CAPITOLO

2

I numeri interi

Sotto lo zero non c'è il nulla: c'è un'altra metà della retta che aspetta di essere contata.

OBIETTIVI

1. Riconoscere le situazioni in cui servono i numeri interi e rappresentarli sulla retta orientata.
2. Usare segno, valore assoluto e numero opposto per confrontare e ordinare gli interi.
3. Eseguire addizioni, sottrazioni e somme algebriche, eliminando correttamente le parentesi.
4. Applicare la regola dei segni nella moltiplicazione e nella divisione, sapendo spiegare perché vale.
5. Calcolare potenze di numeri interi, distinguendo $(-a)^n$ da $-a^n$.
6. Risolvere espressioni e problemi con i numeri interi.

INDICE DEL CAPITOLO

2.1 Oltre lo zero: l'insieme $\mathbb{Z}$ 2
2.2 Retta orientata, valore assoluto e ordine 4
2.3 Addizione e sottrazione 7
2.4 Moltiplicazione e divisione 11
2.5 Le potenze in $\mathbb{Z}$ 14
2.6 Proprietà delle operazioni ed espressioni 17

Matematica 1 · Parte I · I numeri · versione 1.0
Capitolo 2: I numeri interi · pagine 47–70 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo 1 abbiamo lavorato con i numeri naturali, quelli che usiamo per contare: 0, 1, 2, 3, … Con essi possiamo sempre addizionare e moltiplicare, ma non sempre sottrarre: in $\mathbb{N}$ l'operazione $3 - 5$ non ha risultato, perché non esiste un numero naturale che, aggiunto a 5, dia 3. Per molto tempo questa sembrò una limitazione innocua: «non si possono togliere cinque mele da un cesto che ne contiene tre». Eppure, appena usciamo dal cesto di mele, ci accorgiamo che il mondo è pieno di grandezze che possono scendere sotto lo zero. Una mattina d'inverno il termometro può segnare cinque gradi sotto zero; un conto in banca può andare «in rosso»; un garage può trovarsi al primo piano interrato; un subacqueo nuota a quindici metri sotto il livello del mare.

In questo capitolo costruiamo un nuovo insieme numerico, quello dei *numeri interi*, che contiene i naturali e in cui la sottrazione è sempre possibile. Scopriremo che le regole di calcolo, compresa la famosa «meno per meno fa più», non sono convenzioni arbitrarie da imparare a memoria: sono le uniche scelte compatibili con le proprietà delle operazioni che già conosciamo.

2.1 Oltre lo zero: l'insieme $\mathbb{Z}$

2.1.1 Situazioni con un «sopra» e un «sotto»

Proviamo a mettere a confronto alcune situazioni quotidiane. Le temperature si misurano rispetto a uno zero scelto per convenzione: nella scala Celsius lo zero è la temperatura a cui l'acqua pura congela alla pressione atmosferica normale. Una temperatura di cinque gradi *sopra* lo zero e una di cinque gradi *sotto* lo zero sono molto diverse, anche se in entrambe compare il numero 5. Per distinguerle scriviamo +5 °C e −5 °C.

Allo stesso modo, le quote dei luoghi si misurano rispetto al livello del mare: la cima di un faro a 30 metri sopra il mare ha quota +30 m, mentre un subacqueo a 15 metri di profondità ha quota −15 m. In un ascensore il piano terra è lo 0, i piani superiori sono 1, 2, 3, … e i piani interrati sono indicati con −1, −2. Sul conto corrente, un versamento aumenta il saldo e un prelievo lo diminuisce; se si spende più di quanto si possiede, il saldo diventa negativo: un saldo di −40 euro indica un debito di 40 euro verso la banca.

In tutti questi esempi ci sono tre ingredienti comuni: un **livello di riferimento**, che chiamiamo zero; una **quantità**, cioè la distanza da quel livello; un **verso**, cioè l'informazione «sopra o sotto», «avere o dovere», «avanti o indietro». La Figura 2.1 mostra due di queste situazioni: il termometro e la scala delle quote sono, a tutti gli effetti, due rette numeriche disposte in verticale.

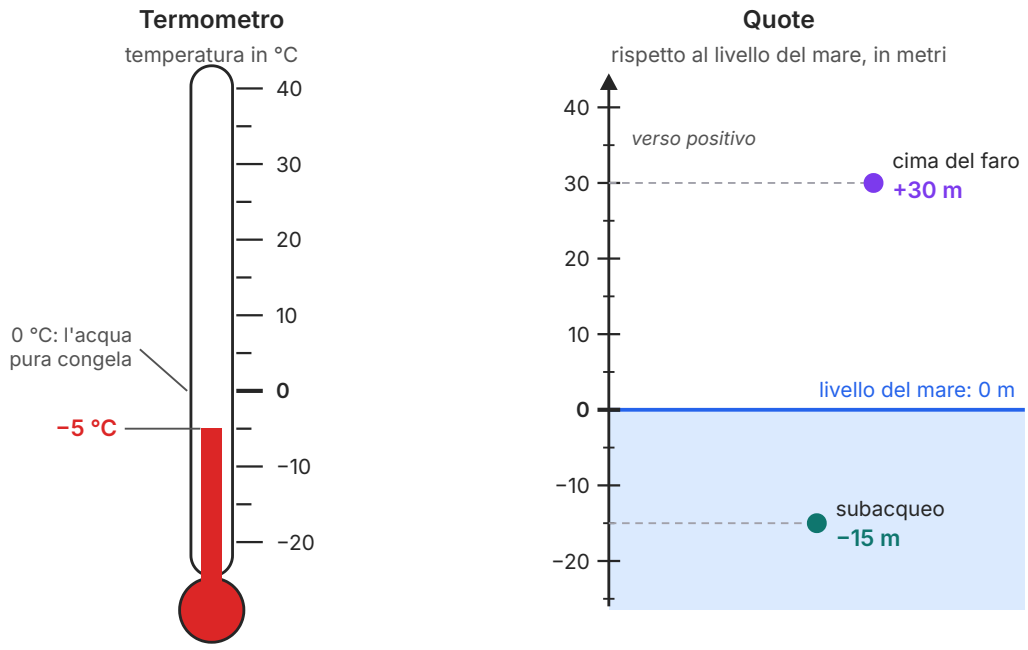


Figura 2.1 Il termometro e la scala delle quote sono due rette orientate verticali: lo zero è il livello di riferimento, i valori positivi stanno sopra e quelli negativi sotto. Il termometro segna −5 °C; il subacqueo si trova a quota −15 m.

2.1.2 I numeri interi relativi

Per descrivere queste situazioni con la matematica facciamo precedere i numeri naturali diversi da zero da un **segno**: il segno + (più) oppure il segno − (meno). Otteniamo così i **numeri interi relativi**, detti più brevemente *numeri interi*:

- i **numeri interi positivi** +1, +2, +3, +4, ..., che formano l'insieme $\mathbb{Z}^+$;
- i **numeri interi negativi** −1, −2, −3, −4, ..., che formano l'insieme $\mathbb{Z}^-$;
- lo **zero**, 0, che non è né positivo né negativo e quindi **non ha segno**.

L'insieme di tutti i numeri interi si indica con il simbolo $\mathbb{Z}$ (dalla parola tedesca *Zahl*, «numero»):

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, ...\}$$

e si può scrivere come unione di tre parti che non hanno elementi in comune: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$. Nota bene che lo zero non appartiene a $\mathbb{Z}^+$ né a $\mathbb{Z}^-$.

Che rapporto c'è tra i numeri interi e i numeri naturali? Il numero intero +3 si comporta, in tutti i calcoli, esattamente come il numero naturale 3: per esempio (+3) + (+4) = +7, proprio

come 3 + 4 = 7. Per questo motivo si *identificano* i numeri naturali con gli interi positivi e lo zero, e si scrive semplicemente 3 al posto di +3. Grazie a questa identificazione possiamo dire che $\mathbb{N}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

Ogni numero naturale è un numero intero, ma non vale il viceversa: −7 è un intero che non è naturale. Da qui in avanti, quando un numero intero è positivo potremo omettere il segno +; il segno − dei numeri negativi, invece, non si può mai omettere.

COLLEGAMENTI

Fisica: la scala Kelvin. Lo zero della scala Celsius è una scelta di comodo, legata all'acqua, e per questo esistono temperature Celsius negative. In fisica si usa anche la scala Kelvin, il cui zero è lo *zero assoluto*, pari a −273,15 °C: è la temperatura più bassa possibile, e perciò nella scala Kelvin non esistono temperature negative. Un kelvin (K), l'unità di misura della scala Kelvin, e un grado Celsius hanno la stessa ampiezza, quindi una *variazione* di temperatura ha lo stesso valore nelle due scale: passare da −10 °C a +15 °C significa riscaldarsi di 25 °C, cioè di 25 K. Calcolare variazioni come questa è proprio una sottrazione tra numeri interi, come vedremo nel paragrafo 2.3.

2.2 Retta orientata, valore assoluto e ordine

2.2.1 La retta orientata

Nel capitolo 1 abbiamo rappresentato i numeri naturali su una semiretta. Per gli interi serve una retta intera. Disegniamo una retta orizzontale e fissiamo su di essa tre cose:

- un punto O, detto **origine**, che rappresenta lo zero;
- un **verso** di percorrenza, indicato da una freccia, che per convenzione va da sinistra verso destra;
- un segmento u scelto come **unità di misura**.

Una retta su cui sono stati fissati origine, verso e unità di misura si chiama **retta orientata**. Riportando l'unità di misura più volte a partire da O verso destra otteniamo i punti che rappresentano +1, +2, +3, ...; riportandola verso sinistra otteniamo i punti che rappresentano −1, −2, −3, ... (Figura 2.2). Ogni numero intero corrisponde così a un punto della retta. Non è vero il contrario: i punti che stanno tra due interi consecutivi, per esempio il punto a metà strada tra 0 e +1, non rappresentano numeri interi. Li incontreremo nel prossimo capitolo, con i numeri razionali.

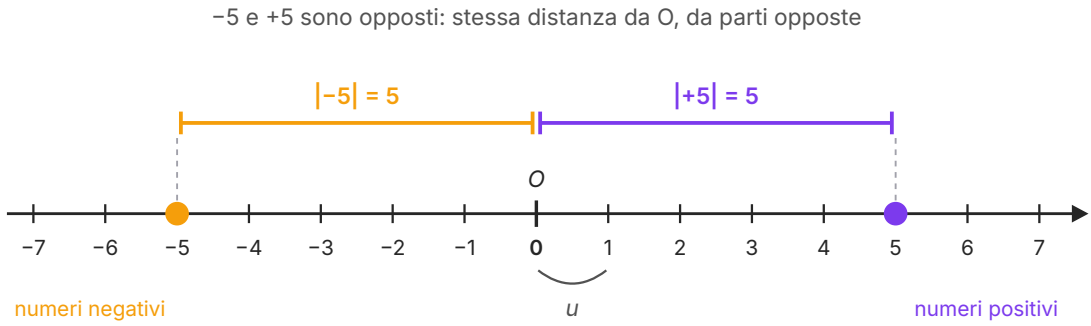


Figura 2.2 La retta orientata: l'origine O rappresenta lo 0, il verso positivo è indicato dalla freccia e u è l'unità di misura. I numeri opposti −5 e +5 si trovano alla stessa distanza da O, da parti opposte: il loro valore assoluto è 5.

2.2.2 Segno e valore assoluto

Un numero intero diverso da zero è formato da due informazioni: il segno, che dice da quale parte dell'origine si trova il numero, e un numero naturale, che dice quanto dista dall'origine. Questa seconda informazione ha un nome preciso.

Il **valore assoluto** (o *modulo*) di un numero intero a è la distanza del punto che lo rappresenta dall'origine. Si indica con $|a|$. In pratica, il valore assoluto si ottiene togliendo il segno:

$$|+7| = 7 \qquad |-7| = 7 \qquad |0| = 0$$

Il valore assoluto di un numero, essendo una distanza, non è mai negativo: $|a| \geq 0$ per ogni intero a, e $|a| = 0$ soltanto quando $a = 0$. In modo più formale si scrive

$$|a| = a \text{ se } a \geq 0 \qquad |a| = -a \text{ se } a < 0$$

La seconda riga può sembrare strana: com'è possibile che un valore assoluto sia uguale a $-a$? Il punto è che, se a è negativo, il suo opposto $-a$ è positivo. Per esempio, se $a = -7$ si ha $-a = -(-7) = +7$. Ritorneremo tra poco su questa notazione.

2.2.3 Numeri opposti, concordi e discordi

Due numeri interi si dicono **opposti** se hanno lo stesso valore assoluto e segno diverso, come +5 e −5. Sulla retta orientata due opposti sono simmetrici rispetto all'origine: stanno alla stessa distanza da *O*, uno a destra e uno a sinistra (Figura 2.2). Lo zero è considerato l'opposto di se stesso. L'opposto di un numero a si indica con $-a$; quindi l'opposto di +4 è −4, e l'opposto di −4 è $-(-4) = +4$.

Due numeri interi diversi da zero si dicono **concordi** se hanno lo stesso segno, **discordi** se hanno segno diverso. Sono concordi +3 e +8, e anche −2 e −9; sono discordi +6 e −1. Lo zero, che

non ha segno, non è né concorde né discorde con alcun numero.

DA RICORDARE

Lo 0 è un numero intero, ma **non ha segno**: non è positivo né negativo, $\mathbb{Z}^+$ e $\mathbb{Z}^-$ non lo contengono.

Il simbolo $-a$ significa «l'opposto di a», non «un numero negativo»: se $a = -3$, allora $-a = +3$ è positivo.

Due numeri opposti hanno sempre lo stesso valore assoluto: $|-a| = |a|$.

2.2.4 Confronto e ordine

Sulla retta orientata, tra due numeri interi è **minore** quello che sta più a sinistra. Così $-3 < +2$, perché -3 sta a sinistra di $+2$; e anche $-8 < -3$, perché -8 sta più a sinistra di -3. Le regole pratiche per confrontare due interi sono le seguenti:

- ogni numero positivo è maggiore di 0, e 0 è maggiore di ogni numero negativo;
- tra due numeri positivi è maggiore quello con valore assoluto maggiore: $+9 > +4$;
- tra due numeri negativi è maggiore quello con valore assoluto **minore**: $-4 > -9$.

L'ultima regola è quella che sorprende di più, ma basta pensare alle temperature: -4 °C è una temperatura più alta, cioè meno fredda, di -9 °C. Analogamente, chi ha un debito di 4 euro (saldo -4) sta meglio di chi ha un debito di 9 euro (saldo -9).

ESEMPIO SVOLTO

Ordina in senso crescente i numeri $-12, +3, -5, 0, -15, +9, -1$.

Separiamo i negativi, lo zero e i positivi. I negativi sono $-12, -5, -15, -1$: il più piccolo è quello con valore assoluto maggiore, quindi $-15 < -12 < -5 < -1$. Poi viene lo 0. Infine i positivi: $+3 < +9$. In conclusione:

$$-15 < -12 < -5 < -1 < 0 < +3 < +9$$

Controllo con le temperature: -15 °C è la più fredda, $+9$ °C la più calda. Il risultato è coerente.

Confrontando $\mathbb{Z}$ con $\mathbb{N}$ notiamo alcune differenze importanti. In $\mathbb{N}$ ogni numero ha un successivo, ma lo 0 non ha un precedente: 0 è il minimo di $\mathbb{N}$. In $\mathbb{Z}$, invece, **ogni** numero ha sia un successivo sia un precedente: il precedente di 0 è -1, il precedente di -1 è -2, e così via. Di conseguenza $\mathbb{Z}$ non ha né un minimo né un massimo. Come $\mathbb{N}$, anche $\mathbb{Z}$ è un **insieme discreto**: tra due interi consecutivi, come -4 e -3, non c'è nessun altro numero intero. Vedremo che i numeri razionali si comportano in modo molto diverso.

2.3 Addizione e sottrazione

2.3.1 L'addizione come spostamento

Un modo concreto per pensare all'addizione tra interi è immaginare degli spostamenti lungo la retta orientata. Un numero positivo indica un certo numero di passi verso destra, un numero negativo un certo numero di passi verso sinistra. Calcolare (+5) + (−8) significa partire da 0, fare 5 passi a destra e poi 8 passi a sinistra: si arriva in −3 (Figura 2.3). Infatti, gli 8 passi a sinistra annullano i 5 passi a destra e ne avanzano 3 verso sinistra.

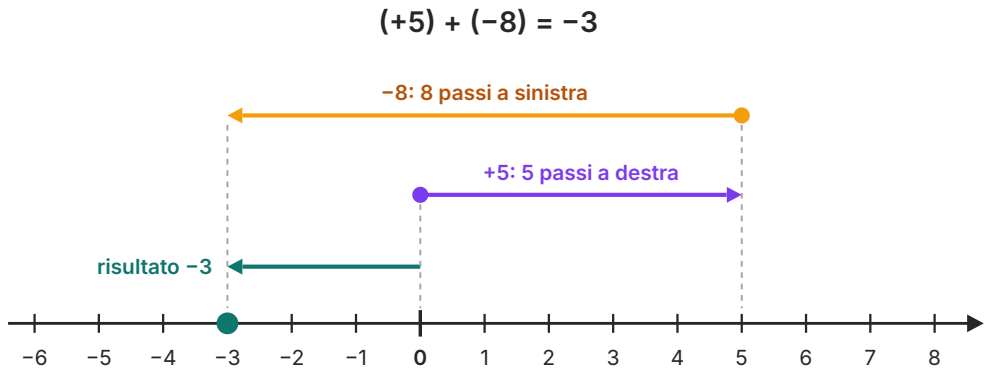


Figura 2.3 L'addizione (+5) + (−8) come successione di spostamenti: 5 passi verso destra a partire da 0, poi 8 passi verso sinistra. Lo spostamento complessivo porta da 0 a −3.

Ragionando allo stesso modo su tutti i casi possibili si arriva a queste regole.

IN SINTESI

Somma di due numeri concordi. Ha lo stesso segno degli addendi e per valore assoluto la somma dei valori assoluti: (+6) + (+9) = +15; (−6) + (−9) = −15.

Somma di due numeri discordi. Ha il segno dell'addendo con valore assoluto maggiore e per valore assoluto la differenza tra il valore assoluto maggiore e quello minore: (+6) + (−9) = −3; (−6) + (+9) = +3.

Somma di due numeri opposti. È zero: (−11) + (+11) = 0.

Zero. Aggiungere 0 non cambia un numero: $a + 0 = a$.

Con le temperature: se al mattino ci sono −6 °C e durante il giorno la temperatura sale di 9 °C, si arriva a (−6) + (+9) = +3 °C. Se invece il termometro segna +6 °C e la temperatura scende di 9 °C,

si arriva a $(+6) + (-9) = -3$ °C.

Perché la regola per i numeri discordi funziona? Pensiamo a $(+6) + (-9)$ come a 6 passi in avanti e 9 indietro. Ogni passo in avanti viene «annullato» da un passo indietro: dopo aver annullato 6 coppie di passi restano $9 - 6 = 3$ passi indietro, cioè -3. Il valore assoluto del risultato è quindi la differenza dei valori assoluti, e il segno è quello del numero che «vince», cioè dell'addendo con valore assoluto maggiore. Lo stesso ragionamento, con le monete al posto dei passi, si ritrova in contabilità: 6 euro di entrate e 9 euro di uscite lasciano un saldo di 3 euro di debito.

2.3.2 La sottrazione: addizionare l'opposto

In $\mathbb{N}$ la sottrazione $a - b$ chiede «quale numero devo aggiungere a b per ottenere a?». La stessa domanda ha senso in $\mathbb{Z}$, e ora ha sempre una risposta: il numero cercato è $a + (-b)$. Infatti, aggiungendo b a questo numero si ottiene $a + (-b) + b = a + 0 = a$. Abbiamo così trovato la regola fondamentale:

$$a - b = a + (-b)$$

cioè **sottrarre un numero equivale ad addizionare il suo opposto**. Qualche esempio:

$$(+4) - (+9) = (+4) + (-9) = -5 \qquad (-7) - (-3) = (-7) + (+3) = -4$$

$$(-5) - (+8) = (-5) + (-8) = -13 \qquad (+2) - (-10) = (+2) + (+10) = +12$$

La Figura 2.4 mostra altre due sottrazioni come spostamenti sulla retta. La conseguenza più importante è che in $\mathbb{Z}$ la sottrazione è sempre possibile: la differenza di due interi è ancora un intero. Si dice che la sottrazione è un'**operazione interna** a $\mathbb{Z}$, mentre non lo era in $\mathbb{N}$. È proprio per questo che abbiamo costruito i numeri interi.

La sottrazione fornisce anche un criterio semplice per il confronto: dati due interi a e b, si ha $a < b$ esattamente quando la differenza $b - a$ è positiva. Per esempio $-8 < -3$ perché $(-3) - (-8) = +5$ è positivo. Sulla retta orientata, $b - a$ è lo spostamento che porta dal punto a al punto b: se è positivo, lo spostamento va verso destra, e dunque b sta a destra di a.

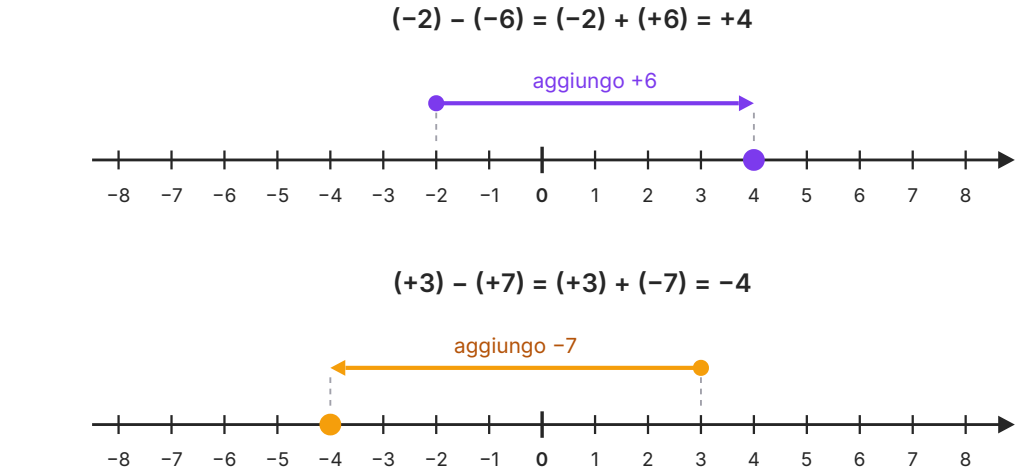


Figura 2.4 Sottrarre un numero equivale ad addizionare il suo opposto. In alto: togliere −6 equivale ad aggiungere +6, e da −2 si arriva a +4. In basso: togliere +7 equivale ad aggiungere −7, e da +3 si arriva a −4.

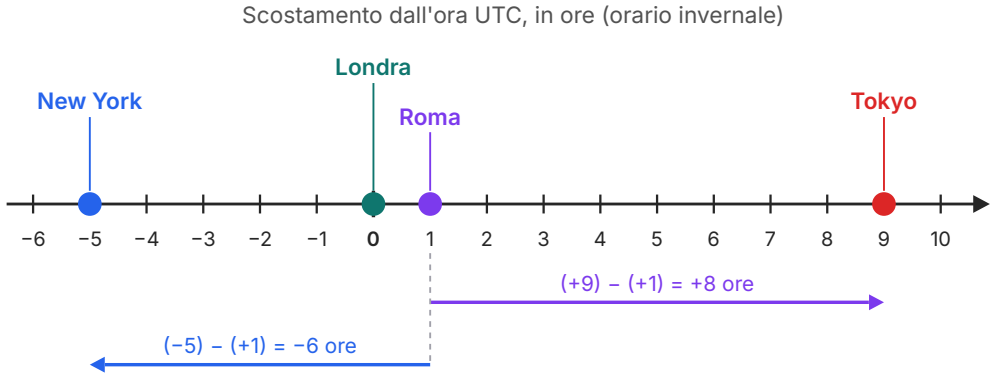


Figura 2.5 I fusi orari in inverno, come numeri interi sulla retta: lo scostamento dall'ora UTC è −5 per New York, 0 per Londra, +1 per Roma, +9 per Tokyo. La differenza d'ora tra due città è la differenza tra i loro scostamenti.

Nelle scienze la sottrazione tra interi serve soprattutto per calcolare **variazioni**. La variazione di una grandezza si calcola sempre come *valore finale meno valore iniziale*. Se la temperatura passa da −8 °C a +5 °C, la variazione è (+5) − (−8) = +13 °C: la temperatura è salita di 13 gradi. Se passa da +5 °C a −8 °C, la variazione è (−8) − (+5) = −13 °C: il segno meno dice che la temperatura è scesa.

Un altro esempio viene dai **fusi orari**. L'ora di ogni zona del mondo si esprime come scostamento, in ore, dal tempo universale coordinato (UTC). D'inverno l'Italia ha l'ora UTC+1, Londra

UTC+0, New York UTC−5 e Tokyo UTC+9 (Figura 2.5). La differenza d'ora tra Tokyo e Roma è (+9) − (+1) = +8 ore: quando a Roma è mezzogiorno, a Tokyo sono le 20. La differenza tra New York e Roma è (−5) − (+1) = −6 ore: quando a Roma è mezzogiorno, a New York sono le 6 del mattino.

2.3.3 La somma algebrica

Poiché ogni sottrazione si può trasformare in un'addizione, in $\mathbb{Z}$ addizioni e sottrazioni si possono trattare come un'unica operazione, detta **somma algebrica**. Per scriverla in modo compatto si eliminano le parentesi che racchiudono i singoli numeri, applicando queste due regole:

- un segno + davanti alla parentesi lascia invariato il segno del numero: + (+3) = +3, + (−3) = −3;
- un segno − davanti alla parentesi cambia il segno del numero: − (+3) = −3, − (−3) = +3.

Per esempio:

$$(+7) + (-3) - (+5) - (-2) = 7 - 3 - 5 + 2 = 1$$

Nella scrittura 7 − 3 − 5 + 2 i numeri +7, −3, −5, +2 si chiamano *termini* della somma algebrica. Grazie alle proprietà commutativa e associativa dell'addizione, che in $\mathbb{Z}$ continuano a valere, possiamo sommare i termini nell'ordine che preferiamo. Un metodo comodo è raccogliere da una parte i termini positivi e dall'altra quelli negativi:

$$15 - 8 - 12 + 3 - 4 + 9 = (15 + 3 + 9) - (8 + 12 + 4) = 27 - 24 = 3$$

È lo stesso ragionamento che fa un negoziante a fine giornata quando somma separatamente le entrate e le uscite e poi calcola il saldo.

2.3.4 Eliminare le parentesi

Le regole precedenti si estendono alle parentesi che contengono più termini:

- se una parentesi è preceduta dal segno +, si può eliminare lasciando invariati i segni di tutti i termini che contiene: 10 + (4 − 6 + 1) = 10 + 4 − 6 + 1;
- se una parentesi è preceduta dal segno −, si può eliminare **cambiando il segno di tutti i termini** che contiene: 10 − (4 − 6 + 1) = 10 − 4 + 6 − 1.

La seconda regola discende dal fatto che sottrarre una somma significa addizionare l'opposto della somma, e l'opposto di una somma è la somma degli opposti. Si può controllare sull'esempio: 4 − 6 + 1 = −1, quindi 10 − (−1) = 11; e infatti 10 − 4 + 6 − 1 = 11.

ESEMPIO SVOLTO

Calcola $10 - [4 - (6 - 9) + (-2 + 5)] - (-7 + 3)$.

Primo metodo: dall'interno verso l'esterno. Calcoliamo le parentesi tonde: $6 - 9 = -3$, $-2 + 5 = 3$, $-7 + 3 = -4$. L'espressione diventa $10 - [4 - (-3) + 3] - (-4) = 10 - [4 + 3 + 3] + 4 = 10 - 10 + 4 = 4$.

Secondo metodo: eliminare le parentesi. Togliamo prima le tonde dentro la quadra (la prima è preceduta da $-$, la seconda da $+$): $10 - [4 - 6 + 9 - 2 + 5] - (-7 + 3)$. Ora togliamo la quadra e l'ultima tonda, entrambe precedute da $-$: $10 - 4 + 6 - 9 + 2 - 5 + 7 - 3$. Positivi: $10 + 6 + 2 + 7 = 25$; negativi: $4 + 9 + 5 + 3 = 21$. Risultato: $25 - 21 = 4$.

I due metodi danno lo stesso risultato, come deve essere.

ERRORE FREQUENTE

Davanti a $-(8 - 3)$ molti studenti cambiano il segno solo del primo termine e scrivono $-8 - 3 = -11$. È sbagliato: il segno $-$ davanti alla parentesi cambia il segno di **tutti** i termini, quindi $-(8 - 3) = -8 + 3 = -5$. Controllo: $8 - 3 = 5$ e l'opposto di 5 è -5.

2.4 Moltiplicazione e divisione

2.4.1 La regola dei segni

Il **prodotto** di due numeri interi ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti e per segno quello indicato dalla **regola dei segni**: il prodotto di due numeri concordi è positivo, il prodotto di due numeri discordi è negativo. Se uno dei fattori è 0, il prodotto è 0.

Tabella 2.1 La regola dei segni per la moltiplicazione (e per la divisione).

Primo fattore	Secondo fattore	Prodotto	Esempio
+	+	+	$(+3) \cdot (+4) = +12$
+	−	−	$(+3) \cdot (-4) = -12$
−	+	−	$(-3) \cdot (+4) = -12$
−	−	+	$(-3) \cdot (-4) = +12$

Le prime tre righe della tabella si spiegano facilmente. Che $(+3) \cdot (+4) = +12$ lo sappiamo dai numeri naturali. Il prodotto $(+3) \cdot (-4)$ si può leggere come «tre volte -4», cioè $(-4) + (-4) + (-4) = -12$: tre debiti da 4 euro fanno un debito di 12 euro. Il prodotto $(-3) \cdot (+4)$ deve dare lo stesso risultato, se vogliamo che la moltiplicazione resti commutativa. Più delicata è l'ultima riga: perché «meno per meno» dovrebbe fare «più»?

2.4.2 Perché meno per meno fa più

Primo argomento: la regolarità. Osserviamo come cambia il prodotto quando il primo fattore diminuisce di 1 e il secondo resta −2:

$$3 \cdot (-2) = -6 \quad 2 \cdot (-2) = -4 \quad 1 \cdot (-2) = -2 \quad 0 \cdot (-2) = 0$$

Ogni volta che il primo fattore diminuisce di 1, il prodotto *aumenta* di 2. Se vogliamo che questa regolarità continui anche quando il primo fattore diventa negativo, dobbiamo avere $(-1) \cdot (-2) = +2$ e $(-2) \cdot (-2) = +4$.

Secondo argomento: la proprietà distributiva. Questo è un vero ragionamento, che non dipende da un'osservazione su pochi casi. Vogliamo che in $\mathbb{Z}$ continuino a valere le proprietà della moltiplicazione che conosciamo in $\mathbb{N}$, in particolare la proprietà distributiva e il fatto che ogni numero moltiplicato per 0 dà 0. Allora

$$(-1) \cdot [(+1) + (-1)] = (-1) \cdot 0 = 0$$

ma, applicando la proprietà distributiva,

$$(-1) \cdot [(+1) + (-1)] = (-1) \cdot (+1) + (-1) \cdot (-1) = -1 + (-1) \cdot (-1)$$

Dunque $-1 + (-1) \cdot (-1) = 0$, e il numero $(-1) \cdot (-1)$ è quello che, sommato a -1, dà zero: è l'opposto di -1, cioè $+1$. Se avessimo scelto $(-1) \cdot (-1) = -1$, la proprietà distributiva non sarebbe più valida. In questo senso la regola dei segni non è una convenzione arbitraria: è l'unica scelta che conserva le proprietà delle operazioni.

Terzo argomento: la simmetria. Moltiplicare un numero per -1 dà il suo opposto: geometricamente, porta ogni punto della retta nel suo simmetrico rispetto all'origine (Figura 2.6). Moltiplicare due volte per -1 significa fare due volte la simmetria, e quindi tornare al punto di partenza: $(-1) \cdot (-1) = +1$.

Moltiplicare per −1 porta ogni numero nel suo opposto

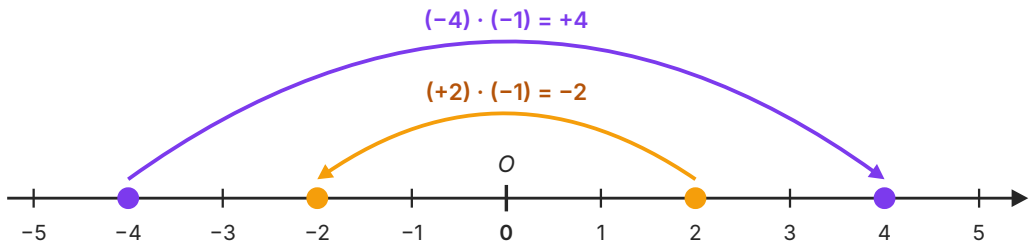


Figura 2.6 Moltiplicare per −1 trasforma ogni numero nel suo opposto, cioè nel punto simmetrico rispetto all'origine O: +2 diventa −2 e −4 diventa +4. Applicare due volte la simmetria riporta al punto di partenza, per questo (−1) · (−1) = +1.

IN SINTESI

Regola dei segni. Il prodotto (e il quoziente) di due numeri interi diversi da zero è positivo se i numeri sono concordi, negativo se sono discordi. Il valore assoluto del prodotto è il prodotto dei valori assoluti.

Più fattori. Un prodotto di fattori tutti diversi da zero è positivo se il numero dei fattori negativi è pari, negativo se è dispari. Se almeno un fattore è 0, il prodotto è 0.

2.4.3 Prodotti di più fattori

Quando i fattori sono più di due conviene stabilire prima il segno, contando i fattori negativi, e poi calcolare il valore assoluto. Per esempio, in (−2) · (+3) · (−1) · (−5) ci sono tre fattori negativi: tre è dispari, quindi il prodotto è negativo. Il valore assoluto è $2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5 = 30$. Risultato: −30. In (−2) · (−2) · (−2) · (−2), invece, i fattori negativi sono quattro e il prodotto è +16.

In $\mathbb{Z}$ vale anche una proprietà che useremo moltissimo nelle equazioni: se un prodotto di due interi è uguale a zero, almeno uno dei due fattori è zero. In simboli, se $a \cdot b = 0$ allora $a = 0$ oppure $b = 0$.

APPROFONDIMENTO

Una lunga strada verso i numeri negativi. In Cina, nel testo noto come *Nove capitoli sull'arte matematica*, giunto alla forma definitiva intorno al I secolo d.C., le quantità positive e negative vengono già usate, con regole per sommarle e sottrarle, nella risoluzione di problemi con più incognite; il commentatore Liu Hui, nel III secolo d.C., le rappresenta con bastoncini da calcolo di due colori diversi. In India, nel 628 d.C., Brahmagupta enuncia nel *Brahmasphutasiddhanta* regole di calcolo che parlano di «beni» e «debiti» e corrispondono alla nostra regola dei segni. In Europa l'accettazione fu lentissima: ancora nel Cinquecento le soluzioni negative di un'equazione erano guardate con sospetto, e Gerolamo Cardano, nell'*Ars magna* (1545), le chiama «fittizie». Solo tra Seicento e Settecento, con lo sviluppo dell'algebra e della geometria analitica, i numeri negativi diventano strumenti di uso comune.

2.4.4 La divisione in $\mathbb{Z}$

Dati due interi a e b, con $b \neq 0$, il **quoziente** $a : b$ è, se esiste, il numero intero q tale che $q \cdot b = a$. Per il segno vale la stessa regola della moltiplicazione, e il valore assoluto è il quoziente dei valori assoluti:

$$(-36) : (+9) = -4 \qquad (-36) : (-4) = +9 \qquad (+36) : (-12) = -3$$

Si può sempre controllare il risultato con la moltiplicazione: $(-4) \cdot (+9) = -36$. Il quoziente esiste in $\mathbb{Z}$ soltanto se $|b|$ è un divisore di $|a|$: per esempio $(+20) : (-6)$ **non** è un numero intero, perché nessun intero moltiplicato per -6 dà $+20$. Quindi, come in $\mathbb{N}$, la divisione **non** è un'operazione interna a $\mathbb{Z}$: per renderla sempre possibile (con divisore diverso da zero) servono i numeri razionali del capitolo 3.

La divisione tra interi compare spesso quando una variazione si distribuisce in parti uguali. Se un sottomarino scende a velocità costante da quota 0 a quota -120 m in 8 minuti, la sua variazione di quota in ogni minuto è $(-120) : 8 = -15$ m: il segno meno ricorda che il sottomarino sta scendendo. Se invece un pallone sonda sale da quota $+200$ m a quota $+440$ m in 6 minuti, la variazione al minuto è $(440 - 200) : 6 = 240 : 6 = +40$ m.

Per lo zero valgono le stesse regole viste in $\mathbb{N}$: $0 : b = 0$ per ogni $b \neq 0$; la divisione $a : 0$ con $a \neq 0$ è **impossibile**, perché nessun numero moltiplicato per 0 dà a; la divisione $0 : 0$ è **indeterminata**, perché ogni numero moltiplicato per 0 dà 0.

2.5 Le potenze in $\mathbb{Z}$

2.5.1 Definizione e segno

La definizione di potenza è la stessa vista in $\mathbb{N}$. Se a è un numero intero e n un numero naturale maggiore di 1, la **potenza** a^n è il prodotto di n fattori uguali ad a; a si chiama *base* e n *esponente*.

Inoltre $a^1 = a$ e $a^0 = 1$ se $a \neq 0$, mentre 0^0 non ha significato. Per esempio

$$(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = +9 \qquad (-3)^3 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -27 \qquad (-3)^0 = 1$$

Il segno di una potenza si ricava dalla regola dei segni con più fattori: tutti i fattori sono uguali alla base, quindi se la base è negativa il numero di fattori negativi è proprio l'esponente.

Tabella 2.2 Il segno di una potenza a^n con base diversa da zero.

Base	Esponente	Segno della potenza	Esempio
positiva	qualsiasi	positivo	$(+2)^5 = +32$
negativa	pari	positivo	$(-2)^4 = +16$
negativa	dispari	negativo	$(-2)^5 = -32$

La Figura 2.7 mostra le potenze di −2 con esponente da 0 a 6: i valori si alternano tra positivi e negativi e il loro valore assoluto raddoppia a ogni passo. Un caso particolare molto utile è quello delle potenze di −1: $(-1)^n$ vale +1 se n è pari e −1 se n è dispari. Per esempio $(-1)^{100} = 1$ e $(-1)^{2025} = -1$. Nota anche che il quadrato di un intero non è mai negativo: $a^2 \geq 0$ per ogni $a \in \mathbb{Z}$.

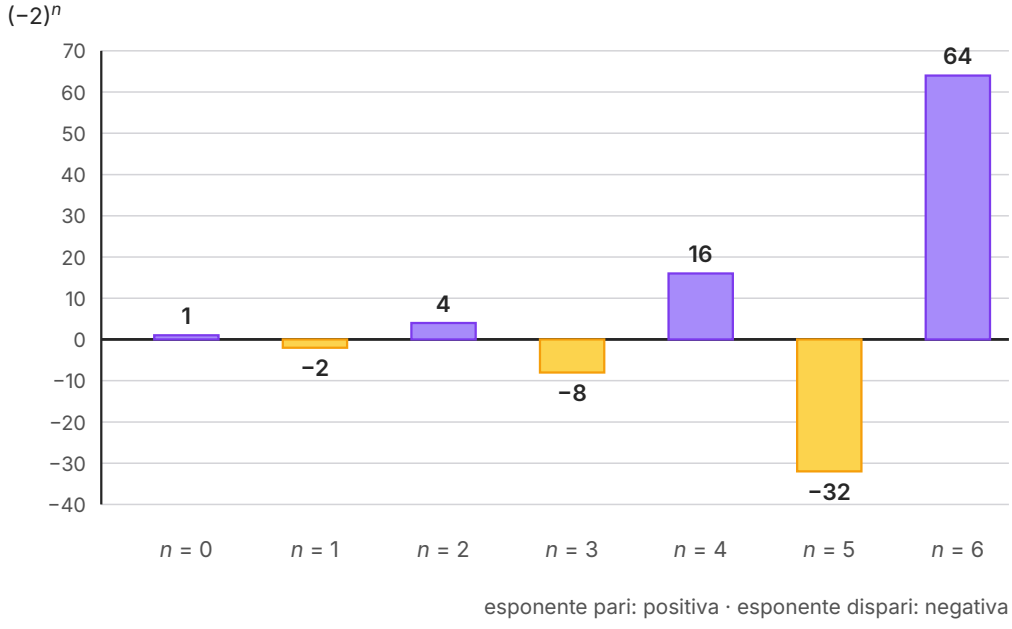


Figura 2.7 Le potenze $(-2)^n$ per n da 0 a 6: 1, −2, 4, −8, 16, −32, 64. Con esponente pari la potenza è positiva, con esponente dispari è negativa; il valore assoluto raddoppia a ogni passo.

2.5.2 $(-a)^n$ non è $-a^n$

Le parentesi, nelle potenze, sono essenziali. Nella scrittura $(-3)^2$ l'esponente si riferisce a tutto il numero -3, segno compreso: $(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = 9$. Nella scrittura -3^2, invece, l'esponente si riferisce solo a 3, e il segno meno indica l'opposto del risultato: $-3^2 = -(3\cdot 3) = -9$. La ragione è l'ordine delle operazioni: la potenza ha la precedenza sul cambio di segno.

In generale, se l'esponente n è **pari** si ha $(-a)^n = a^n$, mentre se è **dispari** $(-a)^n = -a^n$. Ad esempio $(-2)^3 = -8 = -2^3$, ma $(-2)^4 = 16$ mentre $-2^4 = -16$.

ERRORE FREQUENTE

$-2^2 = -4$, ma $(-2)^2 = +4$. Senza parentesi l'esponente «non vede» il segno meno. Allo stesso modo $-(-2)^2 = -4$ e $-(-2)^3 = -(-8) = +8$. Prima di calcolare, chiediti sempre: *qual è la base di questa potenza?*

2.5.3 Le proprietà delle potenze

Le cinque proprietà delle potenze studiate in $\mathbb{N}$ valgono anche per basi intere (diverse da zero quando compare un quoziente o un esponente nullo), perché derivano solo dalle proprietà della moltiplicazione:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad a^m : a^n = a^{m-n}\ (m \geq n) \qquad (a^m)^n = a^{m\cdot n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n \qquad a^n : b^n = (a : b)^n\ (\text{se } a : b \in \mathbb{Z})$$

Esempi: $(-2)^3\cdot(-2)^2 = (-2)^5 = -32$; $(-6)^7 : (-6)^5 = (-6)^2 = 36$; $[(-2)^3]^2 = (-2)^6 = 64$; $(+2)^3\cdot(-5)^3 = (-10)^3 = -1000$; $(-15)^2 : (+3)^2 = (-5)^2 = 25$. Le proprietà si applicano solo a potenze con la **stessa base** (prime tre) o con lo **stesso esponente** (ultime due): non esiste alcuna regola per semplificare $(-2)^3 + (-2)^2$, che va calcolata così com'è: $-8 + 4 = -4$.

ESEMPIO SVOLTO

Calcola $(-2)^5 : (-2)^3 + (-3)^2\cdot(-1)^7 - [(-2)^2]^2$.

Primo termine: quoziente di potenze con la stessa base, $(-2)^{5-3} = (-2)^2 = 4$.

Secondo termine: $(-3)^2 = 9$ e $(-1)^7 = -1$ (esponente dispari), quindi $9\cdot(-1) = -9$.

Terzo termine: potenza di potenza, $(-2)^{2\cdot 2} = (-2)^4 = 16$; è preceduto dal segno $-$.

Risultato: $4 - 9 - 16 = -21$.

2.6 Proprietà delle operazioni ed espressioni

2.6.1 Le proprietà in $\mathbb{Z}$

Riassumiamo le proprietà di cui godono le operazioni in $\mathbb{Z}$. Rispetto a $\mathbb{N}$ c'è una novità fondamentale: ogni numero intero a ha un **elemento opposto** $-a$, tale che $a + (-a) = 0$. Lo zero, che è l'**elemento neutro** dell'addizione, si può quindi sempre «raggiungere» partendo da qualunque numero.

Tabella 2.3 Proprietà delle operazioni in $\mathbb{Z}$ (a, b, c interi qualsiasi).

Proprietà	Addizione	Moltiplicazione
Operazione interna	sì	sì
Commutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Associativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Elemento neutro	0: $a + 0 = a$	1: $a \cdot 1 = a$
Elemento opposto	$a + (-a) = 0$	—
Elemento assorbente	—	0: $a \cdot 0 = 0$
Distributiva	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$	

La sottrazione è interna a $\mathbb{Z}$ ma, come in $\mathbb{N}$, **non** è commutativa né associativa: $5 - 2 = 3$, mentre $2 - 5 = -3$; $(8 - 5) - 2 = 1$, mentre $8 - (5 - 2) = 5$. Anche per questo conviene sempre trasformarla in un'addizione dell'opposto, alla quale si possono applicare tutte le proprietà della tabella. La moltiplicazione, invece, non ha un «elemento inverso» in $\mathbb{Z}$: non esiste un intero che moltiplicato per 2 dia 1. Questa mancanza sarà colmata dai numeri razionali.

APPROFONDIMENTO

Una struttura: il gruppo. I matematici hanno dato un nome alle proprietà dell'addizione in $\mathbb{Z}$. Un insieme dotato di un'operazione interna che sia associativa, che abbia un elemento neutro e in cui ogni elemento abbia un elemento opposto (o, più in generale, «simmetrico») si chiama **gruppo**; se l'operazione è anche commutativa, il gruppo si dice *commutativo* o *abeliano*, in onore del matematico norvegese Niels Henrik Abel (1802–1829). L'insieme $\mathbb{Z}$ con l'addizione è dunque un gruppo abeliano. Invece $\mathbb{N}$ con l'addizione non è un gruppo, perché nessun naturale diverso da zero ha l'opposto in $\mathbb{N}$; e $\mathbb{Z}$ con la moltiplicazione non è un gruppo, perché 2 non ha un inverso in $\mathbb{Z}$. Riconoscere la stessa struttura in contesti diversi, numeri, rotazioni, simmetrie, è una delle idee più potenti della matematica moderna.

2.6.2 Le espressioni con i numeri interi

Per calcolare un'espressione con i numeri interi si segue lo stesso ordine già visto in $\mathbb{N}$:

1. si eseguono prima le operazioni dentro le parentesi tonde, poi quelle dentro le quadre, poi dentro le graffe;
2. all'interno di ogni parentesi si calcolano prima le potenze, poi moltiplicazioni e divisioni nell'ordine in cui compaiono (da sinistra a destra), infine addizioni e sottrazioni;
3. il valore assoluto $|\dots|$ si comporta come una parentesi: prima si calcola il numero che contiene, poi se ne prende il valore assoluto.

Conviene, a ogni passaggio, stabilire subito il segno di ciascun risultato parziale: è il modo più sicuro per evitare errori.

ESEMPIO SVOLTO

Calcola $\{[(-3)^2 - 4 \cdot (+2)]^3 - (-12) : (+4)\} \cdot (-2) + |-6 + 1|$.

Parentesi tonde e potenze nella quadra: $(-3)^2 = 9$ e $4 \cdot (+2) = 8$, quindi la quadra vale $9 - 8 = 1$, e $1^3 = 1$.

Divisione nella graffa: $(-12) : (+4) = -3$. La graffa diventa $\{1 - (-3)\} = \{1 + 3\} = 4$.

Moltiplicazione: $4 \cdot (-2) = -8$.

Valore assoluto: $-6 + 1 = -5$ e $|-5| = 5$.

Risultato: $-8 + 5 = -3$.

Le stesse regole servono quando, in una formula con delle lettere, si sostituiscono alle lettere dei numeri interi. Per esempio, con $a = -2$ e $b = 3$ si ha $a^2 - 2ab + b^2 = 4 - 2 \cdot (-2) \cdot 3 + 9 = 4 + 12 + 9 = 25$, e anche $(a - b)^2 = (-5)^2 = 25$. Non è una coincidenza: nel capitolo 7 scoprirai che le due espressioni sono uguali per qualsiasi valore delle lettere. Al contrario $a^2 + b^2 = 13$, mentre $(a + b)^2 = 1^2 = 1$: il quadrato di una somma **non** è la somma dei quadrati. Quando sostituisci un numero negativo a una lettera, scrivilo sempre tra parentesi: $(-2)^2 = 4$, mentre $-2^2 = -4$.

SINTESI

- I numeri interi servono a descrivere grandezze con un livello di riferimento e due versi: temperature, quote, saldi, fusi orari.
- $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, +1, +2, ...\} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$; lo 0 non ha segno; identificando $+n$ con n si ha $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- Sulla retta orientata ogni intero è un punto; il valore assoluto $|a|$ è la distanza dall'origine e non è mai negativo.
- Due numeri sono opposti se hanno lo stesso valore assoluto e segno diverso; concordi se hanno lo stesso segno, discordi se hanno segno diverso.
- Tra due negativi è maggiore quello con valore assoluto minore; $\mathbb{Z}$ è discreto e non ha né minimo né massimo.
- Somma di concordi: stesso segno, somma dei valori assoluti; di discordi: segno del valore assoluto maggiore, differenza dei valori assoluti.
- Sottrarre equivale ad addizionare l'opposto: $a - b = a + (-b)$; in $\mathbb{Z}$ la sottrazione è un'operazione interna.
- Una parentesi preceduta da $-$ si elimina cambiando il segno di tutti i termini che contiene.
- Regola dei segni: concordi danno prodotto (e quoziente) positivo, discordi negativo; è l'unica scelta compatibile con la proprietà distributiva.
- La divisione in $\mathbb{Z}$ è possibile solo se il divisore divide il dividendo; $a : 0$ è impossibile, $0 : 0$ è indeterminata.
- Una potenza con base negativa è positiva se l'esponente è pari, negativa se è dispari; se n è pari, $(-a)^n = a^n$ è l'opposto di $-a^n$ (quindi diverso, se $a \neq 0$).
- $\mathbb{Z}$ con l'addizione è un gruppo abeliano: ogni elemento ha l'opposto.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Il valore assoluto di -7 è:
   A. -7
   B. 7
   C. 1
   D. 0

2. ● Quale coppia è formata da numeri discordi?
   A. -3 e -8
   B. $+2$ e $+5$
   C. 0 e -4
   D. -6 e $+1$

3. ● Quanto vale $(-2)^3$?

   A. −8
   B. +8
   C. −6
   D. +6

4. ● Quale catena di disuguaglianze è corretta?

   A. −9 < −12 < 0
   B. −1 < −5 < 3
   C. −12 < −9 < −1
   D. 0 < −1 < 1

5. ●● Quanto vale -3^2?

   A. 9
   B. −9
   C. −6
   D. 6

6. ● Quale operazione **non** è sempre possibile in $\mathbb{Z}$?

   A. L'addizione
   B. La sottrazione
   C. La moltiplicazione
   D. La divisione

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
   a) Ogni numero naturale è un numero intero.
   b) Lo 0 è un intero positivo.
   c) Due numeri opposti hanno lo stesso valore assoluto.
   d) Il prodotto di due numeri negativi è negativo.
   e) In $\mathbb{Z}$ esiste un numero minore di tutti gli altri.

8. ● Completa le definizioni.
   a) Due numeri interi si dicono opposti se _____ .
   b) Il valore assoluto di un numero intero è _____ .
   c) Una potenza con base negativa è positiva se l'esponente è _____ , negativa se è _____ .

9. ● Rappresenta sulla retta orientata i numeri −4, +3, −1, 0, +5, −6. Scrivili in ordine crescente; poi scrivi l'opposto e il valore assoluto di ciascuno.

Calcolare

10. ● Calcola le addizioni.
    a) (+7) + (−12) b) (−9) + (−6) c) (−15) + (+15) d) (+23) + (−8)

11. ● Calcola le sottrazioni trasformandole in addizioni.
a) (+4) − (+11) b) (−6) − (−10) c) (−8) − (+5) d) 0 − (−17)

12. ● Calcola le somme algebriche.
a) 8 − 13 + 5 − 9 b) −4 − 7 + 15 − 2 + 1 c) −20 + 6 − 3 + 11 + 6

13. ●● Elimina le parentesi e calcola.
a) 12 − (5 − 9) + (−3 + 2)
b) −(7 − 10) − (−4 + 6 − 1)
c) 5 − [3 − (8 − 11) + 2]

14. ● Calcola.
a) (−6) · (+7) b) (−4) · (−9) c) (−2) · (−3) · (−5)
d) (−48) : (−6) e) (+56) : (−8) f) 0 : (−9)

15. ●● Stabilisci il segno senza calcolare, poi calcola il valore.
a) (−1) · (−2) · (−3) · (−4) · (−5)
b) $(-3)^4 \cdot (-2)^3$
c) $(-7)^0 \cdot (-1)^{11}$

16. ● Calcola le potenze.
a) $(-3)^2$ b) -3^2 c) $(-2)^5$ d) $-(-2)^4$ e) $(-1)^{100}$ f) $(-5)^0$

17. ●● Scrivi il risultato come un'unica potenza, usando le proprietà.
a) $(-2)^3 \cdot (-2)^4$ b) $(-5)^9 : (-5)^6$ c) $[(-3)^2]^3$
d) $(-4)^5 \cdot (+3)^5$ e) $(-18)^4 : (+6)^4$

18. ●● Calcola: $[(-3) \cdot (+4) - (-2)^3] : (-2) + 5$.

19. ●● Calcola: $-2^2 + (-2)^2 - (-1)^5 \cdot 3 + (-6) : (+3)$.

20. ●●● Calcola: $\{[(-2)^3]^2 : (-2)^4 - (-5)\} \cdot (-1)^3$.

Dimostrare e argomentare

21. ●● Spiega, usando la proprietà distributiva e il fatto che $a \cdot 0 = 0$, perché $(-1) \cdot (-1) = +1$.

22. ●● Trova l'errore e correggilo: «$-(4 - 9) + 3 = -4 - 9 + 3 = -10$».

23. ●● Vero o falso? Giustifica la risposta con una spiegazione o con un controesempio.
a) Per ogni intero a si ha $|-a| = |a|$.
b) La sottrazione in $\mathbb{Z}$ gode della proprietà commutativa.
c) Per ogni intero a si ha $a^2 \geq 0$.
d) Se $a < b$, allora $a^2 < b^2$.

24. ●●● Spiega perché un prodotto di fattori interi tutti diversi da zero è negativo quando il numero dei fattori negativi è dispari. Usa poi questo fatto per trovare il segno e il valore di (−1) · (+2) · (−3) · (+4) · (−5) · (+6) · (−7) · (+8) · (−9) · (+10).

25. ●●● Spiega perché, per ogni intero a, si ha $(-a)^n = a^n$ se n è pari e $(-a)^n = -a^n$ se n è dispari.

Problemi

26. ● Alle 6 del mattino un termometro segna −7 °C. A mezzogiorno la temperatura è salita di 12 °C; a mezzanotte è scesa di 9 °C rispetto a mezzogiorno. Quale temperatura segna il termometro a mezzogiorno e quale a mezzanotte?

27. ● Luca ha sul conto 150 €. Paga con la carta una spesa di 85 € e poi una di 120 €; il giorno dopo riceve un accredito di 40 €. Scrivi il saldo dopo ogni operazione con un numero intero. Alla fine il conto è «in rosso»?

28. ●● A gennaio Roma ha l'ora UTC+1, New York UTC−5 e Tokyo UTC+9.
a) Quando a Roma sono le 15:00, che ore sono a New York e a Tokyo?
b) Un volo parte da Roma alle 10:00 ora di Roma e atterra a New York dopo 9 ore di viaggio. A che ora atterra, secondo l'ora di New York?

29. ●● Un subacqueo si trova a quota −18 m. Risale di 7 m, poi scende di 11 m. A quale quota si trova alla fine? In quel momento un gabbiano vola a quota +25 m proprio sopra di lui: quanti metri separano il gabbiano dal subacqueo?

30. ●● Nel calendario che usiamo dopo l'anno 1 a.C. viene direttamente l'anno 1 d.C.: l'anno zero non esiste. L'imperatore Augusto nacque nel 63 a.C. e morì nel 14 d.C. Rappresenta gli anni a.C. con numeri negativi e calcola quanti anni separano le due date. Perché la semplice differenza 14 − (−63) dà un risultato sbagliato di 1?

31. ●● Un alimento viene tolto dal frigorifero a +4 °C e messo in congelatore, dove raggiunge −18 °C. Più tardi viene lasciato su un tavolo finché raggiunge +21 °C. Calcola le due variazioni di temperatura (valore finale meno valore iniziale) e la variazione complessiva. Verifica che la variazione complessiva è la somma delle due.

Verso la verifica

32. ●● Calcola il valore dell'espressione $a \cdot b - (a - b)^2 + |a| \cdot b$ per $a = -3$ e $b = 2$.

33. ●● Calcola: $\{-[(-2)^2 - 3 \cdot (-1)]^2 : (-7) + (-4)^3 : (-2)^4\} - |-5 + 2|$.

34. ●●● **Sfida.** a) Calcola, senza svolgere tutte le operazioni una per una, la somma algebrica $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 99 - 100$.
b) Calcola $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \ldots + (-1)^{2025}$.
c) Quante sono le coppie ordinate di interi $(a; b)$ tali che $a \cdot b = -6$? Elencale.

PER APPROFONDIRE

- [ENZ] Un racconto per avvicinarsi ai numeri giocando, utile per ripensare le operazioni in modo intuitivo.
- [CR] Il capitolo sul sistema numerico della matematica, per capire perché e come si estende l'insieme dei numeri naturali.
- [BOY] Per la storia dei numeri negativi in Cina, in India e in Europa.

Glossario del capitolo

Elemento opposto
Per ogni intero a, il numero −a tale che a + (−a) = 0.

Gruppo
Insieme con un'operazione interna associativa, dotata di elemento neutro, in cui ogni elemento ha il simmetrico. $\mathbb{Z}$ con l'addizione è un gruppo abeliano (commutativo).

Numeri concordi
Due interi diversi da zero che hanno lo stesso segno.

Numeri discordi
Due interi diversi da zero che hanno segno diverso.

Numeri interi relativi
I numeri ..., −3, −2, −1, 0, +1, +2, +3, ...: i naturali diversi da zero preceduti da un segno, più lo zero. Il loro insieme si indica con $\mathbb{Z}$.

Numeri opposti
Due interi con lo stesso valore assoluto e segno diverso, come +5 e −5; la loro somma è 0. Lo 0 è opposto di se stesso.

Origine
Il punto O della retta orientata che rappresenta il numero 0.

Regola dei segni
Il prodotto e il quoziente di due interi non nulli sono positivi se i numeri sono concordi, negativi se sono discordi.

Retta orientata
Retta su cui sono fissati un'origine O (che rappresenta lo 0), un verso di percorrenza e un'unità di misura.

Segno
Il simbolo + o − che precede un intero diverso da zero e indica da quale parte dell'origine si trova sulla retta orientata. Lo 0 non ha segno.

Somma algebrica
Sequenza di addizioni e sottrazioni tra interi, considerata come un'unica addizione di termini con segno, es. 7 − 3 − 5 + 2.

Valore assoluto
Distanza dall'origine del punto che rappresenta un intero a; si indica con |a|. È sempre ≥ 0: |−7| = |+7| = 7.

Variazione
Differenza tra valore finale e valore iniziale di una grandezza; il segno dice se la grandezza è aumentata o diminuita.

$\mathbb{Z}^+$ e $\mathbb{Z}^-$
Gli insiemi degli interi positivi (+1, +2, ...) e degli interi negativi (−1, −2, ...). Lo zero non appartiene a nessuno dei due.

Soluzioni

1. B. $|-7| = 7$: il valore assoluto è la distanza dall'origine.

2. D. −6 e +1 hanno segno diverso. In C lo 0 non ha segno, quindi non è discorde con −4.

3. A. $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$ (base negativa, esponente dispari).

4. C. $-12 < -9 < -1$: tra negativi è minore quello con valore assoluto maggiore.

5. B. $-3^2 = -(3\cdot 3) = -9$: la base della potenza è 3, non −3.

6. D. La divisione: ad esempio (+20) : (−6) non è un intero.

7. a) V. b) F: lo 0 non ha segno, non è né positivo né negativo. c) V. d) F: il prodotto di due negativi è positivo, es. $(-2)\cdot(-3) = +6$. e) F: $\mathbb{Z}$ non ha minimo, ogni intero ha un precedente.

8. a) hanno lo stesso valore assoluto e segno diverso (la loro somma è 0; lo 0 è opposto di se stesso). b) la distanza dall'origine del punto che lo rappresenta sulla retta orientata (il numero senza segno). c) pari; dispari.

9. $-6 < -4 < -1 < 0 < +3 < +5$. Opposti: +4, −3, +1, 0, −5, +6 (nell'ordine dei dati). Valori assoluti: 4, 3, 1, 0, 5, 6.

10. a) −5 b) −15 c) 0 d) +15.

11. a) (+4) + (−11) = −7 b) (−6) + (+10) = +4 c) (−8) + (−5) = −13 d) 0 + (+17) = +17.

12. a) positivi 13, negativi 22: −9. b) positivi 16, negativi 13: +3. c) positivi 23, negativi 23: 0.

13. a) 12 − (−4) + (−1) = 12 + 4 − 1 = 15. b) +3 − (+1) = 2 (oppure −7 + 10 + 4 − 6 + 1 = 2). c) 5 − [3 + 3 + 2] = 5 − 8 = −3.

14. a) −42 b) +36 c) −30 d) +8 e) −7 f) 0.

15. a) 5 fattori negativi: negativo; −120. b) $(-3)^4 = +81$ positivo, $(-2)^3 = -8$ negativo: prodotto negativo, −648. c) $(-7)^0 = 1$, $(-1)^{11} = -1$: negativo, −1.

16. a) 9 b) −9 c) −32 d) −16 e) 1 f) 1.

17. a) $(-2)^7$ b) $(-5)^3$ c) $(-3)^6 = 3^6$ d) $(-12)^5$ e) $(-3)^4 = 3^4$.

18. $(-3)\cdot(+4) = -12$; $(-2)^3 = -8$; $[-12 + 8] = -4$; $(-4) : (-2) = 2$; $2 + 5 = 7$.

19. $-4 + 4 - (-1)\cdot 3 + (-2) = -4 + 4 + 3 - 2 = 1$.

20. $[(-2)^3]^2 = (-2)^6$; $(-2)^6 : (-2)^4 = (-2)^2 = 4$; $\{4 + 5\} = 9$; $9 \cdot (-1) = -9$.

21. Traccia: $(-1)\cdot[1 + (-1)] = (-1)\cdot 0 = 0$. Per la proprietà distributiva lo stesso prodotto vale $(-1)\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) = -1 + (-1)\cdot(-1)$. Quindi $-1 + (-1)\cdot(-1) = 0$: il numero $(-1)\cdot(-1)$ sommato a −1 dà 0, perciò è l'opposto di −1, cioè +1.

22. Il segno − davanti alla parentesi deve cambiare il segno di tutti i termini, anche di −9. Corretto: $-(4 - 9) + 3 = -4 + 9 + 3 = 8$ (controllo: $4 - 9 = -5$, $-(-5) + 3 = 8$).

23. a) V: a e $-a$ sono opposti e stanno alla stessa distanza dall'origine. b) F: $5 - 2 = 3$ ma $2 - 5 = -3$. c) V: se $a \neq 0$, $a^2 = a\cdot a$ è prodotto di due fattori concordi, quindi positivo; se $a = 0$ vale 0. d) F: $-3 < 1$ ma $(-3)^2 = 9 > 1 = 1^2$.

24. Traccia: si raggruppano i fattori negativi a due a due (proprietà commutativa e associativa); ogni coppia dà un prodotto positivo. Se i fattori negativi sono in numero dispari, ne resta uno solo senza coppia, e un positivo per un negativo è negativo. Nel prodotto dato i fattori negativi sono −1, −3, −5, −7, −9: cinque, numero dispari, quindi il prodotto è negativo. Valore assoluto: $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 10 = 3\,628\,800$. Risultato: −3 628 800.

25. Traccia: $(-a)^n$ è il prodotto di n fattori $-a = (-1)\cdot a$. Riordinando i fattori, $(-a)^n = (-1)^n \cdot a^n$. Se n è pari, $(-1)^n = +1$ (i fattori −1 si accoppiano tutti) e si ottiene a^n; se n è dispari, $(-1)^n = -1$ e si ottiene $-a^n$.

26. Mezzogiorno: $-7 + 12 = +5$ °C. Mezzanotte: $+5 - 9 = -4$ °C.

27. $150 - 85 = +65$ €; $65 - 120 = -55$ €; $-55 + 40 = -15$ €. Sì: il saldo finale è −15 €, il conto è in rosso di 15 €.

28. a) New York: differenza $(-5) - (+1) = -6$ ore, quindi le 9:00; Tokyo: $(+9) - (+1) = +8$ ore, quindi le 23:00. b) All'arrivo a Roma sono le 10 + 9 = 19:00; a New York sono 6 ore in meno: le 13:00.

29. $-18 + 7 - 11 = -22$ m. Distanza: $(+25) - (-22) = 47$ m.

30. 63 a.C. → −63, 14 d.C. → +14. Gli anni trascorsi sono 76. La differenza $14 - (-63) = 77$ conterebbe anche un «anno zero» che non è mai esistito: tra il 1 a.C. e il 1 d.C. passa 1 anno, non 2. Bisogna quindi togliere 1: $77 - 1 = 76$.

31. Prima variazione: $(-18) - (+4) = -22$ °C. Seconda: $(+21) - (-18) = +39$ °C. Complessiva: $(+21) - (+4) = +17$ °C; infatti $(-22) + (+39) = +17$.

32. $a \cdot b = -6$; $a - b = -5$, $(-5)^2 = 25$; $|a| \cdot b = 3 \cdot 2 = 6$. Valore: $-6 - 25 + 6 = -25$.

33. $(-2)^2 - 3 \cdot (-1) = 4 + 3 = 7$; $-[7]^2 = -49$; $(-49) : (-7) = +7$; $(-4)^3 : (-2)^4 = (-64) : 16 = -4$; graffa: $7 - 4 = 3$; $|-5 + 2| = |-3| = 3$. Risultato: $3 - 3 = 0$.

34. a) Si raggruppano i termini a coppie: $(1 - 2) + (3 - 4) + \ldots + (99 - 100)$; ci sono 50 coppie e ciascuna vale −1: la somma è −50. b) I termini valgono alternativamente −1 (esponente dispari) e +1 (esponente pari); da 1 a 2024 ci sono 1012 coppie $(-1 + 1) = 0$, resta $(-1)^{2025} = -1$. Somma: −1. c) Sono 8: (1; −6), (−1; 6), (2; −3), (−2; 3), (3; −2), (−3; 2), (6; −1), (−6; 1).