CAPITOLO

13

Onde di materia e principio di indeterminazione

Se la luce, che per un secolo abbiamo pensato come un'onda, arriva a pacchetti come un insieme di particelle, perché la materia, che pensiamo fatta di particelle, non dovrebbe propagarsi come un'onda?

OBIETTIVI

1. Calcolare la lunghezza d'onda di de Broglie $\lambda = h/p$ di elettroni, neutroni e oggetti macroscopici, e spiegare perché gli effetti ondulatori si vedono solo su scala atomica.
2. Ricavare la condizione di quantizzazione di Bohr imponendo che sull'orbita stia un numero intero di lunghezze d'onda.
3. Descrivere gli esperimenti che hanno mostrato la natura ondulatoria della materia: Davisson e Germer, G. P. Thomson, la doppia fenditura con un elettrone alla volta.
4. Enunciare il principio di indeterminazione $\Delta x\,\Delta p \geq \hbar/2$ e la relazione fra energia e tempo, ricavarne l'ordine di grandezza con la diffrazione da una fenditura e usarli per stime.
5. Interpretare la funzione d'onda come ampiezza di probabilità e calcolare i livelli di una particella in una scatola, $E_n = n^2h^2/(8mL^2)$.
6. Spiegare con le bande di energia la differenza fra conduttori, isolanti e semiconduttori, e il funzionamento di diodi, LED e celle solari.

INDICE DEL CAPITOLO

13.1 L'ipotesi di de Broglie 2
13.2 Le prove sperimentali 7
13.3 Il principio di indeterminazione 14
13.4 La funzione d'onda e la probabilità 17
13.5 La particella in una scatola e l'atomo quantistico 19
13.6 Approfondimento · Dai livelli alle bande: i semiconduttori 22

Fisica 5 · Parte IV · La fisica dei quanti · versione 1.0
Capitolo 13: Onde di materia e principio di indeterminazione · pagine 419–450 del volume completo · estratto per lo studio

Un microscopio ottico, per quanto perfetto, non mostra i dettagli più piccoli di circa 200 nm: è il limite imposto dalla diffrazione della luce, che hai incontrato lo scorso anno con il criterio di Rayleigh. Eppure esistono fotografie di singole colonne di atomi distanti un decimo di nanometro, e immagini dettagliate di virus e di proteine. Non sono fatte con la luce, ma con elettroni. Il motivo per cui funzionano è sorprendente: gli elettroni, che finora abbiamo trattato come palline cariche, si comportano anche come onde, e la loro lunghezza d'onda può essere migliaia di volte più piccola di quella della luce visibile.

Nel capitolo 11 hai visto che la luce, che l'Ottocento aveva descritto come un'onda, arriva in quanti di energia e quantità di moto ben definite, i fotoni. In questo capitolo percorriamo la strada inversa, aperta nel 1924 da Louis de Broglie: anche la materia ha un aspetto ondulatorio. Da questa idea discendono la spiegazione delle orbite permesse dell'atomo di Bohr, il principio di indeterminazione di Heisenberg, che fissa un limite a ciò che si può sapere insieme di una particella, e una descrizione nuova della materia in termini di probabilità. L'ultimo paragrafo, un approfondimento, applica le stesse idee ai semiconduttori di computer, LED e pannelli solari.

13.1 L'ipotesi di de Broglie

13.1.1 Una simmetria fra luce e materia

All'inizio degli anni Venti del Novecento la fisica aveva accettato, non senza resistenze, il dualismo onda-corpuscolo della luce: l'interferenza e la diffrazione si spiegano con le onde, l'effetto fotoelettrico e l'effetto Compton con i fotoni. Per un fotone le due descrizioni sono collegate da due relazioni (capitolo 11): l'energia è $E = hf$ e la quantità di moto è $p = h/\lambda$. A sinistra c'è una grandezza «da particella», a destra una grandezza «da onda», e il ponte è la costante di Planck.

Louis de Broglie, nella tesi di dottorato discussa a Parigi nel 1924, propose che lo stesso ponte valga per ogni particella materiale. Se un elettrone, un protone o un atomo hanno quantità di moto p, a essi è associata un'onda di lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

detta **lunghezza d'onda di de Broglie**. Le onde associate alle particelle materiali si chiamano **onde di materia**. L'ipotesi era audace: nessun esperimento aveva mai mostrato elettroni che interferissero, e lo stesso de Broglie non sapeva dire che cosa oscillasse. La sua forza stava in una simmetria, fra luce e materia, e in una conseguenza che vedremo fra poco: l'ipotesi spiega le orbite «permesse» dell'atomo di Bohr.

13.1.2 Quanto è lunga l'onda di un elettrone

Per una particella non relativistica di massa m e velocità v la quantità di moto è $p = mv$, e l'energia cinetica è $K = p^2/(2m)$; quindi $p = \sqrt{(2mK)}$. Se la particella ha carica e ed è stata accelerata da ferma attraverso una differenza di potenziale ΔV, la sua energia cinetica è $K = e\Delta V$, e

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{(2mK)}} = \frac{h}{\sqrt{(2me\Delta V)}}$$

Per un elettrone accelerato da 100 V, $K = 100$ eV $= 1{,}60 \times 10^{-17}$ J, $p = \sqrt{(2 \times 9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg} \times 1{,}60 \times 10^{-17}\ \text{J})} = 5{,}40 \times 10^{-24}$ kg·m/s e $\lambda = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s$/5{,}40 \times 10^{-24}$ kg·m/s $= 1{,}23 \times 10^{-10}$ m $= 0{,}123$ nm. È la scala delle distanze fra gli atomi in un solido, che vanno da circa 0,1 a 0,5 nm. Con le costanti della Tabella A.1, per elettroni non relativistici vale la formula pratica $\lambda \approx 1{,}23\ \text{nm}/\sqrt{\Delta V}$, con ΔV in volt.

La Tabella 13.1 confronta le lunghezze d'onda di oggetti diversi. Per una palla da tennis la lunghezza d'onda è di circa 10^{-34} m: un numero senza alcun significato pratico, miliardi di miliardi di volte più piccolo di un protone. Nessuna fenditura, nessun reticolo, nessuna struttura della materia è abbastanza piccola da rivelarla. Gli effetti ondulatori diventano importanti solo quando la lunghezza d'onda è confrontabile con le dimensioni delle aperture e degli ostacoli, e questo accade per le particelle leggere e lente: elettroni, neutroni, atomi, al più molecole. È per questo che il mondo di tutti i giorni sembra fatto di corpi con traiettorie ben definite.

Tabella 13.1 Lunghezze d'onda di de Broglie di alcuni oggetti, confrontate con una dimensione tipica della loro scala.

Oggetto	Energia o velocità	λ	Da confrontare con
elettrone	100 eV	0,123 nm	distanza fra atomi in un cristallo, 0,2–0,3 nm
elettrone	10 keV	0,012 nm	dimensione di un atomo, 0,1 nm
neutrone «termico»	0,025 eV	0,18 nm	distanza fra atomi in un cristallo
molecola di fullerene C_{60} (720 u)	200 m/s	2,8 pm	diametro della molecola, circa 1 nm
granello di polvere (10^{-15} kg)	1 mm/s	7×10^{-16} m	diametro di un protone, circa 10^{-15} m
palla da tennis (58 g)	50 m/s	2×10^{-34} m	diametro della palla, 7 cm

ESEMPIO SVOLTO

La lunghezza d'onda di elettroni e protoni accelerati

Problema. In un tubo a vuoto alcuni elettroni, inizialmente fermi, sono accelerati da una differenza di potenziale di 600 V. a) Calcola la loro energia cinetica in elettronvolt e in joule. b) Calcola quantità di moto e lunghezza d'onda di de Broglie. c) Gli elettroni possono essere diffratti da un cristallo con piani atomici distanti 0,20 nm? E da un reticolo ottico con 600 righe/mm? d) Calcola la lunghezza d'onda di un protone con la stessa energia cinetica. e) Verifica che l'uso delle formule non relativistiche è giustificato.

a) L'energia. Un elettrone che attraversa 600 V guadagna $K = e\Delta V = 600$ eV. In joule: $K = 600 \times 1{,}60 \times 10^{-19}$ J $= 9{,}60 \times 10^{-17}$ J.

b) Quantità di moto e lunghezza d'onda. $p = \sqrt{(2m_e K)} = \sqrt{(2 \times 9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg} \times 9{,}60 \times 10^{-17}\ \text{J})} = 1{,}32 \times 10^{-23}$ kg·m/s; $\lambda = h/p = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s$/1{,}32 \times 10^{-23}$ kg·m/s $= 5{,}01 \times 10^{-11}$ m $= 0{,}050$ nm. Controllo con la formula pratica: 1,23 nm$/\sqrt{600} = 0{,}050$ nm.

c) Diffrazione. Un'onda è diffratta in modo apprezzabile da una struttura periodica di passo d se λ è minore di d ma non troppo più piccola. Con $\lambda = 0{,}050$ nm e $d = 0{,}20$ nm la legge di Bragg, $2d \operatorname{sen}\theta = \lambda$, dà al primo ordine $\operatorname{sen}\theta = 0{,}125$ e $\theta = 7{,}2°$: un angolo misurabile. Le righe di un reticolo ottico distano invece 1/600 mm = 1,7 µm, oltre trentamila volte λ: il primo massimo sarebbe a 3×10^{-5} rad dalla direzione del fascio, impossibile da separare. Gli elettroni «vedono» i reticoli fatti dagli atomi, non quelli tracciati dall'uomo.

d) Il protone. Con la stessa K, λ è inversamente proporzionale a $\sqrt{m}$: $\lambda_p = \lambda_e \sqrt{(m_e/m_p)} = 5{,}01 \times 10^{-11}$ m$/\sqrt{(1{,}67 \times 10^{-27}/9{,}11 \times 10^{-31})} = 5{,}01 \times 10^{-11}$ m$/42{,}8 = 1{,}17 \times 10^{-12}$ m. Un protone di 600 eV ha una lunghezza d'onda di poco più di un picometro, troppo piccola per una diffrazione facile da osservare con i cristalli.

e) Il controllo relativistico. L'energia a riposo dell'elettrone è 0,511 MeV (capitolo 9): $K/(m_e c^2) = 600$ eV$/511\,000$ eV $= 1{,}2 \times 10^{-3}$, quindi $\gamma - 1 \approx 0{,}001$ e la correzione relativistica, dell'ordine di un millesimo, è trascurabile.

13.1.3 Le orbite di Bohr come onde stazionarie

Nel modello di Bohr (capitolo 12) l'elettrone dell'atomo di idrogeno può percorrere soltanto le orbite circolari per cui il momento angolare mvr è un multiplo intero di $\hbar = h/(2\pi)$. Bohr aveva introdotto questa condizione come un postulato, giustificato soltanto dal fatto che riproduce lo spettro dell'idrogeno. L'ipotesi di de Broglie le dà un significato.

Pensa all'onda dell'elettrone che corre lungo l'orbita. Dopo un giro completo l'onda torna sui propri passi e si sovrappone a sé stessa. Se la circonferenza contiene un numero intero di lunghezze d'onda, cresta torna su cresta e l'onda si rinforza, formando un'onda stazionaria stabile, come quelle di una corda fissata ai due estremi (*Fisica 4*, capitolo 6). Se la circonferenza non contiene un numero intero di lunghezze d'onda, a ogni giro l'onda arriva sfasata rispetto al giro

precedente, e la sovrapposizione di molti giri la cancella (Figura 13.1). Le orbite permesse sono quelle su cui l'onda dell'elettrone è stazionaria.

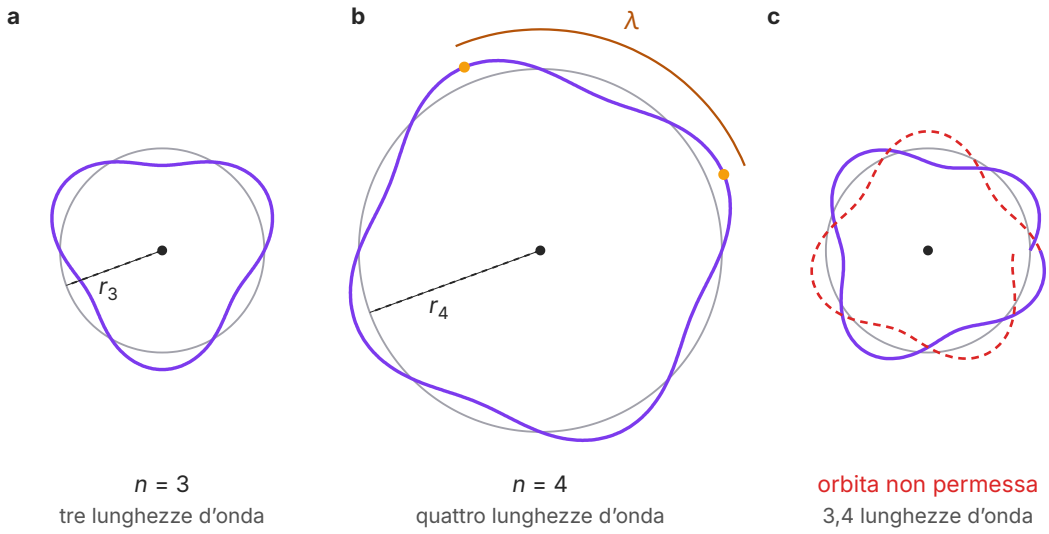

Figura 13.1 Le onde di de Broglie sulle orbite di Bohr dell'idrogeno, disegnate attorno alle orbite (circonferenze grigie) con raggi in scala, $r_n \propto n^2$; l'ampiezza dell'onda è arbitraria. (a) Sull'orbita $n = 3$ stanno esattamente tre lunghezze d'onda. (b) Sull'orbita $n = 4$ ne stanno quattro: la distanza fra due creste consecutive, misurata lungo l'orbita, è λ. (c) Se sulla circonferenza ci fossero 3,4 lunghezze d'onda, dopo un giro l'onda (tratteggio rosso) non si sovrapporrebbe a quella del giro precedente (viola) e la sovrapposizione di molti giri la cancellerebbe: l'orbita non è permessa.

ESEMPIO SVOLTO

Dalla lunghezza d'onda di de Broglie alla condizione di Bohr, passo per passo

Problema. Mostra che la condizione «sull'orbita sta un numero intero di lunghezze d'onda di de Broglie» coincide con la condizione di quantizzazione di Bohr, e verificala sull'orbita fondamentale dell'idrogeno ($r_1 = 5{,}29 \times 10^{-11}$ m, $v_1 = 2{,}19 \times 10^{6}$ m/s).

Passo 1: la condizione di onda stazionaria. La lunghezza dell'orbita circolare di raggio r_n è $2\pi r_n$; perché l'onda si richiuda in fase su sé stessa deve contenere un numero intero n di lunghezze d'onda:

$$2\pi r_n = n\lambda \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Passo 2: la lunghezza d'onda dell'elettrone. Per l'ipotesi di de Broglie, $\lambda = h/p = h/(m_e v_n)$, dove v_n è la velocità sull'orbita (non relativistica: v_1 è meno dell'1% di c).

Passo 3: la sostituzione. $2\pi r_n = nh/(m_e v_n)$. Moltiplicando i due membri per $m_e v_n/(2\pi)$:

$$m_e v_n r_n = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

Passo 4: la lettura. Il primo membro è il modulo del momento angolare dell'elettrone su un'orbita circolare. La condizione di onda stazionaria è **la stessa** condizione di quantizzazione postulata da Bohr: il numero intero n che numera le orbite è il numero di lunghezze d'onda che ciascuna contiene.

Passo 5: la verifica numerica per $n = 1$. $\lambda_1 = h/(m_e v_1) = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s/($9{,}11 \times 10^{-31}$ kg × $2{,}19 \times 10^{6}$ m/s) = $3{,}32 \times 10^{-10}$ m, e $2\pi r_1 = 2\pi \times 5{,}29 \times 10^{-11}$ m = $3{,}32 \times 10^{-10}$ m. L'orbita fondamentale contiene esattamente una lunghezza d'onda.

Controllo. Su un'orbita di Bohr $r_n = n^2 r_1$ e $v_n = v_1/n$: la lunghezza d'onda cresce come n e la circonferenza come n^2, quindi il loro rapporto è proprio n. L'argomento resta un modello: l'elettrone non percorre davvero un'orbita (lo vedremo con il principio di indeterminazione), ma l'idea che i livelli permessi siano quelli in cui l'onda è stazionaria è giusta, e la ritroveremo nella particella in una scatola.

ERRORE FREQUENTE

«La lunghezza d'onda di de Broglie è la distanza di cui l'elettrone oscilla avanti e indietro mentre si muove.» **No.** Nulla indica che l'elettrone si muova a zig-zag: la lunghezza d'onda è una proprietà dell'onda associata al suo moto, che decide dove l'elettrone può essere rivelato (lo vedremo parlando della funzione d'onda), non la forma di una traiettoria.

«Per un elettrone veloce $\lambda = h/\sqrt{(2mK)}$.» **Solo se K è molto minore di mc^2.** La relazione $\lambda = h/p$ è sempre valida, ma sopra qualche decina di keV la quantità di moto va calcolata con la dinamica relativistica (capitolo 9): $pc = \sqrt{(K^2 + 2Kmc^2)}$.

13.2 Le prove sperimentali

13.2.1 Davisson e Germer: elettroni riflessi da un cristallo

Per vedere la diffrazione di un'onda serve un reticolo con un passo confrontabile con la sua lunghezza d'onda. Per elettroni di qualche decina di elettronvolt il reticolo esiste già in natura: è un cristallo, in cui gli atomi sono disposti in file regolari a distanze di qualche decimo di nanometro. È lo stesso principio della diffrazione dei raggi X nei cristalli, descritta dalla legge di Bragg (capitolo 6).

Nel 1927 Clinton Davisson e Lester Germer, ai laboratori Bell di New York, studiavano come un fascio di elettroni viene diffuso dalla superficie di un cristallo di nichel. Il fascio colpiva il cristallo perpendicolarmente alla superficie, e un rivelatore mobile misurava quanti elettroni tornavano indietro in ciascuna direzione. Invece di una distribuzione regolare trovarono massimi molto netti: con elettroni da 54 eV, il numero di elettroni diffusi era massimo a un angolo di 50° dalla normale alla superficie.

Le file di atomi sulla superficie del nichel distano $d = 0{,}215$ nm, e si comportano come un reticolo di diffrazione usato in riflessione: le onde diffuse da file vicine si rinforzano quando la differenza di cammino, $d \operatorname{sen} \varphi$, è un multiplo intero della lunghezza d'onda, $d \operatorname{sen} \varphi = m\lambda$ (è la condizione del reticolo di *Fisica 4*, capitolo 8). Con $\varphi = 50°$ e $m = 1$ si ottiene $\lambda = 0{,}215$ nm $\times$ sen $50° = 0{,}165$ nm. La lunghezza d'onda di de Broglie di elettroni da 54 eV è $1{,}23 \text{ nm}/\sqrt{54} = 0{,}167$ nm. Le due lunghezze d'onda, una misurata con la geometria del cristallo, l'altra calcolata con l'ipotesi di de Broglie, coincidono entro l'1%.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere i dati: la diffrazione da un cristallo a energie diverse

Problema. Un esperimento nello stile di quello di Davisson e Germer ripete la misura a cinque energie diverse; la Tabella 13.2 riporta l'angolo φ del massimo del primo ordine. a) Calcola la lunghezza d'onda «geometrica» $\lambda_{geo} = d \operatorname{sen} \varphi$, con $d = 0{,}215$ nm. b) Calcola la lunghezza d'onda di de Broglie λ_{dB} e confrontala. c) Verifica che λ è inversamente proporzionale a $\sqrt{K}$. d) Spiega perché sotto una certa energia il massimo del primo ordine non compare.

Tabella 13.2 Angolo del massimo del primo ordine per elettroni diffusi da un cristallo di nichel a diverse energie cinetiche (dati tipici; incertezza sugli angoli ±1°) ed elaborazione.

K (eV)	φ	λ_{geo} (nm)	λ_{dB} (nm)	$\lambda_{geo}\sqrt{K}$ (nm·eV$^{1/2}$)
40	65°	0,195	0,194	1,23
54	50°	0,165	0,167	1,21
70	44°	0,149	0,147	1,25
100	35°	0,123	0,123	1,23
150	28°	0,101	0,100	1,24

a) e b) Le due lunghezze d'onda. Per esempio a 100 eV: $\lambda_{geo} = 0{,}215$ nm × sen 35° = 0,123 nm e $\lambda_{dB} = 1{,}23\ \text{nm}/\sqrt{100} = 0{,}123$ nm. La terza e la quarta colonna della tabella coincidono in ogni riga entro il 2%. L'incertezza di ±1° sull'angolo dà su λ_{geo} un'incertezza da circa ±0,8% a 40 eV (dove il seno varia poco) a circa ±3% a 150 eV, quindi ogni coppia di valori è compatibile.

c) La legge di scala. Se $\lambda = h/\sqrt{(2mK)}$, il prodotto $\lambda\sqrt{K}$ deve essere costante e uguale a $h/\sqrt{(2me)} = 1{,}23$ nm·eV$^{1/2}$. L'ultima colonna lo conferma: i valori oscillano fra 1,21 e 1,25 senza alcuna tendenza a crescere o a diminuire con l'energia. In un grafico di λ_{geo} in funzione di $1/\sqrt{K}$ i punti stanno su una retta per l'origine con pendenza 1,23 nm·eV$^{1/2}$.

d) L'energia minima. Il massimo compare solo se $\operatorname{sen} \varphi = \lambda/d \le 1$, cioè se $\lambda \le d = 0{,}215$ nm. Questo richiede $K \ge (1{,}23\ \text{nm·eV}^{1/2}/0{,}215\ \text{nm})^2 = 33$ eV. Sotto i 33 eV l'onda è troppo lunga rispetto al passo del cristallo e il primo ordine «non sta» nel semispazio davanti alla superficie, come la luce rossa in un reticolo troppo fitto.

Controllo. Se gli elettroni fossero palline, l'angolo del massimo non dipenderebbe dall'energia in modo così preciso: la regolarità dell'ultima colonna è la firma di un'onda con $\lambda = h/p$.

13.2.2 G. P. Thomson: elettroni attraverso una lamina sottile

Nello stesso anno, ad Aberdeen, George Paget Thomson fece attraversare a un fascio di elettroni molto più veloci, accelerati da migliaia di volt, sottilissime lamine metalliche. Su una lastra fotografica posta dietro la lamina comparve una serie di anelli concentrici, del tutto simili a

quelli che si ottenevano facendo attraversare la stessa lamina da raggi X. La lamina è fatta di moltissimi microcristalli orientati a caso: per ogni famiglia di piani atomici qualche microcristallo soddisfa la condizione di Bragg, e gli elettroni diffusi formano un cono attorno al fascio, che sullo schermo appare come un anello. Che gli anelli siano prodotti proprio dagli elettroni, e non da raggi X generati dal loro urto con la lamina, lo mostra un magnete: avvicinandolo, gli anelli si spostano, cosa che con i raggi X non accade.

Trent'anni prima, nel 1897, suo padre Joseph John Thomson aveva mostrato che i raggi catodici sono fatti di particelle, gli elettroni (*Fisica 4*, capitolo 15). Il figlio mostrò che quelle particelle si comportano come onde. Avevano ragione entrambi.

Oggi un esperimento simile si fa a scuola con un tubo a diffrazione elettronica (Figura 13.2): gli elettroni accelerati da qualche kilovolt attraversano un sottile strato di grafite e colpiscono lo schermo fluorescente dell'ampolla, dove disegnano due anelli luminosi ben visibili. Se il fascio è diffuso da piani a distanza d con angolo di Bragg θ, la sua direzione devia di 2θ; per angoli piccoli $2d \operatorname{sen} \theta \approx 2d\theta = \lambda$ e, a distanza L dal bersaglio, l'anello ha raggio $r \approx L \cdot 2\theta$, quindi

$$\lambda \approx \frac{dr}{L}$$

Aumentando la tensione la lunghezza d'onda diminuisce e gli anelli si stringono: è la misura proposta nell'attività di laboratorio di questo paragrafo.

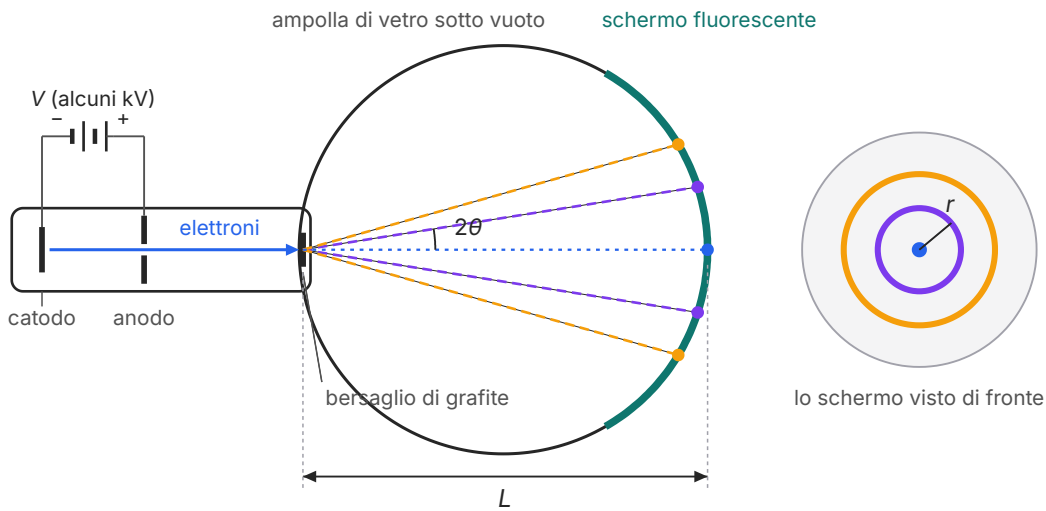

Figura 13.2 Schema di un tubo a diffrazione elettronica (non in scala; il fascio diffuso è disegnato più aperto del reale). Gli elettroni emessi dal catodo caldo sono accelerati verso l'anodo da una tensione V di alcuni kilovolt e attraversano un sottile bersaglio di grafite. I fasci diffusi dai piani atomici a distanze diverse formano coni di semiapertura 2θ attorno alla direzione del fascio, che sullo schermo fluorescente, a distanza L, disegnano anelli di raggio r: a destra, lo schermo visto di fronte con l'anello interno, l'anello esterno e la macchia centrale degli elettroni non deviati.

13.2.3 Un elettrone alla volta

L'esperimento che mostra nel modo più diretto la natura ondulatoria degli elettroni è la doppia fenditura di Young, la stessa che hai studiato con la luce. Con gli elettroni è molto difficile da realizzare, perché la lunghezza d'onda è di pochi picometri e le fenditure devono essere minuscole; si usano biprismi elettrostatici, cioè fili sottilissimi carichi che deviano gli elettroni da una parte e dall'altra come le due fenditure. Il risultato, ottenuto da diversi gruppi di ricerca, è una figura di frange chiare e scure con l'interfrangia prevista dalla formula di Young con $\lambda = h/p$.

La cosa davvero sorprendente si vede quando l'intensità del fascio è così bassa che dentro l'apparato c'è, in media, un solo elettrone per volta. Ogni elettrone lascia sullo schermo un singolo punto luminoso, in una posizione che non si può prevedere: arriva intero, come una particella, mai sparso su tutto lo schermo. All'inizio i punti sembrano distribuiti a caso; ma quando sono migliaia, disegnano le frange di interferenza (Figura 13.3). Fra i primi a realizzare l'esperimento con un elettrone alla volta, negli anni Settanta, fu un gruppo di fisici di Bologna. Nessun elettrone arriva dove l'interferenza è distruttiva. Ogni singolo elettrone, quindi, «interferisce con sé stesso»: la sua onda passa da entrambe le fenditure, ma la rivelazione avviene in un punto solo. Se si chiude una fenditura, o si sistema un rivelatore che dica da quale fenditura passa ogni elettrone, le frange scompaiono. È lo stesso comportamento dei fotoni uno alla volta (capitolo 11): il dualismo onda-corpuscolo vale anche per la materia.

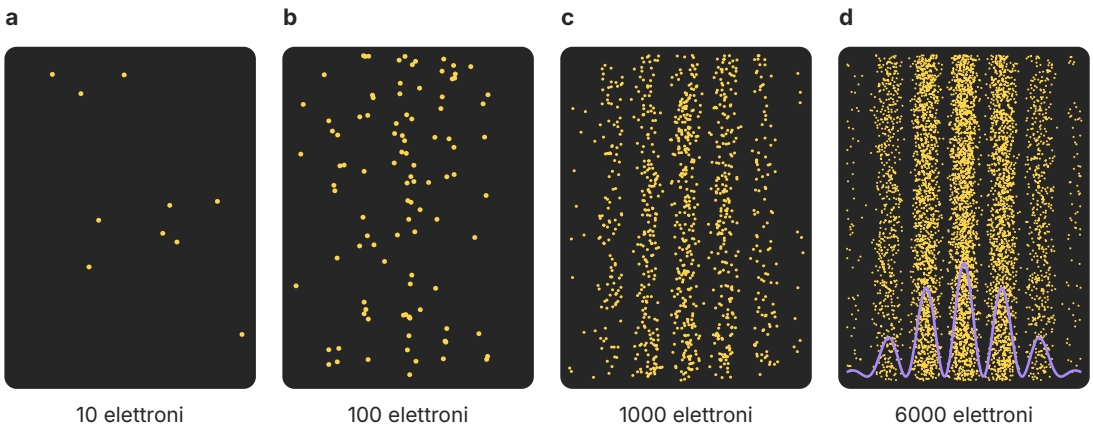

Figura 13.3 Simulazione dell'accumulo della figura di interferenza di una doppia fenditura con elettroni inviati uno alla volta. Ogni punto è l'arrivo di un elettrone, estratto a caso con probabilità proporzionale all'intensità dell'onda (frange in $\cos^2$ modulate dalla figura di diffrazione di ciascuna fenditura, la curva viola nel riquadro d). (a) Con 10 elettroni i punti sembrano sparsi a caso. (b) Con 100 si intravede una struttura. (c, d) Con 1000 e 6000 elettroni le frange sono evidenti.

13.2.4 Neutroni, atomi e molecole

La relazione $\lambda = h/p$ vale per ogni particella. I neutroni prodotti in un reattore nucleare e rallentati fino a energie di qualche centesimo di elettronvolt, i neutroni «termici», hanno lunghezze d'onda di circa 0,1–0,2 nm e sono diffratti dai cristalli come i raggi X: la diffrazione di neutroni è oggi una tecnica di laboratorio per studiare la struttura dei materiali. Figure di interferenza sono state osservate anche con fasci di atomi e con molecole intere, come il fullerene C_{60}, una gabbia di 60 atomi di carbonio. Più l'oggetto è grande, più la sua lunghezza d'onda è piccola e più è difficile isolarlo dall'ambiente, che distrugge le frange; un limite di principio, però, non è mai stato trovato.

COLLEGAMENTI

Il microscopio elettronico

Il potere risolutivo di un microscopio è limitato dalla diffrazione: per il criterio di Rayleigh (*Fisica 4*, capitolo 8) non si distinguono dettagli molto più piccoli della lunghezza d'onda usata, circa 200 nm con la luce visibile. Il **microscopio elettronico** sostituisce la luce con un fascio di elettroni, la cui lunghezza d'onda si sceglie con la tensione di accelerazione, e le lenti di vetro con lenti magnetiche, bobine il cui campo focalizza il fascio sfruttando la forza di Lorentz. Il primo fu costruito da Ernst Ruska e Max Knoll in Germania, all'inizio degli anni Trenta.

In un microscopio a trasmissione gli elettroni sono accelerati da 100–300 kV. A 100 kV l'energia cinetica è un quinto dell'energia a riposo dell'elettrone e serve la dinamica relativistica: $pc = \sqrt{(K^2 + 2Km_ec^2)} = \sqrt{(0{,}100^2 + 2 \times 0{,}100 \times 0{,}511)}$ MeV = 0,335 MeV, e $\lambda = hc/(pc) = 1240$ eV·nm/335 000 eV = 0,0037 nm, circa centocinquantamila volte meno della lunghezza d'onda della luce verde. In pratica la risoluzione è limitata dai difetti delle lenti magnetiche, ma gli strumenti migliori distinguono dettagli più piccoli di un decimo di nanometro, cioè singole colonne di atomi. Ha mostrato la struttura dei virus e delle proteine, e permette di controllare la fabbricazione dei circuiti integrati.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: la diffrazione degli elettroni nella grafite

Materiali. Un tubo a diffrazione elettronica con bersaglio di grafite policristallina (Figura 13.2), con distanza fra bersaglio e schermo $L = (13{,}5 \pm 0{,}2)$ cm dichiarata dal costruttore; l'alimentatore per il filamento e quello ad alta tensione (fino a 5 kV) forniti con il tubo; un calibro o un righello flessibile per misurare il diametro degli anelli sul vetro. Nella grafite gli atomi formano strati di esagoni; le due famiglie di piani che danno gli anelli più luminosi hanno distanze $d_1 = 0{,}213$ nm (anello interno) e $d_2 = 0{,}123$ nm (anello esterno).

Procedimento. 1) In aula oscurata l'insegnante accende il filamento e, dopo un minuto, porta la tensione di accelerazione a 2,5 kV. 2) Misura il diametro D di ciascun anello a metà del suo spessore (incertezza circa ±1 mm). 3) Ripeti a passi di 0,5 kV fino a 5,0 kV. 4) Calcola $r = D/2$ e riporta r in funzione di $1/\sqrt{V}$ per i due anelli (Tabella 13.3 e Figura 13.4).

Tabella 13.3 Diametri dei due anelli di diffrazione al variare della tensione di accelerazione (dati tipici; incertezza sui diametri ±1 mm).

V (kV)	$1/\sqrt{V}$ (10^{-2} $V^{-1/2}$)	D_1 (mm)	D_2 (mm)
2,5	2,00	31	55
3,0	1,83	29	50
3,5	1,69	26	46
4,0	1,58	24	43
4,5	1,49	23	40
5,0	1,41	22	38

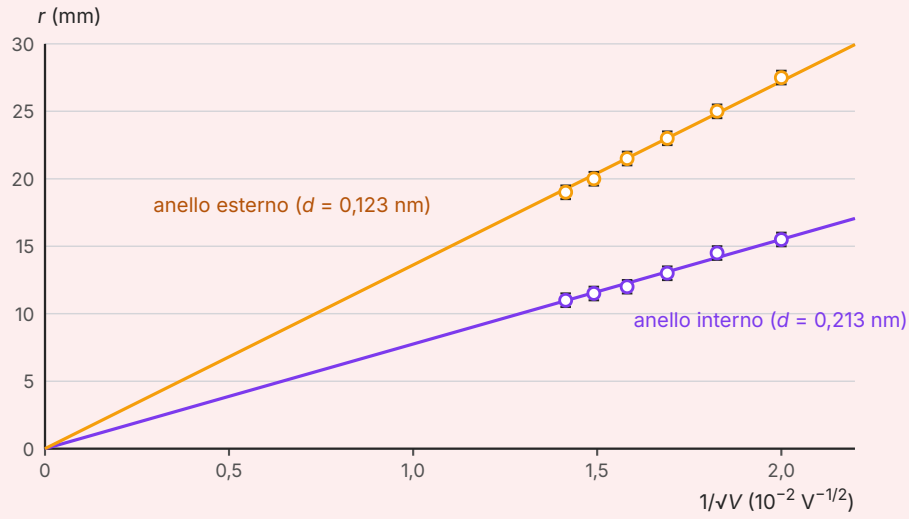

Figura 13.4 Raggio degli anelli di diffrazione in funzione di $1/\sqrt{V}$ (dati della Tabella 13.3, barre di ±0,5 mm sul raggio) e rette per l'origine con le pendenze dei minimi quadrati, 775 mm·V$^{1/2}$ per l'anello interno e 1361 mm·V$^{1/2}$ per l'anello esterno.

Che cosa concludere. Per entrambi gli anelli i punti stanno, entro le incertezze, su una retta per l'origine: il raggio è inversamente proporzionale a $\sqrt{V}$, come la lunghezza d'onda di de Broglie, $\lambda = h/\sqrt{(2m_e eV)}$. Il rapporto fra le pendenze, 1361/775 = 1,76, è uguale entro l'1,5% al rapporto fra le distanze dei piani, 0,213/0,123 = 1,73: gli anelli più larghi vengono dai piani più vicini, come vuole la relazione $\lambda = dr/L$. A 4,0 kV, per esempio, dall'anello interno si ottiene λ = 0,213 nm × 12,0 mm/135 mm = 0,0189 nm.

Confronto teoria–esperimento. Combinando $\lambda = dr/L$ con $\lambda = h/\sqrt{(2m_e eV)}$ si ottiene $r = [Lh/(d\sqrt{(2m_e e)})] \cdot 1/\sqrt{V}$: dalla pendenza k si può ricavare la costante di Planck, $h = kd\sqrt{(2m_e e)}/L$. Con l'anello interno, h = 0,775 m·V$^{1/2}$ × 0,213 × 10^{-9} m × $\sqrt{(2 \times 9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg} \times 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})}$/0,135 m = 6,60 × 10^{-34} J·s; con l'anello esterno 6,70 × 10^{-34} J·s. L'incertezza relativa di ciascun valore è circa il 4%: il 2–3% della pendenza (diametri noti a ±1 mm su 22–55 mm) più l'1,5% della distanza L. La media, h = (6,65 ± 0,25) × 10^{-34} J·s, è compatibile con il valore della Tabella A.1, 6,63 × 10^{-34} J·s. La lunghezza d'onda di de Broglie a 4,0 kV, 0,0194 nm, è compatibile con quella ricavata dagli anelli, 0,0189 nm, che ha un'incertezza di circa il 5%.

Sicurezza. Il tubo funziona con tensioni di alcuni kilovolt: lo collega, lo accende e regola le tensioni solo l'insegnante, con l'alimentatore dedicato, senza mai superare la tensione massima indicata dal costruttore. L'ampolla è di vetro sotto vuoto: non urtarla.

Per la relazione. Riporta la tabella con le incertezze, il grafico con le due rette e le loro pendenze, il calcolo di h da ciascun anello e il confronto. Discuti le approssimazioni: per angoli piccoli si è posto sen $\theta \approx \theta$ e il raggio $r \approx 2L\theta$, ma lo schermo è curvo; a 5 kV la correzione relati-

vistica sulla quantità di moto è circa lo 0,2%. Spiega perché un magnete avvicinato all'ampolla sposta gli anelli, e che cosa dimostra.

13.3 Il principio di indeterminazione

13.3.1 Che cosa fa una fenditura a un elettrone

Se un elettrone è anche un'onda, che cosa vuol dire chiedere dove si trova e quanto velocemente si muove? Un'onda perfettamente sinusoidale, con una sola lunghezza d'onda e quindi una quantità di moto ben definita, si estende all'infinito: non è «in un punto». Per localizzarla bisogna sommare onde con lunghezze d'onda diverse, e quindi rinunciare a una quantità di moto precisa. La fenditura singola rende questa idea quantitativa (Figura 13.5).

Un fascio di elettroni si muove lungo l'asse x con quantità di moto p; la componente trasversale, lungo y, è nulla. Il fascio attraversa una fenditura di larghezza a. Nell'istante in cui un elettrone passa, sappiamo dove si trova lungo y con un'indeterminazione pari alla larghezza della fenditura: $\Delta y = a$. Ma l'elettrone è un'onda, e la fenditura la diffrange: sullo schermo compare la figura di diffrazione di una fenditura singola, con il primo minimo all'angolo dato da $\operatorname{sen}\theta = \lambda/a$ (*Fisica 4*, capitolo 8). Gran parte degli elettroni arriva nel massimo centrale, cioè con direzioni comprese fra $-\theta$ e $+\theta$: dopo la fenditura ciascun elettrone ha acquistato una componente trasversale della quantità di moto che può valere fino a circa $p \operatorname{sen}\theta$. L'indeterminazione su p_y è dunque dell'ordine di

$$\Delta p_y \approx p \operatorname{sen}\theta = p\frac{\lambda}{a} = \frac{h}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{a} = \frac{h}{a}$$

e quindi $\Delta y\,\Delta p_y \approx h$. Il risultato non dipende né dalla larghezza della fenditura né dall'energia degli elettroni. Se stringiamo la fenditura per sapere meglio dove passa l'elettrone, la figura di diffrazione si allarga e sappiamo peggio in che direzione va; se la allarghiamo, la direzione è più precisa ma la posizione meno. Il prodotto delle due indeterminazioni resta dell'ordine della costante di Planck.

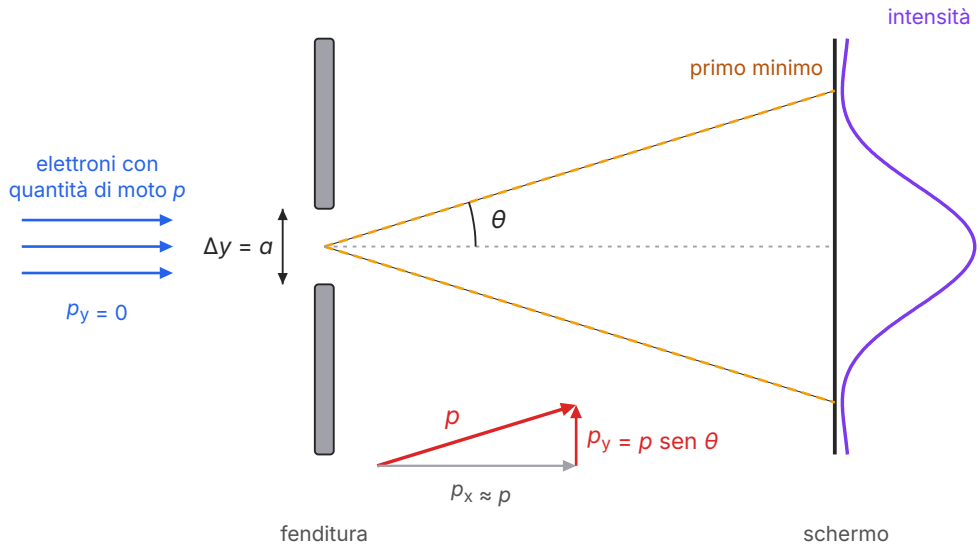

Figura 13.5 La diffrazione da una fenditura come misura della posizione. Gli elettroni arrivano con quantità di moto p diretta lungo l'asse x e componente trasversale $p_y = 0$. Passando attraverso la fenditura di larghezza a la loro posizione trasversale è nota con indeterminazione $\Delta y = a$; la figura di diffrazione sullo schermo (in viola, calcolata) ha il primo minimo all'angolo θ con $\text{sen}\,\theta = \lambda/a$. Un elettrone che arriva al bordo del massimo centrale ha una componente trasversale $p_y = p\,\text{sen}\,\theta$ (triangolo rosso). Angoli esagerati per chiarezza.

13.3.2 L'enunciato di Heisenberg

Nel 1927 Werner Heisenberg mostrò che il risultato della fenditura è un caso particolare di una legge generale della meccanica quantistica, il **principio di indeterminazione**: la posizione di una particella lungo una direzione e la componente della sua quantità di moto lungo la stessa direzione non possono essere entrambe determinate con precisione arbitraria. In forma quantitativa,

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \qquad \text{con } \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}055 \times 10^{-34}\ \text{J·s}$$

Qui il simbolo Δ non indica una variazione, come nella legge di Faraday-Neumann, ma un'**indeterminazione**: la dispersione dei valori che si otterrebbero misurando la grandezza su molte particelle preparate tutte allo stesso modo (in termini statistici, la deviazione standard). Il limite riguarda coppie di grandezze nella stessa direzione: nulla vieta di conoscere bene x e p_y. La stima con la fenditura dà il prodotto $\approx h$, più grande del minimo $\hbar/2$ di un fattore 4π: è normale, perché la fenditura non è il modo più «economico» di localizzare un'onda, e le stime di questo tipo valgono solo come ordini di grandezza.

Il principio **non** esprime un difetto degli strumenti di misura, che con il progresso tecnico si potrebbe superare. Heisenberg lo illustrò con un esperimento ideale, il microscopio a raggi gamma: per localizzare meglio un elettrone serve luce di lunghezza d'onda più piccola, i cui fotoni gli trasferiscono una quantità di moto più grande e imprevedibile (effetto Compton, capitolo 11). L'argomento può però essere frainteso, come se l'elettrone avesse una posizione e una velocità precise che la misura disturba. L'interpretazione accettata oggi è più radicale: un elettrone **non possiede** contemporaneamente una posizione e una quantità di moto definite. La sua onda, che contiene tutto ciò che si può sapere, non è concentrata in un punto e non ha una sola lunghezza d'onda.

13.3.3 Energia e tempo

Una relazione analoga lega l'energia di un sistema e l'intervallo di tempo in cui essa è definita:

$$\Delta E \cdot \Delta t \gtrsim \frac{\hbar}{2}$$

Nella **relazione di indeterminazione energia-tempo** Δt non è un'indeterminazione su una misura, ma il tempo caratteristico in cui il sistema cambia, per esempio la vita media di uno stato eccitato di un atomo, che dopo un tempo dell'ordine di 10^{-8} s emette un fotone e torna allo stato fondamentale. Uno stato che dura poco non ha un'energia perfettamente definita: con $\Delta t = 1{,}0 \times 10^{-8}$ s, $\Delta E \geq \hbar/(2\Delta t) = 5{,}3 \times 10^{-27}$ J $= 3{,}3 \times 10^{-8}$ eV. Per questo le righe spettrali del capitolo 12 hanno una **larghezza naturale**, un intervallo di frequenze $\Delta f = \Delta E/h \approx 8$ MHz: piccolissimo rispetto ai 5×10^{14} Hz della luce visibile, ma misurabile.

13.3.4 Le conseguenze

Per gli oggetti macroscopici l'indeterminazione è irrilevante. Una palla da tennis di 58 g localizzata entro 1 cm ha un'indeterminazione sulla velocità $\Delta v \geq \hbar/(2m\Delta x) = 1{,}055 \times 10^{-34}$ J·s/(2 × 0,058 kg × 0,010 m) $= 9 \times 10^{-32}$ m/s: in un'età dell'universo non si sposterebbe di una frazione apprezzabile di un atomo. Per un elettrone in un atomo la situazione è opposta. Se lo localizziamo entro $\Delta x = 0{,}1$ nm, le dimensioni di un atomo, $\Delta p \geq \hbar/(2\Delta x) = 5{,}3 \times 10^{-25}$ kg·m/s e la sua energia cinetica è almeno dell'ordine di $(\Delta p)^2/(2m_e) = 1{,}5 \times 10^{-19}$ J ≈ 1 eV: proprio l'ordine di grandezza delle energie atomiche. L'indeterminazione non è una piccola correzione, ma ciò che decide le dimensioni degli atomi.

Non esistono traiettorie. Una traiettoria richiede di conoscere in ogni istante posizione e velocità. Se Δx e Δp non possono essere entrambe piccole, la traiettoria di un elettrone in un atomo non ha senso: le orbite di Bohr, circonferenze nitide percorse con velocità definita, sono un'immagine da abbandonare, anche se i loro raggi e le loro energie restano utili come ordini di grandezza.

Perché l'elettrone non cade sul nucleo. Per la fisica classica un elettrone accelerato attorno al nucleo irraggia (capitolo 5) e vi precipita in una frazione di nanosecondo. Il principio di inde-

terminazione impedisce il collasso: confinare l'elettrone in una regione più piccola costa un'energia cinetica più grande, e lo stato fondamentale è il compromesso fra questa e l'energia potenziale elettrica (lo stimerai in uno dei problemi di fine capitolo). Al limite, un elettrone confinato in un nucleo di diametro $\Delta x = 1{,}0 \times 10^{-14}$ m avrebbe $\Delta p \geq 5{,}3 \times 10^{-21}$ kg·m/s e $pc \geq 1{,}6 \times 10^{-12}$ J ≈ 9,9 MeV, cioè un'energia cinetica di almeno 9 MeV (con la dinamica relativistica del capitolo 9). L'attrazione elettrica di un protone a quella distanza vale soltanto 0,14 MeV, e la forza nucleare, che tiene insieme protoni e neutroni (capitolo 14), sugli elettroni non agisce: nessun elettrone può stare nel nucleo.

L'energia minima non è zero. Una particella confinata non può essere ferma, perché avrebbe quantità di moto nulla e definita. Anche al livello di energia più basso conserva un'**energia di punto zero**, che non si può togliere nemmeno raffreddando il sistema fino allo zero assoluto. Per esempio l'elio, a pressione atmosferica, resta liquido anche vicino a 0 K: l'energia di punto zero dei suoi atomi leggeri supera i deboli legami che li terrebbero in un solido.

ERRORE FREQUENTE

«Il principio di indeterminazione dice che le misure in fisica quantistica sono imprecise.» **No.** Si può misurare la posizione di un elettrone con precisione grande quanto si vuole, e lo stesso vale per la sua quantità di moto. Il principio dice che non esiste uno stato in cui le due grandezze, nella stessa direzione, siano **entrambe** definite meglio di quanto consenta $\Delta x\, \Delta p \geq \hbar/2$. È una proprietà della natura, non degli strumenti.

«Nel principio compare h.» **No:** compare $\hbar = h/(2\pi)$, diviso per 2. Nelle stime di ordine di grandezza si scrive spesso $\Delta x\, \Delta p \approx \hbar$ o $\approx h$, ma per un calcolo del minimo si usa $\hbar/2$.

13.4 La funzione d'onda e la probabilità

13.4.1 Un'onda di probabilità

Che cosa oscilla, in un'onda di materia? La risposta che si impose nella seconda metà degli anni Venti non è un campo materiale, come il campo elettrico della luce, ma qualcosa di più astratto. Nel 1926 Erwin Schrödinger scrisse l'equazione che governa le onde di materia, l'analogo per gli elettroni delle equazioni di Maxwell per la luce. La grandezza che l'equazione descrive si indica con ψ (psi) e si chiama **funzione d'onda**: è la stessa parola usata lo scorso anno per lo spostamento $y(x, t)$ di una corda (*Fisica 4*, capitolo 5), ma con un significato nuovo, perché $\psi(x, t)$ non è lo spostamento di nulla.

Il significato lo diede Max Born, poco dopo, estendendo alla materia l'interpretazione probabilistica che hai visto per i fotoni (capitolo 11). Il quadrato del modulo della funzione d'onda, $|\psi|^2$, è la **densità di probabilità** della particella: la probabilità di trovarla, con una misura, in un piccolo intervallo di ampiezza Δx attorno al punto x è $|\psi(x)|^2 \Delta x$. Dove $|\psi|^2$ è grande la particella

si trova spesso, dove è nullo non si trova mai. La somma delle probabilità su tutto lo spazio deve dare 1: la particella da qualche parte c'è.

Rileggiamo la doppia fenditura con questa chiave. L'onda ψ passa da entrambe le fenditure e le due parti interferiscono: dove sono in fase $|\psi|^2$ è grande, dove sono in opposizione è nullo. Ciascun elettrone arriva in un punto solo, scelto a caso con probabilità $|\psi|^2$; molti elettroni, insieme, riproducono la figura. La teoria non può dire dove arriverà il prossimo elettrone, ma prevede con precisione la distribuzione di moltissimi: la descrizione quantistica è intrinsecamente statistica, come hai già incontrato con i fotoni e come ritroverai con il decadimento radioattivo (capitolo 14).

13.4.2 Dalle orbite agli orbitali

In un atomo la funzione d'onda dell'elettrone non descrive un'orbita, ma una regione di spazio attorno al nucleo in cui l'elettrone può essere trovato, con probabilità diverse in punti diversi. Si usa spesso l'immagine di una «nuvola» elettronica, più densa dove $|\psi|^2$ è grande. Ogni funzione d'onda permessa per l'elettrone di un atomo si chiama **orbitale**: il nome ricorda le orbite, ma l'oggetto è diverso. Nell'orbitale fondamentale dell'idrogeno la nuvola ha simmetria sferica, e la distanza dal nucleo a cui è più probabile trovare l'elettrone è proprio il raggio di Bohr $r_1 = 5{,}29 \times 10^{-11}$ m; le energie degli stati sono quelle di Bohr, $E_n = -13{,}6\ \text{eV}/n^2$. Il modello di Bohr indovina le energie, ma l'immagine giusta è quella degli orbitali.

APPROFONDIMENTO

Bohr, Einstein e il significato della meccanica quantistica

L'interpretazione probabilistica non piacque a tutti. Bohr e i fisici che lavoravano con lui a Copenaghen, fra cui Heisenberg, la difesero come definitiva: secondo quella che fu poi chiamata **interpretazione di Copenaghen**, la funzione d'onda contiene tutto ciò che si può sapere di un sistema, e chiedere dove fosse davvero l'elettrone prima della misura è una domanda senza significato fisico. Bohr aggiunse il **principio di complementarità**: i comportamenti ondulatorio e corpuscolare sono due aspetti che si escludono a vicenda in uno stesso esperimento (se sai da quale fenditura passa l'elettrone, le frange spariscono), ma sono entrambi necessari per descrivere la realtà.

Einstein, che con i quanti di luce aveva aperto la strada, non accettò mai che la teoria fosse completa. In sostanza sosteneva che una teoria fisica fondamentale non può limitarsi a dare probabilità, e che dietro le probabilità devono esserci elementi di realtà ancora sconosciuti. Ai congressi Solvay di Bruxelles del 1927 e del 1930 propose a Bohr una serie di esperimenti ideali costruiti per aggirare il principio di indeterminazione; Bohr, ogni volta, trovò il punto in cui l'argomento falliva, una volta anche usando contro Einstein la sua stessa relatività generale. Nel 1935, con Boris Podolsky e Nathan Rosen, Einstein formulò un argomento più sottile, basato su due particelle correlate a distanza, per mostrare che la descrizione quantistica è incompleta.

Il dibattito sembrò per decenni una questione filosofica. Divenne sperimentale quando si capì che la meccanica quantistica e ogni teoria «locale» con elementi di realtà nascosti, del tipo auspicato da Einstein, prevedono risultati diversi per certe misure su particelle correlate: gli esperimenti, condotti a partire dagli anni Settanta e premiati con il Nobel per la fisica nel 2022, hanno dato ragione alla meccanica quantistica.

Un collegamento con la filosofia. La meccanica newtoniana è deterministica: Laplace immaginò un'intelligenza che, note posizioni e velocità di tutte le particelle, calcolasse ogni evento futuro. La fisica dei quanti toglie a questa immagine il punto di partenza, perché posizione e velocità non sono definite insieme e l'esito di una singola misura è, per quanto ne sappiamo, casuale; resta deterministica soltanto l'evoluzione delle probabilità. Che cosa questo significhi per la causalità è una domanda che la filosofia della scienza discute ancora.

13.5 La particella in una scatola e l'atomo quantistico

13.5.1 Onde stazionarie in una scatola

Il modello più semplice per capire perché l'energia di una particella confinata è quantizzata è la **particella in una scatola**: una particella di massa m che si muove lungo un segmento di lunghezza L, chiuso da due pareti impenetrabili. Dentro la scatola non agiscono forze; fuori, la par-

ticella non può stare. La sua funzione d'onda deve quindi annullarsi sulle pareti, come lo spostamento di una corda fissata ai due estremi. Le onde possibili sono onde stazionarie con un nodo a ciascuna estremità, e le loro lunghezze d'onda sono le stesse della corda di *Fisica 4*, capitolo 6:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Per l'ipotesi di de Broglie la quantità di moto corrispondente è $p_n = h/\lambda_n = nh/(2L)$, e dentro la scatola l'energia è tutta cinetica, $E = p^2/(2m)$:

$$E_n = \frac{p_n{}^2}{2m} = n^2 \frac{h^2}{8mL^2}$$

L'energia può assumere solo i valori E_1, $4E_1$, $9E_1$, ...: è quantizzata, e la quantizzazione nasce soltanto dal confinamento, senza alcun postulato aggiunto. La Figura 13.6 mostra le prime tre funzioni d'onda e le corrispondenti densità di probabilità. Nello stato fondamentale la particella si trova più spesso al centro della scatola; nello stato $n = 2$ la probabilità di trovarla esattamente al centro è nulla, anche se la particella si trova con la stessa probabilità nelle due metà: un fatto che non ha alcun equivalente classico. Lo stato più basso ha energia $E_1 \neq 0$, l'energia di punto zero, come vuole il principio di indeterminazione: con $\Delta x \approx L$, la quantità di moto non può essere nulla.

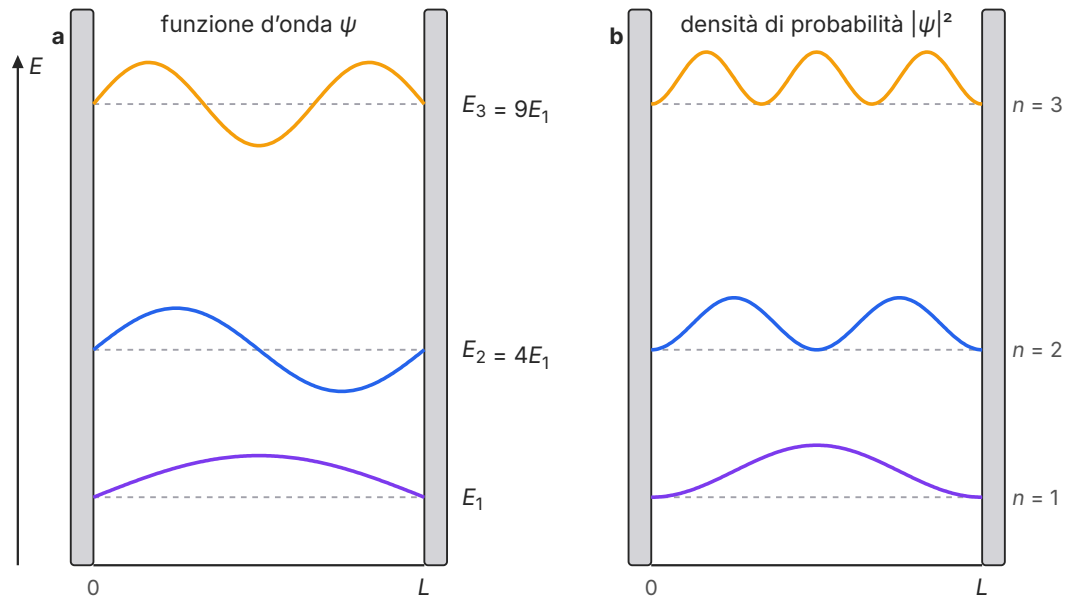

Figura 13.6 La particella in una scatola di lunghezza L: livelli di energia in scala ($E_2 = 4E_1$, $E_3 = 9E_1$, linee tratteggiate) e, disegnate attorno a ciascun livello, (a) le funzioni d'onda ψ_n, che sono onde stazionarie con n ventri e un nodo su ogni parete, e (b) le densità di probabilità $|\psi_n|^2$. Curve calcolate; l'ampiezza è arbitraria.

Per un elettrone in una scatola di 0,10 nm, le dimensioni di un atomo, $E_1 = (6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{J·s})^2/(8 \times 9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg} \times (1{,}0 \times 10^{-10}\ \text{m})^2) = 6{,}0 \times 10^{-18}\ \text{J} = 38\ \text{eV}$, e le differenze fra i livelli sono decine di elettronvolt: energie atomiche. Per una scatola di 1 nm, la lunghezza di certe molecole a catena, i salti sono di circa un elettronvolt, nel visibile: è l'origine del colore di molti coloranti (ne trovi un esempio fra i problemi di fine capitolo). Per una pallina di 1 g in una scatola di 1 cm, invece, $E_1 \approx 5 \times 10^{-61}\ \text{J}$: i livelli sono così fitti che l'energia sembra continua.

13.5.2 I numeri quantici

L'atomo di idrogeno è una «scatola» tridimensionale, in cui l'elettrone è trattenuto dall'attrazione elettrica del nucleo. L'equazione di Schrödinger dà gli stessi livelli di energia di Bohr, ma ogni livello contiene più stati, distinti da quattro numeri quantici (Tabella 13.4). Il numero quantico principale $n = 1, 2, 3, \ldots$ fissa l'energia e le dimensioni dell'orbitale. Il **numero quantico orbitale** $l = 0, 1, \ldots, n-1$ fissa il modulo del momento angolare e la forma dell'orbitale: $l = 0$ corrisponde agli orbitali sferici, chiamati *s* in chimica, $l = 1$ agli orbitali *p*, e così via. Il **numero quantico magnetico** $m_l = -l, \ldots, 0, \ldots, +l$ fissa l'orientazione del momento angolare rispetto a una direzione, per esempio quella di un campo magnetico esterno. Infine l'elettrone possiede un momento angolare intrinseco, lo **spin**, che non ha un equivalente classico esatto: la sua componente lungo una direzione può assumere due soli valori, descritti dal numero quantico di spin $m_s = +\tfrac{1}{2}$ o $-\tfrac{1}{2}$.

Tabella 13.4 I numeri quantici dell'elettrone nell'atomo di idrogeno e il numero di stati per i primi tre livelli.

Livello	l (valori)	m_l per ciascun l	Stati, contando $m_s = \pm\tfrac{1}{2}$
$n = 1$	0	0	2
$n = 2$	0, 1	0; −1, 0, +1	2 + 6 = 8
$n = 3$	0, 1, 2	0; −1, 0, +1; −2, …, +2	2 + 6 + 10 = 18
n qualunque	da 0 a $n-1$	$2l + 1$ valori	$2n^2$

13.5.3 Il principio di Pauli e la tavola periodica

Negli atomi con più elettroni vale una regola scoperta da Wolfgang Pauli nel 1925, il **principio di esclusione di Pauli**: due elettroni dello stesso atomo non possono avere tutti e quattro i numeri quantici uguali. In ogni orbitale, cioè per ogni terna n, l, m_l, possono stare al massimo due elettroni, con spin opposti. Senza questo principio tutti gli elettroni scenderebbero nello stato fondamentale e gli elementi si somiglierebbero; con il principio di Pauli riempiono uno dopo l'altro gli stati disponibili, dal più basso in su, e le proprietà chimiche dipendono dagli elettroni dell'ultimo livello occupato.

Da qui nasce la struttura della tavola periodica, che studi in chimica. L'elio, con due elettroni nel livello $n = 1$, completo, è un gas nobile; il litio ha il terzo elettrone da solo nel livello $n = 2$ e

cede facilmente, come gli altri metalli alcalini, l'unico elettrone esterno; il neon completa gli otto posti del livello $n = 2$ ed è di nuovo un gas nobile. Le lunghezze dei periodi, 2 e 8, sono il numero di stati dei primi due livelli; dopo l'argon l'ordine di riempimento si complica, perché in un atomo con molti elettroni l'energia dipende anche da l, ma il principio resta lo stesso.

APPROFONDIMENTO

L'effetto tunnel

Una pallina che rotola verso una collina più alta di quanto la sua energia le consenta di salire torna indietro. Un'onda di materia si comporta diversamente: se la barriera di energia potenziale è abbastanza sottile, la funzione d'onda si smorza al suo interno ma ne riemerge dall'altra parte con un'ampiezza piccola e non nulla. La particella ha quindi una probabilità di trovarsi oltre la barriera, come se l'avesse attraversata in una galleria: è l'**effetto tunnel**. La probabilità diminuisce in modo esponenziale con lo spessore della barriera e con la radice della massa: è significativa per elettroni e barriere di qualche decimo di nanometro, nulla per oggetti macroscopici.

L'effetto tunnel spiega il decadimento α dei nuclei pesanti, in cui la particella α «passa sotto» la barriera elettrica che la trattiene (capitolo 14), e permette ai nuclei di idrogeno di fondersi nelle stelle a temperature più basse di quelle richieste classicamente (capitolo 15). Il microscopio a effetto tunnel (STM) avvicina una punta metallica a una superficie fino a meno di un nanometro: la corrente di tunnel varia di circa un fattore dieci per ogni decimo di nanometro di distanza, e muovendo la punta si ottengono immagini dei singoli atomi. Anche le memorie flash scrivono i dati spingendo elettroni per effetto tunnel attraverso un sottile strato isolante.

13.6 Approfondimento · Dai livelli alle bande: i semiconduttori

Questo paragrafo è un approfondimento, che le Indicazioni nazionali propongono come tema facoltativo: i semiconduttori, «per comprendere le tecnologie più attuali anche in relazione a ricadute sul problema delle risorse energetiche».

13.6.1 Le bande di energia

In un atomo isolato gli elettroni occupano livelli di energia ben separati. Quando moltissimi atomi si avvicinano a formare un solido, le funzioni d'onda degli elettroni più esterni si sovrappongono, e per il principio di Pauli gli elettroni non possono più occupare tutti lo stesso livello: ogni livello atomico si divide in un numero enorme di livelli vicinissimi, tanti quanti sono gli atomi, che formano in pratica un intervallo continuo, una **banda di energia**. Fra una banda e l'altra possono rimanere intervalli di energia in cui non c'è alcuno stato permesso: è la **banda proibita**, la cui ampiezza in energia, indicata con E_g, si chiama anche *gap* (Figura 13.7).

Il comportamento elettrico di un solido dipende da come gli elettroni riempiono le bande. Chiamiamo **banda di valenza** l'ultima banda occupata dagli elettroni di legame e **banda di con-**

duzione la banda immediatamente superiore. Un campo elettrico può accelerare un elettrone solo se ci sono stati liberi di energia appena più alta. In un **conduttore**, come un metallo, l'ultima banda occupata è piena solo in parte, e gli elettroni conducono. In un **isolante** la banda di valenza è piena e la banda di conduzione è vuota, separata da un gap di parecchi elettronvolt, 5,5 eV nel diamante: a temperatura ambiente, dove l'energia termica tipica $k_B T$ vale 0,026 eV, praticamente nessun elettrone riesce a saltarlo. In un semiconduttore la struttura è la stessa, ma il gap è piccolo: 1,12 eV nel silicio, 0,67 eV nel germanio. A temperatura ambiente pochi elettroni passano nella banda di conduzione, e il loro numero cresce rapidamente con la temperatura: per questo la resistività di un semiconduttore diminuisce quando lo si scalda.

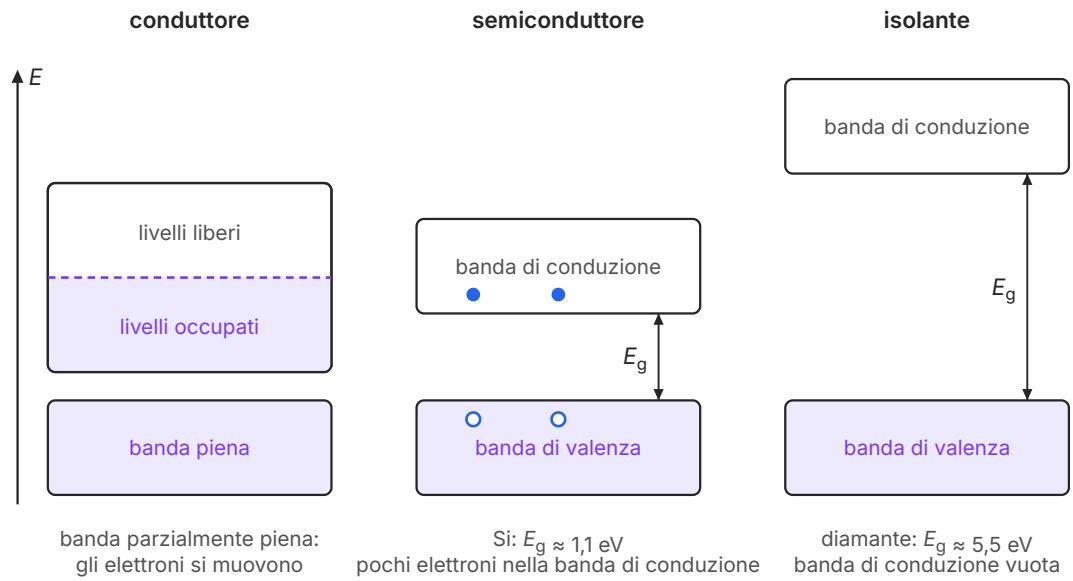

Figura 13.7 Le bande di energia nei solidi (schema qualitativo; l'altezza delle bande e dei gap non è in scala). In un conduttore l'ultima banda occupata è piena solo in parte. In un semiconduttore e in un isolante la banda di valenza è piena e quella di conduzione vuota, separate dalla banda proibita di ampiezza E_g: nel semiconduttore il gap è piccolo, e a temperatura ambiente alcuni elettroni (punti blu) passano nella banda di conduzione lasciando nella banda di valenza altrettante lacune (cerchi vuoti).

Quando un elettrone passa nella banda di conduzione, nella banda di valenza resta uno stato vuoto. Un elettrone vicino può spostarsi in quello stato, lasciandone uno vuoto al suo posto, e così via: lo stato vuoto si muove come se fosse una particella con carica positiva $+e$, che si chiama **lacuna**. In un semiconduttore conducono quindi due tipi di portatori, gli elettroni nella banda di conduzione e le lacune nella banda di valenza.

13.6.2 Il drogaggio

Un semiconduttore puro conduce poco; le sue proprietà si cambiano enormemente con il **drogaggio**, cioè aggiungendo al cristallo piccolissime quantità, spesso meno di un atomo su un milione, di un altro elemento. Il silicio ha quattro elettroni di valenza, e ciascun atomo forma quattro legami con i vicini. Se al posto di un atomo di silicio c'è un atomo di fosforo, che ha cinque elettroni di valenza, il quinto elettrone non serve per i legami ed è debolmente legato: basta l'energia termica per liberarlo nella banda di conduzione. Il fosforo è un atomo *donatore*, e il silicio così drogato, in cui i portatori di carica sono soprattutto elettroni, è un **semiconduttore di tipo n** (negativo). Se invece si aggiunge boro, che ha tre elettroni di valenza, a ogni atomo di boro manca un elettrone per completare i legami: si crea una lacuna, e il boro, che cattura un elettrone dal cristallo, diventa uno ione negativo fisso, un *accettore*. Il silicio drogato con boro, in cui i portatori sono soprattutto lacune, è un **semiconduttore di tipo p** (positivo). In entrambi i casi il cristallo resta neutro.

13.6.3 La giunzione p-n

Il dispositivo fondamentale dell'elettronica è la **giunzione p-n**, un cristallo drogato di tipo p da una parte e di tipo n dall'altra (Figura 13.8). Vicino alla superficie di separazione gli elettroni della zona n si diffondono nella zona p e si ricombinano con le lacune; restano scoperti gli ioni fissi, positivi nella zona n e negativi nella zona p. Si forma così una sottile *zona di svuotamento*, priva di portatori mobili, in cui c'è un campo elettrico diretto dalla zona n alla zona p, che si oppone a un'ulteriore diffusione.

Il campo interno rende la giunzione asimmetrica. Se si collega il polo positivo di un generatore alla zona p (polarizzazione diretta), la tensione applicata riduce la barriera e, oltre circa 0,6 V nel silicio, la corrente cresce rapidamente; se si inverte il collegamento, la barriera aumenta e la corrente è quasi nulla. È il diodo, di cui hai visto la curva caratteristica nel volume dello scorso anno (*Fisica 4*, capitolo 13): un componente che lascia passare la corrente in un solo verso. Combinando più giunzioni si costruisce il transistor, il mattone di ogni circuito integrato.

13.6.4 LED e celle solari

In un diodo polarizzato direttamente gli elettroni della zona n e le lacune della zona p si incontrano nella giunzione e si ricombinano: l'elettrone scende dalla banda di conduzione alla banda di valenza, e in certi semiconduttori l'energia liberata, circa E_g, è emessa come un fotone. È il LED (diodo a emissione di luce): il colore della luce è fissato dal gap, $hf \approx E_g$, ed è questo il principio della misura della costante di Planck con i LED del capitolo 11. Un LED rosso, con fotoni di circa 1,9 eV, usa un semiconduttore con un gap più piccolo di un LED blu, con fotoni di circa 2,7 eV.

Il processo inverso è quello della **cella fotovoltaica**, o cella solare, una giunzione p-n di grande area esposta alla luce. Un fotone di energia hf maggiore di E_g, assorbito vicino alla giunzione, promuove un elettrone nella banda di conduzione e crea una coppia elettrone-lacuna. Il campo interno separa la coppia, spingendo l'elettrone verso la zona n e la lacuna verso la zona p: la cella diventa un generatore, e se è collegata a un carico vi fa circolare una corrente, che esce dalla zona p (Figura 13.8). Come nell'effetto fotoelettrico, conta l'energia del singolo fotone: nel silicio, con E_g = 1,12 eV, sono utili i fotoni con λ < 1240 eV·nm/1,12 eV = 1110 nm, cioè il visibile e il vicino infrarosso.

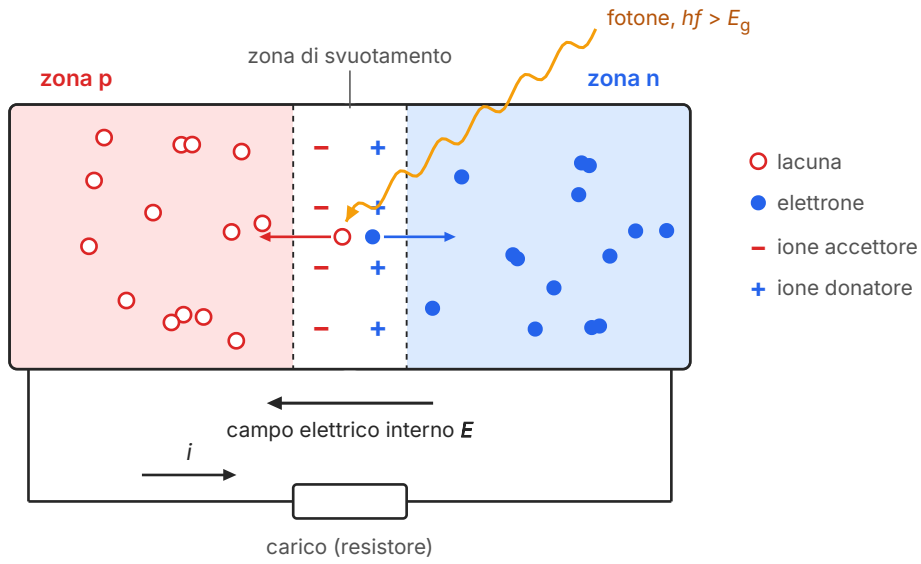

Figura 13.8 Schema di una giunzione p-n usata come cella fotovoltaica (non in scala). Nella zona p i portatori mobili sono lacune (cerchi rossi), nella zona n elettroni (punti blu). Nella zona di svuotamento restano gli ioni fissi, negativi dal lato p e positivi dal lato n, che producono un campo elettrico interno $\boldsymbol{E}$ diretto da n verso p. Un fotone con $hf > E_g$ crea una coppia elettrone-lacuna; il campo spinge l'elettrone verso n e la lacuna verso p, e nel circuito esterno la corrente i esce dalla zona p e attraversa il carico.

COLLEGAMENTI

Celle solari e risorse energetiche

I fotoni solari vanno da meno di 1 eV nell'infrarosso a più di 3 eV nel violetto, e una cella con un solo gap ne spreca una parte in due modi: i fotoni con energia inferiore al gap non vengono assorbiti, e in quelli più energetici l'eccesso $hf - E_g$ si disperde come calore (per un fotone violetto da 3,1 eV nel silicio, quasi due terzi dell'energia). Per questo il rendimento di una cella con una sola giunzione ha un limite teorico di circa un terzo (limite di Shockley-Queisser), e i pannelli al silicio in commercio convertono in elettricità circa il 20% della radiazione che ricevono.

Con l'irraggiamento di riferimento di 1000 W/m^2, un metro quadrato di pannello fornisce quindi circa 200 W in pieno sole; la media su un giorno e su un anno, con la notte, le stagioni e le nuvole, è molto minore. Il fotovoltaico non emette CO_2 durante il funzionamento, ma richiede superfici ampie e sistemi di accumulo: temi che ritroverai nel dibattito sull'energia del capitolo 15.

DA RICORDARE

Verso l'esame: onde di materia e indeterminazione nella seconda prova

Il contenuto di questo capitolo appartiene al nucleo tematico **Onde e particelle**, e in particolare all'obiettivo «dualismo onda-particella, anche quantitativamente» e alla deduzione della condizione di quantizzazione di Bohr dalla relazione di de Broglie. Nella seconda prova compare tipicamente come: un calcolo di lunghezza d'onda di elettroni accelerati da una tensione, seguito da un confronto con la distanza fra gli atomi di un cristallo (legge di Bragg) o con la luce; la dimostrazione $2\pi r = n\lambda \Longrightarrow mvr = n\hbar$; una stima con il principio di indeterminazione; la lettura di una tabella di dati di diffrazione.

Le trappole tipiche: usare $p = \sqrt{(2mK)}$ con K in elettronvolt senza convertirla in joule; usare la formula non relativistica per elettroni di decine o centinaia di keV; scrivere h al posto di $\hbar/2$; confondere l'angolo di Bragg θ, misurato rispetto ai piani, con la deviazione del fascio, 2θ; presentare l'indeterminazione come un errore di misura. Nell'argomentazione, distingui sempre ciò che è un risultato sperimentale (le frange, gli anelli) da ciò che è un modello (le orbite).

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$\lambda = h/p$ — lunghezza d'onda di de Broglie, per ogni particella; non relativistica: $p = \sqrt{(2mK)}$, e per un elettrone accelerato da ΔV volt $\lambda \approx 1{,}23\ \text{nm}/\sqrt{\Delta V}$; se K non è $\ll mc^2$, $pc = \sqrt{(K^2 + 2Kmc^2)}$.

$2\pi r_n = n\lambda \iff m v_n r_n = n\hbar$ — orbite di Bohr come onde stazionarie.

$2d \operatorname{sen} \theta = m\lambda$ (θ rispetto ai piani; il fascio devia di 2θ); anelli a piccoli angoli: $r \approx L\lambda/d$.

$\Delta x\, \Delta p_x \geq \hbar/2$, $\Delta E\, \Delta t \gtrsim \hbar/2$ — principio di indeterminazione (Δ = indeterminazione, non variazione; $\hbar = 1{,}055 \times 10^{-34}$ J·s); non è un limite degli strumenti.

$|\psi|^2 \Delta x$ — probabilità di trovare la particella in Δx.

$E_n = n^2h^2/(8mL^2)$ — particella in una scatola; $E_1 > 0$ (energia di punto zero). $2n^2$ stati nel livello n, uno per elettrone (Pauli).

$hf \approx E_g$ — fotoni di un LED; una cella solare assorbe i fotoni con $hf > E_g$ (silicio: 1,12 eV).

SINTESI

- Per l'ipotesi di de Broglie (1924) a ogni particella di quantità di moto p è associata un'onda con $\lambda = h/p$: per elettroni di decine o centinaia di eV è confrontabile con le distanze fra gli atomi.
- Le orbite permesse di Bohr contengono un numero intero di lunghezze d'onda: $2\pi r = n\lambda$ equivale a $mvr = n\hbar$.
- Davisson e Germer e G. P. Thomson (1927) osservarono la diffrazione degli elettroni da cristalli, con la lunghezza d'onda prevista; il microscopio elettronico sfrutta la piccola lunghezza d'onda degli elettroni.
- Nella doppia fenditura con un elettrone alla volta ogni elettrone arriva in un punto, ma molti arrivi formano le frange: il dualismo onda-corpuscolo vale anche per la materia.
- Principio di indeterminazione (Heisenberg, 1927): $\Delta x\, \Delta p_x \geq \hbar/2$ e $\Delta E\, \Delta t \gtrsim \hbar/2$. Non è un limite degli strumenti: ne seguono l'assenza di traiettorie, la stabilità degli atomi, l'energia di punto zero e la larghezza naturale delle righe.
- $|\psi|^2$ è la densità di probabilità di trovare la particella (Born): negli atomi gli elettroni occupano orbitali, non orbite.
- In una scatola le energie permesse sono $E_n = n^2h^2/(8mL^2)$: la quantizzazione nasce dal confinamento.
- Quattro numeri quantici (n, l, m_l, m_s) e il principio di Pauli (1925) spiegano la struttura della tavola periodica.
- Nei solidi i livelli diventano bande: conduttori, semiconduttori e isolanti differiscono per riempimento e gap; drogaggio n e p, giunzione p-n, diodi, LED e celle solari.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● La lunghezza d'onda di de Broglie di una particella è:
   A. direttamente proporzionale alla sua quantità di moto
   B. inversamente proporzionale alla sua quantità di moto
   C. direttamente proporzionale alla sua energia cinetica
   D. indipendente dalla sua massa

2. ● Se l'energia cinetica di un elettrone non relativistico diventa quattro volte più grande, la sua lunghezza d'onda di de Broglie:
   A. diventa quattro volte più grande
   B. raddoppia
   C. si dimezza
   D. diventa un quarto

3. ● L'esperimento di Davisson e Germer mostrò che:
   A. gli elettroni diffusi da un cristallo di nichel formano massimi di intensità in direzioni precise, come un'onda
   B. l'elettrone ha carica negativa
   C. quasi tutta la massa dell'atomo è concentrata nel nucleo
   D. la luce è formata da fotoni

4. ● Nella relazione $\Delta x\,\Delta p_x \geq \hbar/2$, le grandezze Δx e Δp_x sono:
   A. gli errori dovuti all'imprecisione degli strumenti
   B. le variazioni di posizione e di quantità di moto durante il moto
   C. la posizione e la quantità di moto della particella
   D. le indeterminazioni della posizione e della componente della quantità di moto nella stessa direzione

5. ●● In un esperimento di doppia fenditura con elettroni inviati uno alla volta:
   A. ogni elettrone produce sullo schermo una debole figura di interferenza completa
   B. gli elettroni si raccolgono in due strisce, una dietro ciascuna fenditura
   C. ogni elettrone arriva in un punto, e la figura di interferenza emerge dall'accumulo di molti arrivi
   D. non si osserva interferenza, perché un elettrone da solo non può interferire

6. ●● Il quadrato del modulo della funzione d'onda, $|\psi|^2$, in un punto rappresenta:
   A. la densità di probabilità di trovare la particella vicino a quel punto
   B. l'energia della particella in quel punto
   C. la densità di carica dell'elettrone in quel punto, misurata in C/m
   D. il raggio della traiettoria della particella

7. ●● Per una particella in una scatola unidimensionale, il rapporto E_3/E_1 fra le energie del terzo livello e del livello fondamentale vale:
   A. 3
   B. √3
   C. 6
   D. 9

8. ●● In un cristallo di silicio drogato di tipo n gli atomi droganti:
   A. hanno tre elettroni di valenza e creano lacune
   B. hanno cinque elettroni di valenza e forniscono elettroni alla banda di conduzione
   C. sono ioni negativi liberi di muoversi nel cristallo
   D. aumentano l'ampiezza della banda proibita

Vero o falso

9. ● Una palla da tennis in moto ha una lunghezza d'onda di de Broglie, ma troppo piccola per produrre effetti osservabili. V / F

10. ● Il principio di indeterminazione esprime un limite dovuto alla precisione degli strumenti di misura, che il progresso tecnico potrà ridurre. V / F

11. ●● Un protone e un elettrone che hanno la stessa energia cinetica hanno anche la stessa lunghezza d'onda di de Broglie. V / F

12. ●● Per una particella in una scatola lo stato di energia minima ha energia diversa da zero. V / F

Applicare

13. ● Calcola la lunghezza d'onda di de Broglie di un elettrone accelerato, partendo da fermo, da una differenza di potenziale di 150 V. Esprimi l'energia cinetica anche in joule.

14. ● I neutroni di un fascio usato per studiare un cristallo hanno velocità 2,2 km/s. Calcola la loro lunghezza d'onda di de Broglie ($m_n = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg) e confrontala con la distanza fra gli atomi di un solido.

15. ●● Quale differenza di potenziale deve accelerare un elettrone, inizialmente fermo, perché la sua lunghezza d'onda di de Broglie sia 0,050 nm?

16. ●● Completa. Un elettrone con lunghezza d'onda di de Broglie 0,20 nm ha quantità di moto _____ kg·m/s ed energia cinetica _____ eV.

17. ● Un granello di polvere di massa $1{,}0 \times 10^{-15}$ kg si muove a 1,0 mm/s. Calcola la sua lunghezza d'onda di de Broglie e spiega perché non se ne osservano effetti ondulatori.

18. ●● Nel modello di Bohr il raggio della seconda orbita dell'idrogeno è $r_2 = 4r_1$, con $r_1 = 5{,}29 \times 10^{-11}$ m. Sapendo che sull'orbita stanno due lunghezze d'onda di de Broglie, calcola la lunghezza d'onda e la velocità dell'elettrone.

19. ●● Un elettrone è localizzato in una regione di larghezza 0,50 nm. Calcola l'indeterminazione minima sulla sua quantità di moto e sulla sua velocità.

20. ●● Un elettrone è confinato in una scatola unidimensionale lunga 0,40 nm. Calcola le energie dei primi due livelli in elettronvolt e la lunghezza d'onda del fotone emesso nella transizione dal secondo al primo livello. In quale banda dello spettro cade?

Problemi

21. ●● (Collegato al capitolo 6.) Per studiare un cristallo con piani atomici distanti 0,20 nm si possono usare raggi X oppure elettroni, con la stessa lunghezza d'onda di 0,15 nm. a) Calcola l'energia dei fotoni X, in keV. b) Calcola l'energia cinetica degli elettroni, in eV. c) Calcola l'angolo di Bragg del primo ordine e spiega perché è uguale nei due casi. d) Gli elettroni penetrano nella materia molto meno dei raggi X: quale parte del cristallo «vedono»?

22. ●●● Nell'esperimento di Davisson e Germer elettroni da 54 eV colpiscono perpendicolarmente un cristallo di nichel, le cui file di atomi superficiali distano $d = 0{,}215$ nm. a) Calcola la lunghezza d'onda di de Broglie degli elettroni. b) Calcola l'angolo (dalla normale) a cui si prevede il massimo del primo ordine, $d \operatorname{sen} \varphi = \lambda$, e confrontalo con i 50° misurati. c) A quale energia il massimo del primo ordine si troverebbe a 30°? d) Spiega perché sotto una certa energia il massimo del primo ordine non si osserva e calcola quell'energia.

23. ●●● (Collegato al capitolo 9.) In un microscopio elettronico gli elettroni sono accelerati da 200 kV. a) Calcola la loro lunghezza d'onda con la formula non relativistica. b) Calcola la quantità di moto con la dinamica relativistica, $pc = \sqrt{(K^2 + 2Km_ec^2)}$, e la lunghezza d'onda corretta. c) Di quanto per cento sbaglia la formula non relativistica? d) Quante volte questa lunghezza d'onda è più piccola di quella della luce di 500 nm?

24. ●● Un fascio di elettroni di velocità $2{,}0 \times 10^6$ m/s attraversa una fenditura larga 100 nm; uno schermo si trova a 1,0 m. a) Calcola la lunghezza d'onda degli elettroni. b) Calcola l'angolo del primo minimo di diffrazione e la larghezza del massimo centrale sullo schermo. c) Stima l'indeterminazione della componente trasversale della quantità di moto. d) Verifica che il prodotto fra l'indeterminazione della posizione e quella della quantità di moto vale circa h.

25. ●●● (Collegato al capitolo 12.) Stima delle dimensioni dell'atomo di idrogeno con il principio di indeterminazione. Un elettrone confinato a distanza r dal protone ha quantità di moto di ordine $p \approx \hbar/r$, quindi energia $E(r) \approx \hbar^2/(2m_er^2) - k_0e^2/r$. a) Calcola, in eV, i due termini e la loro somma per $r =$ 0,025 nm, 0,053 nm, 0,10 nm e 0,20 nm. b) Per quale di questi raggi l'energia è minima? Spiega perché l'atomo non può essere né molto più piccolo né molto più grande. c) Con la derivata, che stai studiando in matematica, si trova che il minimo è a $r = \hbar^2/(m_ek_0e^2)$: calcolalo e confronta raggio ed energia con il modello di Bohr.

26. ●● Uno stato eccitato di un atomo ha vita media 16 ns e decade emettendo luce gialla di lunghezza d'onda 589 nm. a) Calcola l'indeterminazione minima dell'energia dello stato, in J e in eV. b) Confrontala con l'energia del fotone. c) Calcola la corrispondente larghezza in frequenza della riga.

27. ●●● Il colore di alcune molecole organiche a catena si spiega con un modello a scatola: gli elettroni responsabili del colore si muovono liberamente lungo la catena, lunga 1,2 nm. a) Calcola le energie dei primi quattro livelli, in eV. b) Nella molecola ci sono 6 di questi elettroni: usando il principio di Pauli, stabilisci quali livelli sono occupati nello stato fondamentale. c) Calcola la lunghezza d'onda della luce assorbita nella transizione di energia più bassa. d) Di che colore appare, approssimativamente, la sostanza in luce bianca?

28. ●● (Collegato al capitolo 11.) a) Un LED emette luce di 630 nm: stima l'ampiezza della banda proibita del semiconduttore. b) Una cella solare al silicio ha banda proibita 1,12 eV: calcola la massima lunghezza d'onda che può assorbire. c) Un fotone di 400 nm viene assorbito dalla cella: quale frazione della sua energia, al massimo, può essere convertita in energia della coppia elettrone-lacuna, e che cosa succede al resto?

Ragionare e argomentare

29. ●●● Trova l'errore. Uno studente scrive: «Secondo il principio di indeterminazione l'elettrone dell'atomo di idrogeno si muove su un'orbita ben precisa, ma non la possiamo conoscere, perché la luce che usiamo per osservarlo lo disturba». Spiega che cosa c'è di sbagliato.

30. ●●● Stima di ordine di grandezza. Una persona di 70 kg attraversa a 1 m/s una porta larga 90 cm. Calcola la sua lunghezza d'onda di de Broglie e l'angolo tipico di diffrazione. Perché nessuno ha mai osservato la diffrazione delle persone?

31. ●●● Progetta un esperimento con un tubo a diffrazione elettronica (Figura 13.2) per mostrare che gli anelli sono prodotti da particelle cariche che si comportano come onde, e non da raggi X emessi dal bersaglio. Indica che cosa cambi, che cosa misuri e quali risultati ti aspetti nei due casi.

Verso l'esame di Stato

32. ●●● **Quesito.** La condizione di quantizzazione di Bohr si può ricavare dalla relazione di de Broglie. a) Mostra che, se sull'orbita circolare di raggio r_n sta un numero intero n di lunghezze d'onda dell'elettrone, il momento angolare vale $n\hbar$. b) Nel modello di Bohr $r_n = n^2 \times 5{,}29 \times 10^{-11}$ m e la velocità sull'orbita è $v_n = (2{,}19 \times 10^6 \text{ m/s})/n$. Completa la tabella e verifica la condizione per $n = 1, 2, 3$.
n: 1 · 2 · 3
r_n (10^{-10} m): … · … · …
λ_n (10^{-10} m): … · … · …
$2\pi r_n/\lambda_n$: … · … · …
c) Calcola energia e lunghezza d'onda del fotone emesso nella transizione da $n = 3$ a $n = 2$ ($E_n = -13{,}6 \text{ eV}/n^2$). d) Argomenta: in che senso l'ipotesi di de Broglie «spiega» il postulato di Bohr, e perché, alla luce del principio di indeterminazione, l'immagine delle orbite va comunque abbandonata?

33. ●●● **Problema.** (Collegato ai capitoli 6 e 11.) In un laboratorio si vuole studiare la struttura di un cristallo di grafite, i cui piani atomici principali distano 0,213 nm, con radiazione di lunghezza d'onda 0,100 nm: raggi X oppure elettroni. a) Calcola l'energia dei fotoni X (in keV) e l'energia cinetica degli elettroni (in eV), e mostra che fotoni ed elettroni hanno la stessa quantità di moto. b) Calcola l'angolo di Bragg del primo ordine e spiega perché è lo stesso per i due fasci. c) Gli elettroni, dopo essere stati accelerati, passano attraverso un foro di diametro 1,0 μm che seleziona il fascio: stima con il principio di indeterminazione la minima dispersione della componente trasversale della quantità di moto e confrontala con la quantità di moto degli elettroni; questa dispersione disturba la misura dell'angolo di Bragg? d) Argomenta: quale delle due tecniche è più adatta per studiare solo gli strati superficiali del cristallo, e quale per l'interno? Perché?

PER APPROFONDIRE

- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. III: il primo capitolo, sul comportamento quantistico e sull'esperimento delle due fenditure con proiettili, onde ed elettroni, è una lettura ancora oggi esemplare.
- [QED] R. P. Feynman, *QED. La strana teoria della luce e della materia*: un'introduzione senza formule al ragionamento con le ampiezze di probabilità.
- [EIN] A. Einstein, L. Infeld, *L'evoluzione della fisica*: le ultime pagine, sulle onde di probabilità e sul dibattito intorno alla completezza della meccanica quantistica, nelle parole di uno dei protagonisti.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: i capitoli sulle onde di materia e sui semiconduttori, con molti esercizi su lunghezza d'onda di de Broglie, indeterminazione e bande di energia.
- [TAY] J. R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*: per l'elaborazione dei dati dell'attività di laboratorio, in particolare la retta per l'origine e la propagazione delle incertezze.

Glossario del capitolo

Banda di energia
Insieme di livelli vicinissimi che, in un solido, prende il posto di un livello dell'atomo isolato.

Banda proibita
Intervallo di energie senza stati permessi fra la banda di valenza e quella di conduzione; la sua ampiezza E_g si chiama anche gap.

Cella fotovoltaica
Giunzione p-n che converte in energia elettrica l'energia dei fotoni assorbiti, separando le coppie elettrone-lacuna con il campo interno.

Densità di probabilità
$|\psi|^2$: la probabilità di trovare la particella in un piccolo intervallo Δx è $|\psi|^2 \Delta x$.

Drogaggio
Aggiunta controllata a un semiconduttore di piccolissime quantità di atomi donatori (tipo n) o accettori (tipo p).

Effetto tunnel
Attraversamento, da parte di una particella, di una barriera di energia potenziale più alta della sua energia, vietato classicamente.

Energia di punto zero
Energia minima, diversa da zero, di una particella confinata; non può essere tolta nemmeno allo zero assoluto.

Funzione d'onda
Nella meccanica quantistica, la funzione ψ che descrive lo stato di una particella; $|\psi|^2$ è la densità di probabilità.

Giunzione p-n
Contatto fra una zona di tipo p e una di tipo n dello stesso cristallo; il campo elettrico interno la rende conduttrice in un solo verso.

Lacuna
Stato vuoto nella banda di valenza di un semiconduttore, che si comporta come una carica positiva mobile.

Larghezza naturale
Intervallo minimo di frequenze di una riga spettrale, dovuto alla vita media finita dello stato eccitato.

Lunghezza d'onda di de Broglie
Lunghezza d'onda associata a una particella di quantità di moto p: $\lambda = h/p$.

Microscopio elettronico
Microscopio che usa un fascio di elettroni accelerati e lenti magnetiche; la piccola lunghezza d'onda degli elettroni permette risoluzioni molto migliori di quelle dei microscopi ottici.

Onde di materia
Onde associate alle particelle materiali (elettroni, neutroni, atomi, molecole), che ne determinano interferenza e diffrazione.

Orbitale
Funzione d'onda permessa di un elettrone in un atomo; descrive la regione in cui l'elettrone può essere trovato e con quale probabilità.

Particella in una scatola
Modello di una particella confinata fra due pareti impenetrabili a distanza L; le energie permesse sono $E_n = n^2h^2/(8mL^2)$.

Principio di esclusione di Pauli
Due elettroni dello stesso atomo non possono avere tutti e quattro i numeri quantici uguali.

Principio di indeterminazione
Principio di Heisenberg: posizione e componente della quantità di moto nella stessa direzione non possono essere definite insieme oltre il limite $\Delta x\ \Delta p_x \geq \hbar/2$.

Relazione di indeterminazione energia-tempo
$\Delta E\ \Delta t \geq \hbar/2$: uno stato che dura un tempo Δt ha un'energia indeterminata di almeno $\hbar/(2\Delta t)$.

Spin
Momento angolare intrinseco dell'elettrone; la sua componente lungo una direzione ha due soli valori, descritti da $m_s = \pm ½$.

Soluzioni

1. B. $\lambda = h/p$: la lunghezza d'onda è inversamente proporzionale alla quantità di moto.

2. C. $\lambda = h/\sqrt{(2mK)}$: se K diventa 4 volte più grande, $\sqrt{K}$ raddoppia e λ si dimezza.

3. A. I massimi di diffrazione nelle direzioni previste da d sen $\varphi = \lambda$ con la lunghezza d'onda di de Broglie sono la firma di un'onda.

4. D. Sono le dispersioni (indeterminazioni) di posizione e della componente della quantità di moto lungo la stessa direzione; non dipendono dagli strumenti.

5. C. Ogni elettrone è rivelato in un solo punto; la distribuzione di moltissimi arrivi riproduce le frange di interferenza.

6. A. $|\psi|^2\Delta x$ è la probabilità di trovare la particella nell'intervallo Δx (interpretazione di Born).

7. D. $E_n \propto n^2$: $E_3/E_1 = 9$.

8. B. Gli atomi donatori (per esempio il fosforo) hanno cinque elettroni di valenza: il quinto, non impegnato nei legami, passa facilmente nella banda di conduzione.

9. V. Per 58 g a 50 m/s $\lambda \approx 2 \times 10^{-34}$ m, enormemente più piccola di qualunque fenditura o ostacolo: nessun effetto osservabile.

10. F. È una proprietà della natura: una particella non possiede contemporaneamente posizione e quantità di moto definite; nessuno strumento può superare il limite.

11. F. Con la stessa K, $p = \sqrt{(2mK)}$ è maggiore per il protone: $\lambda_p/\lambda_e = \sqrt{(m_e/m_p)} \approx 1/43$.

12. V. $E_1 = h^2/(8mL^2) > 0$: è l'energia di punto zero, imposta dal confinamento e dal principio di indeterminazione.

13. $K = 150$ eV $= 150 \times 1{,}60 \times 10^{-19}$ J $= 2{,}40 \times 10^{-17}$ J; $p = \sqrt{(2m_eK)} = \sqrt{(2 \times 9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg} \times 2{,}40 \times 10^{-17}\ \text{J})} = 6{,}61 \times 10^{-24}$ kg·m/s; $\lambda = h/p = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s$/6{,}61 \times 10^{-24}$ kg·m/s $= 1{,}00 \times 10^{-10}$ m $= 0{,}100$ nm (controllo: 1,23 nm$/\sqrt{150} = 0{,}100$ nm).

14. $\lambda = h/(mv) = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s$/(1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg} \times 2{,}2 \times 10^3$ m/s$) = 1{,}8 \times 10^{-10}$ m $= 0{,}18$ nm: confrontabile con le distanze fra gli atomi di un solido (0,1–0,5 nm), quindi i neutroni sono diffratti dal cristallo.

15. Da $\lambda = h/\sqrt{(2m_e e\Delta V)}$: $\Delta V = h^2/(2m_e e\lambda^2) = (6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{J·s})^2/(2 \times 9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg} \times 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C} \times (5{,}0 \times 10^{-11}\ \text{m})^2) = 6{,}0 \times 10^2$ V.

16. $p = h/\lambda = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s$/2{,}0 \times 10^{-10}$ m $= 3{,}3 \times 10^{-24}$ kg·m/s; $K = p^2/(2m_e) = (3{,}32 \times 10^{-24})^2/(2 \times 9{,}11 \times 10^{-31})$ J $= 6{,}0 \times 10^{-18}$ J; in eV: $6{,}03 \times 10^{-18}$ J$/1{,}60 \times 10^{-19}$ J/eV $= 38$ eV.

17. $\lambda = h/(mv) = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s$/(1{,}0 \times 10^{-15}\ \text{kg} \times 1{,}0 \times 10^{-3}$ m/s$) = 6{,}6 \times 10^{-16}$ m, meno del diametro di un protone: non esistono fenditure o reticoli così fini, e il granello si comporta come un corpo classico.

18. $r_2 = 4 \times 5{,}29 \times 10^{-11}$ m $= 2{,}12 \times 10^{-10}$ m. Da $2\pi r_2 = 2\lambda$: $\lambda = \pi r_2 = 6{,}65 \times 10^{-10}$ m. $v = h/(m_e\lambda) = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s$/(9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg} \times 6{,}65 \times 10^{-10}$ m$) = 1{,}09 \times 10^6$ m/s, la metà di $v_1 = 2{,}19 \times 10^6$ m/s, come previsto dal modello di Bohr ($v_n \propto 1/n$).

19. $\Delta p \geq \hbar/(2\Delta x) = 1{,}055 \times 10^{-34}$ J·s$/(2 \times 5{,}0 \times 10^{-10}$ m$) = 1{,}1 \times 10^{-25}$ kg·m/s; $\Delta v = \Delta p/m_e = 1{,}06 \times 10^{-25}/9{,}11 \times 10^{-31}$ m/s $= 1{,}2 \times 10^5$ m/s.

20. $E_1 = h^2/(8m_eL^2) = (6{,}63 \times 10^{-34})^2/(8 \times 9{,}11 \times 10^{-31} \times (4{,}0 \times 10^{-10})^2)$ J $= 3{,}77 \times 10^{-19}$ J $= 2{,}36$ eV; $E_2 = 4E_1 = 9{,}42$ eV. Fotone: $E_2 - E_1 = 3E_1 = 7{,}07$ eV, $\lambda = hc/\Delta E = 1240$ eV·nm$/7{,}07$ eV $= 175$ nm: ultravioletto.

21. a) $E = hc/\lambda = 1240$ eV·nm$/0{,}15$ nm $= 8{,}3 \times 10^3$ eV $= 8{,}3$ keV. b) $K = h^2/(2m_e\lambda^2) = (6{,}63 \times 10^{-34})^2/(2 \times 9{,}11 \times 10^{-31} \times (1{,}5 \times 10^{-10})^2)$ J $= 1{,}07 \times 10^{-17}$ J $= 67$ eV: cento volte meno energia dei fotoni. c) $2d$ sen $\theta = \lambda$: sen $\theta = 0{,}15/0{,}40 = 0{,}375$, $\theta = 22°$; la condizione di Bragg dipende solo dalla lunghezza d'onda e dalla geometria del cristallo, non dalla natura dell'onda. d) Elettroni di poche decine di eV vengono fermati dai primi

strati di atomi: «vedono» la superficie, mentre i raggi X sondano l'interno.

22. a) $\lambda = h/\sqrt{(2m_eK)}$, con $K = 54 \times 1{,}60 \times 10^{-19}$ J = $8{,}64 \times 10^{-18}$ J: $\lambda = 6{,}63 \times 10^{-34}/\sqrt{(2 \times 9{,}11 \times 10^{-31} \times 8{,}64 \times 10^{-18})}$ m = $1{,}67 \times 10^{-10}$ m = 0,167 nm. b) Per la condizione del reticolo in riflessione: sen $\varphi = \lambda/d$ = 0,167/0,215 = 0,777, $\varphi = 51°$, in accordo con i 50° misurati entro 1°. c) $\lambda = d$ sen 30° = 0,1075 nm; per l'ipotesi di de Broglie $K = h^2/(2m_e\lambda^2) = 2{,}09 \times 10^{-17}$ J = $1{,}3 \times 10^2$ eV. d) Il massimo del primo ordine esiste solo se sen $\varphi = \lambda/d \le 1$, cioè $\lambda \le 0{,}215$ nm; l'energia minima è $K = h^2/(2m_ed^2) = 5{,}2 \times 10^{-18}$ J = 33 eV. Sotto, l'onda è più lunga del passo del «reticolo» e non c'è alcuna direzione in cui le onde diffuse da file vicine si rinforzino al primo ordine.

23. a) $K = 2{,}00 \times 10^5$ eV = $3{,}20 \times 10^{-14}$ J; non relativistico: $p = \sqrt{(2m_eK)} = 2{,}41 \times 10^{-22}$ kg·m/s, $\lambda = h/p = 2{,}75 \times 10^{-12}$ m. b) $K = 0{,}200$ MeV e $m_ec^2 = 0{,}511$ MeV: per la relazione energia-quantità di moto della dinamica relativistica (capitolo 9), $pc = \sqrt{(0{,}200^2 + 2 \times 0{,}200 \times 0{,}511)}$ MeV = 0,494 MeV; $\lambda = hc/(pc)$ = 1240 eV·nm/$4{,}94 \times 10^5$ eV = $2{,}51 \times 10^{-3}$ nm = $2{,}51 \times 10^{-12}$ m. c) (2,75 − 2,51)/2,51 = 9,5%: la formula non relativistica sbaglia di quasi il 10%, perché K non è piccola rispetto a m_ec^2 ($\gamma = 1{,}39$). d) 500 nm/$2{,}51 \times 10^{-3}$ nm = $2{,}0 \times 10^5$: duecentomila volte più piccola.

24. a) $p = m_ev = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg × $2{,}0 \times 10^6$ m/s = $1{,}82 \times 10^{-24}$ kg·m/s; $\lambda = h/p = 3{,}64 \times 10^{-10}$ m. b) sen $\theta = \lambda/a$ = $3{,}64 \times 10^{-10}/1{,}00 \times 10^{-7} = 3{,}64 \times 10^{-3}$, $\theta = 0{,}21°$; larghezza del massimo centrale ≈ $2D \tan\theta = 2 \times 1{,}0$ m × $3{,}64 \times 10^{-3} = 7{,}3$ mm. c) $\Delta p_y \approx p$ sen $\theta = 1{,}82 \times 10^{-24} \times 3{,}64 \times 10^{-3}$ kg·m/s = $6{,}6 \times 10^{-27}$ kg·m/s. d) $\Delta y\,\Delta p_y \approx 1{,}00 \times 10^{-7}$ m × $6{,}63 \times 10^{-27}$ kg·m/s = $6{,}6 \times 10^{-34}$ J·s ≈ h, compatibile con il principio ($\hbar/2 = 5{,}3 \times 10^{-35}$ J·s è il minimo).

25. a) Con $\hbar = 1{,}055 \times 10^{-34}$ J·s e $k_0e^2 = 8{,}99 \times 10^9 \times (1{,}60 \times 10^{-19})^2$ J·m = $2{,}30 \times 10^{-28}$ J·m, convertendo in eV (1 eV = $1{,}60 \times 10^{-19}$ J): a 0,025 nm cinetica 61,1 eV, potenziale −57,5 eV, somma +3,6 eV; a 0,053 nm 13,6 eV, −27,1 eV, somma −13,5 eV; a 0,10 nm 3,8 eV, −14,4 eV, somma −10,6 eV; a 0,20 nm 0,95 eV, −7,2 eV, somma −6,2 eV. b) Il minimo è vicino a 0,053 nm. Se l'atomo fosse più piccolo, l'energia cinetica imposta dall'indeterminazione, che cresce come $1/r^2$, prevarrebbe sull'attrazione, che cresce solo come $1/r$; se fosse più grande, l'energia potenziale sarebbe meno negativa. Lo stato fondamentale è il compromesso. c) $r = \hbar^2/(m_ek_0e^2) = (1{,}055 \times 10^{-34})^2/(9{,}11 \times 10^{-31} \times 2{,}30 \times 10^{-28})$ m = $5{,}3 \times 10^{-11}$ m, e $E = -k_0e^2/(2r) = -2{,}17 \times 10^{-18}$ J = −13,5 eV: il raggio di Bohr e l'energia dello stato fondamentale. (La coincidenza esatta è in parte fortunata: la stima $p \approx \hbar/r$ dà solo l'ordine di grandezza.)

26. a) $\Delta E \ge \hbar/(2\Delta t) = 1{,}055 \times 10^{-34}$ J·s/($2 \times 1{,}6 \times 10^{-8}$ s) = $3{,}3 \times 10^{-27}$ J; in eV: $3{,}30 \times 10^{-27}$ J/$1{,}60 \times 10^{-19}$ J/eV = $2{,}1 \times 10^{-8}$ eV. b) Energia del fotone: 1240 eV·nm/589 nm = 2,11 eV; il rapporto è $2{,}1 \times 10^{-8}/2{,}11 \approx 1 \times 10^{-8}$: la riga è sottilissima. c) $\Delta f = \Delta E/h = 3{,}30 \times 10^{-27}$ J/$6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s = $5{,}0 \times 10^6$ Hz = 5,0 MHz.

27. a) $E_1 = h^2/(8m_eL^2) = (6{,}63 \times 10^{-34})^2/(8 \times 9{,}11 \times 10^{-31} \times (1{,}2 \times 10^{-9})^2)$ J = $4{,}19 \times 10^{-20}$ J = 0,262 eV; $E_2 = 4E_1$ = 1,05 eV, $E_3 = 9E_1$ = 2,36 eV, $E_4 = 16E_1$ = 4,19 eV. b) Per il principio di Pauli ogni livello della scatola ospita al massimo due elettroni, con spin opposti: i 6 elettroni riempiono i livelli 1, 2 e 3, e il livello 4 è vuoto. c) La transizione di energia più bassa porta un elettrone dal livello 3 al 4: $\Delta E = (16 - 9)E_1 = 7 \times 0{,}262$ eV = 1,83 eV; λ = 1240 eV·nm/1,83 eV = 677 nm, luce rossa. d) La sostanza assorbe il rosso e diffonde il resto della luce bianca: appare di colore complementare, azzurro-verde (il modello dà solo un'indicazione approssimata).

28. a) $E_g \approx hf$ = 1240 eV·nm/630 nm = 1,97 eV ≈ 2,0 eV. b) $\lambda_{max} = hc/E_g$ = 1240 eV·nm/1,12 eV = $1{,}11 \times 10^3$ nm (vicino infrarosso). c) Il fotone ha 1240/400 eV = 3,10 eV; la coppia conserva circa E_g = 1,12 eV, cioè 1,12/3,10 = 36%; il restante 64% è ceduto al cristallo come calore nei primi istanti dopo l'assorbimento.

29. L'errore è pensare che l'elettrone abbia un'orbita precisa che la misura ci nasconde. Il principio di indeterminazione non riguarda il disturbo della misura (l'esempio del microscopio di Heisenberg è solo un'illustrazione): dice che l'elettrone non possiede contemporaneamente posizione e quantità di moto definite. Poiché una traiettoria richiede entrambe in ogni istante, l'orbita non esiste; l'elettrone è descritto da un orbitale, cioè da una distribuzione di probabilità attorno al nucleo. Inoltre, se l'elettrone

fosse confinato su una circonferenza nitida, la sua quantità di moto radiale avrebbe un'indeterminazione enorme.

30. $\lambda = h/(mv) = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s/(70 kg × 1 m/s) ≈ 9×10^{-36} m; l'angolo tipico di diffrazione è $\lambda/a \approx 9 \times 10^{-36}/0{,}9 \approx 1 \times 10^{-35}$ rad. Dopo aver percorso anche l'intero universo osservabile (circa 10^{26} m) la deviazione sarebbe di 10^{-9} m, meno di un atomo. Inoltre una persona interagisce continuamente con l'aria e con la luce, che distruggono ogni coerenza fra le «due parti» dell'onda. Gli effetti ondulatori sono osservabili solo quando λ è confrontabile con le dimensioni degli ostacoli.

31. Traccia di risposta. 1) Avvicina all'ampolla un magnete (o usa una bobina di Helmholtz): se gli anelli si spostano o si deformano, sono prodotti da particelle cariche, perché i raggi X non sono deviati da un campo magnetico. 2) Varia la tensione di accelerazione e misura il diametro degli anelli: per elettroni il raggio deve essere proporzionale a $1/\sqrt{V}$, come la lunghezza d'onda di de Broglie. Raggi X di frenamento prodotti dal bersaglio avrebbero invece uno spettro continuo, senza anelli netti di raggio ben definito. 3) Confronta le pendenze con quelle previste da $\lambda = dr/L$ con le distanze dei piani della grafite. Risultati attesi: anelli che si spostano con il magnete e si stringono come $1/\sqrt{V}$, in accordo quantitativo con $\lambda = h/p$.

32. a) Condizione di onda stazionaria: $2\pi r_n = n\lambda_n$; con $\lambda = h/(m_e v_n)$ si ha $2\pi r_n = nh/(m_e v_n)$, quindi $m_e v_n r_n = nh/(2\pi) = n\hbar$: il momento angolare è un multiplo intero di $\hbar$. b) r_n: 0,529; 2,12; 4,76 (10^{-10} m). $\lambda_n = h/(m_e v_n)$ con $v_n = 2{,}19 \times 10^6$, $1{,}10 \times 10^6$, $7{,}30 \times 10^5$ m/s: 3,32; 6,65; 9,97 (10^{-10} m). $2\pi r_n/\lambda_n = 1{,}00$; 2,00; 3,00: la condizione è verificata. c) Per il secondo postulato di Bohr, $hf = E_3 - E_2 = 13{,}6$ eV × (1/4 − 1/9) = 1,89 eV = $3{,}02 \times 10^{-19}$ J; $\lambda = 1240$ eV·nm/1,89 eV = 656 nm, la riga rossa H_α della serie di Balmer. d) L'ipotesi di de Broglie trasforma una regola arbitraria in una conseguenza della natura ondulatoria dell'elettrone: sono permesse solo le orbite su cui l'onda è stazionaria, come le frequenze di una corda fissata. Però un'orbita è una traiettoria, con posizione e velocità definite in ogni istante, e il principio di indeterminazione vieta che posizione e quantità di moto siano definite insieme; la descrizione corretta è la funzione d'onda (l'orbitale), che conserva i livelli di energia ma sostituisce l'orbita con una distribuzione di probabilità. *Indicatori:* a) Sviluppare il processo risolutivo; b) Interpretare/elaborare i dati; c) Sviluppare il processo risolutivo; d) Argomentare.

33. a) Fotoni: $E = hc/\lambda = 1240$ eV·nm/0,100 nm = $1{,}24 \times 10^4$ eV = 12,4 keV. Elettroni: $p = h/\lambda = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s/$1{,}00 \times 10^{-10}$ m = $6{,}63 \times 10^{-24}$ kg·m/s, $K = p^2/(2m_e) = 2{,}41 \times 10^{-17}$ J = 151 eV (non relativistico: 151 eV ≪ 511 keV). La quantità di moto del fotone è $E/c = 12{,}4 \times 10^3 \times 1{,}60 \times 10^{-19}$ J/($3{,}00 \times 10^8$ m/s) = $6{,}61 \times 10^{-24}$ kg·m/s, uguale a quella degli elettroni (a meno degli arrotondamenti): per entrambi $p = h/\lambda$, relazione del fotone (capitolo 11) e ipotesi di de Broglie. b) Per la legge di Bragg (capitolo 6), sen $\theta = \lambda/(2d) = 0{,}100/0{,}426 = 0{,}235$, $\theta = 13{,}6°$; la condizione dipende solo da λ e da d, quindi è la stessa per le due onde. c) $\Delta p_{trasv} \geq \hbar/(2\Delta x) = 1{,}055 \times 10^{-34}$ J·s/($2 \times 1{,}0 \times 10^{-6}$ m) = $5{,}3 \times 10^{-29}$ kg·m/s; rapporto con p: $5{,}3 \times 10^{-29}/6{,}63 \times 10^{-24} = 8 \times 10^{-6}$, cioè una dispersione angolare di circa 8×10^{-6} rad = 5×10^{-4} gradi, del tutto trascurabile rispetto a 13,6°. d) Gli elettroni di 151 eV, carichi, interagiscono fortemente con gli atomi e sono fermati dai primi strati: sono adatti alla superficie. I fotoni X di 12,4 keV, neutri, penetrano a fondo: sono adatti all'interno del cristallo. *Indicatori:* a) Sviluppare il processo risolutivo; b) Analizzare; c) Interpretare/elaborare i dati; d) Argomentare.