VERIFICA

Verifica di fine parte · La relatività ristretta

Tempo indicativo: 3 ore · Punteggio in ventesimi

Fisica 5 · Parte III · La relatività ristretta · versione 1.0
Verifica: Verifica di fine parte · La relatività ristretta · pagine 317–326 del volume completo · estratto per lo studio

La verifica riguarda i capitoli 7–9 ed è costruita come la seconda prova dell'esame di Stato. **Risolvi uno dei due problemi e rispondi a quattro quesiti a scelta fra gli otto proposti.** Il problema vale 40 punti e ogni quesito 10 punti: il punteggio grezzo massimo è 80, e si converte in ventesimi (e in decimi) con la tabella alla fine della verifica. Accanto a ogni domanda trovi i punti che vale.

È ammessa la calcolatrice scientifica e puoi consultare le tabelle dell'appendice. Scrivi le formule che usi e i passaggi, e dai ogni risultato con la sua unità di misura e con un numero di cifre significative coerente con i dati: un risultato senza unità è incompleto. Quando ti si chiede di argomentare, rispondi con frasi complete. In ogni risposta di' in quale sistema di riferimento misuri ciascuna grandezza e quale tempo o quale lunghezza è propria. Come nei capitoli, $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{(1-\beta^2)}$, i sistemi S e S′ sono in configurazione standard e m è la massa invariante. Dove non è indicato diversamente usa $c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s, $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C, 1 eV = $1{,}60 \times 10^{-19}$ J e, per l'elettrone, $mc^2 = 0{,}511$ MeV e $m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg.

Problemi · Risolvi uno dei due (40 punti)

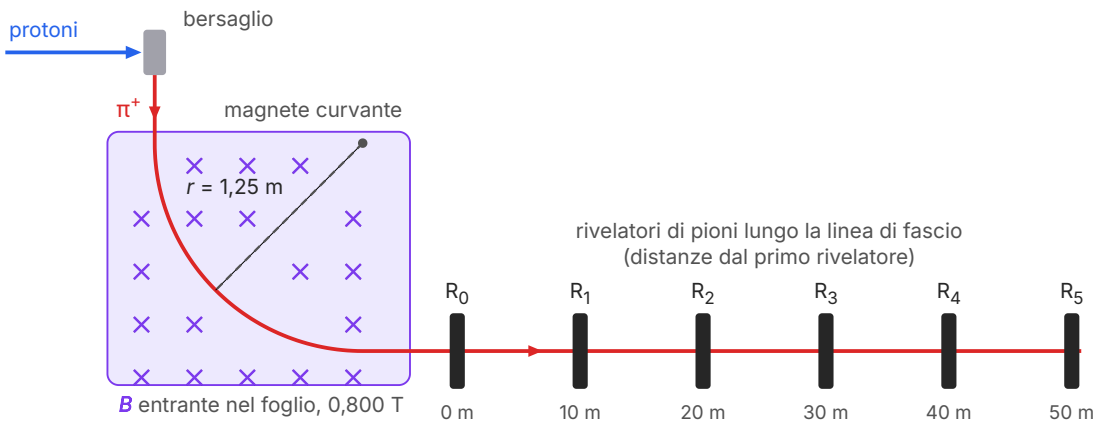

Figura V3.1 Problema 1: i pioni prodotti nel bersaglio sono deviati dal magnete lungo un arco di raggio r ed entrano nella linea di fascio, dove sei rivelatori, R_0–R_5, li contano (schema, non in scala).

1. ●●● **Un fascio di pioni.** In un laboratorio di fisica delle particelle un fascio di protoni colpisce un bersaglio e produce pioni positivi π^+, particelle instabili di massa 139,6 MeV/c^2. Un magnete curvante, con un campo uniforme di 0,800 T perpendicolare alla traiettoria, devia i pioni lungo un arco di circonferenza di raggio 1,25 m, e soltanto quelli che percorrono quell'arco entrano nella linea di fascio rettilinea (Figura V3.1). Lungo la linea sei rivelatori, distanti 10,0 m l'uno dall'altro, contano i pioni che passano in un intervallo di tempo fissato (Tabella V3.1). Considera trascurabili la perdita di energia dei pioni nei rivelatori e i pioni persi per motivi diversi dal decadimento.
   a) Spiega perché il magnete seleziona i pioni in base alla loro quantità di moto e non alla loro velocità. Calcola la quantità di moto dei pioni selezionati, in MeV/c e in kg·m/s, la loro energia totale, l'energia cinetica, il fattore γ e la velocità. Quale raggio avrebbe previsto, per la stessa velocità, la formula classica $r = mv/(eB)$? (10 punti)
   b) (Con il capitolo 8.) Mostra che i conteggi diminuiscono in modo esponenziale con la distanza percorsa e ricava dai dati la distanza media che un pione percorre prima di decadere. Ricava poi la vita media dei pioni nel riferimento del laboratorio e nel riferimento dei pioni, e confronta quest'ultima con il valore tabulato, $2{,}60 \times 10^{-8}$ s (10 punti).
   c) (Con il capitolo 8.) Quale frazione dei pioni che attraversano il primo rivelatore raggiungerebbe il rivelatore posto a 40 m se non ci fosse la dilatazione dei tempi? Confronta con i dati. Descrivi poi lo stesso tratto di 40 m nel riferimento dei pioni: quanto è lungo, quanto dura il viaggio e quale frazione sopravvive? Argomenta perché le due descrizioni sono in accordo (10 punti).
   d) Un pione π^+ fermo decade in un antimuone μ^+ (massa 105,7 MeV/c^2) e in un neutrino, di massa trascurabile. Spiega perché le due particelle partono in versi opposti con quantità di moto di uguale modulo, e ricava questo modulo usando la conservazione dell'energia. Calcola l'energia cinetica del muone e l'energia del neutrino, e di' quale frazione della massa del pione si trasforma in energia cinetica. Il muone emesso è relativistico? Argomenta confrontando con la formula classica (10 punti).

Tabella V3.1 Problema 1: numero di pioni contati da ciascun rivelatore nello stesso intervallo di tempo, in funzione della distanza dal primo rivelatore (dati tipici).

x (m)	0	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0
N	20 000	11 090	6020	3310	1860	1000

2. ●●● **Il radar e la sonda.** Una sonda ideale passa davanti a una base spaziale all'istante $t = 0$, e in quell'istante l'orologio della base e quello della sonda segnano entrambi zero; poi la sonda si allontana dalla base lungo una retta, con velocità costante. Il sistema S è quello della base, l'asse x è orientato nel verso del moto della sonda e il sistema S′ è quello della sonda. La base invia verso la sonda brevi impulsi radar agli istanti t_e del proprio orologio; la sonda li riflette subito e, insieme all'eco, trasmette l'istante t' che il suo orologio segnava al momento della riflessione. La base registra l'istante t_r in cui riceve ogni eco (Tabella V3.2). Gli impulsi radar viaggiano alla velocità della luce, e i tempi sono misurati con un'incertezza di 0,1 s.
a) (Con il capitolo 7.) Spiega come la base, con il metodo del radar, attribuisce un istante e una posizione a ciascuna riflessione, e calcolali. Mostra che i dati sono compatibili con un moto rettilineo uniforme che parte dalla base all'istante $t = 0$, e ricava β e γ (10 punti).
b) Con le trasformazioni di Lorentz calcola, per ogni riflessione, l'istante t' previsto nel sistema della sonda e confrontalo con il valore trasmesso. Quale dei due orologi misura un tempo proprio fra il passaggio davanti alla base e una riflessione? Verifica per la prima riflessione l'invarianza dell'intervallo (10 punti).
c) Mostra che, per ogni impulso, il rapporto t_r/t_e deve valere $(1 + \beta)/(1 - \beta)$ e il rapporto t'/t_e deve valere $\sqrt{((1 + \beta)/(1 - \beta))}$, e controllalo con i dati. Gli impulsi partono dalla base ogni 10 s: ogni quanto li riceve la sonda, secondo il suo orologio? Collega il risultato all'effetto Doppler relativistico, e di' che cosa avrebbe segnato l'orologio della sonda alla prima riflessione se non ci fosse la dilatazione dei tempi (10 punti).
d) Disegna un diagramma spazio-tempo del sistema S, con x e ct nella stessa unità, con le linee d'universo della base, della sonda e del primo impulso con la sua eco. Secondo la base, quando la sonda riflette il primo impulso il suo orologio va indietro rispetto a quello della base. Quale istante dell'orologio della base è simultaneo alla prima riflessione nel sistema della sonda? Argomenta perché ciascuno dei due osservatori trova più lento l'orologio dell'altro senza che ci sia contraddizione (10 punti).

Tabella V3.2 Problema 2: istanti di invio degli impulsi e di ricezione delle eco, letti sull'orologio della base, e istanti delle riflessioni letti sull'orologio della sonda (dati tipici).

Impulso	t_e (s)	t_r (s)	t' (s)
1	10,0	40,1	20,0
2	20,0	79,9	40,1
3	30,0	120,2	59,9
4	40,0	159,8	80,0

Quesiti · Rispondi a quattro degli otto (10 punti ciascuno)

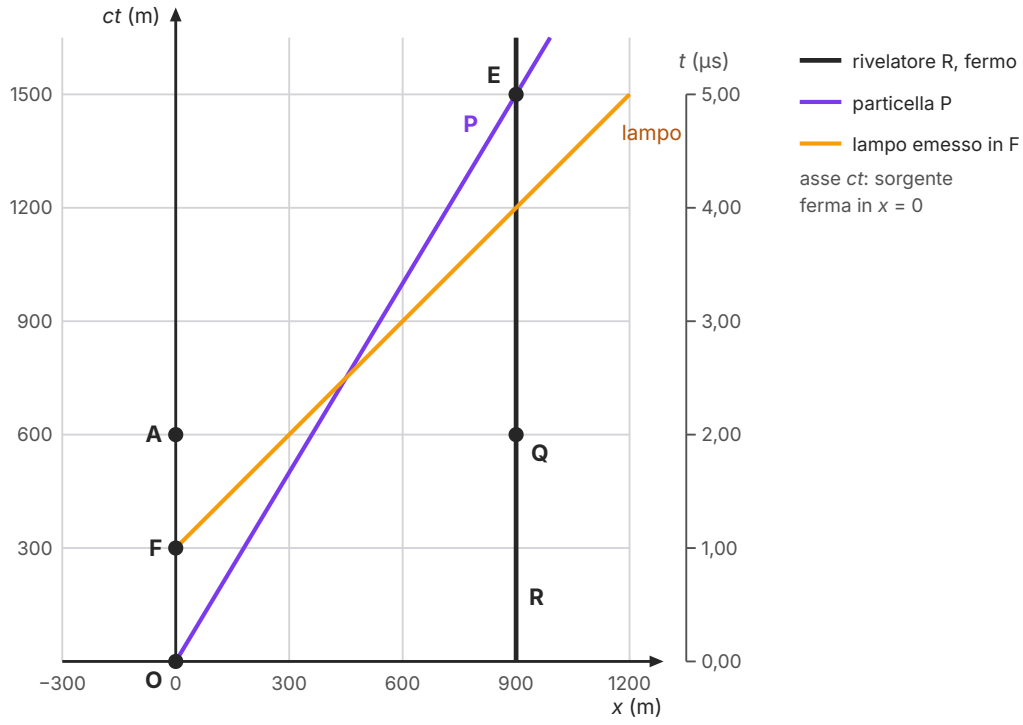

Figura V3.2 Quesito 1: diagramma spazio-tempo del laboratorio, con x e ct in metri; a destra la scala dei tempi (300 m di ct corrispondono a 1,00 μs). In nero la linea d'universo del rivelatore R, in viola quella della particella P, in arancione il lampo emesso nell'evento F.

1. ●● **Un diagramma da leggere.** La Figura V3.2 è il diagramma spazio-tempo di un laboratorio (sistema S), con x e ct in metri. All'evento O una sorgente ferma nell'origine emette una particella P; all'evento F la stessa sorgente emette un lampo di luce verso il rivelatore R, fermo in $x = 900$ m. a) Ricava dal diagramma la velocità della particella e l'istante, in microsecondi, in cui raggiunge il rivelatore (evento E) (3 punti). b) Trova, con il diagramma e con un calcolo, dove e quando il lampo raggiunge la particella e quando raggiunge il rivelatore. Il lampo potrebbe avvertire il rivelatore dell'arrivo della particella? (3 punti) c) L'evento Q avviene nel rivelatore. Può essere stato causato dall'emissione della particella in O? Può influenzare l'evento E? Motiva le risposte (2 punti). d) Gli eventi A e Q sono simultanei in S. Sono simultanei anche per un osservatore che viaggia con la particella? Se no, quale dei due avviene prima per lui? Argomenta con le linee di simultaneità (2 punti).

2. ●● **Un vento per il suono.** Nel 1887 Michelson e Morley cercarono il «vento d'etere» confrontando i tempi di andata e ritorno della luce in due bracci perpendicolari. Lo stesso esperimento si può fare con il suono, che si propaga nell'aria a 343 m/s. In una galleria del vento l'aria scorre a 34,3 m/s; un altoparlante emette un suono di frequenza 2000 Hz, che un divisore manda in due bracci lunghi 3,43 m, uno parallelo e uno perpendicolare al vento, e due riflettori lo rimandano su un microfono comune. Usa le regole di Galileo, che per il suono nell'aria valgono. a) Calcola i tempi di andata e ritorno nei due bracci e la loro differenza, e confrontala con l'approssimazione $(L/c)\beta^2$ usata per la luce, dove qui c è la velocità del suono (4 punti). b) Il segnale del microfono dipende dallo sfasamento fra le due onde. Di quale frazione di periodo cambia lo sfasamento se si ruota l'apparato di 90°? Si osserverebbe facilmente? (3 punti) c) Con il suono l'effetto del vento si misura senza difficoltà. Argomenta perché questo non contraddice il principio di relatività, e che cosa cambiò invece nella fisica quando, con la luce, lo spostamento atteso non fu osservato (3 punti).

3. ●●● **La luce nell'acqua che scorre.** A metà dell'Ottocento Hippolyte Fizeau misurò con un interferometro la velocità della luce nell'acqua in movimento. Considera acqua di indice di rifrazione $n = 1{,}333$ che scorre in un tubo a 7,0 m/s, e luce che si propaga nel verso della corrente. a) Quale velocità avrebbe la luce rispetto al tubo secondo la composizione di Galileo? (2 punti) b) Nel riferimento dell'acqua la luce ha velocità c/n. Con la composizione relativistica delle velocità e l'approssimazione $1/(1+x) \approx 1 - x$ mostra che, rispetto al tubo, la velocità della luce cresce di circa $v(1 - 1/n^2)$, e calcola questo aumento (4 punti). c) Nell'interferometro due fasci di luce di 530 nm percorrono ciascuno 3,0 m d'acqua, uno nel verso della corrente e uno in verso opposto. Calcola la differenza fra i tempi di percorrenza e lo spostamento di frange corrispondente, secondo Galileo e secondo la relatività. Fizeau trovò un effetto in accordo con il valore più piccolo: argomenta perché oggi il suo risultato si legge come una conferma della composizione relativistica delle velocità (4 punti).

4. ●●● **Orologi in volo intorno alla Terra.** Nel 1971 Hafele e Keating confrontarono orologi atomici portati intorno al mondo su voli di linea con orologi rimasti a terra. Considera una versione ideale: due aerei partono dallo stesso punto dell'equatore e lo percorrono tutto, uno verso est e uno verso ovest, a 250 m/s rispetto al suolo e alla stessa quota, e tornano al punto di partenza, dove è rimasto un terzo orologio. Il raggio della Terra è $6{,}38 \times 10^6$ m, e nel riferimento del centro della Terra, che considera inerziale, un punto dell'equatore si muove verso est a 465 m/s. a) Spiega perché non si può usare come sistema inerziale quello del suolo, e calcola la durata del volo e le velocità dei tre orologi nel riferimento del centro della Terra (3 punti). b) Usando l'approssimazione $\gamma - 1 \approx \beta^2/2$, calcola di quanto ciascun orologio di bordo resta indietro, o va avanti, rispetto all'orologio rimasto a terra (4 punti). c) Anche la gravità modifica il ritmo degli orologi, e gli aerei volano più in alto dell'orologio a terra. Argomenta perché la differenza fra le letture dei due orologi di bordo non dipende da questo effetto, e perché l'orologio del volo verso ovest, che si muove rispetto al suolo, può andare avanti (3 punti).

5. ●● **Un treno in galleria.** Un treno ideale di lunghezza propria 100 m percorre a 0,80c una galleria rettilinea di lunghezza propria 80 m. Due lampade, una all'ingresso e una all'uscita della galleria, lampeggiano simultaneamente nel riferimento della galleria, nell'istante in cui la coda del treno passa davanti all'ingresso. a) Calcola la lunghezza del treno nel riferimento della galleria e quella della galleria nel riferimento del treno. Il treno sta tutto dentro la galleria? (3 punti) b) Con le trasformazioni di Lorentz stabilisci se i due lampi sono simultanei anche per i passeggeri, quale avviene prima e con quale anticipo (4 punti). c) Descrivi la situazione nel riferimento del treno: dove si trova la testa del treno quando lampeggia la lampada d'uscita? Argomenta perché i due osservatori non si contraddicono (3 punti).

6. ●● **Quantità di moto ed energia degli elettroni.** In un esperimento si misurano, per elettroni di diverse energie, l'energia cinetica K, con un rivelatore a semiconduttore, e il raggio r della traiettoria in uno spettrometro con un campo magnetico uniforme di 0,0200 T perpendicolare alla velocità (Tabella V3.3). a) Calcola per ogni elettrone il prodotto pc, in MeV (3 punti). b) Mostra che i dati non sono compatibili con la quantità di moto classica $p = \sqrt{(2mK)}$: quale raggio prevederebbe per l'ultimo elettrone? (3 punti) c) Rappresenta $(pc)^2 - K^2$ in funzione di K. Mostra che i punti stanno su una retta per l'origine, spiega perché la relatività lo prevede e ricava dalla pendenza l'energia a riposo dell'elettrone (4 punti).

Tabella V3.3 Quesito 6: energia cinetica degli elettroni e raggio della loro traiettoria in un campo di 0,0200 T (dati tipici; incertezza su r ±0,1 cm, su K 1%).

K (MeV)	0,200	0,500	1,00	1,50	2,00
r (cm)	8,2	14,6	23,6	32,5	40,9

7. ●● **Un acceleratore lineare per elettroni.** In un acceleratore lineare per radioterapia gli elettroni partono quasi da fermi e sono spinti lungo un tratto rettilineo di 1,20 m da un campo elettrico che, in media, vale 5,0 MV/m ed è parallelo al moto. Considera la forza costante. a) Calcola l'energia cinetica, il fattore γ, la velocità e la quantità di moto degli elettroni all'uscita; che cosa prevederebbe la formula classica per la velocità? (4 punti) b) Usando la seconda legge della dinamica nella forma $F = \Delta p/\Delta t$, calcola il tempo che un elettrone impiega a percorrere il tratto, e confrontalo con quello che impiega la luce (3 punti). c) Calcola la velocità degli elettroni dopo 10 cm, 20 cm e 60 cm di percorso. Argomenta che cosa succede all'energia che il campo continua a fornire agli elettroni nel resto del tratto (3 punti).

8. ●●● **Un razzo a fotoni.** Un razzo ideale, di massa iniziale m_0 e fermo nel sistema S, si spinge trasformando parte della propria massa in luce, che emette tutta all'indietro. Quando ha raggiunto la velocità v la sua massa è m_f. a) Scrivi, nel sistema S, la conservazione dell'energia e quella della quantità di moto fra l'inizio e la fine, ricordando che per la luce $E = pc$, e ricava $m_f/m_0 = \sqrt{((1-\beta)/(1+\beta))}$ (4 punti). b) Per $\beta = 0{,}60$ calcola m_f/m_0, l'energia della luce emessa e l'energia cinetica finale del razzo, in unità di m_0c^2. La massa che manca alla fine, $m_0 - m_f$, è uguale all'energia della luce divisa per c^2? Spiega (3 punti). c) Per una sonda di 1000 kg che deve raggiungere $0{,}10c$, calcola la massa che il razzo deve perdere e l'energia della luce che deve emettere. Nella fusione deuterio–trizio si trasforma in energia il $3{,}8 \times 10^{-3}$ della massa dei reagenti: argomenta perché un razzo che ricavasse la luce dalla fusione non potrebbe raggiungere questa velocità, e quale processo servirebbe (3 punti).

Griglia di valutazione Gli indicatori della seconda prova di fisica e i loro punteggi massimi, in ventesimi.

Indicatore	Che cosa si valuta	Punti
Analizzare	Esaminare la situazione proposta, riconoscere i fenomeni e le leggi in gioco, formulare le ipotesi e scegliere un modello adatto.	5
Sviluppare il processo risolutivo	Impostare e svolgere i calcoli con le leggi pertinenti, in modo corretto e completo, con unità di misura e cifre significative.	6
Interpretare, rappresentare, elaborare i dati	Leggere ed elaborare dati, tabelle e grafici, rappresentarli, valutare la coerenza dei risultati e il loro accordo con le misure.	5
Argomentare	Spiegare le scelte e il procedimento, motivare le risposte qualitative con il linguaggio specifico, discutere i limiti del modello.	4
Totale		**20**

Gli indicatori e i punteggi massimi della griglia sono quelli dei quadri di riferimento ministeriali per la seconda prova (D.M. 769/2018), mentre le descrizioni della seconda colonna ne sono una sintesi: all'esame la commissione assegna a ogni indicatore un punteggio, fino al massimo, guardando la prova nel suo insieme. Nelle soluzioni, alla fine di ogni problema e di ogni quesito, trovi l'indicatore che ciascuna domanda verifica di più. Per correggere da solo il tuo lavoro somma i punti grezzi delle domande, al massimo 40 per il problema e 40 per i quattro quesiti, e convertili con la tabella.

Dal punteggio al voto Corrispondenza fra punteggio grezzo (0–80), voto in ventesimi e voto in decimi: ogni ventesimo vale 4 punti grezzi.

Punti grezzi	Ventesimi	Decimi	Punti grezzi	Ventesimi	Decimi
0–5	1	0,5	42–45	11	5,5
6–9	2	1	46–49	12	6
10–13	3	1,5	50–53	13	6,5
14–17	4	2	54–57	14	7
18–21	5	2,5	58–61	15	7,5
22–25	6	3	62–65	16	8
26–29	7	3,5	66–69	17	8,5
30–33	8	4	70–73	18	9
34–37	9	4,5	74–77	19	9,5
38–41	10	5	78–80	20	10

Soluzioni

Problema 1. a) Nel magnete la forza di Lorentz è perpendicolare alla velocità e non compie lavoro: il pione percorre un arco di circonferenza con energia e γ costanti, e uguagliando la forza evB alla rapidità con cui ruota la quantità di moto si ottiene $r = p/(eB)$. A parità di carica e di campo il raggio dipende solo da p: il magnete lascia passare le particelle con una quantità di moto ben precisa, qualunque sia la loro massa (2 punti). $p = eBr = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C × 0,800 T × 1,25 m = $1{,}60 \times 10^{-19}$ kg·m/s; in energia, $pc = e \times (cBr)$ con $cBr = 3{,}00 \times 10^8$ m/s × 0,800 T × 1,25 m = $3{,}00 \times 10^8$ V, cioè pc = 300 MeV e p = 300 MeV/c (2 punti). $E = \sqrt{((pc)^2 + (mc^2)^2)} = \sqrt{(300^2 + 139{,}6^2)}$ MeV = 331 MeV; $K = E - mc^2$ = 331 MeV − 139,6 MeV = 191 MeV; $\gamma = E/(mc^2) = 330{,}9/139{,}6 = 2{,}37$; $\beta = pc/E = 300/330{,}9 = 0{,}907$, $v = 2{,}72 \times 10^8$ m/s, tutte misurate nel sistema del laboratorio (4 punti). L'energia cinetica è maggiore dell'energia a riposo: i pioni sono fortemente relativistici. La formula classica, con la stessa velocità, darebbe $r = mv/(eB) = r/\gamma$ = 1,25 m/2,37 = 0,527 m: un magnete progettato con la fisica classica selezionerebbe pioni diversi da quelli voluti (2 punti). **b)** I logaritmi dei conteggi, ln N = 9,90; 9,31; 8,70; 8,10; 7,53; 6,91, diminuiscono di circa 0,60 ogni 10,0 m: ln N è una funzione lineare di x, quindi $N = N_0 e^{-x/\ell}$ (2 punti). La pendenza della retta di regressione è −0,0598 m^{-1}, da cui ℓ = 16,7 m; con i soli punti estremi, ℓ = 50,0 m/ln(20 000/1000) = 50,0 m/3,00 = 16,7 m (i conteggi si dimezzano ogni ℓ ln 2 ≈ 11,6 m, come si vede fra 0 e 10 m e fra 10 e 20 m) (3 punti). Nel laboratorio il pione percorre la distanza x nel tempo $t = x/v$, quindi $N = N_0 e^{-t/\tau_{lab}}$ con $\tau_{lab} = \ell/v$ = 16,7 m/(2,72 × 10^8 m/s) = $6{,}15 \times 10^{-8}$ s (2 punti). Questo tempo è misurato da orologi del laboratorio posti in luoghi diversi e non è proprio; la vita media propria, misurata da un orologio che viaggia con il pione, è $\tau = \tau_{lab}/\gamma = 6{,}15 \times 10^{-8}$ s/2,37 = $2{,}59 \times 10^{-8}$ s, in accordo con il valore tabulato entro lo 0,3%, meno dell'incertezza dovuta alle fluttuazioni dei conteggi ($\sqrt{N}$, fino al 3% sull'ultimo punto) (3 punti).

c) Senza dilatazione la vita media nel laboratorio sarebbe $2{,}60 \times 10^{-8}$ s e la distanza media $v\tau = 2{,}72 \times 10^8$ m/s × $2{,}60 \times 10^{-8}$ s = 7,07 m; a 40 m arriverebbe la frazione $e^{-40/7{,}07} = e^{-5{,}66} = 3{,}5 \times 10^{-3}$, circa 70 pioni su 20 000 (2 punti). Ne sono stati contati 1860, la frazione 0,093, più di venticinque volte tanto: i dati escludono la previsione senza dilatazione e concordano con $e^{-40/16{,}8} = 0{,}092$ (2 punti). Nel riferimento dei pioni è la linea di fascio a muoversi con velocità v: il tratto, che ha lunghezza propria 40 m nel laboratorio, è contratto a 40 m/2,37 = 16,9 m, e scorre davanti al pione nel tempo 16,9 m/(2,72 × 10^8 m/s) = $6{,}20 \times 10^{-8}$ s. È un tempo proprio, perché per il pione i due eventi «passaggio da R_0» e «passaggio da R_4» avvengono nello stesso punto, e coincide con $1{,}47 \times 10^{-7}$ s/2,37, la durata nel laboratorio divisa per γ (3 punti). La frazione sopravvissuta è $e^{-6{,}20/2{,}60} = e^{-2{,}39} = 0{,}092$, la stessa. Che un pione arrivi o no al rivelatore è un fatto su cui tutti devono concordare: nel laboratorio lo si spiega con la dilatazione della vita media, nel riferimento del pione con la contrazione della distanza, e le due descrizioni danno lo stesso numero perché entrambe usano lo stesso tempo proprio (3 punti). **d)** Prima del decadimento il pione è fermo e la quantità di moto totale è nulla; per la sua conservazione la somma delle quantità di moto di muone e neutrino deve essere zero: hanno modulo uguale, p, e versi opposti (2 punti). Il neutrino ha massa trascurabile, quindi $E_\nu = pc$; il muone ha $E_\mu = \sqrt{((pc)^2 + (m_\mu c^2)^2)}$. Per la conservazione dell'energia $m_\pi c^2 - pc = \sqrt{((pc)^2 + (m_\mu c^2)^2)}$; elevando al quadrato i termini $(pc)^2$ si semplificano e $pc = [(m_\pi c^2)^2 - (m_\mu c^2)^2]/(2m_\pi c^2) = (139{,}6^2 - 105{,}7^2)$ MeV^2/(279,2 MeV) = 29,8 MeV, cioè p = 29,8 MeV/c (3 punti). E_ν = 29,8 MeV; E_μ = 139,6 MeV − 29,8 MeV = 109,8 MeV e K_μ = 109,8 MeV − 105,7 MeV = 4,1 MeV. In tutto l'energia cinetica dei prodotti è 4,1 MeV + 29,8 MeV = 33,9 MeV = (139,6 − 105,7) MeV: la massa del sistema diminuisce di 33,9 MeV/c^2, il 24% della massa del pione, e si ritrova come energia cinetica (3 punti).

Per il muone $\beta = pc/E = 29{,}8/109{,}8 = 0{,}27$ e $\gamma = 109{,}8/105{,}7 = 1{,}04$: la formula classica $K = p^2/(2m) = 29{,}8^2/(2 \times 105{,}7)$ MeV = 4,2 MeV sbaglia di circa il 2%, perché l'energia cinetica è solo il 4% dell'energia a riposo. Il muone è appena relativistico, mentre il neutrino, di massa trascurabile, si muove praticamente alla velocità della luce (2 punti). *Indicatori:* a) Analizzare e Sviluppare il processo risolutivo; b) Interpretare/elaborare i dati; c) Interpretare/elaborare i dati e Argomentare; d) Sviluppare il processo risolutivo e Argomentare.

Problema 2. a) Nel sistema della base la luce va e torna con la stessa velocità c, quindi impiega lo stesso tempo all'andata e al ritorno: la riflessione avviene a metà fra l'invio e la ricezione, $t = (t_e + t_r)/2$, alla distanza $x = c(t_r - t_e)/2$, che la luce percorre nella metà del tempo di andata e ritorno (è la sincronizzazione di Einstein vista da un solo osservatore) (3 punti). Riflessioni: t = 25,05 s, 49,95 s, 75,1 s, 99,9 s; x/c = 15,05 s, 29,95 s, 45,1 s, 59,9 s, cioè $x = 4{,}52 \times 10^9$ m, $8{,}99 \times 10^9$ m, $1{,}35 \times 10^{10}$ m, $1{,}80 \times 10^{10}$ m (3 punti). Il rapporto $x/(ct)$ vale 0,601; 0,600; 0,601; 0,600: la posizione è proporzionale al tempo (la retta di regressione di x/c in funzione di t ha pendenza 0,600 e intercetta 0,03 s, nulla entro l'incertezza), quindi la sonda si muove di moto rettilineo uniforme partendo dalla base a $t = 0$ (2 punti). $\beta = 0{,}600$, $v = 1{,}80 \times 10^8$ m/s, $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}360)} = 1{,}25$ (2 punti). **b)** $t' = \gamma(t - vx/c^2) = \gamma(t - \beta \cdot x/c)$. Prima riflessione: $1{,}25 \times (25{,}05 - 0{,}600 \times 15{,}05)$ s = $1{,}25 \times 16{,}02$ s = 20,0 s; le altre: $1{,}25 \times (49{,}95 - 17{,}97)$ s = 40,0 s; $1{,}25 \times (75{,}1 - 27{,}06)$ s = 60,0 s; $1{,}25 \times (99{,}9 - 35{,}94)$ s = 80,0 s (4 punti). I valori trasmessi, 20,0 s, 40,1 s, 59,9 s e 80,0 s, coincidono con le previsioni entro 0,1 s, l'incertezza delle misure (2 punti). L'orologio della sonda è presente sia al passaggio davanti alla base sia a ogni riflessione: misura il tempo proprio fra i due eventi, e infatti $t' = t/\gamma$ (25,05 s/1,25 = 20,0 s). La base misura invece con due orologi in luoghi diversi (o, equivalentemente, con il radar), e trova una durata maggiore (2 punti). Intervallo fra O e la prima riflessione: in S $(ct)^2 - x^2 = c^2(25{,}05^2 - 15{,}05^2)$ s^2 = 401 c^2·s^2; in S' la riflessione avviene nell'origine, e $(ct')^2 = c^2 \times (20{,}0\text{ s})^2$ = 400 c^2·s^2: uguali entro l'incertezza ($\sqrt{401}$ s = 20,02 s) (2 punti). **c)** In S l'impulso parte da $x = 0$ all'istante t_e e raggiunge la sonda quando $c(t - t_e) = vt$, cioè a $t = t_e/(1 - \beta)$; l'eco torna dopo il tempo $x/c = \beta t$, quindi $t_r = t(1 + \beta)$ e $t_r/t_e = (1 + \beta)/(1 - \beta) = 1{,}600/0{,}400 = 4{,}00$ (2 punti). La sonda legge $t' = t/\gamma = t_e\sqrt{(1 - \beta^2)}/(1 - \beta) = t_e\sqrt{((1 + \beta)/(1 - \beta))} = 2{,}00\ t_e$ (2 punti). Dai dati t_r/t_e = 4,01; 4,00; 4,01; 4,00 e t'/t_e = 2,00; 2,01; 2,00; 2,00: in accordo (2 punti). Gli impulsi, emessi ogni 10 s dalla base, arrivano alla sonda ogni 20 s del suo orologio: la frequenza ricevuta è la metà di quella emessa. È l'effetto Doppler relativistico per una sorgente che si allontana, $f' = f\sqrt{((1 - \beta)/(1 + \beta))} = f/2$, che contiene sia l'aumento della distanza da un impulso all'altro sia la dilatazione dei tempi (2 punti). Senza dilatazione la sonda segnerebbe il tempo della base, 25,05 s ≈ 25,1 s, alla prima riflessione: il dato, 20,0 ± 0,1 s, lo esclude (2 punti). **d)** Nel diagramma la linea d'universo della base è l'asse ct, quella della sonda una retta per l'origine con pendenza $x/(ct) = 0{,}600$ rispetto all'asse ct; l'impulso parte da (0; 10,0 s · c), sale a 45° fino alla riflessione (15,05; 25,05) in unità di c · s e torna a 45° all'asse ct in 40,1 s · c (2 punti). Nel sistema della sonda la prima riflessione avviene a t' = 20,0 s; l'evento della base simultaneo in S' ha $x = 0$ e $t' = \gamma(t - 0)$ = 20,0 s, quindi t = 20,0 s/1,25 = 16,0 s: per la sonda, mentre il suo orologio segna 20,0 s quello della base segna 16,0 s, e l'orologio lento è quello della base (3 punti). Non c'è contraddizione: la base confronta l'orologio della sonda con due orologi propri (o con il radar), sincronizzati con il proprio criterio, e lo stesso fa la sonda, ma i due criteri di simultaneità sono diversi; nel diagramma la linea di simultaneità della sonda per la prima riflessione è inclinata e incontra l'asse ct a 16,0 s, quella della base è orizzontale e lo incontra a 25,05 s. I due orologi si trovano nello stesso luogo una sola volta, all'evento O, e non possono essere confrontati di nuovo senza che uno dei due cambi sistema di riferimento. Su ciò che avviene in un punto, come le letture t_e, t_r e t' della tabella, tutti concordano (5 punti). *Indicatori:* a) Analizzare e Interpretare/elaborare i dati; b) Sviluppare il processo risolutivo e Interpretare/elaborare i dati; c) Sviluppare il processo risolutivo; d) Argomentare.

Quesito 1. a) La linea d'universo di P passa per O e per E, (900 m; 1500 m): $\beta = \Delta x/\Delta(ct)$ = 900 m/1500 m =

0,60, $v = 0{,}60 \times 3{,}00 \times 10^8$ m/s = $1{,}8 \times 10^8$ m/s (2 punti). E ha ct = 1500 m: t = 1500 m/($3{,}00 \times 10^8$ m/s) = 5,00 μs, come sulla scala di destra (1 punto). **b)** Il lampo parte da F, (0; 300 m), lungo la linea a 45° $x = ct - 300$ m; la particella sta su $x = 0{,}60\ ct$. Uguagliando: $0{,}40\ ct = 300$ m, $ct = 750$ m, $x = 450$ m: il lampo raggiunge la particella a metà strada, all'istante 2,50 μs, come si legge nell'incrocio delle due linee (2 punti). Il lampo raggiunge R in $ct = 900$ m + 300 m = 1200 m, cioè a 4,00 μs, 1,00 μs prima della particella: può avvertire il rivelatore (1 punto). **c)** Il segnale più veloce che parte da O, la luce, arriva in $x = 900$ m quando $ct = 900$ m; Q avviene prima, a $ct = 600$ m: nessun segnale partito da O può raggiungere Q in tempo, e Q non può essere causato dall'emissione della particella (1 punto). Q ed E avvengono nello stesso punto, R, con Q prima di E: il rivelatore stesso, che resta fermo, collega i due eventi, quindi Q può influenzare E, e il loro ordine è lo stesso per tutti (1 punto). **d)** Per un osservatore che si muove con P le linee di simultaneità sono inclinate verso l'alto, simmetriche della sua linea d'universo rispetto alla linea di luce: quella che passa per A è $ct = 600$ m + $0{,}60\ x$, e in $x = 900$ m si trova a $ct = 1140$ m, sopra Q (1 punto). Q sta quindi sotto la linea degli eventi simultanei ad A: per quell'osservatore Q avviene prima di A. Come per i fulmini sul treno, dei due eventi simultanei in S avviene prima quello che si trova più avanti nel verso del moto (1 punto). *Indicatori:* a) e b) Interpretare/elaborare i dati; c) Analizzare; d) Argomentare.

Quesito 2. a) $2L/c = 2 \times 3{,}43$ m/(343 m/s) = $2{,}00 \times 10^{-2}$ s e $\beta = 34{,}3/343 = 0{,}100$. Nel braccio parallelo il suono va a $c - v$ e torna a $c + v$: $t_\parallel = (2L/c)/(1 - \beta^2)$ = $2{,}00 \times 10^{-2}$ s/0,990 = $2{,}0202 \times 10^{-2}$ s (1 punto); nel braccio perpendicolare la velocità lungo il braccio è $\sqrt{(c^2 - v^2)}$: $t_\perp = (2L/c)/\sqrt{(1 - \beta^2)}$ = $2{,}00 \times 10^{-2}$ s/0,99499 = $2{,}0101 \times 10^{-2}$ s (1 punto). $\Delta t = 1{,}01 \times 10^{-4}$ s (1 punto). L'approssimazione dà (3,43 m/343 m/s) × 0,0100 = $1{,}00 \times 10^{-4}$ s: l'errore, circa l'1%, è dell'ordine di β^2, perché qui $\beta = 0{,}1$ non è molto piccolo (1 punto). **b)** Il periodo è T = 1/(2000 Hz) = $5{,}00 \times 10^{-4}$ s, e il suono del braccio parallelo arriva in ritardo di $\Delta t/T = 0{,}20$ periodi (1 punto). Ruotando di 90° i bracci si scambiano i ruoli e il ritardo cambia segno: lo sfasamento cambia di $2\Delta t/T = 0{,}41$ periodi, cioè di 0,4 «frange», lo stesso spostamento che Michelson e Morley si aspettavano per la luce (1 punto). È ben osservabile: corrisponde a una differenza di cammino di $2c\Delta t \approx 7$ cm, contro una lunghezza d'onda di 17 cm, e il segnale del microfono passa da un rinforzo a un indebolimento (1 punto). **c)** Il suono si propaga nell'aria, un mezzo materiale: il «vento» è il moto dell'apparato rispetto all'aria, cioè rispetto a un altro corpo, e misurarlo non rivela alcun moto assoluto. Se l'aria fosse ferma rispetto all'apparato, come in una stanza chiusa che si muove di moto rettilineo uniforme, le frange non si sposterebbero: il principio di relatività è rispettato (1 punto). Per la luce si pensava che il mezzo fosse l'etere, e lo spostamento atteso di 0,4 frange avrebbe rivelato il moto della Terra rispetto a esso; nel 1887 gli spostamenti osservati furono minori di un ventesimo di quello atteso (1 punto). Il risultato nullo, come gli altri tentativi falliti di rivelare il moto rispetto all'etere, si spiega con i postulati di Einstein (1905): la luce ha la stessa velocità c in tutti i sistemi inerziali e nessun esperimento, nemmeno ottico, rivela il moto uniforme di un laboratorio. L'etere divenne superfluo, e con esso il tempo assoluto (1 punto). *Indicatori:* a) Sviluppare il processo risolutivo; b) Interpretare/elaborare i dati; c) Argomentare.

Quesito 3. a) $c/n = 3{,}00 \times 10^8$ m/s/1,333 = $2{,}251 \times 10^8$ m/s; secondo Galileo $u = c/n + v$, cioè 7,0 m/s in più (2 punti). **b)** Con S′ = acqua, $u' = c/n$ e $v = 7{,}0$ m/s: $u = (u' + v)/(1 + u'v/c^2) = (c/n + v)/(1 + v/(nc))$ (1 punto). Qui $x = v/(nc) = 7{,}0/(1{,}333 \times 3{,}00 \times 10^8) = 1{,}75 \times 10^{-8}$, quindi $u \approx (c/n + v)(1 - v/(nc)) = c/n + v - v/n^2 - v^2/(nc)$; l'ultimo termine vale circa 10^{-7} m/s ed è trascurabile (2 punti). L'aumento è $v(1 - 1/n^2)$ = 7,0 m/s × (1 − 1/1,777) = 7,0 m/s × 0,437 = 3,1 m/s, meno della metà della previsione di Galileo (1 punto). **c)** Con Δu l'aumento (e la diminuzione) di velocità, $\Delta t = \ell/(c/n - \Delta u) - \ell/(c/n + \Delta u) \approx 2\ell\Delta u n^2/c^2$ (1 punto). Relatività: Δt = 2 × 3,0 m × 3,06 m/s × 1,777/($9{,}00 \times 10^{16}$ m^2/s^2) = $3{,}6 \times 10^{-16}$ s, e lo spostamento di frange è $c\Delta t/\lambda = 3{,}00 \times 10^8$ m/s × $3{,}6 \times 10^{-16}$ s/(530×10^{-9} m) = 0,21; Galileo: $\Delta t = 8{,}3 \times 10^{-16}$ s e 0,47 frange (2 punti). Prima di Einstein il valore più piccolo si spiegava supponendo che l'acqua trascinasse l'etere solo in parte, con il

coefficiente di trascinamento $1 - 1/n^2$ proposto da Fresnel, un'ipotesi fatta apposta. Con la relatività non serve alcuna ipotesi: la velocità della luce nell'acqua, c/n nel riferimento dell'acqua, si compone con quella dell'acqua secondo la regola di Lorentz, che non è una somma, e il coefficiente ne discende (1 punto). *Indicatori:* a) Analizzare; b) Sviluppare il processo risolutivo; c) Interpretare/elaborare i dati e Argomentare.

Quesito 4. a) Il suolo ruota con la Terra: un punto dell'equatore descrive una circonferenza e ha un'accelerazione centripeta, quindi il suo sistema non è inerziale, e per esso le formule della relatività ristretta non si applicano direttamente; si usa il riferimento del centro della Terra, che non ruota (1 punto). Durata del volo: $T = 2\pi R/v = 2\pi \times 6{,}38 \times 10^6$ m/(250 m/s) = $1{,}60 \times 10^5$ s, circa 44,5 h. Velocità: orologio a terra 465 m/s; volo verso est 465 + 250 = 715 m/s; volo verso ovest 465 − 250 = 215 m/s, sempre verso est (2 punti). **b)** Nel riferimento del centro ogni orologio resta indietro rispetto al tempo T di $(v^2/2c^2)T$; il ritardo rispetto all'orologio a terra è quindi $(v^2 - v_0^2)T/(2c^2)$ (1 punto). Verso est: $(715^2 - 465^2)$ m^2/s^2 × $1{,}60 \times 10^5$ s/(2 × 9,00 × 10^{16} m^2/s^2) = 2,63 × 10^{-7} s: l'orologio resta indietro di circa 263 ns (1,5 punti). Verso ovest: $(215^2 - 465^2)$ m^2/s^2 × $1{,}60 \times 10^5$ s/(1,80 × 10^{17} m^2/s^2) = −1,51 × 10^{-7} s: va avanti di circa 151 ns (1,5 punti). **c)** Gli aerei volano alla stessa quota per lo stesso tempo, quindi l'effetto della gravità fa avanzare i due orologi di bordo della stessa quantità rispetto a quello a terra, e si elimina nella differenza fra i due: 263 ns + 151 ns = 414 ns, cioè $2v_0vT/c^2$, che dipende solo dalle velocità ed è ben misurabile con orologi atomici (2 punti). L'orologio del volo verso ovest si muove rispetto al suolo, ma nel riferimento inerziale del centro della Terra va più piano dell'orologio a terra (215 m/s contro 465 m/s): la dilatazione dei tempi si calcola in un sistema inerziale, non rispetto al suolo che ruota (1 punto). *Indicatori:* a) Analizzare; b) Sviluppare il processo risolutivo; c) Argomentare.

Quesito 5. a) $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}64)} = 5/3$. Nel riferimento della galleria il treno, in moto, è contratto: 100 m/(5/3) = 60,0 m; nel riferimento del treno la galleria è contratta: 80 m × 0,60 = 48,0 m (2 punti). Per la galleria il treno, più corto di 80 m, può stare tutto dentro; per i passeggeri la galleria, lunga 48 m, è più corta del treno, che non ci sta (1 punto). **b)** Nel riferimento S della galleria i lampi avvengono a $t = 0$ in $x = 0$ (ingresso) e in $x = 80$ m (uscita); in quell'istante la coda è all'ingresso e la testa in $x = 60$ m, dentro la galleria (1 punto). Per il treno, S′: $\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2) = -(5/3) \times 0{,}80 \times 80$ m/(3,00 × 10^8 m/s) = −3,6 × 10^{-7} s, dove Δ indica uscita meno ingresso (2 punti): i lampi non sono simultanei per i passeggeri, e lampeggia prima la lampada d'uscita, che sta più avanti nel verso del moto del treno, con un anticipo di 0,36 μs (1 punto). **c)** Per i passeggeri la galleria si muove all'indietro a 0,80c. Quando lampeggia l'uscita la testa del treno non l'ha ancora raggiunta: con la coda nell'origine di S′, l'uscita è in $x' = \gamma \times 80$ m = 133 m e la testa in 100 m, dentro la galleria, che occupa il tratto da 85 m a 133 m (1 punto). Nei 0,36 μs successivi la galleria arretra di 0,80c × 0,36 μs = 85 m, e l'ingresso lampeggia quando arriva alla coda; intanto la testa è uscita dalla galleria (1 punto). Gli osservatori concordano sui fatti locali: quando lampeggia l'uscita la testa è dentro, quando lampeggia l'ingresso la coda vi passa davanti. Sono in disaccordo solo su «il treno è tutto dentro nello stesso istante», che dipende dalla simultaneità, relativa per eventi lontani lungo il moto (1 punto). *Indicatori:* a) Sviluppare il processo risolutivo; b) Analizzare e Sviluppare il processo risolutivo; c) Argomentare.

Quesito 6. a) Il raggio dipende dalla quantità di moto relativistica, $r = p/(eB)$, quindi $pc = e \cdot cBr$; con $cB = 3{,}00 \times 10^8$ m/s × 0,0200 T = $6{,}00 \times 10^6$ V/m, pc (in MeV) = 6,00 × r (in m) (1 punto): pc = 0,492; 0,876; 1,416; 1,950; 2,454 MeV (2 punti). **b)** Classicamente $pc = \sqrt{(2Kmc^2)}$, e $(pc)^2/K$ dovrebbe valere $2mc^2$ = 1,022 MeV per tutti gli elettroni; dai dati $(pc)^2/K$ = 1,21; 1,53; 2,01; 2,54; 3,01 MeV, crescente con K (2 punti). Per l'ultimo elettrone $pc = \sqrt{(2 \times 2{,}00 \times 0{,}511)}$ MeV = 1,43 MeV e r = 1,43/6,00 m = 23,8 cm, contro 40,9 cm misurati (1 punto). **c)** Dalla relazione $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ con $E = K + mc^2$ si ha $(pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2$, cioè $(pc)^2 - K^2 = 2mc^2 \cdot K$: una retta per l'origine di pendenza $2mc^2$ (1 punto). Dai dati $(pc)^2 - K^2$ = 0,202; 0,517; 1,005; 1,553; 2,022 MeV^2; i rapporti con K, 1,01; 1,03; 1,01; 1,04; 1,01 MeV, sono costanti entro

l'incertezza (circa il 2–3%, perché un errore di 0,1 cm sul raggio pesa due volte nel quadrato): i punti stanno su una retta per l'origine (2 punti). La pendenza della retta per l'origine che meglio li approssima è 1,02 MeV, da cui mc^2 = 0,51 MeV, in accordo con 0,511 MeV: i dati confermano la relazione relativistica e una massa che non dipende dalla velocità (1 punto). *Indicatori:* a) Sviluppare il processo risolutivo; b) Interpretare/elaborare i dati; c) Interpretare/elaborare i dati e Analizzare.

Quesito 7. a) Il lavoro del campo è $K = eEd$: in elettronvolt, $5{,}0 \times 10^6$ V/m × 1,20 m = $6{,}0 \times 10^6$ V, cioè K = 6,0 MeV (1 punto). $\gamma = 1 + K/(mc^2) = 1 + 6{,}0/0{,}511 = 12{,}7$; $\beta = \sqrt{(1 - 1/\gamma^2)} = 0{,}997$, $v = 2{,}99 \times 10^8$ m/s (1 punto); $pc = \sqrt{(K^2 + 2Kmc^2)} = \sqrt{(36 + 6{,}13)}$ MeV = 6,5 MeV, p = 6,5 MeV/c = $3{,}5 \times 10^{-21}$ kg·m/s (1 punto). La formula classica darebbe $\beta = \sqrt{(2K/(mc^2))} = 4{,}8$, quasi cinque volte la velocità della luce: impossibile (1 punto). **b)** La forza è $F = eE = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C × $5{,}0 \times 10^6$ V/m = $8{,}0 \times 10^{-13}$ N, costante; partendo da fermo $p = Ft$, quindi $t = p/F = 3{,}46 \times 10^{-21}$ kg·m/s/($8{,}0 \times 10^{-13}$ N) = $4{,}3 \times 10^{-9}$ s (2 punti). La luce impiega 1,20 m/($3{,}00 \times 10^8$ m/s) = 4,0 ns: l'elettrone arriva solo 0,3 ns dopo un lampo partito nello stesso istante (1 punto). **c)** Dopo 10 cm K = 0,50 MeV, γ = 1,98, β = 0,863; dopo 20 cm K = 1,0 MeV, β = 0,941; dopo 60 cm K = 3,0 MeV, β = 0,989 (2 punti). Il campo continua a compiere il lavoro $F\Delta x$ e l'energia cinetica continua a crescere linearmente con la distanza, ma la velocità è ormai vicinissima a c e non può aumentare di molto: l'energia fornita fa crescere γ, da circa 7 a quasi 13 negli ultimi 60 cm, e la quantità di moto, che cresce linearmente nel tempo, non la velocità (1 punto). *Indicatori:* a) Sviluppare il processo risolutivo; b) Analizzare; c) Interpretare/elaborare i dati e Argomentare.

Quesito 8. a) Il sistema razzo + luce è isolato. Energia: all'inizio m_0c^2, alla fine $\gamma m_f c^2 + E_L$, dove E_L è l'energia della luce (1 punto). Quantità di moto: all'inizio zero; alla fine $\gamma m_f v$ in avanti e E_L/c all'indietro, quindi $E_L = \gamma m_f vc$ (1 punto). Sostituendo: $m_0c^2 = \gamma m_f c^2(1 + \beta)$, cioè $m_f/m_0 = 1/[\gamma(1 + \beta)] = \sqrt{(1 - \beta^2)/(1 + \beta)} = \sqrt{((1 - \beta)/(1 + \beta))}$, perché $1 - \beta^2 = (1 - \beta)(1 + \beta)$ (2 punti). Il risultato non dipende da come la luce è emessa nel tempo, purché vada tutta all'indietro. **b)** $m_f/m_0 = \sqrt{(0{,}40/1{,}60)} = 0{,}50$; con γ = 1,25: $E_L = \gamma m_f \beta c^2 = 1{,}25 \times 0{,}50 \times 0{,}60\ m_0c^2 = 0{,}375\ m_0c^2$; $K = (\gamma - 1)m_fc^2 = 0{,}125\ m_0c^2$ (2 punti). Manca la massa 0,50 m_0, ma la luce porta solo 0,375 m_0c^2: il resto, 0,125 m_0c^2, è l'energia cinetica del razzo. La massa non si conserva (la luce ha massa nulla), l'energia sì (1 punto). **c)** m_f = 1000 kg × $\sqrt{(0{,}90/1{,}10)}$ = 905 kg: il razzo deve perdere 95 kg, il 9,5% della massa iniziale; la luce porta via $E_L = \gamma m_f \beta c^2 = 1{,}005 \times 905$ kg × $0{,}10 \times 9{,}00 \times 10^{16}$ m^2/s^2 = $8{,}2 \times 10^{18}$ J, pari a 91 kg × c^2, e il resto è l'energia cinetica del razzo (1 punto). La fusione trasforma in energia al massimo lo 0,38% della massa del combustibile: anche con un razzo fatto solo di combustibile e con tutta l'energia emessa come luce all'indietro, la massa trasformata resterebbe sotto lo 0,38%, e da $\sqrt{((1 - \beta)/(1 + \beta))}$ = 0,9962 si ottiene al massimo $\beta \approx 0{,}0038$, cioè circa 1100 km/s (1 punto). Per trasformare in radiazione il 10% della massa servirebbe un processo in cui tutta la massa diventa energia, come l'annichilazione di materia e antimateria (1 punto). *Indicatori:* a) Analizzare e Sviluppare il processo risolutivo; b) Sviluppare il processo risolutivo e Argomentare; c) Argomentare.