VERIFICA

# Verifica di fine parte · La fisica dei quanti

*Tempo indicativo: 3 ore · Punteggio in ventesimi*

**Fisica 5** · Parte IV · La fisica dei quanti · versione 1.0
Verifica: Verifica di fine parte · La fisica dei quanti · pagine 451–458 del volume completo · estratto per lo studio

La verifica riguarda i capitoli 10–13 ed è costruita come la seconda prova dell'esame di Stato. **Risolvi uno dei due problemi e rispondi a quattro quesiti a scelta fra gli otto proposti.** Il problema vale 40 punti e ogni quesito 10 punti: il punteggio grezzo massimo è 80, e si converte in ventesimi (e in decimi) con la tabella alla fine della verifica. Accanto a ogni domanda trovi i punti che vale.

È ammessa la calcolatrice scientifica e puoi consultare le tabelle dell'appendice. Scrivi le formule che usi e i passaggi, e dai ogni risultato con la sua unità di misura e con un numero di cifre significative coerente con i dati: un risultato senza unità è incompleto. Quando ti si chiede di argomentare, rispondi con frasi complete. Dove non è indicato diversamente usa $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s, $\hbar = 1{,}055 \times 10^{-34}$ J·s, $c = 3{,}00 \times 10^{8}$ m/s, $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C, $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg, $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K, $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}$ W/(m²·K⁴), $b = 2{,}90 \times 10^{-3}$ m·K, $k_0 = 8{,}99 \times 10^{9}$ N·m²/C² e $hc = 1240$ eV·nm. Come nei capitoli, $W_0$ è il lavoro di estrazione, e nelle relazioni di indeterminazione $\Delta$ indica un'indeterminazione, non una variazione.

**Problemi · Risolvi uno dei due (40 punti)**

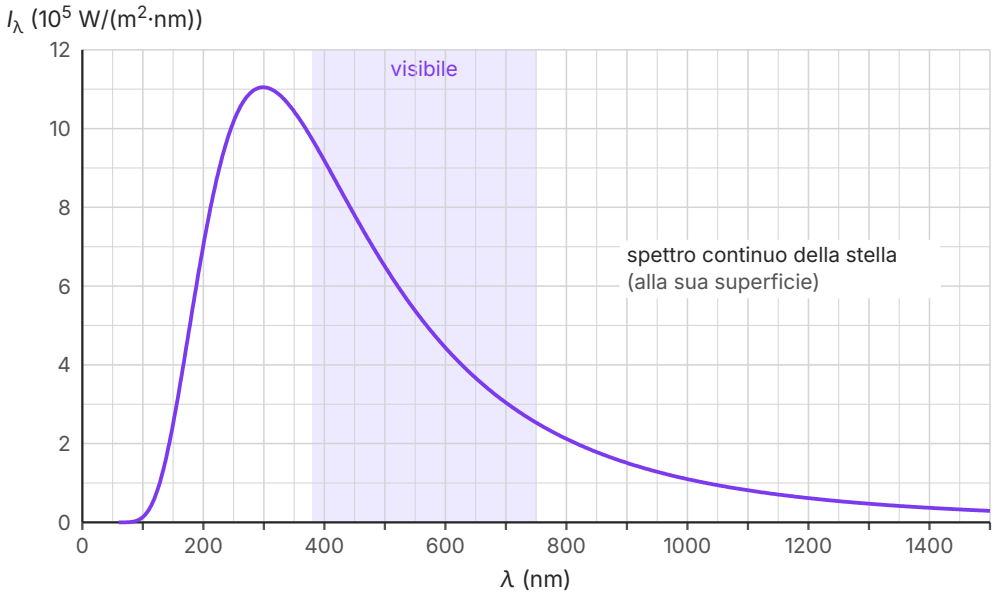


**Figura V4.1** Problema 1: l'intensità spettrale $I_\lambda$ alla superficie della stella in funzione della lunghezza d'onda (spettro continuo, ricostruito dalle misure). La banda colorata è l'intervallo visibile (380–750 nm); le linee verticali più chiare sono tracciate ogni 50 nm.

1. ●●● **La temperatura e le dimensioni di una stella.** Un telescopio spaziale osserva una stella bianco-azzurra che dista dal Sole 25 anni luce (1 anno luce = $9{,}46 \times 10^{15}$ m). Lo strumento misura, fuori dall'atmosfera, lo spettro della radiazione che arriva dalla stella; dai dati gli astronomi ricostruiscono lo spettro continuo emesso alla superficie della stella, cioè l'intensità spettrale $I_\lambda$ in funzione della lunghezza d'onda (Figura V4.1). La stella si può trattare come un corpo nero sferico. Nel visibile lo spettro mostra anche quattro righe scure, a 656,3 nm, 486,1 nm, 434,0 nm e 410,2 nm, che nella figura non sono disegnate.
   a) Leggi nel grafico la lunghezza d'onda e il valore del massimo dell'intensità spettrale e ricava la temperatura della superficie della stella. Usa poi la legge di Planck per calcolare $I_\lambda$ a quella lunghezza d'onda e a quella temperatura, e confronta il risultato con il valore letto. In quale banda dello spettro cade il massimo? Spiega perché la stella appare bianco-azzurra (10 punti).
   b) Un rivelatore del telescopio misura l'intensità totale della radiazione della stella che arriva fuori dall'atmosfera terrestre: $1{,}7 \times 10^{-8}$ W/m$^2$. Calcola la potenza totale irraggiata dalla stella e il suo raggio, e confrontali con quelli del Sole, $3{,}84 \times 10^{26}$ W e $6{,}96 \times 10^{8}$ m. Se la temperatura ricavata in a) è incerta del 3%, quanto è incerto il raggio? (10 punti)
   c) (Con il capitolo 12.) Mostra con il modello di Bohr che le quattro righe scure sono righe dell'idrogeno: individua le transizioni e calcola l'energia dei fotoni corrispondenti. Spiega perché nello spettro compaiono come righe scure e perché, per produrle, servono atomi di idrogeno nello stato $n = 2$. Stima con il fattore di Boltzmann quante volte è più probabile trovare un atomo nello stato $n = 2$ negli strati esterni di questa stella che in quelli del Sole, a 5800 K, e spiega che cosa ti aspetti per l'intensità delle righe nei due spettri (10 punti).
   d) Calcola l'intensità spettrale della stella a 150 nm e a 5,0 μm, sia con la legge di Planck sia con la legge classica di Rayleigh-Jeans. Argomenta: perché le due leggi danno valori vicini a 5,0 μm e valori così diversi a 150 nm? Che cosa avrebbe previsto la fisica classica per la potenza totale emessa dalla stella, e in che modo l'ipotesi di Planck elimina il problema? (10 punti)

2. ●●● **Una fotocella sotto esame.** Un laboratorio deve caratterizzare una fotocella a vuoto il cui catodo è ricoperto da un metallo alcalino che il costruttore non dichiara. La fotocella viene illuminata con luce monocromatica, selezionata da un monocromatore, e per sei lunghezze d'onda si misura il potenziale di arresto $V_a$ (Tabella V4.1). A 400 nm si misura anche la corrente di saturazione: 0,16 µA, quando sul catodo arriva una potenza luminosa di 5,0 µW.
a) Riporta in un grafico il potenziale di arresto in funzione della frequenza della luce. Mostra che i punti sono allineati e ricava dalla retta la costante di Planck, il lavoro di estrazione del catodo e la lunghezza d'onda di soglia. Di quale metallo della Tabella 11.2 potrebbe trattarsi? Quali puoi escludere, e perché? (10 punti)
b) A 400 nm calcola l'energia di un fotone, il numero di fotoni che arrivano sul catodo in un secondo e il numero di elettroni raccolti in un secondo alla saturazione: quale frazione dei fotoni estrae un elettrone? Prevedi, motivando, come cambiano la corrente di saturazione e il potenziale di arresto se la potenza luminosa raddoppia, e che cosa succede se la fotocella viene illuminata con 1,0 W di luce rossa da 650 nm. Confronta le tue previsioni con quelle della teoria ondulatoria classica (10 punti).
c) (Con il capitolo 13.) Calcola la lunghezza d'onda di de Broglie dei fotoelettroni più veloci estratti dalla luce di 300 nm e confrontala con la lunghezza d'onda di un fotone che abbia la loro stessa energia. Mostra che, per un elettrone non relativistico e un fotone della stessa energia $E$, il rapporto fra la lunghezza d'onda del fotone e quella dell'elettrone vale $\sqrt{(2m_e c^2/E)}$, e verificalo con i tuoi numeri. Gli stessi elettroni attraversano poi una differenza di potenziale accelerante di 100 V: quanto vale ora la loro lunghezza d'onda? Potrebbero essere diffratti da un cristallo, in cui gli atomi distano qualche decimo di nanometro? E la luce di 300 nm? (10 punti)
d) Per provare la sensibilità della fotocella, la luce di 400 nm viene attenuata fino a una potenza di $1{,}6 \times 10^{-17}$ W sul catodo. Calcola quanti fotoni arrivano in un secondo e quanti elettroni escono in media in un secondo, con l'efficienza trovata nel punto b). Secondo la teoria ondulatoria l'energia della luce si distribuirebbe uniformemente sul catodo, di area 1,0 $\text{cm}^2$, e ogni elettrone raccoglierebbe l'energia che cade su un cerchio di raggio 0,10 nm: quanto tempo dovrebbe attendere un elettrone prima di poter uscire? Descrivi, argomentando, che cosa registra invece un amperometro molto sensibile, e che cosa insegna questo esperimento sul modo in cui la luce scambia energia con la materia (10 punti).

**Tabella V4.1** Problema 2: potenziale di arresto della fotocella illuminata con luce monocromatica di diverse lunghezze d'onda (dati tipici; incertezza ± 0,02 V).

| λ (nm) | 300 | 350 | 400 | 450 | 500 | 550 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_a$ (V) | 2,04 | 1,42 | 1,01 | 0,66 | 0,37 | 0,16 |

**Quesiti · Rispondi a quattro degli otto (10 punti ciascuno)**

1. ●● **La temperatura della Terra vista dallo spazio.** Fuori dall'atmosfera la radiazione solare ha un'intensità di 1361 W/m$^2$, la «costante solare». La Terra, di raggio $6{,}37 \times 10^6$ m, ne riflette nello spazio il 30% (è la sua albedo) e assorbe il resto. Tratta la Terra come un corpo nero che ha la stessa temperatura in tutti i punti della superficie e irraggia da tutta la superficie. a) Calcola la potenza solare assorbita dalla Terra, e spiega perché la superficie che intercetta la radiazione del Sole è $\pi R^2$, mentre quella che irraggia è $4\pi R^2$ (3 punti). b) Ricava la temperatura di equilibrio della Terra e la lunghezza d'onda del massimo della sua emissione. Di quanto cambierebbe la temperatura di equilibrio se l'albedo scendesse dal 30% al 28%, per esempio perché si riducono i ghiacci? (4 punti) c) La temperatura media misurata della superficie terrestre è circa 15 °C. Calcola la potenza che 1 m$^2$ di suolo a questa temperatura irraggia, trattato come un corpo nero, e confrontala con la potenza che in media la Terra irraggia verso lo spazio per ogni metro quadrato della sua superficie. Usa poi la legge di Wien per spiegare perché l'atmosfera, quasi trasparente alla luce del Sole, può trattenere una parte della radiazione emessa dal suolo, e perché questo è possibile proprio perché il Sole e la Terra hanno temperature così diverse (3 punti).

2. ●● **Le due costanti di Planck.** Nel dicembre 1900, per giustificare la sua formula dello spettro del corpo nero, Max Planck introdusse i quanti di energia, e nello stesso lavoro ricavò per la prima volta i valori di due costanti, $h$ e $k_B$, partendo da due grandezze già misurate: la costante di Stefan-Boltzmann $\sigma$ e la costante di Wien $b$. Rifai il suo ragionamento con i valori di oggi, $\sigma = 5{,}670 \times 10^{-8}$ W/(m$^2$·K$^4$), $b = 2{,}898 \times 10^{-3}$ m·K e $c = 2{,}998 \times 10^8$ m/s, usando due relazioni che seguono dalla legge di Planck (capitolo 10): $b = hc/(4{,}965\, k_B)$ e $\sigma = 2\pi^5 k_B{}^4/(15h^3c^2)$. a) Ricava dalla legge di Wien il rapporto $h/k_B$, con la sua unità di misura (3 punti). b) Scrivi $h = (h/k_B)\cdot k_B$ nella relazione per $\sigma$, ricava $k_B$ e poi $h$, e confrontali con i valori che usi negli esercizi (4 punti). c) Dalla costante dei gas $R = 8{,}314$ J/(mol·K) Planck ricavò il numero di Avogadro, e da questo la carica elementare, usando la carica di una mole di ioni monovalenti misurata nell'elettrolisi, $F = 96\,485$ C/mol. Rifai i due calcoli. Planck ottenne $h \approx 6{,}55 \times 10^{-34}$ J·s e $k_B \approx 1{,}346 \times 10^{-23}$ J/K: da che cosa possono dipendere le differenze dai tuoi valori? (3 punti)

3. ●● **Raggi gamma diffusi.** In un laboratorio una sorgente sigillata di cesio-137, maneggiata soltanto dal tecnico, emette fotoni gamma di energia 662 keV, che colpiscono un blocco di plastica; un rivelatore misura l'energia dei fotoni diffusi ai vari angoli. Considera gli elettroni del bersaglio liberi e fermi; la lunghezza d'onda Compton dell'elettrone è $h/(m_e c) = 2{,}43$ pm. a) Calcola la lunghezza d'onda dei fotoni incidenti e confrontala con la lunghezza d'onda Compton (3 punti). b) Calcola la lunghezza d'onda e l'energia dei fotoni diffusi a 90° e l'energia cinetica dell'elettrone di rinculo (4 punti). c) Calcola l'energia cinetica massima che un elettrone può ricevere in un urto di questo tipo, e spiega perché per ricavare la formula di Compton servono le espressioni relativistiche dell'energia e della quantità di moto. Perché lo stesso esperimento, fatto con luce visibile, non mostra variazioni misurabili della lunghezza d'onda? (3 punti)

4. ●● **I fotoni di una radio.** L'antenna di una stazione radio FM trasmette una potenza di 100 kW alla frequenza di 100 MHz. Supponi, per semplicità, che la potenza sia irraggiata uniformemente in tutte le direzioni. a) Calcola l'energia di un fotone, in joule e in elettronvolt, e confrontala con l'energia $k_B T$ dell'agitazione termica a 300 K (3 punti). b) Calcola il numero di fotoni emessi dall'antenna in un secondo e il numero medio di fotoni contenuti in un metro cubo di spazio a 10 km dall'antenna. (Suggerimento: l'energia che in un secondo attraversa 1 $m^2$ perpendicolare alla direzione di propagazione è quella contenuta in un cilindro di base 1 $m^2$ e altezza $3{,}00 \times 10^8$ m.) (4 punti) c) Argomenta perché per descrivere le onde radio la teoria ondulatoria classica è del tutto adeguata, mentre con i raggi X di un apparecchio per radiografie, i cui fotoni hanno energie di qualche decina di kiloelettronvolt, la natura corpuscolare della radiazione si manifesta in modo evidente. Un trasmettitore mille volte più potente potrebbe ionizzare le molecole dell'aria? (3 punti)

5. ●● **Righe emesse e righe assorbite.** In un tubo contenente idrogeno atomico rarefatto gli atomi vengono eccitati fino al livello $n = 4$. a) Quante righe diverse può emettere il gas mentre gli atomi tornano, anche a gradini, allo stato fondamentale? Calcola la lunghezza d'onda di ciascuna e indica in quale regione dello spettro cade (4 punti). b) La luce emessa attraversa un recipiente pieno di idrogeno atomico freddo, con quasi tutti gli atomi nello stato fondamentale. Quali righe vengono assorbite? Perché le altre no? (3 punti) c) Sull'idrogeno freddo si inviano prima fotoni di 12,5 eV, poi elettroni con energia cinetica di 12,5 eV. In quale dei due casi gli atomi possono essere eccitati, e fino a quale livello? Quanta energia resta a un elettrone dopo un urto che eccita l'atomo? Argomenta la differenza fra i due casi (3 punti).

6. ●● **Il nucleo di Rutherford.** Nel 1909 Hans Geiger ed Ernest Marsden, nel laboratorio di Ernest Rutherford a Manchester, osservarono che una piccola frazione delle particelle α inviate contro una sottile lamina d'oro veniva deviata di più di 90°; nel 1911 Rutherford spiegò il risultato con un nucleo piccolissimo, che contiene la carica positiva e quasi tutta la massa dell'atomo. In un esperimento analogo si usano particelle α, di carica $2e$, con energia cinetica di 5,5 MeV. a) Calcola la distanza di minimo avvicinamento a un nucleo d'oro ($Z = 79$) in un urto frontale e confrontala con il raggio dell'atomo d'oro, circa $1{,}4 \times 10^{-10}$ m (3 punti). b) Con la relazione $\tan(\theta/2) = r_{min}/(2b)$ calcola il parametro d'urto $b$ per il quale una particella viene deviata di 90°. Spiega perché soltanto una piccolissima frazione delle particelle è deviata di più di 90° (3 punti). c) Ripeti il calcolo di a) per un nucleo di alluminio ($Z = 13$). La somma dei raggi di un nucleo di alluminio e di una particella α è circa $5{,}5 \times 10^{-15}$ m: oltre quale energia le particelle α arrivano a contatto con il nucleo di alluminio, e che cosa smette di valere? Perché, se l'atomo fosse quello di Thomson, nessuna particella tornerebbe indietro? (4 punti)

7. ●● **Un elettrone in una scatola.** In un modello molto semplificato, un elettrone in un nanocristallo di semiconduttore (un «punto quantico») si comporta come una particella libera di muoversi lungo un segmento di lunghezza $L = 1{,}0$ nm, chiuso da due pareti impenetrabili. a) Partendo dalla condizione di onda stazionaria e dalla relazione di de Broglie, ricava le energie permesse e calcola in elettronvolt le prime tre (4 punti). b) Calcola la lunghezza d'onda dei fotoni emessi nelle transizioni $2 \to 1$ e $3 \to 2$ e indica la regione dello spettro (3 punti). c) Nello stato fondamentale la quantità di moto dell'elettrone ha modulo $h/(2L)$, ma il suo verso è indeterminato. Mostra che questo stato rispetta il principio di indeterminazione e spiega perché l'energia minima non può essere zero. Come dipendono le energie dalla lunghezza $L$? Un nanocristallo più piccolo emette luce più rossa o più blu? (3 punti)

8. ●● **Elettroni attraverso una lamina di alluminio.** Nel 1927 George Paget Thomson fece passare elettroni veloci attraverso lamine metalliche sottilissime e su una lastra fotografica ottenne anelli di diffrazione, simili a quelli prodotti dai raggi X. In una versione moderna dell'esperimento, elettroni accelerati da una tensione $V$ attraversano una lamina policristallina di alluminio, e su uno schermo a distanza $L = 40{,}0$ cm dalla lamina si misura il diametro $D$ dell'anello più interno, prodotto dai piani atomici a distanza $d$ (Tabella V4.2). Per angoli piccoli il raggio dell'anello è $r = D/2 \approx L\lambda/d$. a) Calcola la lunghezza d'onda di de Broglie degli elettroni a ciascuna tensione, con la formula non relativistica, e mostra che i dati confermano che $r$ è inversamente proporzionale a $\sqrt{V}$, come $\lambda$ (4 punti). b) Ricava dai dati la distanza $d$ fra i piani atomici e confrontala con il valore 0,234 nm misurato con i raggi X (3 punti). c) A 30 kV la formula non relativistica sovrastima la lunghezza d'onda dell'1,5% circa: è un errore che puoi rilevare con questi dati? Thomson mostrò che, avvicinando un magnete all'apparato, gli anelli si spostano: che cosa dimostra questo fatto? (3 punti)

**Tabella V4.2** Quesito 8: diametro dell'anello di diffrazione più interno al variare della tensione di accelerazione degli elettroni (dati tipici; incertezza ± 0,5 mm).

| $V$ (kV) | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| $D$ (mm) | 42,2 | 33,6 | 29,6 | 26,0 | 24,0 |

**Griglia di valutazione** Gli indicatori della seconda prova di fisica e i loro punteggi massimi, in ventesimi.

| Indicatore | Che cosa si valuta | Punti |
|---|---|---|
| **Analizzare** | Esaminare la situazione proposta, riconoscere i fenomeni e le leggi in gioco, formulare le ipotesi e scegliere un modello adatto. | 5 |
| **Sviluppare il processo risolutivo** | Impostare e svolgere i calcoli con le leggi pertinenti, in modo corretto e completo, con unità di misura e cifre significative. | 6 |
| **Interpretare, rappresentare, elaborare i dati** | Leggere ed elaborare dati, tabelle e grafici, rappresentarli, valutare la coerenza dei risultati e il loro accordo con le misure. | 5 |
| **Argomentare** | Spiegare le scelte e il procedimento, motivare le risposte qualitative con il linguaggio specifico, discutere i limiti del modello. | 4 |
| **Totale** | | **20** |

Gli indicatori e i punteggi massimi della griglia sono quelli dei quadri di riferimento ministeriali per la seconda prova (D.M. 769/2018), mentre le descrizioni della seconda colonna ne sono una sintesi: all'esame la commissione assegna a ogni indicatore un punteggio, fino al massimo, guardando la prova nel suo insieme. Nelle soluzioni, alla fine di ogni problema e di ogni quesito, trovi l'indicatore che ciascuna domanda verifica di più. Per correggere da solo il tuo lavoro somma i punti grezzi delle domande, al massimo 40 per il problema e 40 per i quattro quesiti, e convertili con la tabella.

**Dal punteggio al voto** Corrispondenza fra punteggio grezzo (0–80), voto in ventesimi e voto in decimi: ogni ventesimo vale 4 punti grezzi.

| Punti grezzi | Ventesimi | Decimi | Punti grezzi | Ventesimi | Decimi |
|---|---|---|---|---|---|
| 0–5 | 1 | 0,5 | 42–45 | 11 | 5,5 |
| 6–9 | 2 | 1 | 46–49 | 12 | 6 |
| 10–13 | 3 | 1,5 | 50–53 | 13 | 6,5 |
| 14–17 | 4 | 2 | 54–57 | 14 | 7 |
| 18–21 | 5 | 2,5 | 58–61 | 15 | 7,5 |
| 22–25 | 6 | 3 | 62–65 | 16 | 8 |
| 26–29 | 7 | 3,5 | 66–69 | 17 | 8,5 |
| 30–33 | 8 | 4 | 70–73 | 18 | 9 |
| 34–37 | 9 | 4,5 | 74–77 | 19 | 9,5 |
| 38–41 | 10 | 5 | 78–80 | 20 | 10 |

# Soluzioni

**Problema 1. a)** Nel grafico il massimo cade a $\lambda_{max} \approx$ 300 nm (con un'incertezza di lettura di circa 10 nm) e vale circa $11 \times 10^5$ W/(m$^2$·nm) = $1{,}1 \times 10^6$ W/(m$^2$·nm) (2 punti). Per la legge di Wien $T = b/\lambda_{max} = 2{,}90 \times 10^{-3}$ m·K/$3{,}00 \times 10^{-7}$ m = $9{,}67 \times 10^3$ K $\approx 9{,}7 \times 10^3$ K; l'incertezza di 10 nm su $\lambda_{max}$ (3%) diventa un'incertezza del 3% su $T$, circa 300 K (2 punti). Con la legge di Planck, a $\lambda = 3{,}00 \times 10^{-7}$ m: $2\pi hc^2/\lambda^5 = 2\pi \times 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s × $(3{,}00 \times 10^8$ m/s$)^2/(3{,}00 \times 10^{-7}$ m$)^5 = 1{,}54 \times 10^{17}$ W/m$^3$; l'esponente è $hc/(\lambda k_B T) = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s × $3{,}00 \times 10^8$ m/s/$(3{,}00 \times 10^{-7}$ m × $1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K × $9{,}67 \times 10^3$ K) = 4,97, ed $e^{4{,}97} - 1 = 143$. Quindi $I_\lambda = 1{,}54 \times 10^{17}$ W/m$^3$/143 = $1{,}08 \times 10^{15}$ W/m$^3$ = $1{,}08 \times 10^6$ W/(m$^2$·nm), in accordo con il valore letto entro la precisione della lettura (3 punti). Il massimo è nell'ultravioletto vicino, appena fuori dal visibile. Nell'intervallo visibile la curva scende dal violetto al rosso: a 400 nm $I_\lambda$ è circa tre volte il valore a 700 nm ($9{,}0 \times 10^5$ contro $3{,}0 \times 10^5$ W/(m$^2$·nm)). L'occhio riceve tutti i colori, quindi vede una luce bianca, ma con le lunghezze d'onda corte più abbondanti: bianco-azzurra. Il Sole, con il massimo intorno a 500 nm, appare invece bianco-giallastro (3 punti). **b)** La potenza della stella si distribuisce su una sfera di raggio uguale alla distanza $d = 25 \times 9{,}46 \times 10^{15}$ m = $2{,}37 \times 10^{17}$ m, quindi $L = 4\pi d^2 I = 4\pi \times (2{,}37 \times 10^{17}$ m$)^2 \times 1{,}7 \times 10^{-8}$ W/m$^2$ = $7{,}03 \times 10^{35}$ m$^2 \times 1{,}7 \times 10^{-8}$ W/m$^2$ = $1{,}2 \times 10^{28}$ W, circa 31 volte la potenza del Sole (3 punti). Ogni metro quadrato della superficie emette $\sigma T^4 = 5{,}67 \times 10^{-8}$ W/(m$^2$·K$^4$) × $(9{,}67 \times 10^3$ K$)^4 = 4{,}95 \times 10^8$ W/m$^2$ (2 punti). Da $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$: $R = \sqrt{[L/(4\pi\sigma T^4)]} = \sqrt{[1{,}19 \times 10^{28}$ W/$(4\pi \times 4{,}95 \times 10^8$ W/m$^2)]} = 1{,}4 \times 10^9$ m, cioè 2,0 volte il raggio del Sole. La superficie è 4 volte quella del Sole e, a parità di superficie, la stella emette $(9{,}67/5{,}78)^4 \approx 8$ volte di più (il Sole è a circa $5{,}78 \times 10^3$ K): 4 × 8 ≈ 31 (3 punti). Poiché $R = \sqrt{[L/(4\pi\sigma)]}/T^2$, l'incertezza relativa su $R$ è il doppio di quella su $T$: il 6%, cioè $R = (1{,}4 \pm 0{,}1) \times 10^9$ m (2 punti).

**c)** I livelli dell'idrogeno sono $E_n = -13{,}6$ eV/$n^2$. Le transizioni che terminano in $n = 2$ (serie di Balmer) hanno energie $E_n - E_2$: per $n$ = 3, 4, 5, 6 si ottengono 1,89 eV, 2,55 eV, 2,86 eV e 3,02 eV, e con $\lambda = 1240$ eV·nm/$E$ le lunghezze d'onda 656 nm, 486 nm, 434 nm e 410 nm: sono proprio le quattro righe osservate, Hα, Hβ, Hγ e Hδ (i valori calcolati sono quelli nel vuoto, più lunghi di circa lo 0,03% di quelli misurati in aria) (4 punti). La luce a spettro continuo che viene dagli strati più profondi della stella attraversa gli strati esterni, più freddi. Gli atomi di idrogeno assorbono soltanto i fotoni la cui energia è uguale a un salto fra due livelli, e poi riemettono l'energia in tutte le direzioni: nella direzione dell'osservatore quelle lunghezze d'onda mancano, e compaiono righe scure. Ogni riga di Balmer è un salto che parte dal livello $n = 2$: un atomo nello stato fondamentale assorbirebbe soltanto le righe della serie di Lyman, nell'ultravioletto (3 punti). Per salire da $n = 1$ a $n = 2$ servono 10,2 eV. Con il fattore di Boltzmann $e^{-\Delta E/(k_B T)}$: nella stella $k_B T = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K × $9{,}67 \times 10^3$ K/$1{,}60 \times 10^{-19}$ J/eV = 0,834 eV, quindi $e^{-10{,}2/0{,}834} = e^{-12{,}2} \approx 5 \times 10^{-6}$; nel Sole $k_B T = 0{,}500$ eV, quindi $e^{-20{,}4} \approx 1{,}4 \times 10^{-9}$. Il rapporto è circa $3{,}5 \times 10^3$: fra gli atomi di idrogeno neutri, nella stella quelli in $n = 2$ sono, in proporzione, migliaia di volte più numerosi. La stima è grossolana: il livello $n = 2$ ha più stati di $n = 1$ (8 contro 2, capitolo 13), il che moltiplica per 4 la frazione in entrambe le stelle ma non il rapporto; e la ionizzazione è trascurata (2 punti). Ci si aspetta quindi righe di Balmer molto più intense nello spettro della stella che in quello del Sole, dove sono presenti ma deboli: è ciò che si osserva, e le righe di Balmer più intense si trovano proprio nelle stelle bianche di circa 10 000 K (già a 10 000 K buona parte dell'idrogeno è ionizzata, quindi il guadagno reale è minore della stima; nelle stelle più calde le righe tornano a indebolirsi) (1 punto). **d)** Con $T = 9{,}67 \times 10^3$ K, a 150 nm: legge di Planck $I_\lambda = 2{,}4 \times 10^5$ W/(m$^2$·nm); legge di Rayleigh-Jeans $2\pi c k_B T/\lambda^4 = 2\pi \times$

$3{,}00 \times 10^8$ m/s × $1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K × $9{,}67 \times 10^3$ K/$(1{,}50 \times 10^{-7}$ m$)^4 = 5{,}0 \times 10^{17}$ W/m$^3 = 5{,}0 \times 10^8$ W/(m$^2$·nm), circa $2 \times 10^3$ volte di più. A 5,0 μm: Planck $3{,}5 \times 10^2$ W/(m$^2$·nm), Rayleigh-Jeans $4{,}0 \times 10^2$ W/(m$^2$·nm), solo il 17% in più (4 punti). La differenza dipende dal rapporto fra il quanto $hf = hc/\lambda$ e l'energia termica $k_BT = 0{,}834$ eV. A 5,0 μm $hf = 0{,}248$ eV, cioè 0,30 $k_BT$: i quanti sono piccoli, molti livelli di ciascun modo sono occupati, e ogni modo ha un'energia media vicina al valore classico $k_BT$. A 150 nm $hf = 8{,}3$ eV ≈ 10 $k_BT$: il fattore di Boltzmann $e^{-10} \approx 5 \times 10^{-5}$ rende quasi impossibile eccitare anche un solo quanto, e i modi sono «congelati» (2 punti). Per la fisica classica ogni modo, a qualunque frequenza, ha energia media $k_BT$, e il numero di modi cresce senza limite verso le lunghezze d'onda corte: la curva di Rayleigh-Jeans cresce come $1/\lambda^4$ e l'area sotto di essa, cioè la potenza emessa, è infinita. La stella dovrebbe irraggiare una potenza infinita, quasi tutta nell'ultravioletto: è la catastrofe ultravioletta (2 punti). Con l'ipotesi di Planck un oscillatore di frequenza $f$ scambia energia solo a quanti $hf$: l'energia media di un modo, $hf/(e^{hf/(k_BT)} - 1)$, diminuisce esponenzialmente quando $hf$ supera $k_BT$, lo spettro ha un massimo e torna a zero, e l'area resta finita: è $\sigma T^4$, i $4{,}95 \times 10^8$ W/m$^2$ del punto b) (2 punti). *Indicatori:* a) Interpretare/elaborare i dati; b) Sviluppare il processo risolutivo; c) Analizzare e Argomentare; d) Sviluppare il processo risolutivo e Argomentare.

**Problema 2. a)** Con $f = c/\lambda$ le frequenze sono 10,0; 8,57; 7,50; 6,67; 6,00; 5,45 (in $10^{14}$ Hz). Nel grafico $V_a$–$f$ i sei punti stanno su una retta entro l'incertezza di 0,02 V: gli scarti dalla retta di regressione sono al più 0,02 V, come prevede l'equazione di Einstein, $V_a = (h/e)f - W_0/e$ (3 punti). Con i due punti estremi la pendenza è (2,04 − 0,16) V/[(10,0 − 5,45) × $10^{14}$ Hz] = $4{,}13 \times 10^{-15}$ V·s; la retta di regressione dà lo stesso valore. Poiché la pendenza è $h/e$: $h = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C × $4{,}13 \times 10^{-15}$ V·s = $6{,}61 \times 10^{-34}$ J·s. L'incertezza di 0,02 V sui punti estremi, su un intervallo di 1,88 V, dà circa il 2% sulla pendenza: $h = (6{,}6 \pm 0{,}1) \times 10^{-34}$ J·s, compatibile con $6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s (3 punti). Prolungando la retta fino a $f = 0$: 2,04 V − $4{,}13 \times 10^{-15}$ V·s × $1{,}00 \times 10^{15}$ Hz = −2,09 V, quindi $W_0 = 2{,}09$ eV ≈ 2,1 eV. La frequenza di soglia è $f_0 = 2{,}09$ V/$4{,}13 \times 10^{-15}$ V·s = $5{,}06 \times 10^{14}$ Hz e $\lambda_0 = c/f_0 = 5{,}9 \times 10^{-7}$ m = 590 nm (2 punti). Il valore coincide con quello del cesio (2,1 eV, soglia a 590 nm). Il potassio (2,3 eV) e il sodio (2,4 eV) si possono escludere: i fotoni da 550 nm hanno 1240/550 = 2,25 eV, che non basterebbero a estrarre elettroni da quei metalli, mentre la fotocella a 550 nm dà ancora un potenziale di arresto di 0,16 V; a maggior ragione calcio, zinco, rame e platino (2 punti). **b)** $E = hc/\lambda = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s × $3{,}00 \times 10^8$ m/s/$4{,}00 \times 10^{-7}$ m = $4{,}97 \times 10^{-19}$ J = 3,11 eV. I fotoni al secondo sono $P/E = 5{,}0 \times 10^{-6}$ W/$4{,}97 \times 10^{-19}$ J = $1{,}0 \times 10^{13}$; gli elettroni raccolti al secondo sono $i/e = 0{,}16 \times 10^{-6}$ A/$1{,}60 \times 10^{-19}$ C = $1{,}0 \times 10^{12}$. Un fotone su dieci estrae un elettrone, un'efficienza del 10%: gli altri cedono la loro energia al metallo, oppure l'elettrone colpito perde energia negli urti prima di arrivare alla superficie (4 punti). Raddoppiando la potenza raddoppia il numero dei fotoni, tutti con la stessa energia: raddoppia il numero di elettroni estratti, quindi la corrente di saturazione diventa 0,32 μA, mentre il potenziale di arresto resta 1,01 V, perché $K_{max} = hf - W_0$ non dipende dall'intensità (2 punti). Un fotone da 650 nm ha 1240/650 = 1,91 eV, meno del lavoro di estrazione: nessun fotone può estrarre un elettrone, e la corrente resta nulla anche con 1,0 W, perché un elettrone assorbe un fotone alla volta (2 punti). Per la teoria ondulatoria, invece, un'onda più intensa ha un campo elettrico più ampio: raddoppiando la potenza gli elettroni dovrebbero uscire più veloci, e il potenziale di arresto crescere; e una luce rossa abbastanza intensa dovrebbe prima o poi fornire a ogni elettrone l'energia necessaria a uscire. Le misure danno ragione all'ipotesi dei fotoni (2 punti).

**c)** A 300 nm $K_{max} = eV_a = 2{,}04$ eV = $3{,}26 \times 10^{-19}$ J. La quantità di moto è $p = \sqrt{(2m_eK_{max})} = \sqrt{(2 \times 9{,}11 \times 10^{-31}}$ kg × $3{,}26 \times 10^{-19}$ J) = $7{,}71 \times 10^{-25}$ kg·m/s, e $\lambda = h/p = 8{,}6 \times 10^{-10}$ m = 0,86 nm (2 punti). Un fotone di 2,04 eV ha $\lambda = 1240$ eV·nm/2,04 eV = 608 nm, circa $7{,}1 \times 10^2$ volte di più. In generale, per il fotone $\lambda = hc/E$, per l'elettrone $\lambda = h/\sqrt{(2m_eE)}$, e il rapporto è $c\sqrt{(2m_e/E)} = \sqrt{(2m_ec^2/E)}$. Con $m_ec^2 = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg × $(3{,}00 \times 10^8$ m/s$)^2 = 8{,}20 \times 10^{-14}$ J = 0,512 MeV: $\sqrt{(2 \times 5{,}12 \times 10^5}$ eV/2,04 eV) = $7{,}1 \times 10^2$, come trovato (4 punti). Dopo l'accelerazione l'energia cinetica è 2,04 eV + 100 eV = 102 eV = $1{,}63 \times 10^{-17}$ J, e $\lambda = h/\sqrt{(2m_eK)} = 6{,}63 \times 10^{-34}$

J·s/√(2 × 9,11 × $10^{-31}$ kg × 1,63 × $10^{-17}$ J) = 1,2 × $10^{-10}$ m = 0,12 nm (2 punti). Una lunghezza d'onda di 0,12 nm è confrontabile con le distanze fra gli atomi di un cristallo: gli elettroni possono essere diffratti, come nell'esperimento di Davisson e Germer. La luce di 300 nm ha una lunghezza d'onda migliaia di volte maggiore della distanza fra gli atomi: per essa il cristallo è un mezzo uniforme, e per diffrangerla serve un reticolo con un passo di qualche micrometro (2 punti). **d)** I fotoni al secondo sono 1,6 × $10^{-17}$ W/4,97 × $10^{-19}$ J = 32, e con l'efficienza del 10% escono in media circa 3 elettroni al secondo (2 punti). Per la teoria ondulatoria l'intensità sul catodo sarebbe 1,6 × $10^{-17}$ W/1,0 × $10^{-4}$ $m^2$ = 1,6 × $10^{-13}$ W/$m^2$; su un cerchio di raggio 0,10 nm, di area π × (1,0 × $10^{-10}$ m)$^2$ = 3,1 × $10^{-20}$ $m^2$, arriverebbero 5,0 × $10^{-33}$ W. Per accumulare $W_0$ = 2,09 eV = 3,34 × $10^{-19}$ J servirebbero 3,34 × $10^{-19}$ J/5,0 × $10^{-33}$ W = 6,7 × $10^{13}$ s, circa due milioni di anni (4 punti). In realtà un amperometro molto sensibile (o un fotomoltiplicatore) registra, fin dall'accensione, impulsi isolati, in media tre al secondo, in istanti che non si possono prevedere: ogni impulso è un elettrone estratto da un singolo fotone, che gli ha ceduto in un colpo solo tutta la sua energia. La luce si propaga come un'onda ma scambia energia con la materia a quanti interi *hf*, in un punto; l'onda dà solo la probabilità dell'assorbimento, e con luce intensa gli impulsi sono così fitti da sembrare una corrente continua (4 punti). *Indicatori:* a) Interpretare/elaborare i dati; b) Analizzare e Argomentare; c) Sviluppare il processo risolutivo; d) Sviluppare il processo risolutivo e Argomentare.

**Quesito 1. a)** $P$ = (1 − 0,30) × 1361 W/$m^2$ × π × (6,37 × $10^6$ m)$^2$ = 0,70 × 1361 W/$m^2$ × 1,27 × $10^{14}$ $m^2$ = 1,21 × $10^{17}$ W (2 punti). I raggi del Sole arrivano paralleli: la Terra intercetta la radiazione che attraversa la sua «ombra», un disco di area $\pi R^2$; irraggia invece da tutta la superficie della sfera, $4\pi R^2$ (1 punto). **b)** All'equilibrio la potenza assorbita è uguale a quella emessa: $(1-a)S\pi R^2 = 4\pi R^2\sigma T^4$, da cui $T = [(1-a)S/(4\sigma)]^{1/4}$ = [0,70 × 1361 W/$m^2$/(4 × 5,67 × $10^{-8}$ W/($m^2$·$K^4$))]$^{1/4}$ = (4,20 × $10^9$ $K^4$)$^{1/4}$ = 255 K, cioè −18 °C. Il raggio della Terra si semplifica (2 punti). $\lambda_{max}$ = 2,90 × $10^{-3}$ m·K/255 K = 1,1 × $10^{-5}$ m = 11 μm, nell'infrarosso (1 punto). Con $a$ = 0,28: $T$ = [0,72 × 1361 W/$m^2$/(4 × 5,67 × $10^{-8}$ W/($m^2$·$K^4$))]$^{1/4}$ = 256,4 K, circa 1,8 K in più del valore con il 30% (1 punto). **c)** Un metro quadrato di suolo a 288 K irraggia $\sigma T^4$ = 5,67 × $10^{-8}$ W/($m^2$·$K^4$) × (288 K)$^4$ = 390 W/$m^2$. Verso lo spazio la Terra irraggia quanto assorbe, in media $(1-a)S/4$ = 238 W/$m^2$, il 61% di quanto emette il suolo. Il resto, circa 150 W/$m^2$, è trattenuto dall'atmosfera, che lo riemette in parte verso il basso: per questo la superficie è circa 33 K più calda del valore di equilibrio (1 punto). Il Sole, a circa 5800 K, emette soprattutto fra 0,3 e 2 μm, con il massimo intorno a 0,5 μm; la Terra emette fra 5 e 50 μm circa, con il massimo intorno a 10 μm: i due spettri quasi non si sovrappongono. L'atmosfera lascia passare gran parte della luce visibile, ma il vapore acqueo e l'anidride carbonica assorbono molte lunghezze d'onda dell'infrarosso: è l'effetto serra (1 punto). L'effetto è possibile perché, per la legge di Wien, la radiazione in arrivo e quella in uscita hanno lunghezze d'onda molto diverse, e un gas può essere trasparente alle une e opaco alle altre; se il Sole e la Terra avessero temperature simili, l'atmosfera tratterrebbe nello stesso modo l'energia in entrata e quella in uscita (1 punto). *Indicatori:* a) Analizzare; b) Sviluppare il processo risolutivo; c) Interpretare/elaborare i dati e Argomentare.

**Quesito 2. a)** Da $b = hc/(4{,}965k_B)$: $h/k_B = 4{,}965b/c$ = 4,965 × 2,898 × $10^{-3}$ m·K/2,998 × $10^8$ m/s = 4,799 × $10^{-11}$ K·s (J·s divisi per J/K) (3 punti). **b)** Sostituendo: $\sigma = 2\pi^5 {k_B}^4/[15(h/k_B)^3 {k_B}^3 c^2] = 2\pi^5 k_B/[15(h/k_B)^3 c^2]$, quindi $k_B = 15\sigma c^2(h/k_B)^3/(2\pi^5)$ (1 punto). Numericamente $k_B$ = 15 × 5,670 × $10^{-8}$ × (2,998 × $10^8$)$^2$ × (4,799 × $10^{-11}$)$^3$/(2π$^5$) J/K = 1,381 × $10^{-23}$ J/K (2 punti), e $h$ = 4,799 × $10^{-11}$ K·s × 1,381 × $10^{-23}$ J/K = 6,627 × $10^{-34}$ J·s. Coincidono con 1,38 × $10^{-23}$ J/K e 6,63 × $10^{-34}$ J·s (1 punto). **c)** $N_A = R/k_B$ = 8,314 J/(mol·K)/1,381 × $10^{-23}$ J/K = 6,02 × $10^{23}$ $mol^{-1}$; $e = F/N_A$ = 96 485 C/mol/6,02 × $10^{23}$ $mol^{-1}$ = 1,60 × $10^{-19}$ C (2 punti). Il calcolo usa solo i valori misurati di $\sigma$ e di $b$: le differenze dai valori di Planck, dell'1–3%, vengono dalle misure del 1900, meno precise di quelle di oggi. Per esempio, il rapporto $h/k_B$ dei suoi valori è 4,87 × $10^{-11}$ K·s, l'1,4% più del nostro: per la relazione usata in a), significa che la costante di Wien misurata allora era circa l'1,4% più grande di quella di oggi (1 punto). *Indica-*

*tori:* a) e b) Sviluppare il processo risolutivo; c) Interpretare/elaborare i dati e Argomentare.

**Quesito 3. a)** $\lambda = hc/E = 1240$ eV·nm/$6{,}62 \times 10^5$ eV = $1{,}87 \times 10^{-3}$ nm = 1,87 pm (2 punti). È dello stesso ordine della lunghezza d'onda Compton, anzi più piccola: lo spostamento Compton, che arriva a 4,86 pm, può più che raddoppiare la lunghezza d'onda, e il fotone diffuso perderà una parte grande della sua energia (1 punto). **b)** A 90°, cos $\theta = 0$: $\lambda' = \lambda + 2{,}43$ pm = 4,30 pm (2 punti). $E' = 1240$ eV·nm/$4{,}30 \times 10^{-3}$ nm = $2{,}88 \times 10^5$ eV = 288 keV; l'elettrone riceve la differenza, $K = 662$ keV − 288 keV = 374 keV (2 punti). **c)** L'energia ceduta è massima quando il fotone torna indietro ($\theta = 180°$): $\lambda' = 1{,}87$ pm + 4,86 pm = 6,73 pm, $E' = 184$ keV e $K_{max} = 662$ keV − 184 keV = 478 keV (1 punto). Questa energia cinetica è quasi uguale all'energia a riposo dell'elettrone, $m_e c^2 = 511$ keV: l'elettrone esce a una velocità di circa 0,86$c$, e le espressioni classiche $\frac{1}{2}mv^2$ e $mv$ darebbero risultati sbagliati; inoltre il fotone, che ha massa nulla, si descrive solo con $E = pc$ (1 punto). Con luce visibile lo spostamento è lo stesso, al massimo 4,86 pm, ma su 500 nm è una variazione relativa di $1 \times 10^{-5}$: troppo piccola rispetto alla larghezza delle righe per essere misurata (1 punto). *Indicatori:* a) Analizzare; b) Sviluppare il processo risolutivo; c) Argomentare.

**Quesito 4. a)** $E = hf = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s × $1{,}00 \times 10^8$ Hz = $6{,}63 \times 10^{-26}$ J = $6{,}63 \times 10^{-26}$ J/$1{,}60 \times 10^{-19}$ J/eV = $4{,}1 \times 10^{-7}$ eV (2 punti). A 300 K $k_B T = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K × 300 K = $4{,}14 \times 10^{-21}$ J = 0,026 eV: il quanto della radio è circa 60 000 volte più piccolo dell'energia dell'agitazione termica (1 punto). **b)** $N/\Delta t = P/(hf) = 1{,}00 \times 10^5$ W/$6{,}63 \times 10^{-26}$ J = $1{,}5 \times 10^{30}$ fotoni al secondo (1 punto). A 10 km l'intensità è $I = P/(4\pi r^2) = 1{,}00 \times 10^5$ W/$(4\pi \times (1{,}0 \times 10^4 \text{ m})^2) = 8{,}0 \times 10^{-5}$ W/m$^2$ (1 punto). L'energia che attraversa 1 m$^2$ in un secondo occupa un cilindro di volume $3{,}00 \times 10^8$ m$^3$, quindi la densità di energia è $I/c = 2{,}7 \times 10^{-13}$ J/m$^3$, e i fotoni per metro cubo sono $2{,}7 \times 10^{-13}$ J/m$^3$/$6{,}63 \times 10^{-26}$ J = $4{,}0 \times 10^{12}$ (2 punti). **c)** Con migliaia di miliardi di fotoni in ogni metro cubo, e un quanto piccolissimo anche rispetto a $k_B T$, la granularità è invisibile e l'onda classica descrive tutto (1 punto). Un fotone X da 30 keV porta circa $7 \times 10^{10}$ volte l'energia di un fotone radio: a parità di potenza i fotoni sono molto meno numerosi, e ciascuno, assorbito da un solo atomo, può ionizzarlo; i rivelatori registrano l'arrivo dei singoli fotoni, uno per uno (1 punto). No: la potenza cambia il numero dei fotoni, non la loro energia. Per ionizzare una molecola servono circa 10 eV, e un fotone radio ne porta $4 \times 10^{-7}$: poiché l'energia viene ceduta un fotone alla volta, nessun numero di fotoni radio, per quanto grande, ionizza l'aria (1 punto). *Indicatori:* a) e b) Sviluppare il processo risolutivo; c) Argomentare.

**Quesito 5. a)** Le transizioni possibili fra i quattro livelli sono tutte le coppie: 4 → 3, 4 → 2, 4 → 1, 3 → 2, 3 → 1, 2 → 1, cioè sei righe (1 punto). Con $E_n = -13{,}6$ eV/$n^2$ e $\lambda = 1240$ eV·nm/$\Delta E$: 4 → 3, 0,661 eV, 1876 nm, infrarosso (Paschen); 4 → 2, 2,55 eV, 486 nm, visibile, azzurro (Hβ); 3 → 2, 1,89 eV, 656 nm, visibile, rosso (Hα); 4 → 1, 12,75 eV, 97,3 nm; 3 → 1, 12,09 eV, 103 nm; 2 → 1, 10,2 eV, 122 nm, tutte e tre nell'ultravioletto (Lyman) (3 punti). **b)** Un atomo assorbe un fotone solo se la sua energia è uguale alla distanza fra il livello in cui si trova e un livello più alto. Nell'idrogeno freddo quasi tutti gli atomi sono in $n = 1$, quindi vengono assorbite solo le righe che partono da $n = 1$: le tre righe di Lyman a 97,3 nm, 103 nm e 122 nm (2 punti). Le righe di Balmer e di Paschen corrispondono a salti che partono da $n = 2$ o da $n = 3$, livelli che nel gas freddo sono praticamente vuoti, e attraversano il gas (1 punto). **c)** I fotoni di 12,5 eV non vengono assorbiti: la loro energia non coincide con nessun salto a partire da $n = 1$ (10,2 eV, 12,09 eV, 12,75 eV, ...) ed è minore dell'energia di ionizzazione, 13,6 eV. Il fotone non può cedere solo una parte della sua energia: o viene assorbito tutto, o passa (1 punto). Gli elettroni, invece, possono cedere all'atomo una parte della loro energia cinetica in un urto anelastico: possono eccitare l'atomo in $n = 2$, restando con 12,5 − 10,2 = 2,3 eV, oppure in $n = 3$, restando con 12,5 − 12,09 = 0,4 eV; non possono portarlo in $n = 4$, che richiede 12,75 eV (1 punto). Gli atomi eccitati tornano poi allo stato fondamentale emettendo la riga a 122 nm, oppure Hα e poi la riga a 122 nm, oppure direttamente la riga a 103 nm. È lo stesso meccanismo dell'esperimento di Franck e Hertz (1 punto). *Indicatori:* a) Sviluppare il processo risolutivo; b) Analizzare; c) Argomentare.

**Quesito 6. a)** Nell'urto frontale tutta l'energia cinetica diventa energia potenziale elettrica: $r_{min} = k_0(2e)(79e)/K = 8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N{\cdot}m^2/C^2} \times 158 \times (1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2/(5{,}5 \times 10^6 \times 1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}) = 4{,}1 \times 10^{-14}$ m (2 punti). L'atomo è circa $3 \times 10^3$ volte più grande: la carica positiva deve essere concentrata in una regione almeno così piccola perché la particella possa essere respinta prima di raggiungerla (1 punto). **b)** Per $\theta = 90°$, $\tan 45° = 1$, quindi $b = r_{min}/2 = 2{,}1 \times 10^{-14}$ m (1 punto). Una deviazione maggiore di 90° richiede $\tan(\theta/2) > 1$, cioè un parametro d'urto minore di $2{,}1 \times 10^{-14}$ m: la particella deve arrivare dentro un cerchio che ha un'area circa $(2{,}1 \times 10^{-14}/1{,}4 \times 10^{-10})^2 \approx 2 \times 10^{-8}$ volte quella dell'atomo. Anche attraversando migliaia di strati di atomi, pochissime particelle passano così vicino a un nucleo; le altre sono deviate di poco (2 punti). **c)** Per l'alluminio $r_{min} = 4{,}1 \times 10^{-14}\ \mathrm{m} \times 13/79 = 6{,}8 \times 10^{-15}$ m (1 punto). È appena più della somma dei raggi: il contatto avviene per $K = k_0(2e)(13e)/(5{,}5 \times 10^{-15}\ \mathrm{m}) = 1{,}09 \times 10^{-12}$ J = 6,8 MeV (trascurando il rinculo del nucleo, che per l'alluminio alza un po' la soglia). Sopra questa energia la particella α raggiunge il nucleo, e oltre alla forza di Coulomb agisce la forza nucleare: la legge di Rutherford, ricavata con la sola forza elettrica e con il nucleo puntiforme, smette di valere, e proprio da questi scarti si misurano le dimensioni dei nuclei (2 punti). Nel modello di Thomson la carica positiva è distribuita in una sfera di $10^{-10}$ m e quasi compensata dagli elettroni: la forza su una particella α veloce è sempre debole, e le deviazioni sono di frazioni di grado; neanche sommando molte piccole deviazioni a caso si arriva a tornare indietro (1 punto). *Indicatori:* a) Sviluppare il processo risolutivo; b) Analizzare; c) Analizzare e Argomentare.

**Quesito 7. a)** La funzione d'onda deve annullarsi sulle pareti, come lo spostamento di una corda fissata agli estremi: le onde permesse hanno $\lambda_n = 2L/n$. Per de Broglie $p_n = h/\lambda_n = nh/(2L)$, e l'energia, tutta cinetica, è $E_n = p_n{}^2/(2m_e) = n^2h^2/(8m_eL^2)$ (2 punti). $E_1 = (6{,}63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s})^2/[8 \times 9{,}11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg} \times (1{,}0 \times 10^{-9}\ \mathrm{m})^2] = 6{,}0 \times 10^{-20}$ J = 0,38 eV; $E_2 = 4E_1 = 1{,}5$ eV; $E_3 = 9E_1 = 3{,}4$ eV (2 punti). **b)** $2 \to 1$: $\Delta E = 3E_1 = 1{,}13$ eV, $\lambda = 1240\ \mathrm{eV{\cdot}nm}/1{,}13\ \mathrm{eV} = 1{,}1 \times 10^3$ nm, nell'infrarosso vicino (2 punti). $3 \to 2$: $\Delta E = 5E_1 = 1{,}88$ eV, $\lambda = 660$ nm, luce rossa (1 punto). **c)** La quantità di moto vale $+h/(2L)$ o $-h/(2L)$, quindi la sua indeterminazione è dell'ordine di $h/(2L)$; la posizione è indeterminata entro la scatola, $\Delta x \approx L$. Il prodotto è circa $h/2 = \pi\hbar$, maggiore di $\hbar/2$: il principio è rispettato (1 punto). Un'energia nulla vorrebbe dire quantità di moto nulla e definita, $\Delta p = 0$, con l'elettrone localizzato entro $L$: il prodotto sarebbe zero, contro il principio. Per questo ogni particella confinata ha un'energia di punto zero (1 punto). Le energie sono proporzionali a $1/L^2$: in un nanocristallo più piccolo i livelli sono più distanziati, i fotoni emessi più energetici e la luce più blu (1 punto). *Indicatori:* a) Analizzare e Sviluppare il processo risolutivo; b) Sviluppare il processo risolutivo; c) Argomentare.

**Quesito 8. a)** $\lambda = h/\sqrt{(2m_eeV)} = 1{,}23 \times 10^{-9}\ \mathrm{m{\cdot}V^{1/2}}/\sqrt{V}$: a 10, 15, 20, 25 e 30 kV si ottengono 12,3 pm, 10,0 pm, 8,68 pm, 7,77 pm e 7,09 pm (2 punti). Se $r \propto 1/\sqrt{V}$, il prodotto $r\sqrt{V}$ deve essere costante. Con $r = D/2$: $21{,}1\ \mathrm{mm} \times 100\ \mathrm{V^{1/2}} = 2110\ \mathrm{mm{\cdot}V^{1/2}}$, e poi 2058, 2093, 2055 e 2078 $\mathrm{mm{\cdot}V^{1/2}}$. I valori oscillano di circa ±1,5% intorno alla media, senza tendenza a crescere o a diminuire, mentre l'incertezza di 0,25 mm sul raggio vale dall'1,2% al 2%: i dati confermano la proporzionalità (2 punti). **b)** Da $r = L\lambda/d$ e $\lambda = (1{,}23 \times 10^{-9}\ \mathrm{m{\cdot}V^{1/2}})/\sqrt{V}$ si ha $d = L \times 1{,}23 \times 10^{-9}\ \mathrm{m{\cdot}V^{1/2}}/(r\sqrt{V})$. Con la media $r\sqrt{V} = 2079\ \mathrm{mm{\cdot}V^{1/2}} = 2{,}08\ \mathrm{m{\cdot}V^{1/2}}$: $d = 0{,}400\ \mathrm{m} \times 1{,}23 \times 10^{-9}\ \mathrm{m{\cdot}V^{1/2}}/2{,}08\ \mathrm{m{\cdot}V^{1/2}} = 2{,}36 \times 10^{-10}$ m = 0,236 nm (2 punti). La differenza dal valore dei raggi X, 0,234 nm, è dell'1%, minore dell'incertezza della misura, circa il 2%: i due valori sono compatibili. Elettroni e raggi X «vedono» gli stessi piani atomici (1 punto). **c)** No: a 30 kV il raggio, 12,0 mm, è noto con un'incertezza di 0,25 mm, cioè il 2%, più dell'1,5% della correzione relativistica; per rilevarla servirebbero misure più precise o tensioni più alte (1 punto). I raggi X, fatti di fotoni senza carica, non sono deviati da un campo magnetico; se gli anelli si spostano, a produrli sono particelle cariche, su cui agisce la forza di Lorentz. Sono quindi proprio gli elettroni a dare una figura di diffrazione: le particelle di cui J. J. Thomson, il padre, aveva misurato la carica specifica nel 1897 si comportano come onde (2 punti). *Indicatori:* a) Interpretare/elaborare i dati;

b) Sviluppare il processo risolutivo e Interpretare/elaborare i dati; c) Argomentare.