,}8 = 120$ €, mentre 96 + 20% di 96 = 115,20 € è sbagliato. Ricorda: ogni percentuale si calcola sulla **sua** base.

4.5.3 Variazione percentuale e punti percentuali

Quando una quantità passa da un valore iniziale V_i a un valore finale V_f, la **variazione percentuale** è il rapporto tra la variazione e il valore iniziale, espresso in percentuale:

$$\text{variazione } \% = \frac{V_\text{f} - V_\text{i}}{V_\text{i}} \cdot 100.$$

Se il prezzo di un abbonamento passa da 40 € a 50 €, la variazione è $\frac{10}{40} \cdot 100 = +25\%$. Se poi torna da 50 € a 40 €, la variazione è $\frac{-10}{50} \cdot 100 = -20\%$. La differenza in euro è la stessa, ma la percentuale no, perché cambia il valore di riferimento.

Quando la grandezza che varia è *già* una percentuale, bisogna fare attenzione alle parole. Se un partito passa dal 20% al 25% dei voti, è cresciuto di 5 **punti percentuali** ($25 - 20 = 5$), ma i suoi voti, in percentuale, sono aumentati del 25%, perché $\frac{5}{20} \cdot 100 = 25$.

DA RICORDARE

Punti percentuali ≠ percentuale. La differenza tra due percentuali si misura in *punti percentuali*; la variazione percentuale si calcola sempre dividendo per il valore iniziale. Un tasso di interesse che sale dal 2% al 3% aumenta di 1 punto percentuale, ma del 50% in termini relativi. Chi scrive «il tasso è aumentato dell'1%» commette un errore.

4.5.4 Percentuali nella vita quotidiana

L'IVA. Su quasi tutto ciò che compri è applicata l'IVA (imposta sul valore aggiunto), una percentuale che si aggiunge al prezzo di partenza, detto **imponibile**. In Italia l'aliquota ordinaria è del 22% (dal 2013) (per alcuni beni, come molti alimenti, l'aliquota è ridotta). Un servizio con imponibile di 150 € costa, IVA inclusa, $150 \cdot 1{,}22 = 183$ €, di cui 33 € di IVA. Il calcolo inverso, detto *scorporo*, si fa dividendo per il fattore: un prezzo di 244 € IVA inclusa corrisponde a un imponi-

bile di 244 : 1,22 = 200 € e a 44 € di IVA. Nota che l'IVA non è il 22% di 244 €: il 22% si calcola sull'imponibile, non sul totale.

L'interesse semplice. Chi deposita una somma C, il *capitale*, in un conto che rende il tasso annuo r, riceve ogni anno un interesse proporzionale al capitale. In regime di **interesse semplice** l'interesse è direttamente proporzionale sia al capitale sia al tempo t (in anni):

$$I = C \cdot r \cdot t, \qquad \text{e il } \textbf{montante} \text{ è } M = C + I.$$

Per esempio 2000 € al 3% annuo per 4 anni danno $I = 2000 \cdot 0{,}03 \cdot 4 = 240$ € di interessi, e il montante è 2240 €. Se il tempo è espresso in mesi, lo si converte in anni dividendo per 12: 18 mesi sono 1,5 anni.

4.6 Scale e ingrandimenti

4.6.1 La scala di una carta

Una carta geografica, la pianta di un appartamento, il modellino di un'automobile riproducono un oggetto reale «in piccolo», mantenendo le forme. Ciò è possibile perché tutte le distanze sul disegno sono direttamente proporzionali alle distanze reali, con la stessa costante. La **scala** è il rapporto tra una distanza sul disegno e la distanza reale corrispondente, misurate con la stessa unità. Si scrive di solito nella forma $1 : n$.

Su una carta in scala 1 : 50 000, 1 cm rappresenta 50 000 cm, cioè 500 m. Nella carta inventata della figura 4.6 la distanza in linea d'aria tra Borgo Alto e Pieve Nuova misura 6 cm; quella reale è $6 \cdot 50\,000 = 300\,000$ cm = 3 km. Per passare dalla distanza reale a quella sulla carta si divide: 4,5 km = 450 000 cm diventano 450 000 : 50 000 = 9 cm.

Accanto alla scala numerica, molte carte riportano una **scala grafica**: un segmento suddiviso in tratti, ciascuno con la distanza reale corrispondente. Il suo vantaggio è che resta valida anche se la carta viene ingrandita o rimpicciolita (con una fotocopia o sullo schermo di un telefono): il segmento cambia lunghezza insieme alla carta, la scala numerica scritta no.

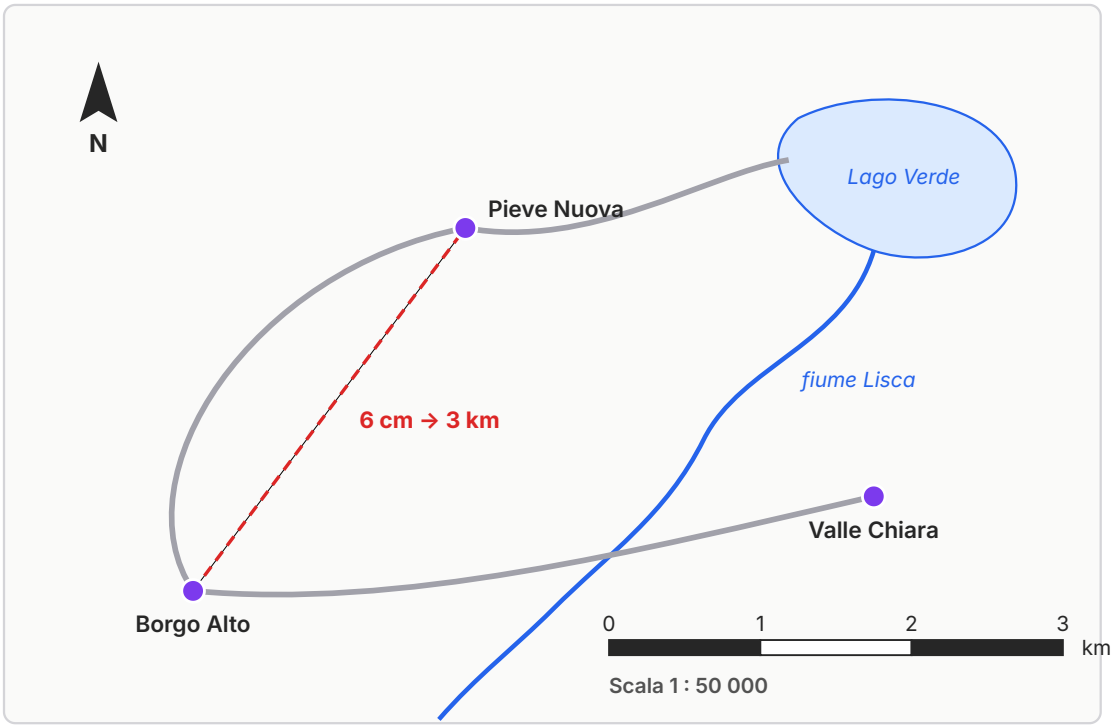


Figura 4.6 Carta di una zona inventata in scala 1 : 50 000. Sulla carta, 1 cm corrisponde a 500 m; la scala grafica in basso mostra tratti da 1 km (2 cm). La distanza in linea d'aria tra Borgo Alto e Pieve Nuova, 6 cm sulla carta, è di 3 km nella realtà; la strada è più lunga.

Più n è grande, meno dettagli mostra la carta: in scala 1 : 25 000 (carta dei sentieri) 1 cm = 250 m, in scala 1 : 200 000 (carta stradale) 1 cm = 2 km. Una scala può anche *ingrandire*: un disegno in scala 5 : 1 è cinque volte più grande dell'oggetto.

4.6.2 Ingrandimenti e riduzioni: che cosa succede alle aree

Il **rapporto di ingrandimento** k è il numero per cui si moltiplicano tutte le lunghezze: $k > 1$ per un ingrandimento, $k < 1$ per una riduzione. Un microscopio che ingrandisce 400 volte mostra una cellula di 20 µm come se fosse lunga $20 \cdot 400 = 8000$ µm, cioè 8 mm. Un modellino in scala 1 : 24 di un'auto lunga 4,32 m è lungo 432 cm : 24 = 18 cm.

Le lunghezze si moltiplicano per k, ma le aree no. Un rettangolo di lati 3 e 2 ha area 6. Raddoppiando i lati ($k = 2$) diventa un rettangolo 6 per 4, di area 24: l'area è diventata quattro volte più grande. Triplicando i lati ($k = 3$) si ottiene un rettangolo 9 per 6, di area 54, nove volte più grande (figura 4.7). In generale, se le lunghezze si moltiplicano per k, le aree si moltiplicano per $k \cdot k = k^2$. Studierai i volumi in fisica e in geometria solida: lì il fattore diventa k^3.

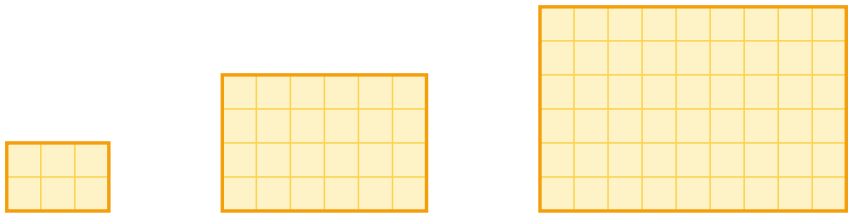


Figura 4.7 Un rettangolo 3 per 2 ingrandito con rapporto $k = 2$ e $k = 3$. I lati si moltiplicano per k, l'area (contata in quadretti) si moltiplica per k^2: 4 volte e 9 volte.

ESEMPIO SVOLTO

Un campo sulla carta

Su una carta in scala 1 : 10 000 un campo rettangolare misura 3 cm per 2 cm. Qual è la sua area reale?

1. Dimensioni reali. 1 cm sulla carta = 10 000 cm = 100 m. I lati reali sono $3 \cdot 100 = 300$ m e $2 \cdot 100 = 200$ m.

2. Area reale. 300 m · 200 m = 60 000 m², cioè 6 ettari (1 ha = 10 000 m²).

3. Controllo con il fattore delle aree. Sulla carta l'area è $3 \cdot 2 = 6$ cm². Le lunghezze reali sono 10 000 volte quelle disegnate, quindi le aree sono $10\,000 \cdot 10\,000 = 100\,000\,000$ volte maggiori: $6 \text{ cm}^2 \cdot 100\,000\,000 = 600\,000\,000 \text{ cm}^2 = 60\,000 \text{ m}^2$.

Sbaglierebbe chi moltiplicasse l'area disegnata solo per 10 000: otterrebbe 60 000 cm², cioè 6 m², un campo grande quanto un tappeto.

SINTESI

- Il **rapporto** tra a e b ($b \neq 0$) è il quoziente $a : b$. Tra grandezze omogenee (stessa unità) è un numero puro; tra grandezze non omogenee è una nuova grandezza (velocità, densità, prezzo unitario).
- Una **proporzione** $a : b = c : d$ è un'uguaglianza tra due rapporti; a e d sono gli estremi, b e c i medi.
- **Proprietà fondamentale**: prodotto dei medi = prodotto degli estremi. Serve a verificare una proporzione e a trovare un termine incognito.
- Le proprietà del permutare, invertire, comporre e scomporre trasformano una proporzione in un'altra; comporre e scomporre risolvono i problemi con somma (o differenza) e rapporto noti.
- Il medio proporzionale tra a e d è il numero positivo x con $x \cdot x = a \cdot d$; non sempre è razionale.
- Grandezze **direttamente proporzionali**: rapporto costante, $y = kx$. Grandezze **inversamente proporzionali**: prodotto costante, $xy = k$. «Crescere insieme» o «una cresce e l'altra cala» non basta.
- Nel **tre semplice** si stabilisce prima se la proporzionalità è diretta o inversa, poi si scrive la proporzione (o si riduce all'unità).
- Nella **ripartizione diretta** si divide il totale per la somma dei numeri dati; nella **ripartizione inversa** si passa ai reciproci.
- Il $p\%$ è il rapporto $p : 100$; parte : totale = $p : 100$. Aumento del $p\% \to \times (1 + p/100)$; sconto del $p\% \to \times (1 - p/100)$; variazioni successive: si moltiplicano i fattori.
- La variazione percentuale si calcola sul valore iniziale; la differenza tra due percentuali si misura in **punti percentuali**.
- La **scala** $1 : n$ è il rapporto tra distanza sul disegno e distanza reale; se le lunghezze si moltiplicano per k, le aree si moltiplicano per k^2.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Il rapporto tra 2 m e 50 cm è:

   A. $\frac{1}{25}$

   B. 25

   C. 4

   D. $\frac{1}{4}$

2. ● Nella proporzione $3 : 7 = 12 : 28$ gli estremi sono:

   A. 3 e 7

   B. 3 e 28

   C. 7 e 12

   D. 12 e 28

3. ● Quale delle seguenti uguaglianze è una proporzione?

   A. $4 : 6 = 6 : 9$

   B. $2 : 3 = 3 : 2$

   C. $5 : 10 = 10 : 15$

   D. $8 : 12 = 12 : 16$

4. ●● Quale coppia di grandezze è inversamente proporzionale?

   A. Il lato di un quadrato e il suo perimetro.

   B. L'età di una persona e la sua altezza.

   C. Il numero di biglietti acquistati e la spesa.

   D. La velocità media e il tempo impiegato per percorrere 100 km.

5. ●● Un prezzo aumenta del 10% e poi diminuisce del 10%. Rispetto al prezzo iniziale, il prezzo finale è:

   A. uguale

   B. più basso dell'1%

   C. più alto dell'1%

   D. più basso del 10%

6. ●● Il tasso di disoccupazione di una regione passa dal 4% al 5%. Quale affermazione è corretta?

   A. È aumentato dell'1%.

   B. È aumentato di 25 punti percentuali.

   C. È aumentato del 20%.

   D. È aumentato di 1 punto percentuale, cioè del 25%.

7. ● Su una carta in scala $1 : 100\,000$, 1 cm corrisponde a:

   A. 1 km

   B. 10 km

   C. 100 m

   D. 100 km

8. ●● **Vero o falso?** Correggi le affermazioni false.

   a) In ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

   b) Se due grandezze crescono insieme, allora sono direttamente proporzionali.

   c) Uno sconto del 30% seguito da uno del 20% equivale a uno sconto del 50%.

   d) Se x e y sono inversamente proporzionali e x triplica, y diventa un terzo.

   e) Se si raddoppiano tutte le lunghezze di un disegno, l'area di ogni figura raddoppia.

9. ● **Completa.**
a) Nella proporzione $a : b = c : d$, a e d si chiamano _____ , b e c si chiamano _____ .
b) Due grandezze sono direttamente proporzionali se è costante il loro _____ ; inversamente proporzionali se è costante il loro _____ .
c) Aumentare un prezzo del p% equivale a moltiplicarlo per _____ .
d) La scala di una carta è il rapporto tra _____ e _____ , misurate con la stessa unità.

Calcolare

10. ● Calcola i rapporti e riducili ai minimi termini.
a) 36 : 48 b) 2,5 : 0,75 c) $\frac{3}{4} : \frac{9}{10}$ d) 45 minuti : 2 ore

11. ● Stabilisci, con la proprietà fondamentale, se le uguaglianze sono proporzioni.
a) 5 : 8 = 15 : 24 b) 7 : 9 = 21 : 28 c) 0,6 : 1,5 = 2 : 5 d) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 9 : 6$

12. ● Calcola il termine incognito.
a) $x : 12 = 5 : 4$ b) $9 : x = 6 : 14$ c) $35 : 21 = x : 9$ d) $2{,}4 : 3 = 6 : x$

13. ●● Calcola il termine incognito.
a) $\frac{2}{3} : x = \frac{4}{9} : \frac{5}{6}$ b) $x : \frac{7}{5} = \frac{3}{2} : \frac{21}{10}$ c) $(1 + \frac{1}{2}) : x = x : (2 + \frac{2}{3})$, con $x > 0$

14. ●● Trova il medio proporzionale positivo tra:
a) 9 e 16 b) 3 e 27 c) $\frac{2}{3}$ e $\frac{27}{8}$

15. ●● Usa le proprietà del comporre o dello scomporre.
a) $x + y = 56$ e $x : y = 3 : 4$ b) $x - y = 15$ e $x : y = 8 : 5$ c) $x + y = 21$ e $x : y = \frac{1}{2} : \frac{1}{5}$

16. ● Calcola.
a) il 15% di 260 b) che percentuale di 32 è 8 c) il numero di cui 45 è il 18% d) il 2,5% di 840

17. ●● Calcola il prezzo finale.
a) 75 € aumentati del 12% b) 240 € scontati del 35% c) 120 € aumentati del 25% e poi scontati del 20% d) 50 € scontati del 10% e poi ancora del 10%

18. ●● a) Calcola la variazione percentuale da 80 a 92, da 250 a 200 e da 1,60 a 2,00. b) Dopo un aumento del 15% un prodotto costa 69 €: quanto costava prima?

19. ●● Esegui le ripartizioni.
a) 840 in parti direttamente proporzionali a 2, 5, 7 b) 620 in parti inversamente proporzionali a 2, 3, 5 c) 1950 in parti direttamente proporzionali a $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

20. ●● a) In scala 1 : 25 000, a quale distanza reale corrispondono 6,4 cm? b) Una distanza reale di 4,5 km quanto misura su una carta in scala 1 : 75 000? c) Su una carta, 8 cm rappresentano 2 km: qual è la scala? d) In una planimetria in scala 1 : 50 una stanza rettangolare misura 9 cm per 7 cm: quali sono le sue dimensioni e la sua area reali?

Dimostrare e argomentare

21. ●● Dimostra la proprietà del comporre, $(a + b) : b = (c + d) : d$, partendo da $a : b = c : d$. Poi verifica la proprietà fondamentale sulla proporzione ottenuta.

22. ●● Spiega perché un aumento del p% seguito da una diminuzione del p% porta sempre a un prezzo più basso di quello iniziale, e mostra che la diminuzione complessiva è del $\frac{p \cdot p}{100}$%. Controlla la formula con $p = 20$ e $p = 10$.

23. ●● **Trova l'errore.** «Dopo uno sconto del 20% un giubbotto costa 96 €. Il prezzo originale era 96 € più il 20% di 96 €, cioè 115,20 €.» Spiega dov'è l'errore e correggi il calcolo.

24. ●● Dimostra che, se $a : b = c : d = k$ (con $b + d \neq 0$), allora anche $(a + c) : (b + d) = k$. Spiega perché questa proprietà giustifica il metodo della ripartizione diretta.

25. ●●● Un rettangolo ha lati a e b. Dimostra che, ingrandendolo con rapporto k, l'area si moltiplica per k^2. Spiega poi perché su una carta in scala $1 : n$ il rapporto tra un'area disegnata e l'area reale è $1 : n^2$.

Problemi

26. ● Una torta per 4 persone richiede 300 g di farina, 2 uova e 140 g di zucchero. Quali dosi servono per 10 persone?

27. ●● Un'automobile percorre 315 km consumando 21 litri di benzina. a) Quanti chilometri percorre con un litro? b) Quanti litri servono per 480 km? c) Quanti chilometri percorre con un pieno di 45 litri?

28. ●● Quattro pompe uguali svuotano una piscina in 9 ore. a) Quanto tempo impiegano 6 pompe? b) Quante pompe servono per svuotarla in 3 ore?

29. ●● a) Un tecnico emette una fattura con imponibile 350 € e IVA al 22%: quanto paga il cliente? b) Uno scontrino riporta 61 € IVA (22%) inclusa: calcola l'imponibile e l'IVA.

30. ●● a) Quanto rendono 3000 € depositati per 18 mesi al tasso annuo del 2,5%, in regime di interesse semplice? Qual è il montante? b) A quale tasso annuo 2500 € producono 150 € di interessi in 2 anni?

31. ●● In una scuola di 1200 studenti, lo scorso anno il 30% partecipava al giornalino; quest'anno, con lo stesso numero di iscritti, partecipa il 36%. a) Quanti studenti partecipavano e quanti partecipano ora? b) Di quanti punti percentuali è aumentata la partecipazione? c) Di che percentuale è aumentato il numero di partecipanti?

32. ●● La densità dell'alluminio è 2,7 g/cm³. a) Qual è la massa di un blocco di alluminio di 250 cm³? b) Qual è il volume di un pezzo di alluminio di 1,35 kg?

Verso la verifica

33. ●● Tre soci investono in un'attività 12 000 €, 18 000 € e 30 000 €. A fine anno l'utile di 9000 € viene diviso in proporzione ai capitali. a) Quanto spetta a ciascuno? b) Il socio che ha investito di più cede il 10% della sua quota a un collaboratore: quanto riceve il collaboratore?

34. ●● Un negozio aumenta tutti i prezzi del 25% e, poco dopo, in saldo, li sconta del 20%. a) Quanto costa alla fine un articolo che inizialmente costava 64 €? b) Qual è la variazione percentuale complessiva? c) Quale sarebbe stata la variazione complessiva con uno sconto del 25% invece che del 20%?

35. ●●● **Sfida.** Su una carta in scala 1 : 20 000 un parco rettangolare misura 4 cm per 2,5 cm. a) Quali sono le dimensioni reali del parco? b) Qual è la sua area in ettari? c) Quanto misurerebbe il parco su una carta in scala 1 : 50 000? Quante volte più piccola sarebbe l'area disegnata rispetto alla prima carta? Giustifica la risposta con il fattore delle aree.

PER APPROFONDIRE

- [POL] G. Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: il metodo per impostare un problema (che cosa si cerca, quali dati, quale relazione), utile per i problemi del tre semplice e delle percentuali.
- [HUF] D. Huff, *Mentire con le statistiche*: come percentuali e rapporti presentati male possano ingannare il lettore.
- [BOY] C. B. Boyer, *Storia della matematica*: la teoria delle proporzioni nel libro V di Euclide e la matematica dei mercanti medievali.

Glossario del capitolo

Catena di rapporti uguali
Più rapporti uguali tra loro; la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come ciascun antecedente sta al proprio conseguente.

Costante di proporzionalità
Il valore costante k del rapporto (proporzionalità diretta) o del prodotto (proporzionalità inversa) di due grandezze.

Fattore moltiplicativo
Numero per cui si moltiplica una quantità per applicare una variazione percentuale: $1 + p/100$ per un aumento, $1 - p/100$ per uno sconto.

Grandezze direttamente proporzionali
Grandezze variabili il cui rapporto è costante: $y = kx$; se una raddoppia, raddoppia anche l'altra.

Grandezze inversamente proporzionali
Grandezze variabili il cui prodotto è costante: $xy = k$; se una raddoppia, l'altra si dimezza.

Grandezze omogenee
Grandezze dello stesso tipo, misurabili con la stessa unità; il loro rapporto è un numero puro.

Interesse semplice
Interesse proporzionale al capitale e al tempo: $I = C \cdot r \cdot t$; il montante è $C + I$.

Medio proporzionale
Il termine ripetuto in una proporzione continua $a : x = x : d$; è il numero positivo con $x \cdot x = a \cdot d$.

Percentuale
Rapporto con conseguente 100: il p% è $p/100$. Vale parte : totale = p : 100.

Prezzo unitario
Rapporto tra il prezzo di un prodotto e la sua quantità (per esempio in €/kg); permette di confrontare confezioni diverse.

Proporzione
Uguaglianza tra due rapporti, $a : b = c : d$; a e d sono gli estremi, b e c i medi.

Proprietà del comporre
Da $a : b = c : d$ segue $(a + b) : a = (c + d) : c$ e $(a + b) : b = (c + d) : d$.

Proprietà dello scomporre
Da $a : b = c : d$ (con $a > b$) segue $(a - b) : a = (c - d) : c$ e $(a - b) : b = (c - d) : d$.

Proprietà fondamentale delle proporzioni
In ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi: $ad = bc$.

Punto percentuale
Unità con cui si misura la differenza tra due percentuali: dal 20% al 25% c'è un aumento di 5 punti percentuali (che corrisponde al +25%).

Rapporto
Quoziente tra due numeri a e b, con $b \neq 0$: $a : b$. a è l'antecedente, b il conseguente.

Ripartizione proporzionale
Divisione di una quantità in parti direttamente (o inversamente) proporzionali a numeri dati; nel caso inverso si usano i reciproci.

Scala
Rapporto tra una distanza sul disegno (carta, pianta, modello) e la distanza reale corrispondente, nella forma $1 : n$; le aree stanno nel rapporto $1 : n^2$.

Tre semplice
Problema in cui, date due grandezze direttamente o inversamente proporzionali, si conoscono tre valori e si cerca il quarto.

Variazione percentuale
Rapporto tra la variazione di una grandezza e il suo valore iniziale, moltiplicato per 100.

Soluzioni

1. C. 2 m = 200 cm, e 200 : 50 = 4.

2. B. Gli estremi sono il primo e il quarto termine: 3 e 28 (infatti 3 · 28 = 84 = 7 · 12).

3. A. 4 · 9 = 36 = 6 · 6; nelle altre il prodotto dei medi è diverso da quello degli estremi (B: 4 ≠ 9; C: 75 ≠ 100; D: 128 ≠ 144).

4. D. A distanza fissata, velocità · tempo = 100 km è costante. A e C sono proporzionalità dirette, B non è una proporzionalità.

5. B. 1,1 · 0,9 = 0,99: il prezzo finale è l'1% più basso.

6. D. 5 − 4 = 1 punto percentuale; (1 : 4) · 100 = 25%.

7. A. 1 cm · 100 000 = 100 000 cm = 1 km.

8. a) V. b) F: serve che il rapporto sia costante (es. taxi con quota fissa: la spesa cresce ma non è proporzionale ai km). c) F: 0,7 · 0,8 = 0,56, lo sconto totale è del 44%. d) V: il prodotto xy resta costante. e) F: l'area si moltiplica per $2^2 = 4$.

9. a) estremi; medi. b) rapporto; prodotto. c) $1 + p/100$. d) una distanza sul disegno (carta); la distanza reale corrispondente.

10. a) 3/4. b) 250 : 75 = 10/3. c) 3/4 · 10/9 = 5/6. d) 45 : 120 = 3/8.

11. a) Sì: 5 · 24 = 120 = 8 · 15. b) No: 7 · 28 = 196, 9 · 21 = 189. c) Sì: 0,6 · 5 = 3 = 1,5 · 2. d) Sì: 1/2 · 6 = 3 = 1/3 · 9.

12. a) $x = 12 \cdot 5 : 4 = 15$. b) $x = 9 \cdot 14 : 6 = 21$. c) $x = 35 \cdot 9 : 21 = 15$. d) $x = 3 \cdot 6 : 2{,}4 = 7{,}5$.

13. a) $x = (2/3 \cdot 5/6) : 4/9 = 5/9 \cdot 9/4 = 5/4$. b) $x = (7/5 \cdot 3/2) : 21/10 = 21/10 : 21/10 = 1$. c) $x \cdot x = 3/2 \cdot 8/3 = 4$, quindi $x = 2$.

14. a) $x \cdot x = 144$, $x = 12$. b) $x \cdot x = 81$, $x = 9$. c) $x \cdot x = 2/3 \cdot 27/8 = 9/4$, $x = 3/2$.

15. a) Comporre: $56 : x = 7 : 3 \to x = 24$, $y = 32$. b) Scomporre: $15 : x = 3 : 8 \to x = 40$, $y = 25$. c) Il rapporto 1/2 : 1/5 = 5 : 2; comporre: $21 : x = 7 : 5 \to x = 15$, $y = 6$.

16. a) 260 · 0,15 = 39. b) (8 : 32) · 100 = 25%. c) 45 · 100 : 18 = 250. d) 840 · 0,025 = 21.

17. a) 75 · 1,12 = 84 €. b) 240 · 0,65 = 156 €. c) 120 · 1,25 · 0,8 = 120 € (1,25 · 0,8 = 1). d) 50 · 0,9 · 0,9 = 40,50 €.

18. a) (12 : 80) · 100 = +15%; (−50 : 250) · 100 = −20%; (0,40 : 1,60) · 100 = +25%. b) 69 : 1,15 = 60 €.

19. a) Parti 2 + 5 + 7 = 14; una parte = 60: 120, 300, 420. b) Reciproci 1/2, 1/3, 1/5 → (×30) 15, 10, 6; parti 31, una parte = 20: 300, 200, 120. c) 1/2, 1/3, 1/4 → (×12) 6, 4, 3; parti 13, una parte = 150: 900, 600, 450.

20. a) 6,4 · 25 000 = 160 000 cm = 1,6 km. b) 450 000 cm : 75 000 = 6 cm. c) 2 km = 200 000 cm; 200 000 : 8 = 25 000 → scala 1 : 25 000. d) 9 · 50 = 450 cm = 4,5 m e 7 · 50 = 350 cm = 3,5 m; area 4,5 · 3,5 = 15,75 m^2.

21. Da $a/b = c/d$, sommando 1 a entrambi i membri: $a/b + b/b = c/d + d/d$, cioè $(a + b)/b = (c + d)/d$. Verifica: $(a + b)d = ad + bd$ e $b(c + d) = bc + bd$, uguali perché $ad = bc$.

22. Il fattore complessivo è $(1 + p/100)(1 - p/100) = 1 - (p/100)\cdot(p/100) = 1 - p\cdot p/10\,000$, sempre minore di 1 per $p \neq 0$: la diminuzione è $p\cdot p/10\,000$ del prezzo, cioè $p\cdot p/100$ per cento. Il secondo p% si calcola su una base più grande. Con $p = 20$: 1,2 · 0,8 = 0,96, cioè −4%, e infatti 20 · 20/100 = 4. Con $p = 10$: 1,1 · 0,9 = 0,99, cioè −1%, e 10 · 10/100 = 1.

23. Il 20% dello sconto era calcolato sul prezzo originale, non su 96 €. Il prezzo scontato è l'80% dell'originale: $P \cdot 0{,}8 = 96$, quindi $P = 120$ €. Verifica: 120 − 24 = 96.

24. Da $a : b = k$ e $c : d = k$ segue $a = kb$ e $c = kd$; sommando, $a + c = k(b + d)$, quindi $(a + c) : (b + d) = k$. Nella ripartizione le quote cercate e i numeri dati formano una catena di rapporti uguali: il rapporto comune è allora totale : somma dei numeri dati, cioè il valore di una parte.

25. L'area iniziale è ab; i nuovi lati sono ka e kb, l'area è $ka \cdot kb = k^2 \cdot ab$. Una carta in scala $1 : n$ è una riduzione con $k = 1/n$ (ogni lunghezza disegnata è $1/n$ di quella reale); quindi ogni area disegnata (pensata come somma di piccoli rettangoli) è $1/n^2$ di quella reale: il rapporto è $1 : n^2$.

26. Fattore $10 : 4 = 2{,}5$: 750 g di farina, 5 uova, 350 g di zucchero.

27. a) $315 : 21 = 15$ km con un litro. b) $480 : 15 = 32$ l. c) $45 \cdot 15 = 675$ km.

28. Proporzionalità inversa: pompe · ore = 36. a) $36 : 6 = 6$ ore. b) $36 : 3 = 12$ pompe.

29. a) $350 \cdot 1{,}22 = 427$ € (IVA 77 €). b) Imponibile $61 : 1{,}22 = 50$ €; IVA $61 - 50 = 11$ €.

30. a) 18 mesi = 1,5 anni; $I = 3000 \cdot 0{,}025 \cdot 1{,}5 = 112{,}50$ €; montante 3112,50 €. b) $r = 150 : (2500 \cdot 2) = 0{,}03 = 3\%$.

31. a) $1200 \cdot 0{,}30 = 360$; $1200 \cdot 0{,}36 = 432$. b) $36 - 30 = 6$ punti percentuali. c) $(72 : 360) \cdot 100 = +20\%$.

32. a) $2{,}7 \cdot 250 = 675$ g. b) 1,35 kg = 1350 g; $1350 : 2{,}7 = 500$ cm^3.

33. a) Capitali in rapporto $12 : 18 : 30 = 2 : 3 : 5$; parti 10, una parte = 900 €: 1800 €, 2700 €, 4500 €. b) Il 10% di 4500 € = 450 €.

34. a) $64 \cdot 1{,}25 \cdot 0{,}8 = 64$ €. b) $1{,}25 \cdot 0{,}8 = 1$: variazione 0%. c) $1{,}25 \cdot 0{,}75 = 0{,}9375$: diminuzione del 6,25%.

35. a) 1 cm = 20 000 cm = 200 m: il parco misura 800 m per 500 m. b) $800 \cdot 500 = 400\,000$ m^2 = 40 ha. c) Sulla nuova carta: $80\,000 \text{ cm} : 50\,000 = 1{,}6$ cm e $50\,000 \text{ cm} : 50\,000 = 1$ cm. Area disegnata 1,6 cm^2 contro $4 \cdot 2{,}5 = 10$ cm^2: 6,25 volte più piccola. Infatti le lunghezze si riducono di $50\,000 : 20\,000 = 2{,}5$ volte e le aree di $2{,}5^2 = 6{,}25$ volte.