VERIFICA

Verifica di fine parte · Le equazioni di Maxwell e le onde elettromagnetiche

Tempo indicativo: 3 ore · Punteggio in ventesimi

Fisica 5 · Parte II · Le equazioni di Maxwell e le onde elettromagnetiche · versione 1.0
Verifica: Verifica di fine parte · Le equazioni di Maxwell e le onde elettromagnetiche · pagine 215–222 del volume completo · estratto per lo studio

La verifica riguarda i capitoli 4–6 ed è costruita come la seconda prova dell'esame di Stato. **Risolvi uno dei due problemi e rispondi a quattro quesiti a scelta fra gli otto proposti.** Il problema vale 40 punti e ogni quesito 10 punti: il punteggio grezzo massimo è 80, e si converte in ventesimi (e in decimi) con la tabella alla fine della verifica. Accanto a ogni domanda trovi i punti che vale.

È ammessa la calcolatrice scientifica e puoi consultare le tabelle dell'appendice. Scrivi le formule che usi e i passaggi, e dai ogni risultato con la sua unità di misura e con un numero di cifre significative coerente con i dati: un risultato senza unità è incompleto. Quando ti si chiede di argomentare, rispondi con frasi complete. Dove non è indicato diversamente usa $c = 3{,}00 \times 10^{8}$ m/s, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A ed $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C.

Problemi · Risolvi uno dei due (40 punti)

1. ●●● **Il campo magnetico di un condensatore che si carica.** In laboratorio si costruisce un grande condensatore con due armature circolari di raggio $R = 15{,}0$ cm, parallele e distanti 1,50 mm (l'aria si comporta come il vuoto). Il condensatore, scarico, viene collegato attraverso un resistore a un generatore di tensione continua, e all'istante $t = 0$ si chiude l'interruttore. La Figura V2.1 mostra il campo elettrico fra le armature, ricavato dalla tensione misurata ai capi del condensatore, insieme alle tangenti alla curva negli istanti $t = 0$ e $t = 4{,}0$ ms. Trascura gli effetti di bordo.
   a) Leggi nel grafico il valore finale del campo e ricava la tensione del generatore. Ricava la costante di tempo del circuito in due modi diversi e, calcolata la capacità del condensatore, la resistenza del resistore. (10 punti)
   b) Usa le pendenze delle due tangenti per calcolare la corrente di spostamento fra le armature agli istanti 0 e 4,0 ms. Confronta i risultati con la corrente nei fili, che puoi ricavare dai risultati del punto a), e spiega perché i valori coincidono. (10 punti)
   c) All'istante $t = 0$ calcola il campo magnetico nel piano a metà fra le armature a 7,5 cm dall'asse, sul bordo delle armature e a 30 cm dall'asse. Descrivi la forma e il verso delle linee del campo magnetico e confronta i valori con il campo magnetico terrestre, circa 5×10^{-5} T. (10 punti)
   d) Argomenta: 1) perché il teorema di Ampère nella forma $\Gamma(\boldsymbol{B}) = \mu_0 \Sigma i$ non basta a descrivere questa situazione; 2) perché a $t = 10$ ms, quando il campo elettrico fra le armature è quasi massimo, il campo magnetico è quasi nullo; 3) come cambierebbero la costante di tempo, il campo elettrico finale e il campo magnetico a $t = 0$ se la distanza fra le armature fosse doppia, con lo stesso generatore e lo stesso resistore. (10 punti)

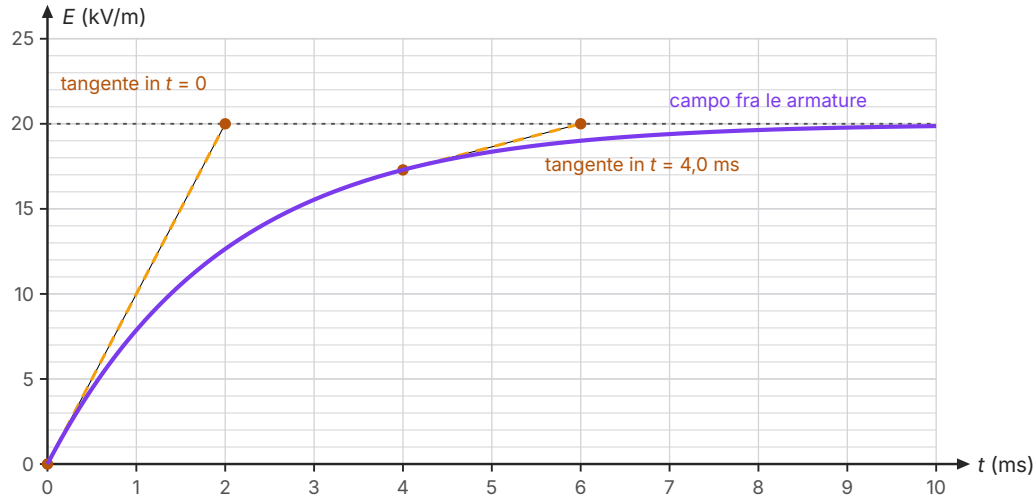


Figura V2.1 Problema 1. Il campo elettrico fra le armature del condensatore in funzione del tempo dalla chiusura dell'interruttore; la linea punteggiata indica il valore finale. In arancio le tangenti alla curva negli istanti $t = 0$ e $t = 4{,}0$ ms, ciascuna disegnata su un intervallo di 2,0 ms.

2. ●●● **Un radar per il controllo del traffico aereo.** Il radar di un aeroporto lavora alla frequenza di 2,80 GHz. La sua antenna ruota e, ogni 4,0 s, emette verso un aereo un breve impulso di microonde e ne riceve l'eco riflessa; lo strumento misura il ritardo Δt fra l'emissione dell'impulso e il ritorno dell'eco, con una risoluzione di 0,1 µs. La Tabella V2.1 riporta i ritardi misurati per un aereo che vola verso l'aeroporto.
a) Calcola la distanza dell'aereo dal radar a ogni passaggio dell'antenna. Mostra che, entro la risoluzione dello strumento, l'aereo si avvicina con velocità radiale costante; calcolala in m/s e in km/h e stima fra quanto tempo l'aereo sarebbe sopra il radar se la mantenesse. (10 punti)
b) Calcola la lunghezza d'onda delle microonde del radar. Il radar misura anche lo spostamento Doppler dell'eco: calcola quello atteso per l'aereo della tabella. Un'altra eco mostra uno spostamento di 1,20 kHz verso le frequenze più alte: che cosa puoi dire del moto dell'oggetto che l'ha prodotta? (10 punti)
c) L'impulso ha una potenza di 1,0 MW. Supponi, per semplicità, che l'antenna irradi in modo uguale in tutte le direzioni (un'antenna reale concentra la potenza in un fascio stretto). Calcola l'intensità e l'ampiezza del campo elettrico dell'impulso nel punto in cui si trova l'aereo al primo passaggio. L'aereo intercetta la radiazione su un'area efficace di 25 m^2 e la rimanda indietro, anch'esso in modo uguale in tutte le direzioni: calcola l'intensità dell'eco al radar e la potenza raccolta dall'antenna, di area efficace 10 m^2, in watt e in dBm. Di quanti decibel aumenta il livello dell'eco quando la distanza dell'aereo si dimezza? (10 punti)
d) Argomenta perché un radar per aerei usa microonde di qualche centimetro o decimetro e non onde radio lunghe centinaia di metri, considerando le dimensioni degli aerei e la propagazione delle onde nell'atmosfera. Un aereo da turismo vola a 300 m di quota verso il radar: sapendo che le microonde si propagano in linea retta e che il raggio della Terra è $6{,}37 \times 10^6$ m, stima a quale distanza il radar può vederlo per la prima volta (trascura l'altezza dell'antenna). (10 punti)

Tabella V2.1 Problema 2. Ritardo dell'eco radar dell'aereo a ogni passaggio dell'antenna (dati tipici; risoluzione 0,1 µs).

t (s)	0	4,0	8,0	12,0	16,0	20,0
Δt (µs)	480,0	475,7	471,5	467,2	462,9	458,7

Quesiti · Rispondi a quattro degli otto (10 punti ciascuno)

1. ●● **Le equazioni di Maxwell.** a) Scrivi le quattro equazioni di Maxwell nel vuoto, nella forma con flussi e circuitazioni, e spiega per ciascuna in una frase che cosa dice delle sorgenti del campo e delle sue linee. Indica quali due sono diverse dalle leggi dei campi statici e che cosa vi è stato aggiunto. (4 punti) b) Supponi che un giorno si scopra una particella con «carica magnetica», cioè un polo nord isolato. Quale delle quattro equazioni andrebbe modificata, e in che senso? (3 punti)
c) Un protone attraversa con velocità $4{,}0 \times 10^5$ m/s una regione in cui c'è soltanto un campo magnetico uniforme di 0,25 T, perpendicolare alla velocità. Calcola la forza sul protone nel sistema del laboratorio. Per un osservatore che si muove insieme al protone, il protone è fermo: quale campo misura, che spiega la stessa forza, e quanto vale? Perché in questo caso puoi usare la relazione approssimata del capitolo 4? (3 punti)

2. ●● **Il campo elettrico attorno a un elettromagnete.** Fra i poli di un elettromagnete il campo magnetico è uniforme in una regione cilindrica di raggio 25 cm e trascurabile fuori. Quando si spegne l'elettromagnete, il campo diminuisce uniformemente da 1,20 T a zero in 0,30 s. a) Calcola l'intensità del campo elettrico indotto durante lo spegnimento a 10 cm, a 25 cm e a 50 cm dall'asse della regione, e spiega perché a 50 cm, dove il campo magnetico è nullo, il campo elettrico non lo è. (4 punti) b) Una spira circolare di rame di raggio 50 cm e resistenza 0,50 Ω è coassiale con la regione: calcola la forza elettromotrice indotta e la corrente. Che cosa cambierebbe se, al posto della spira, ci fosse un anello di plastica? (3 punti) c) Guardando la regione con il campo magnetico rivolto verso di te, in quale verso circolano le linee del campo elettrico indotto? Quale forza subisce un elettrone fermo a 10 cm dall'asse, e in quale verso? (3 punti)

3. ●● **Una coincidenza che non poteva essere casuale.** Maxwell confrontò due numeri ottenuti in modi del tutto diversi. Il primo veniva dalle misure elettriche e magnetiche di Wilhelm Weber e Rudolf Kohlrausch (1856), eseguite con condensatori e correnti, che tradotte nelle unità di oggi danno $1/\sqrt{(\varepsilon_0\mu_0)} = 3{,}107 \times 10^8$ m/s. Il secondo era la velocità della luce misurata da Léon Foucault nel 1862 con uno specchio rotante, $2{,}98 \times 10^8$ m/s. a) Calcola $1/\sqrt{(\varepsilon_0\mu_0)}$ con i valori della Tabella A.1. (3 punti) b) Calcola lo scarto percentuale di ciascuno dei due valori storici dal valore di oggi, e lo scarto fra i due. All'epoca, la differenza fra i due numeri poteva far pensare a due grandezze diverse? (3 punti) c) Argomenta perché la coincidenza portò Maxwell a concludere che la luce è un'onda elettromagnetica, e quale verifica sperimentale mancava ancora: chi la fece, e che cosa mostrò. (4 punti)

4. ●● **Un'onda ultravioletta.** Il campo magnetico di un'onda elettromagnetica piana nel vuoto ha la sola componente $B_z(x, t) = (4{,}0 \times 10^{-8}\ \text{T})\ \text{sen}[(2{,}09 \times 10^7\ \text{m}^{-1})x + \omega t]$. a) Calcola la lunghezza d'onda, la frequenza e la pulsazione ω, e indica a quale banda, e a quale sottobanda, appartiene l'onda. (3 punti) b) Calcola l'ampiezza del campo elettrico e l'intensità dell'onda. (3 punti) c) In quale verso si propaga l'onda? In un punto e in un istante in cui il campo magnetico è diretto verso le z positive, quali sono la direzione e il verso del campo elettrico? Giustifica le risposte. (4 punti)

5. ●● **La spinta di un laser.** Un laser emette un fascio di potenza 3,0 W, di sezione circolare con diametro 4,0 mm, che incide perpendicolarmente su uno specchio. a) Calcola l'intensità del fascio e l'ampiezza del suo campo elettrico. (3 punti) b) Calcola la forza del fascio sullo specchio, supponendolo perfettamente riflettente, e confrontala con il peso di uno specchietto di massa 0,10 g. Quanto varrebbe la forza su una superficie nera che assorbe tutto? (3 punti) c) Lo specchio reale riflette il 90% della potenza e assorbe il resto. Partendo dalla relazione $p = U/c$ fra l'energia e la quantità di moto della radiazione, ricava la forza che il fascio esercita su di esso. Spiega perché una misura della pressione di radiazione va fatta nel vuoto. (4 punti)

6. ●● **L'indice di rifrazione previsto dalle equazioni di Maxwell.** Per la teoria di Maxwell, in un materiale trasparente non magnetico dovrebbe essere $n = \sqrt{\varepsilon_r}$. La Tabella V2.2 riporta, per alcune sostanze, la costante dielettrica relativa misurata con un condensatore, cioè in un campo statico, e l'indice di rifrazione per la luce gialla. a) Calcola $\sqrt{\varepsilon_r}$ per ogni sostanza e il rapporto $n/\sqrt{\varepsilon_r}$. (3 punti) b) Per quali sostanze la previsione è confermata, e per quali no? Che cosa hanno in comune le sostanze per cui non funziona, e perché fallisce proprio per loro? (4 punti) c) Quanto vale la costante dielettrica dell'acqua alla frequenza della luce gialla? Calcola la velocità di questa luce nell'acqua e la sua lunghezza d'onda, sapendo che nel vuoto è 589 nm. (3 punti)

Tabella V2.2 Quesito 6. Costante dielettrica relativa statica e indice di rifrazione per la luce gialla di alcune sostanze (valori arrotondati, a temperatura ambiente).

Sostanza	ε_r (campo statico)	n (luce gialla)
aria	1,0006	1,0003
polietilene	2,3	1,51
polistirene	2,5	1,59
diamante	5,7	2,42
etanolo	25	1,36
acqua	80	1,33

7. ● **Cinque radiazioni.** A) una lampada germicida, 254 nm; B) un telefono cellulare, 1,8 GHz; C) il LED di un telecomando, 940 nm; D) la riga più intensa dei raggi X di un anodo di rame, 0,154 nm; E) la radiazione dei nuclei di cobalto-60 di una sorgente per radioterapia, $3{,}2 \times 10^{20}$ Hz. a) Per ciascuna calcola la frequenza o la lunghezza d'onda mancante, indica la banda e la posizione sull'asse logaritmico delle frequenze, cioè $\log f$ con f in hertz. (4 punti) b) Quali sono ionizzanti? Quante decadi di frequenza separano il telefono dalla soglia di ionizzazione? La lampada germicida è sotto la soglia, eppure uccide i batteri: spiega perché. (3 punti) c) Le radiazioni D ed E sono entrambe molto penetranti: perché hanno nomi diversi? Un telefono cento volte più potente diventerebbe ionizzante? Argomenta. (3 punti)

8. ●● **Un collegamento in fibra ottica.** Una fibra ottica lunga 80 km, con il nucleo di vetro di indice di rifrazione 1,47, collega due città; vi viaggia radiazione di lunghezza d'onda 1550 nm nel vuoto. Il trasmettitore immette nella fibra 1,0 mW e la fibra attenua il segnale di 0,20 dB per kilometro. a) Calcola la frequenza della radiazione e indica la banda. Calcola il tempo che il segnale impiega a percorrere la fibra (trascura il percorso a zig-zag) e confrontalo con quello che impiegherebbe nel vuoto. (3 punti) b) Calcola il livello del segnale all'uscita della fibra, in dBm, e la potenza in microwatt. Il ricevitore funziona finché il segnale non scende sotto −30 dBm: quale lunghezza massima può avere la fibra senza amplificatori? (4 punti) c) Argomenta perché l'attenuazione di una fibra si esprime in decibel per kilometro, e perché le fibre per le telecomunicazioni usano l'infrarosso vicino e non, per esempio, l'infrarosso a 10 µm o l'ultravioletto. (3 punti)

Griglia di valutazione Gli indicatori della seconda prova di fisica e i loro punteggi massimi, in ventesimi.

Indicatore	Che cosa si valuta	Punti
Analizzare	Esaminare la situazione proposta, riconoscere i fenomeni e le leggi in gioco, formulare le ipotesi e scegliere un modello adatto.	5
Sviluppare il processo risolutivo	Impostare e svolgere i calcoli con le leggi pertinenti, in modo corretto e completo, con unità di misura e cifre significative.	6
Interpretare, rappresentare, elaborare i dati	Leggere ed elaborare dati, tabelle e grafici, rappresentarli, valutare la coerenza dei risultati e il loro accordo con le misure.	5
Argomentare	Spiegare le scelte e il procedimento, motivare le risposte qualitative con il linguaggio specifico, discutere i limiti del modello.	4
Totale		**20**

Gli indicatori e i punteggi massimi della griglia sono quelli dei quadri di riferimento ministeriali per la seconda prova (D.M. 769/2018), mentre le descrizioni della seconda colonna ne sono una sintesi: all'esame la commissione assegna a ogni indicatore un punteggio, fino al massimo, guardando la prova nel suo insieme. Nelle soluzioni, alla fine di ogni problema e di ogni quesito, trovi l'indicatore che ciascuna domanda verifica di più. Per correggere da solo il tuo lavoro somma i punti grezzi delle domande, al massimo 40 per il problema e 40 per i quattro quesiti, e convertili con la tabella.

Dal punteggio al voto Corrispondenza fra punteggio grezzo (0–80), voto in ventesimi e voto in decimi: ogni ventesimo vale 4 punti grezzi.

Punti grezzi	Ventesimi	Decimi	Punti grezzi	Ventesimi	Decimi
0–5	1	0,5	42–45	11	5,5
6–9	2	1	46–49	12	6
10–13	3	1,5	50–53	13	6,5
14–17	4	2	54–57	14	7
18–21	5	2,5	58–61	15	7,5
22–25	6	3	62–65	16	8
26–29	7	3,5	66–69	17	8,5
30–33	8	4	70–73	18	9
34–37	9	4,5	74–77	19	9,5
38–41	10	5	78–80	20	10

Soluzioni

Problema 1. a) Il campo tende al valore finale E_f = 20,0 kV/m (la linea punteggiata). A carica completa la tensione ai capi del condensatore è quella del generatore: $\Delta V = E_f d = 20{,}0 \times 10^3$ V/m × $1{,}50 \times 10^{-3}$ m = 30,0 V. Il campo cresce come la carica di un circuito RC (Fisica 4, capitolo 14), $E = E_f(1 - e^{-t/\tau})$. Primo modo: la tangente in $t = 0$ raggiunge il valore finale dopo un tempo τ, e nel grafico lo raggiunge a 2,0 ms. Secondo modo: dopo un tempo τ il campo vale il 63% del valore finale, 12,6 kV/m, e la curva passa per questo valore a 2,0 ms. Quindi τ = 2,0 ms. La capacità è $C = \varepsilon_0 \pi R^2/d = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m × π × $(0{,}150\text{ m})^2/(1{,}50 \times 10^{-3}\text{ m}) = 4{,}17 \times 10^{-10}$ F = 417 pF, e la resistenza vale $\tau/C = 2{,}0 \times 10^{-3}$ s/$(4{,}17 \times 10^{-10}$ F) = $4{,}8 \times 10^6$ Ω = 4,8 MΩ. [Punti: valore finale e tensione 2; τ nei due modi 2 + 2; capacità 2; resistenza 2.] **b)** La tangente in $t = 0$ sale di 20,0 kV/m in 2,0 ms: $\Delta E/\Delta t = 1{,}0 \times 10^7$ V/(m·s). La corrente di spostamento attraverso l'area delle armature è $I_s = \varepsilon_0 \Delta\Phi(\boldsymbol{E})/\Delta t = \varepsilon_0 \pi R^2 \Delta E/\Delta t = 8{,}85 \times 10^{-12} \times 7{,}07 \times 10^{-2} \times 1{,}0 \times 10^7$ A = $6{,}3 \times 10^{-6}$ A = 6,3 μA. La tangente in 4,0 ms va da 17,3 kV/m a 20,0 kV/m in 2,0 ms: $\Delta E/\Delta t = 1{,}35 \times 10^6$ V/(m·s) e I_s = 0,85 μA. Nei fili, all'istante 0 il condensatore è scarico e tutta la tensione è ai capi del resistore: i = 30,0 V/(4,8 MΩ) = 6,3 μA; poi la corrente decresce come $e^{-t/\tau}$, e a 4,0 ms = 2τ vale 6,3 μA × e^{-2} = 0,85 μA. I valori coincidono perché la carica sull'armatura è $q = \varepsilon_0 SE$ (teorema di Gauss): la corrente che porta carica all'armatura, $i = \Delta q/\Delta t = \varepsilon_0 S \Delta E/\Delta t$, è proprio la corrente di spostamento fra le armature, che «continua» quella di conduzione. [Punti: due pendenze 2 + 2; due correnti di spostamento 2; corrente nei fili 2; spiegazione 2.] **c)** Per la legge di Ampère-Maxwell su una circonferenza di raggio r centrata sull'asse, nel piano a metà fra le armature, nessuna corrente di conduzione la attraversa e la corrente di spostamento concatenata è la frazione r^2/R^2 di quella totale: $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_s r^2/R^2$, quindi $B = \mu_0 I_s r/(2\pi R^2)$. A 7,5 cm: $B = 2 \times 10^{-7}$ T·m/A × $6{,}26 \times 10^{-6}$ A × 0,075 m/$(0{,}150\text{ m})^2 = 4{,}2 \times 10^{-12}$ T; sul bordo: $B = \mu_0 I_s/(2\pi R) = 8{,}3 \times 10^{-12}$ T. A 30 cm la circonferenza concatena tutta la corrente di spostamento: $B = \mu_0 I_s/(2\pi r) = 4{,}2 \times 10^{-12}$ T. Le linee sono circonferenze centrate sull'asse, parallele alle armature, percorse nel verso dato dalla mano destra con il pollice nel verso in cui cresce $\boldsymbol{E}$ (dall'armatura positiva alla negativa): lo stesso verso del campo attorno al filo che porta la corrente all'armatura positiva. Questi campi sono da 6 a 12 milioni di volte più deboli del campo terrestre. [Punti: legge e frazione concatenata 3; tre valori 1 + 1 + 1; linee e verso 2; confronto 2.] **d)** 1) La corrente concatenata con una linea chiusa attorno al filo dipende dalla superficie scelta: un disco attraversato dal filo concatena i, una superficie a sacchetto che passa fra le armature non concatena nessuna corrente di conduzione. Il teorema darebbe due valori diversi della stessa circuitazione; il paradosso sparisce aggiungendo la corrente di spostamento, che fra le armature vale proprio i. 2) La corrente di spostamento dipende dalla rapidità di variazione del campo elettrico, non dal suo valore: a 10 ms = 5τ la pendenza della curva è $e^{-5} \approx 0{,}7\%$ di quella iniziale, $I_s \approx 0{,}04$ μA, e il campo magnetico è praticamente nullo; a carica completa $\boldsymbol{E}$ è massimo e costante e $\boldsymbol{B}$ è zero. 3) Con la distanza doppia la capacità si dimezza: τ = 1,0 ms; il campo finale si dimezza, $E_f = \Delta V/(2d) = 10{,}0$ kV/m; la pendenza iniziale $E_f/\tau = 1{,}0 \times 10^7$ V/(m·s) non cambia, e quindi non cambiano I_s e il campo magnetico a $t = 0$. È coerente con il punto b): all'istante iniziale $I_s = i = \Delta V/(4{,}8\text{ MΩ})$, che non dipende dalla distanza fra le armature. [Punti: 1) 3; 2) 3; 3) 4.] *Indicatori:* a) Interpretare/elaborare i dati; b) Sviluppare il processo risolutivo e Interpretare/elaborare i dati; c) Sviluppare il processo risolutivo; d) Argomentare e Analizzare.

Problema 2. a) L'impulso percorre andata e ritorno, quindi $d = c\Delta t/2$. Per i sei passaggi: 72 000 m, 71 355 m, 70 725 m, 70 080 m, 69 435 m, 68 805 m. Ogni 4,0 s la distanza diminuisce di 645 m o di 630 m: la

differenza fra questi valori, 15 m, è proprio la distanza che corrisponde alla risoluzione dello strumento ($c \times 0{,}1$ μs/2 = 15 m), quindi i dati sono compatibili con una velocità radiale costante. Dal primo e dall'ultimo dato: v = (72 000 m − 68 805 m)/20,0 s = $1{,}60 \times 10^2$ m/s = 575 km/h. All'ultimo passaggio l'aereo dista 68 805 m: con la stessa velocità sarebbe sopra il radar dopo 68 805 m/(160 m/s) ≈ $4{,}3 \times 10^2$ s, circa 7 minuti. [Punti: distanze 3; costanza entro la risoluzione 2; velocità 3; tempo 2.] **b)** $\lambda = c/f = 3{,}00 \times 10^8$ m/s/$(2{,}80 \times 10^9$ Hz) = 0,107 m = 10,7 cm: microonde. L'aereo riceve l'onda come un osservatore in moto e la rimanda come una sorgente in moto, quindi lo spostamento si applica due volte (capitolo 5): $\Delta f \approx 2fv/c = 2 \times 2{,}80 \times 10^9$ Hz × 160 m/s/$(3{,}00 \times 10^8$ m/s) = $2{,}99 \times 10^3$ Hz ≈ 3,0 kHz, verso le frequenze più alte perché l'aereo si avvicina (la formula approssimata è lecita: $v/c \approx 5 \times 10^{-7}$). Per l'altra eco: $v = c\Delta f/(2f) = 3{,}00 \times 10^8 \times 1{,}20 \times 10^3/(2 \times 2{,}80 \times 10^9)$ m/s = 64 m/s = 231 km/h: l'oggetto si avvicina con velocità radiale 64 m/s. È solo la componente lungo la congiungente con il radar: potrebbe essere un aereo più veloce che non punta dritto verso il radar. [Punti: λ e banda 2; spostamento atteso 4; seconda eco, calcolo 2 e interpretazione 2.] **c)** $I = P/(4\pi r^2) = 1{,}0 \times 10^6$ W/$(4\pi \times (7{,}20 \times 10^4$ m$)^2) = 1{,}5 \times 10^{-5}$ W/m^2; $E_0 = \sqrt{(2I/(c\varepsilon_0))} = \sqrt{(2 \times 1{,}54 \times 10^{-5}/(3{,}00 \times 10^8 \times 8{,}85 \times 10^{-12}))}$ V/m = 0,11 V/m. L'aereo intercetta $P' = IA = 1{,}54 \times 10^{-5}$ W/m$^2 \times 25$ m$^2 = 3{,}8 \times 10^{-4}$ W, che al radar dà $I_{eco} = P'/(4\pi r^2) = 5{,}9 \times 10^{-15}$ W/m^2. L'antenna raccoglie $5{,}9 \times 10^{-15}$ W/m$^2 \times 10$ m$^2 = 5{,}9 \times 10^{-14}$ W, cioè $L = 10 \log(5{,}9 \times 10^{-14}$ W/1 mW) = −102 dBm. Il percorso di andata e quello di ritorno seguono ciascuno la legge dell'inverso del quadrato, quindi la potenza dell'eco va come $1/r^4$: dimezzando la distanza aumenta di $2^4 = 16$ volte, cioè di 10 log 16 = 12 dB. [Punti: intensità 2; E_0 2; intensità dell'eco 3; potenza e dBm 2; 12 dB 1.] **d)** Un oggetto riflette bene un'onda se è molto più grande della sua lunghezza d'onda: un aereo di qualche decina di metri è grande rispetto a 10 cm, mentre un'onda di centinaia di metri lo aggirerebbe quasi senza essere riflessa. Inoltre, per concentrare la potenza in un fascio stretto, e quindi sapere in che direzione sta l'aereo, l'antenna deve essere grande rispetto a λ (la diffrazione dipende da λ/D): con $\lambda \approx 10$ cm basta un'antenna di qualche metro. Infine, 10 cm cade nella finestra radio dell'atmosfera, e a queste frequenze la ionosfera è trasparente: le microonde si propagano in linea retta e non tornano a terra al di là dell'orizzonte. Il radar vede l'aereo per la prima volta quando il segmento che li unisce è tangente alla superficie terrestre (antenna al suolo): $(R_T + h)^2 = R_T^2 + d^2$, quindi $d \approx \sqrt{(2R_T h)} = \sqrt{(2 \times 6{,}37 \times 10^6$ m × 300 m$)} = 6{,}2 \times 10^4$ m ≈ 62 km. Un aereo da turismo a 300 m di quota appare sul radar solo entro circa 60 km; l'aereo della tabella, che il radar vede a 72 km, deve volare più in alto (a 72 km serve una quota di almeno $d^2/(2R_T) \approx 410$ m). [Punti: dimensioni e lunghezza d'onda 2; fascio e antenna 2; finestra radio e ionosfera 3; orizzonte 3.] *Indicatori:* a) Interpretare/elaborare i dati; b) Sviluppare il processo risolutivo; c) Analizzare (scelta del modello) e Sviluppare il processo risolutivo; d) Argomentare.

Quesito 1. a) Gauss per il campo elettrico, $\Phi_S(\boldsymbol{E}) = Q_{int}/\varepsilon_0$: le cariche sono le sorgenti di $\boldsymbol{E}$, le linee del campo elettrostatico partono dalle cariche positive e finiscono sulle negative. Gauss per il campo magnetico, $\Phi_S(\boldsymbol{B}) = 0$: non esistono monopoli magnetici, le linee di $\boldsymbol{B}$ sono chiuse. Faraday-Neumann-Lenz, $\Gamma(\boldsymbol{E}) = -\Delta\Phi(\boldsymbol{B})/\Delta t$: un campo magnetico che varia genera un campo elettrico con linee chiuse. Ampère-Maxwell, $\Gamma(\boldsymbol{B}) = \mu_0(i + \varepsilon_0\Delta\Phi(\boldsymbol{E})/\Delta t)$: il campo magnetico è generato dalle correnti e dai campi elettrici variabili, e le sue linee si avvolgono attorno agli uni e alle altre. Le due leggi di circuitazione sono quelle nuove: nella statica $\Gamma(\boldsymbol{E}) = 0$ e $\Gamma(\boldsymbol{B}) = \mu_0\Sigma i$; ora contengono la rapidità di variazione del flusso dell'altro campo. [Punti: equazioni 2; significato 1; novità 1.] **b)** Il teorema di Gauss per il campo magnetico: il flusso di $\boldsymbol{B}$ attraverso una superficie chiusa non sarebbe più sempre nullo, ma proporzionale alla carica magnetica racchiusa, come accade per il campo elettrico; le linee di $\boldsymbol{B}$ potrebbero partire da un polo isolato. (Chi osserva che un polo magnetico in moto sarebbe una «corrente magnetica», che comparirebbe nella legge di Faraday-Neumann come la corrente compare in quella di Ampère-Maxwell, va oltre la domanda e merita il punteggio pieno.) [3 punti.] **c)** Nel laboratorio $F = evB = 1{,}60$

$\times 10^{-19}$ C $\times$ 4,0 $\times 10^{5}$ m/s $\times$ 0,25 T = 1,6 $\times 10^{-14}$ N, perpendicolare a $\boldsymbol{v}$ e a $\boldsymbol{B}$. Nel sistema del protone c'è un campo elettrico $E' = vB = 1{,}0 \times 10^{5}$ V/m, perpendicolare a $\boldsymbol{v}$ e a $\boldsymbol{B}$, e la forza $eE' = 1{,}6 \times 10^{-14}$ N è la stessa: la separazione fra campo elettrico e magnetico dipende dall'osservatore. La relazione vale per $v \ll c$, e qui $v/c = 1{,}3 \times 10^{-3}$. [Punti: forza 1; campo E' 1; condizione 1.] *Indicatori:* a) e b) Argomentare; c) Analizzare.

Quesito 2. a) $|\Delta B/\Delta t| = 1{,}20$ T/0,30 s = 4,0 T/s. Dentro la regione ($r \le R$, con $R = 25$ cm): $E = (r/2)|\Delta B/\Delta t|$, cioè 0,050 m $\times$ 4,0 T/s = 0,20 V/m a 10 cm e 0,50 V/m a 25 cm. Fuori: $E = [R^2/(2r)]|\Delta B/\Delta t| =$ (0,0625 m^2/1,00 m) $\times$ 4,0 T/s = 0,25 V/m a 50 cm. La legge di Faraday-Neumann-Lenz lega la circuitazione di $\boldsymbol{E}$ lungo la circonferenza di raggio 50 cm al flusso attraverso il cerchio che essa delimita, che comprende tutta la regione in cui $\boldsymbol{B}$ varia: il campo indotto non dipende dal campo magnetico nel punto, ma dalla variazione del flusso racchiuso. [Punti: tre valori 3; spiegazione 1.] **b)** $|\varepsilon| = \pi R^2|\Delta B/\Delta t| = \pi \times (0{,}25\text{ m})^2 \times 4{,}0$ T/s = 0,79 V; $i = 0{,}79$ V/0,50 Ω = 1,6 A. In un anello di plastica il campo indotto è lo stesso e la sua circuitazione vale ancora 0,79 V, ma non ci sono cariche libere: nessuna corrente. [Punti: f.e.m. 1; corrente 1; anello di plastica 1.] **c)** Il campo magnetico, rivolto verso l'osservatore, diminuisce: per la legge di Lenz il campo indotto spinge le cariche positive nel verso di una corrente che ricrea il campo che sta sparendo, cioè in senso antiorario. Sull'elettrone fermo agisce $F = eE = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C $\times$ 0,20 V/m = 3,2 $\times 10^{-20}$ N, tangente alla circonferenza di raggio 10 cm e, poiché la carica è negativa, in senso orario. [Punti: verso delle linee 1; forza 1; verso della forza 1.] *Indicatori:* a) Sviluppare il processo risolutivo e Argomentare; b) Sviluppare il processo risolutivo; c) Analizzare.

Quesito 3. a) $1/\sqrt{(8{,}854 \times 10^{-12} \times 1{,}2566 \times 10^{-6})}$ m/s = 2,998 $\times 10^{8}$ m/s $\approx$ 3,00 $\times 10^{8}$ m/s. [3 punti.] **b)** Weber e Kohlrausch: (3,107 − 2,998)/2,998 = +3,6%; Foucault: (2,98 − 2,998)/2,998 = −0,6%; fra i due: (3,107 − 2,98)/2,98 $\approx$ 4%. Le misure elettriche dell'Ottocento avevano incertezze di qualche percento: uno scarto del 4% era compatibile con la stessa grandezza, mentre due grandezze indipendenti avrebbero potuto differire di ordini di grandezza. [Punti: scarti 2; giudizio 1.] **c)** Le equazioni prevedono che i campi variabili si sostengano a vicenda e si propaghino con velocità $1/\sqrt{(\varepsilon_0\mu_0)}$, una combinazione di costanti misurate soltanto con condensatori e correnti, senza alcun riferimento alla luce. Che il risultato coincidesse con la velocità della luce, misurata con metodi ottici, suggeriva che la luce fosse proprio un'onda di questo tipo, e che l'ottica diventasse parte dell'elettromagnetismo. Mancava la prova che onde elettromagnetiche prodotte da circuiti esistessero davvero: la diede Heinrich Hertz fra il 1886 e il 1888, producendole con un oscillatore a scintilla e rivelandole con un risonatore; dalle onde stazionarie misurò la lunghezza d'onda e ottenne una velocità dell'ordine di quella della luce, e mostrò che queste onde si riflettono, si rifrangono e si polarizzano come la luce. [Punti: ragionamento 2; Hertz e i suoi risultati 2.] *Indicatori:* a) Sviluppare il processo risolutivo; b) Interpretare/elaborare i dati; c) Argomentare.

Quesito 4. a) $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/(2{,}09 \times 10^{7}\text{ m}^{-1}) = 3{,}01 \times 10^{-7}$ m = 301 nm; $f = c/\lambda = 9{,}98 \times 10^{14}$ Hz $\approx 1{,}00 \times 10^{15}$ Hz; $\omega = ck = 6{,}27 \times 10^{15}$ rad/s. È radiazione ultravioletta, nella sottobanda UV-B (280–315 nm). [Punti: tre grandezze 2; banda 1.] **b)** $E_0 = cB_0 = 3{,}00 \times 10^{8}$ m/s $\times 4{,}0 \times 10^{-8}$ T = 12 V/m; $I = \tfrac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^{\,2} = \tfrac{1}{2} \times 3{,}00 \times 10^{8} \times 8{,}85 \times 10^{-12} \times 12^2$ W/m^2 = 0,19 W/m^2. [Punti: E_0 1; I 2.] **c)** Un punto di fase costante, $kx + \omega t =$ costante, si sposta con $x =$ costante $- (\omega/k)t$: l'onda si propaga nel verso delle x negative, con velocità $\omega/k = c$. Il campo elettrico è perpendicolare a $\boldsymbol{B}$ e alla direzione di propagazione, quindi è lungo l'asse y, ed è in fase con $\boldsymbol{B}$; il verso è quello per cui $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ punta verso le x negative. Poiché il versore dell'asse y per quello dell'asse z dà il versore dell'asse x, con $\boldsymbol{B}$ verso le z positive $\boldsymbol{E}$ deve essere diretto verso le y negative. [Punti: verso di propagazione 2; direzione e verso di $\boldsymbol{E}$ 2.] *Indicatori:* a) e b) Sviluppare il processo risolutivo; c) Analizzare e Argomentare.

Quesito 5. a) Area del fascio: $A = \pi \times (2{,}0 \times 10^{-3}\text{ m})^2 = 1{,}26 \times 10^{-5}$ m^2; $I = P/A = 2{,}4 \times 10^{5}$ W/m^2; $E_0 = \sqrt{(2I/(c\varepsilon_0))} = 1{,}3 \times 10^{4}$ V/m. [Punti: I 2; E_0 1.] **b)** Specchio perfetto: $F = 2P/c = 2 \times 3{,}0$ W/(3,00 $\times 10^{8}$ m/s) = 2,0 $\times 10^{-8}$ N. Il peso dello specchietto è 1,0 $\times 10^{-4}$ kg $\times$

$9{,}8\ \text{m/s}^2 = 9{,}8 \times 10^{-4}$ N: la forza della luce ne è circa 2×10^{-5} volte, cioè cinquantamila volte più piccola. Superficie nera: $F = P/c = 1{,}0 \times 10^{-8}$ N. [Punti: forza 1; confronto 1; superficie nera 1.] **c)** In un tempo Δt arriva l'energia $U = P\Delta t$, con quantità di moto U/c. La parte assorbita, $0{,}10U$, cede allo specchio la sua quantità di moto, $0{,}10U/c$; la parte riflessa, $0{,}90U$, torna indietro con quantità di moto opposta e ne cede il doppio, $2 \times 0{,}90U/c$. In tutto lo specchio riceve $1{,}90U/c$ e, per il teorema dell'impulso, $F = 1{,}90P/c = 1{,}9 \times 10^{-8}$ N. Nel vuoto perché la forza è minuscola: le correnti d'aria e le molecole che rimbalzano sulla superficie scaldata dalla luce assorbita produrrebbero forze molto maggiori. [Punti: ragionamento e risultato 3; vuoto 1.] *Indicatori:* a) e b) Sviluppare il processo risolutivo; c) Analizzare e Argomentare.

Quesito 6. a) $\sqrt{\varepsilon_r}$ e $n/\sqrt{\varepsilon_r}$: aria 1,0003 e 1,000; polietilene 1,52 e 1,00; polistirene 1,58 e 1,01; diamante 2,39 e 1,01; etanolo 5,0 e 0,27; acqua 8,9 e 0,15. [3 punti.] **b)** Per l'aria, il polietilene, il polistirene e il diamante il rapporto è 1 entro circa l'1%: la previsione è confermata. Per l'etanolo e per l'acqua $\sqrt{\varepsilon_r}$ è da circa 4 a circa 7 volte troppo grande. Le loro molecole sono dipoli permanenti: in un campo statico, o che varia lentamente, ruotano per allinearsi, ed è questo che rende grande la costante dielettrica. Il campo della luce visibile si inverte circa 10^{15} volte al secondo e le molecole non riescono a seguirlo: rispondono solo gli elettroni, e la costante dielettrica che conta per la luce è molto più piccola. La relazione $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ vale, ma con ε_r misurata alla frequenza dell'onda. [Punti: classificazione 1; dipoli permanenti 2; dipendenza dalla frequenza 1.] **c)** $\varepsilon_r = n^2 = 1{,}33^2 = 1{,}77$; $v = c/n = 3{,}00 \times 10^8\ \text{m/s}/1{,}33 = 2{,}26 \times 10^8$ m/s; la frequenza, fissata dalla sorgente, non cambia ($5{,}09 \times 10^{14}$ Hz), quindi $\lambda = 589\ \text{nm}/1{,}33 = 443$ nm. [Punti: ε_r 1; v 1; λ 1.] *Indicatori:* a) Interpretare/elaborare i dati; b) Argomentare; c) Sviluppare il processo risolutivo.

Quesito 7. a) Con $c = \lambda f$: A) $f = 1{,}18 \times 10^{15}$ Hz, $\log f = 15{,}07$, ultravioletto (UV-C); B) $\lambda = 0{,}17$ m, $\log f = 9{,}26$, microonde; C) $f = 3{,}19 \times 10^{14}$ Hz, $\log f = 14{,}50$, infrarosso vicino; D) $f = 1{,}95 \times 10^{18}$ Hz, $\log f = 18{,}29$, raggi X; E) $\lambda = 9{,}4 \times 10^{-13}$ m, $\log f = 20{,}51$, raggi gamma. [Punti: valori 2; bande 1; posizioni 1.] **b)** Sono ionizzanti le radiazioni oltre circa 3×10^{15} Hz: D ed E. Dal telefono alla soglia ci sono $\log(3 \times 10^{15}/1{,}8 \times 10^9) = 6{,}2$ decadi. La radiazione a 254 nm, pur non ionizzando, è assorbita dal DNA dei batteri e ne altera i legami chimici, che richiedono meno energia della ionizzazione: i batteri non si riproducono più. [Punti: ionizzanti 1; decadi 1; germicida 1.] **c)** I raggi X e i raggi gamma si distinguono per l'origine, non per una frequenza di confine: i raggi X nascono dagli elettroni, i raggi gamma dai nuclei. La capacità di ionizzare dipende dalla frequenza e non dall'intensità: una potenza cento volte maggiore aumenterebbe il riscaldamento dei tessuti, non la capacità di strappare elettroni, e il telefono resterebbe sei decadi sotto la soglia. [Punti: origine 1; argomentazione 2.] *Indicatori:* a) Sviluppare il processo risolutivo; b) Analizzare; c) Argomentare.

Quesito 8. a) $f = c/\lambda = 3{,}00 \times 10^8\ \text{m/s}/(1{,}550 \times 10^{-6}\ \text{m}) = 1{,}94 \times 10^{14}$ Hz: infrarosso vicino. Nella fibra $v = c/n = 3{,}00 \times 10^8/1{,}47\ \text{m/s} = 2{,}04 \times 10^8$ m/s, e il tempo è $8{,}0 \times 10^4\ \text{m}/(2{,}04 \times 10^8\ \text{m/s}) = 3{,}9 \times 10^{-4}$ s = 0,39 ms, contro $8{,}0 \times 10^4\ \text{m}/(3{,}00 \times 10^8\ \text{m/s}) = 0{,}27$ ms nel vuoto: circa il 47% in più. [Punti: frequenza e banda 1; tempi 2.] **b)** Livello iniziale: $10 \log(1{,}0\ \text{mW}/1\ \text{mW}) = 0$ dBm. Attenuazione: $0{,}20\ \text{dB/km} \times 80\ \text{km} = 16$ dB, quindi all'uscita −16 dBm, cioè $P = 1{,}0\ \text{mW} \times 10^{-1{,}6} = 2{,}5 \times 10^{-2}\ \text{mW} = 25\ \mu\text{W}$. Il ricevitore tollera un'attenuazione di 30 dB: $L_{max} = 30\ \text{dB}/(0{,}20\ \text{dB/km}) = 150$ km. [Punti: livello 1; potenza 1; lunghezza massima 2.] **c)** Ogni kilometro di fibra moltiplica la potenza per lo stesso fattore ($10^{-0{,}020} \approx 0{,}955$): in decibel i fattori diventano addendi, e l'attenuazione cresce in proporzione alla lunghezza. Il vetro di silice è particolarmente trasparente nell'infrarosso vicino, intorno a 1,3 μm e 1,55 μm; a 10 μm la radiazione eccita le vibrazioni delle molecole e viene assorbita, e l'ultravioletto è assorbito dal vetro. [Punti: decibel 1; scelta della banda 2.] *Indicatori:* a) e b) Sviluppare il processo risolutivo; c) Argomentare.