CAPITOLO

12

L'atomo e i livelli energetici

Ogni elemento firma la sua luce con poche righe colorate: per leggere quella firma è stato necessario un atomo nuovo, con un nucleo al centro e l'energia divisa in gradini.

OBIETTIVI

1. Ricostruire il passaggio dal modello di Thomson al modello nucleare di Rutherford e calcolare la distanza di minimo avvicinamento di una particella α a un nucleo.
2. Descrivere spettri di emissione e di assorbimento e usare la formula di Rydberg per le serie dell'idrogeno.
3. Enunciare i postulati di Bohr e ricavarne raggi ed energie dell'atomo di idrogeno e degli ioni idrogenoidi.
4. Calcolare energia, frequenza e lunghezza d'onda dei fotoni emessi o assorbiti nelle transizioni fra livelli, usando il diagramma dei livelli energetici.
5. Interpretare l'esperimento di Franck e Hertz come prova dei livelli energetici ottenuta con gli elettroni.
6. Distinguere assorbimento, emissione spontanea ed emissione stimolata e spiegare il funzionamento del laser e la fluorescenza.

INDICE DEL CAPITOLO

12.1 Dall'elettrone al nucleo: i modelli atomici 2
12.2 Gli spettri a righe 6
12.3 Il modello di Bohr 9
12.4 I livelli energetici dell'idrogeno 13
12.5 L'esperimento di Franck e Hertz 20
12.6 Livelli energetici e luce 22

Fisica 5 · Parte IV · La fisica dei quanti · versione 1.0
Capitolo 12: L'atomo e i livelli energetici · pagine 387–418 del volume completo · estratto per lo studio

Getta un pizzico di sale da cucina sulla fiamma azzurra di un fornello: per un attimo la fiamma diventa di un giallo intenso. Le insegne «al neon» brillano di rosso se contengono neon, di azzurro se contengono argon con un po' di mercurio; i fuochi d'artificio devono i loro colori a sali di stronzio (rosso), di bario (verde), di rame (blu). Ogni elemento, eccitato da una fiamma o da una scarica elettrica, emette una luce sua, fatta di pochi colori precisi. Nel volume dello scorso anno hai visto che uno spettroscopio separa questa luce in uno spettro a righe; in questo capitolo ci chiediamo **perché** gli atomi emettono proprio quelle righe e non altre.

La risposta ha richiesto due rivoluzioni. La prima riguarda la struttura dell'atomo: nel 1911 Ernest Rutherford, analizzando come le particelle α rimbalzano su una lamina d'oro, scoprì che la carica positiva e quasi tutta la massa dell'atomo sono concentrate in un nucleo piccolissimo. La seconda riguarda l'energia: nel 1913 Niels Bohr propose che l'elettrone dell'idrogeno possa avere solo certi valori di energia, i **livelli energetici**, e che ogni riga dello spettro sia un fotone emesso in un salto fra due livelli. È la stessa idea del quanto che hai incontrato nei capitoli 10 e 11, applicata alla materia invece che alla radiazione. Vedremo come un esperimento con elettroni, quello di Franck e Hertz, abbia confermato i livelli senza usare la luce, e come i livelli spieghino il laser, la fluorescenza e le righe caratteristiche dei raggi X.

12.1 Dall'elettrone al nucleo: i modelli atomici

12.1.1 L'atomo di Thomson

Alla fine dell'Ottocento la materia era già pensata come fatta di atomi, ma nessuno sapeva che cosa ci fosse dentro un atomo. Nel 1897 J. J. Thomson mostrò che i raggi catodici sono particelle cariche negativamente, con un rapporto fra carica e massa circa duemila volte quello dello ione idrogeno (*Fisica 4*, capitolo 15): l'elettrone. Se l'atomo è neutro e contiene elettroni, deve contenere anche una carica positiva uguale e opposta. Ma come è distribuita?

Thomson propose il modello più semplice compatibile con i dati: una sfera di carica positiva uniforme, del raggio dell'atomo (circa 10^{-10} m), con gli elettroni immersi al suo interno come i canditi in un panettone; in inglese fu chiamato *plum pudding*. È il **modello di Thomson**. In questo modello la massa dell'atomo è distribuita in tutto il suo volume, e il campo elettrico all'interno è debole, perché la carica positiva è diffusa e quasi compensata da quella degli elettroni.

12.1.2 Le particelle α contro una lamina d'oro

Per «guardare dentro» l'atomo servivano proiettili più piccoli di un atomo e molto veloci. La natura li forniva già: le particelle α emesse da alcune sostanze radioattive, che sono nuclei di elio con carica $+2e$ e massa circa 7300 volte quella dell'elettrone, lanciati a velocità dell'ordine di 10^7

m/s (le studierai nel capitolo 14). Nel 1909, nel laboratorio di Rutherford a Manchester, Hans Geiger ed Ernest Marsden inviarono un fascio sottile di particelle α contro una lamina d'oro spessa meno di un micrometro, e contarono le particelle deviate ai vari angoli osservando i lampi di luce che producevano su uno schermo fluorescente.

Quasi tutte le particelle attraversavano la lamina deviando di pochissimo, come ci si aspettava. Ma una piccola frazione, dell'ordine di una su qualche migliaio, veniva deviata di più di 90°: rimbalzava indietro. Con il modello di Thomson questo è impossibile. Una particella α pesante e veloce, che attraversa una sfera di carica diffusa, subisce forze deboli e viene deviata al massimo di frazioni di grado; anche sommando molte piccole deviazioni a caso, la probabilità di tornare indietro risulta praticamente nulla.

Nel 1911 Rutherford trovò la spiegazione. Se la carica positiva dell'atomo, e con essa quasi tutta la massa, è concentrata in una regione minuscola al centro, il **nucleo atomico**, una particella α che passa molto vicino al nucleo sente una repulsione coulombiana enorme e può essere respinta all'indietro. Gli elettroni, leggerissimi, non deviano in modo apprezzabile la particella α, come una palla da bowling non è deviata da una pallina da ping-pong. È il **modello nucleare** dell'atomo, detto anche modello di Rutherford: un nucleo positivo piccolissimo e, attorno, gli elettroni in uno spazio quasi vuoto.

12.1.3 Le traiettorie delle particelle α

Nel modello di Rutherford il moto di una particella α vicino al nucleo è un problema di meccanica che sai già impostare: una carica puntiforme $q = 2e$ si muove nel campo di una carica puntiforme $Q = Ze$, molto più pesante e quindi praticamente ferma (per l'oro $Z = 79$), con una forza repulsiva che decresce come $1/r^2$. È lo stesso tipo di forza della gravitazione, ma repulsiva: come le comete che passano una sola volta vicino al Sole, la particella percorre un ramo di iperbole, con il nucleo nel fuoco esterno.

La Figura 12.1 mostra traiettorie calcolate per particelle della stessa energia. Ciascuna è caratterizzata dal **parametro d'urto** b, la distanza fra la retta su cui la particella si muove prima dell'urto e il nucleo: se il nucleo non ci fosse, b sarebbe la distanza minima a cui la particella gli passerebbe accanto. Più b è piccolo, più la particella si avvicina al nucleo e più è deviata. Nell'urto frontale ($b = 0$) la particella rallenta lungo la retta che la congiunge al nucleo, si ferma e torna indietro. Come hai visto nel volume dello scorso anno, si ferma alla distanza di minimo avvicinamento, dove tutta l'energia cinetica iniziale K_0 è diventata energia potenziale elettrica:

$$K_0 = \frac{k_0 q Q}{r_{\text{min}}} \quad \Rightarrow \quad r_{\text{min}} = \frac{k_0 q Q}{K_0}$$

Per un parametro d'urto qualsiasi, applicando la conservazione dell'energia e del momento angolare della particella rispetto al nucleo, si dimostra (non lo faremo) che l'**angolo di deflessione** θ fra la direzione iniziale e quella finale è dato da

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{r_{\min}}{2b}$$

La formula conferma ciò che si vede in figura: per $b = r_{\min}$ la deviazione è $2\arctan(1/2) = 53°$; per avere $\theta > 90°$ serve $\tan(\theta/2) > 1$, cioè $b < r_{\min}/2$. Solo le particelle che arrivano dentro un cerchio di raggio $r_{\min}/2$ attorno al nucleo, un bersaglio minuscolo, tornano indietro: per questo sono così poche. Rutherford ricavò da questa idea come il numero di particelle deviate dovesse dipendere dall'angolo, dallo spessore della lamina e dall'energia delle particelle; le misure successive di Geiger e Marsden confermarono la sua legge in tutti i dettagli.

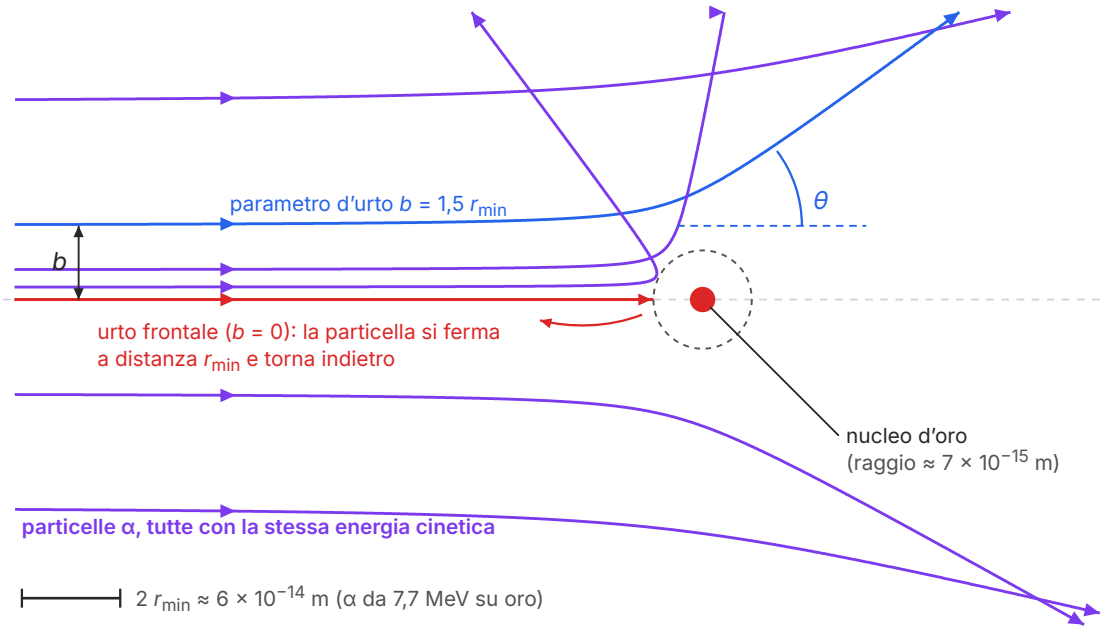


Figura 12.1 Traiettorie di particelle α della stessa energia cinetica che passano vicino a un nucleo d'oro, calcolate integrando numericamente il moto con la forza di Coulomb; le distanze sono in unità di r_{min}, la distanza di minimo avvicinamento nell'urto frontale. Il nucleo (in rosso) e il cerchio tratteggiato di raggio r_{min} sono in scala per particelle da 7,7 MeV. Più piccolo è il parametro d'urto b, maggiore è l'angolo di deflessione θ; per $b = 1{,}5\ r_{min}$ risulta $\theta = 37°$.

ESEMPIO SVOLTO

Quanto si avvicina una particella α al nucleo d'oro

Problema. Particelle α con energia cinetica $K_0 = 7{,}7$ MeV (circa quella delle particelle usate da Geiger e Marsden) colpiscono frontalmente nuclei d'oro ($Z = 79$). a) Calcola la distanza di minimo avvicinamento. b) Confrontala con il raggio dell'atomo d'oro, circa $1{,}4 \times 10^{-10}$ m, e con quello del suo nucleo, circa 7×10^{-15} m. c) Verifica che le particelle si possono trattare in modo non relativistico (massa della particella α: $6{,}64 \times 10^{-27}$ kg).

Passo 1: le grandezze in unità SI. L'energia cinetica in joule è $K_0 = 7{,}7 \times 10^6$ eV $\times\, 1{,}60 \times 10^{-19}$ J/eV $= 1{,}23 \times 10^{-12}$ J. Le cariche sono $q = 2e$ e $Q = 79e$.

Passo 2: la conservazione dell'energia. Nell'urto frontale tutta l'energia cinetica diventa energia potenziale elettrica nel punto di inversione:

$$r_{\text{min}} = \frac{k_0 \cdot 2 \cdot 79 \cdot e^2}{K_0} = \frac{8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2 \times 158 \times (1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}{1{,}23 \times 10^{-12}\ \text{J}} = 2{,}95 \times 10^{-14}\ \text{m}$$

Passo 3: il confronto. L'atomo d'oro è circa $(1{,}4 \times 10^{-10}\ \text{m})/(2{,}95 \times 10^{-14}\ \text{m}) \approx 5 \times 10^3$ volte più grande della distanza a cui la particella arriva: la carica positiva deve stare in una regione almeno così piccola, altrimenti la particella non sentirebbe una repulsione sufficiente a respingerla. D'altra parte r_{min} è circa quattro volte il raggio del nucleo: la particella non lo tocca, e sente solo la forza di Coulomb. Per questo la legge di Rutherford funziona così bene con l'oro. Con nuclei leggeri, che respingono meno, o con particelle più energetiche, le particelle arrivano a contatto con il nucleo e la legge smette di valere: proprio da queste deviazioni si cominciò a misurare la dimensione dei nuclei.

Passo 4: la velocità. Con l'espressione classica $v = \sqrt{(2K_0/m)} = \sqrt{(2 \times 1{,}23 \times 10^{-12}\ \text{J}/6{,}64 \times 10^{-27}\ \text{kg})} = 1{,}9 \times 10^7$ m/s, cioè $0{,}064c$. Il fattore di Lorentz differisce da 1 per circa due millesimi (capitolo 9): l'approssimazione classica è ottima.

Controllo. Il risultato non dipende dalla massa della particella, ma solo dalla sua energia e dalle cariche: un protone della stessa energia, con carica metà, arriverebbe a metà distanza. Le dimensioni sono quelle giuste: $(\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\cdot\text{C}^2/\text{J} = \text{N}\cdot\text{m}/\text{J} = \text{m}$.

12.1.4 Un atomo che non dovrebbe esistere

Il modello nucleare risolveva il problema della diffusione delle particelle α, ma ne apriva uno più grave. Se gli elettroni fossero fermi, il nucleo li attirerebbe e l'atomo collasserebbe. Rutherford immaginò allora gli elettroni in orbita attorno al nucleo, come pianeti attorno al Sole. Ma un elettrone in orbita circolare ha un'accelerazione centripeta, e nel capitolo 5 hai visto che una carica accelerata irraggia onde elettromagnetiche. Perdendo energia, l'elettrone dovrebbe scendere su orbite sempre più strette, girando sempre più in fretta, e precipitare sul nucleo a spirale; un calcolo con l'elettromagnetismo classico, che non svolgiamo, dà per l'atomo di idrogeno un tempo di caduta di circa 10^{-11} s.

Ci sarebbero dunque due conseguenze, smentite entrambe dall'esperienza: gli atomi sarebbero instabili, mentre la materia è stabile da miliardi di anni; e durante la caduta l'elettrone emetterebbe radiazione con una frequenza che cambia con continuità, cioè uno spettro continuo, mentre i gas rarefatti emettono spettri a righe. La fisica classica, che spiegava così bene la diffusione delle particelle α, non riesce a spiegare l'esistenza stessa dell'atomo. La chiave per uscire dalla contraddizione si trovava proprio negli spettri a righe.

APPROFONDIMENTO

Contare lampi al buio

Negli esperimenti di Geiger e Marsden il rivelatore era l'occhio umano. Le particelle α colpivano un piccolo schermo ricoperto di solfuro di zinco, che emette un debolissimo lampo di luce per ogni particella che lo colpisce, e uno sperimentatore osservava lo schermo con un microscopio, in una stanza buia, dopo aver lasciato abituare gli occhi all'oscurità. Si contavano i lampi uno per uno, per periodi brevi, perché l'attenzione cala in fretta; per misurare la frequenza delle deviazioni a grandi angoli servivano ore di conteggi pazienti. Marsden era poco più che ventenne, uno studente a cui Rutherford aveva affidato quella che sembrava una verifica di routine.

Rutherford raccontò più tardi di aver trovato il risultato quasi incredibile, paragonandolo a un proiettile d'artiglieria che rimbalza contro un foglio di carta velina: parafrasiamo il senso, non le parole. Ci vollero quasi due anni perché ne traesse la conseguenza, il nucleo. La storia mostra un tratto ricorrente della fisica: un dato «strano», raccolto con cura e preso sul serio invece di essere scartato come errore, può rovesciare un modello. Lo stesso laboratorio diede presto un aiuto decisivo alla fatica degli sperimentatori: Geiger sviluppò contatori elettrici che sostituirono l'occhio, antenati del contatore che porta il suo nome.

12.2 Gli spettri a righe

12.2.1 Spettri di emissione e di assorbimento

Ricordiamo dal volume dello scorso anno (*Fisica 4*, capitolo 8) che un reticolo di diffrazione di passo d invia la luce di lunghezza d'onda λ nelle direzioni che soddisfano $d \operatorname{sen} \theta = m\lambda$, con m intero; in uno spettroscopio ogni lunghezza d'onda presente nella luce dà un'immagine della fenditura d'ingresso, cioè una riga. Un solido o un liquido incandescente, o un gas denso e caldo, danno uno spettro continuo, in cui sono presenti tutte le lunghezze d'onda; un gas rarefatto eccitato da una scarica o da una fiamma dà invece uno spettro a righe, diverso per ogni elemento.

Più precisamente, quello di un gas eccitato è uno **spettro di emissione**: righe luminose su fondo scuro (Figura 12.2a). Se invece la luce bianca di una sorgente a spettro continuo attraversa lo stesso gas, più freddo, nello spettro compaiono righe scure: è lo **spettro di assorbimento** (Figura 12.2b). Il fatto decisivo è che le righe scure cadono esattamente alle stesse lunghezze

d'onda delle righe luminose: un gas assorbe proprio le radiazioni che è capace di emettere. Ogni teoria dell'atomo deve spiegare perché queste lunghezze d'onda sono poche, precise e caratteristiche dell'elemento.

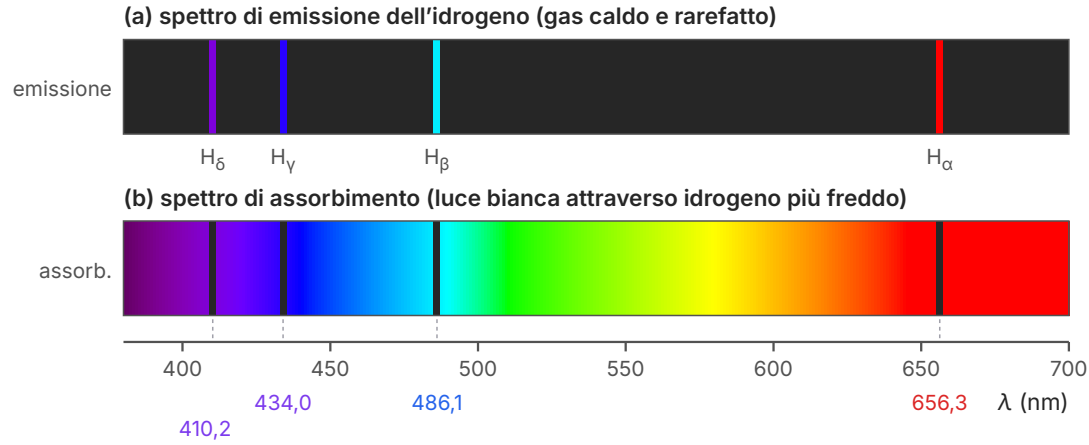


Figura 12.2 Le righe dell'idrogeno nel visibile (lunghezze d'onda in aria, in scala). (a) Spettro di emissione: le righe luminose di un tubo a scarica contenente idrogeno. (b) Spettro di assorbimento: luce a spettro continuo che ha attraversato idrogeno più freddo; le righe scure cadono alle stesse lunghezze d'onda delle righe di emissione. Le righe sono indicate con le lettere greche nell'ordine di energia crescente.

12.2.2 La formula di Balmer

L'idrogeno è l'atomo più semplice, con un solo elettrone, e anche il suo spettro è il più semplice. Nel visibile mostra quattro righe principali, che si indicano con H_α, H_β, H_γ, H_δ (Tabella 12.1); verso l'ultravioletto ne seguono altre, sempre più fitte, che si addensano verso un limite. Nel 1885 Johann Jakob Balmer, un insegnante di matematica svizzero, scoprì che le loro lunghezze d'onda seguono una regola semplicissima:

$$\lambda = B\frac{n^2}{n^2-4} \qquad \text{con } n = 3, 4, 5, \ldots \quad \text{e} \quad B = 364{,}6 \text{ nm}$$

Per $n = 3$ la formula dà 364,6 nm × 9/5 = 656,3 nm, la riga rossa H_α; per $n = 4$ dà 364,6 nm × 16/12 = 486,1 nm, la riga azzurra H_β, e così via. Quando n cresce, $n^2/(n^2 - 4)$ tende a 1 e le righe si addensano verso $B = 364{,}6$ nm, il **limite della serie**. La formula di Balmer era una regola empirica: funzionava con una precisione di una parte su diecimila, ma nessuno sapeva perché.

Tabella 12.1 Le righe visibili della serie di Balmer dell'idrogeno. Le lunghezze d'onda misurate in aria sono un po' più corte di quelle nel vuoto, che sono quelle date dalla formula di Rydberg con $R_H = 1{,}0968 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$: la differenza, circa 0,03%, è dovuta all'indice di rifrazione dell'aria.

Riga	n_i	λ in aria (nm)	λ nel vuoto (nm)	Colore
H_α	3	656,3	656,5	rosso
H_β	4	486,1	486,3	azzurro
H_γ	5	434,0	434,2	violetto
H_δ	6	410,2	410,3	violetto

12.2.3 Le serie dell'idrogeno e la costante di Rydberg

Pochi anni dopo lo svedese Johannes Rydberg riscrisse la regola in termini dell'inverso della lunghezza d'onda, una grandezza proporzionale alla frequenza. Dividendo per B e capovolgendo la formula di Balmer si ottiene $1/\lambda = (4/B)(1/4 - 1/n^2)$, e la forma suggerisce subito una generalizzazione: al posto di $4 = 2^2$ si può mettere il quadrato di un altro intero. Tutte le righe dell'idrogeno, nel visibile, nell'ultravioletto e nell'infrarosso, sono descritte dalla **formula di Rydberg**

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \qquad \text{con } n_f = 1, 2, 3, \ldots \text{ e } n_i = n_f + 1, n_f + 2, \ldots$$

dove $R_H = 4/B = 1{,}097 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$ è la **costante di Rydberg** per l'idrogeno. Le righe con lo stesso n_f formano una **serie spettrale** (Tabella 12.2). La serie di Balmer ($n_f = 2$) è l'unica con righe visibili. La **serie di Lyman** ($n_f = 1$) è tutta nell'ultravioletto, fra 91,2 nm e 122 nm, e fu osservata solo quando si costruirono spettrografi capaci di lavorare nel vuoto, perché l'aria assorbe quelle radiazioni. La serie di Paschen ($n_f = 3$) e le successive cadono nell'infrarosso. Il limite di ogni serie si ottiene con $n_i \to \infty$: $1/\lambda = R_H/n_f^2$.

Tabella 12.2 Le prime serie spettrali dell'idrogeno, con le lunghezze d'onda nel vuoto calcolate con la formula di Rydberg (tre cifre significative): la riga più lunga ($n_i = n_f + 1$) e il limite della serie ($n_i \to \infty$).

Serie	n_f	Regione	Riga più lunga (nm)	Limite (nm)
Lyman	1	ultravioletto	122	91,2
Balmer	2	visibile e ultravioletto vicino	656	365
Paschen	3	infrarosso	1880	820
Brackett	4	infrarosso	4050	1460

La formula di Rydberg contiene un'informazione nascosta. Moltiplicando entrambi i membri per hc, a sinistra compare l'energia $hc/\lambda = hf$ di un fotone (capitolo 11), e a destra la differenza fra due termini della forma hcR_H/n^2. L'energia di ogni fotone emesso è una differenza fra due numeri di una stessa lista. È l'indizio che Bohr seppe leggere.

COLLEGAMENTI

Le righe del Sole e la composizione delle stelle

All'inizio dell'Ottocento l'ottico tedesco Joseph von Fraunhofer, osservando lo spettro del Sole con strumenti di sua costruzione, vi contò centinaia di sottili righe scure, che indicò con lettere: sono le **righe di Fraunhofer**. Oggi sappiamo che sono righe di assorbimento: la luce a spettro continuo che proviene dagli strati più profondi del Sole attraversa gli strati esterni, più freddi, i cui atomi ne assorbono le lunghezze d'onda caratteristiche. La coppia di righe D, a 589,0 nm e 589,6 nm, è dovuta al sodio; la riga C coincide con H_α e la F con H_β.

Confrontando le righe del Sole con quelle degli elementi in laboratorio, verso la metà dell'Ottocento si poté stabilire per la prima volta di che cosa è fatta una stella, senza raggiungerla: idrogeno, sodio, calcio, ferro... Una riga gialla, osservata nello spettro della cromosfera solare durante un'eclissi, non corrispondeva a nessun elemento noto: fu attribuita a un elemento nuovo, chiamato elio dal nome greco del Sole, e solo anni dopo fu trovato anche sulla Terra. Oggi la spettroscopia misura la composizione, la temperatura e la velocità di stelle e galassie lontanissime: lo spostamento delle righe verso il rosso è una delle prove principali dell'espansione dell'universo (capitolo 16). In chimica la stessa tecnica, la spettroscopia di assorbimento atomico, rivela tracce di metalli in un campione d'acqua o di sangue.

12.3 Il modello di Bohr

12.3.1 Tre postulati

Nel 1913 il fisico danese Niels Bohr, che aveva lavorato con Rutherford a Manchester, propose un modello dell'atomo di idrogeno che teneva insieme il nucleo di Rutherford e il quanto di Planck ed Einstein. Bohr non cercò di dedurre il comportamento dell'elettrone dalla fisica classica, che portava al collasso: introdusse invece alcune ipotesi nuove, i **postulati**, scelte in modo da riprodurre gli spettri, e ne ricavò le conseguenze. Il modello descrive un elettrone di massa m_e e carica $-e$ che ruota su un'orbita circolare attorno a un protone fermo.

Primo postulato: gli stati stazionari. L'elettrone può percorrere solo alcune orbite particolari, e mentre si trova su una di esse **non irraggia**, contrariamente a quanto prevede l'elettromagnetismo classico. Ciascuna orbita permessa corrisponde a uno **stato stazionario** dell'atomo, con un'energia ben definita.

Secondo postulato: la condizione di quantizzazione. Le orbite permesse sono quelle in cui il momento angolare dell'elettrone, $L = m_e vr$ (*Fisica 3*), è un multiplo intero di $h/(2\pi)$:

$$m_e v r = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar \qquad \text{con } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Il numero intero n che individua l'orbita si chiama **numero quantico principale**. La combinazione $h/(2\pi)$ è la costante di Planck ridotta $\hbar$ («acca tagliato») che hai incontrato nel capitolo 10: $\hbar = 1{,}055 \times 10^{-34}$ J·s. Che proprio il momento angolare dovesse essere quantizzato fu, per Bohr, la scelta che riproduceva i dati; il perché lo vedrai nel capitolo 13, con le onde di materia.

Terzo postulato: le transizioni. L'atomo emette o assorbe radiazione soltanto quando l'elettrone passa da uno stato stazionario a un altro. In una transizione dallo stato di energia E_i a quello di energia minore E_f l'atomo emette un solo fotone, di energia uguale alla differenza:

$$hf = E_i - E_f$$

Viceversa, un atomo nello stato E_f può assorbire un fotone soltanto se la sua energia è esattamente $E_i - E_f$, e in quel caso passa allo stato E_i. La frequenza della luce emessa non ha più niente a che fare con la frequenza di rotazione dell'elettrone, come voleva la fisica classica: è fissata dal salto di energia.

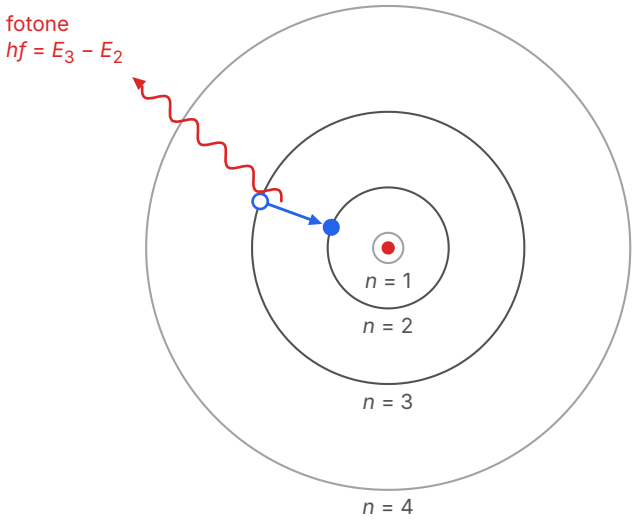
12.3.2 Raggi ed energie delle orbite

Dai postulati, con la forza di Coulomb e la dinamica del moto circolare uniforme, si ricavano i raggi e le energie degli stati stazionari. Il calcolo, svolto passo per passo nell'esempio che segue, dà

$$r_n = n^2 r_1 \qquad \text{con} \qquad r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = 5{,}29 \times 10^{-11}\ \text{m}$$

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} \qquad \text{con} \qquad E_1 = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0{}^2 h^2} = -13{,}6\ \text{eV}$$

Il raggio r_1 dell'orbita più piccola si chiama **raggio di Bohr**: è circa mezzo decimo di nanometro, in ottimo accordo con le dimensioni degli atomi stimate dalla teoria cinetica dei gas e dalla densità dei solidi. Era la prima volta che la dimensione di un atomo si calcolava a partire da costanti fondamentali. I raggi crescono come n^2: l'orbita con $n = 2$ è quattro volte più grande della prima, quella con $n = 3$ nove volte (Figura 12.3).



Raggi ed energie (orbite in scala)

$r_n = n^2\, r_1$, $E_n = E_1/n^2$

n	r_n (nm)	E_n (eV)
1	0,0529	−13,6
2	0,212	−3,40
3	0,476	−1,51
4	0,846	−0,850

Il raggio cresce come n^2; l'energia sale verso zero come $-1/n^2$.

Le orbite circolari sono un elemento del modello, non un'immagine dell'atomo reale.

Figura 12.3 Le prime quattro orbite del modello di Bohr per l'atomo di idrogeno, in scala: i raggi crescono come n^2. Il nucleo, al centro, non è in scala (sarebbe decine di migliaia di volte più piccolo della prima orbita). Nella transizione da $n = 3$ a $n = 2$ l'atomo emette un fotone di energia $E_3 - E_2 = 1{,}89$ eV: è la riga H_α.

ESEMPIO SVOLTO

Raggi ed energie del modello di Bohr, passo per passo

Problema. Ricava dai postulati di Bohr il raggio r_n e l'energia E_n dell'orbita n-esima dell'atomo di idrogeno, e calcola r_1, E_1 e la velocità dell'elettrone sulla prima orbita.

Passo 1: la dinamica. Sull'orbita circolare di raggio r la forza di Coulomb del protone fornisce la forza centripeta:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{k_0 e^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad m_e v^2 r = k_0 e^2 \qquad (1)$$

Passo 2: la quantizzazione. Dal secondo postulato $v = nh/(2\pi m_e r)$ (2). Questa è la sola ipotesi non classica del calcolo.

Passo 3: il raggio. Sostituiamo la (2) nella (1): $m_e r \cdot n^2h^2/(4\pi^2 m_e^2 r^2) = k_0 e^2$, cioè $n^2h^2/(4\pi^2 m_e r) = k_0 e^2$. Risolvendo rispetto a r:

$$r_n = n^2 \frac{h^2}{4\pi^2 m_e k_0 e^2} = n^2 \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato $k_0 = 1/(4\pi\varepsilon_0)$. Con $h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ J·s, $m_e = 9{,}109 \times 10^{-31}$ kg, $e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C e $k_0 = 8{,}988 \times 10^{9}$ N·m^2/C^2 si ottiene $r_1 = 5{,}29 \times 10^{-11}$ m. (Con i valori a tre cifre usati negli esercizi si trova $5{,}31 \times 10^{-11}$ m: in questi calcoli conviene usare i valori più precisi delle costanti, oppure direttamente i risultati $r_1 = 5{,}29 \times 10^{-11}$ m e $E_1 = -13{,}6$ eV.)

Passo 4: l'energia. Dalla (1) l'energia cinetica è $K = \tfrac{1}{2} m_e v^2 = k_0 e^2/(2r)$. L'energia potenziale elettrica dell'elettrone nel campo del protone, nulla a distanza infinita, è $U = -k_0 e^2/r$. L'energia totale è quindi

$$E = K + U = -\frac{k_0 e^2}{2r} \quad \Rightarrow \quad E_n = -\frac{k_0 e^2}{2r_1} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}$$

Numericamente $E_1 = -(8{,}988 \times 10^9 \times (1{,}602 \times 10^{-19})^2)/(2 \times 5{,}29 \times 10^{-11})$ J $= -2{,}18 \times 10^{-18}$ J, e dividendo per $1{,}602 \times 10^{-19}$ J/eV si ottiene $E_1 = -13{,}6$ eV. Sostituendo r_1 si ritrova l'espressione $E_1 = -m_e e^4/(8\varepsilon_0^2 h^2)$.

Passo 5: la velocità. Dalla (2) con $n = 1$, oppure da $K = 13{,}6$ eV: $v_1 = \sqrt{(2K/m_e)} = \sqrt{(2 \times 2{,}18 \times 10^{-18}}$ J$/9{,}109 \times 10^{-31}$ kg$) = 2{,}19 \times 10^6$ m/s, circa $c/137$. L'elettrone dell'idrogeno è veloce, ma non relativistico: la trattazione classica del moto è giustificata.

Controllo. In ogni orbita l'energia cinetica è uguale all'opposto dell'energia totale, $K = -E$, e l'energia potenziale è il doppio dell'energia totale, $U = 2E$: è la stessa relazione che vale per un satellite in orbita circolare, perché anche la gravità decresce come $1/r^2$.

12.3.3 Che cosa dicono i numeri

Le energie E_n sono **negative**. Lo zero dell'energia corrisponde a un elettrone fermo a distanza infinita dal protone, cioè libero; un'energia negativa indica uno stato **legato**, in cui per separare l'elettrone dal nucleo bisogna fornire energia. Ogni valore permesso dell'energia è un **livello energetico**. Lo stato con l'energia più bassa, $n = 1$, è lo **stato fondamentale**: è quello in cui si trovano quasi tutti gli atomi di idrogeno a temperatura ambiente, e da cui l'atomo non può scendere, perché non c'è un livello più basso. Gli stati con $n \geq 2$ sono gli **stati eccitati**: un atomo vi arriva assorbendo energia (da un fotone, da un urto, in una scarica elettrica) e ne ridiscende dopo un tempo brevissimo, tipicamente dell'ordine di 10^{-8} s, emettendo fotoni.

Salendo di livello, i livelli si avvicinano fra loro e tendono a zero: $E_2 = -3{,}40$ eV, $E_3 = -1{,}51$ eV, $E_4 = -0{,}850$ eV... Il salto dal primo al secondo livello, 10,2 eV, è più grande di tutti gli altri salti messi insieme fino al limite. Il raggio cresce come n^2, l'energia sale come $-1/n^2$: un atomo eccitato in uno stato con n grande è enorme e debolmente legato.

ERRORE FREQUENTE

«Nella transizione da $n = 2$ a $n = 1$ l'atomo emette un fotone di 3,40 eV, l'energia del secondo livello.» **No.** L'energia del fotone è la **differenza** fra le energie dei due livelli: $hf = E_2 - E_1 = -3{,}40$ eV $-$ ($-13{,}6$ eV) = 10,2 eV. Il valore di un singolo livello dipende dalla scelta dello zero (l'elettrone libero); le differenze no, e sono le sole che si misurano. Fai sempre il controllo del segno: in emissione $E_\text{i} > E_\text{f}$ e hf è positiva.

«Un atomo di idrogeno nello stato fondamentale assorbe qualunque fotone di energia almeno 10,2 eV, e l'energia in più se la tiene.» **No.** Al di sotto di 13,6 eV l'atomo assorbe soltanto i fotoni la cui energia è **esattamente** uguale alla distanza fra lo stato fondamentale e un livello eccitato: 10,2 eV, 12,1 eV, 12,75 eV... Un fotone di 11 eV passa senza essere assorbito. Solo sopra 13,6 eV, quando l'elettrone viene strappato e diventa libero, ogni energia va bene: l'eccesso diventa energia cinetica dell'elettrone, che fuori dall'atomo non è quantizzata.

12.4 I livelli energetici dell'idrogeno

12.4.1 Il diagramma dei livelli

Per ragionare sulle transizioni conviene rinunciare alle orbite e rappresentare soltanto le energie, come righe orizzontali a diverse altezze su un asse verticale: è il **diagramma dei livelli energetici** (Figura 12.4). Una transizione è una freccia verticale fra due livelli: verso il basso è un'emissione, verso l'alto un assorbimento, e la sua lunghezza è l'energia del fotone. Nel diagramma, disegnato in scala, si vede subito perché le righe di una serie si addensano verso un limite: le frecce che partono dai livelli alti hanno quasi la stessa lunghezza, perché quei livelli sono molto vicini fra loro.

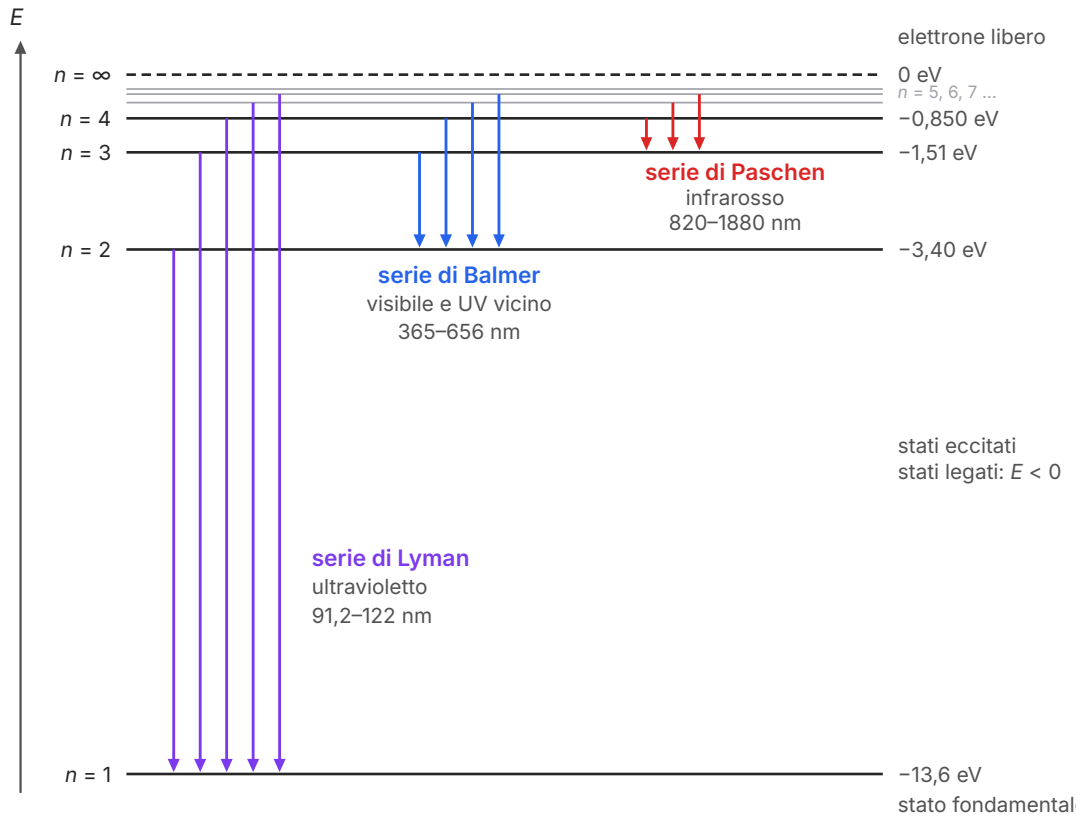


Figura 12.4 Diagramma dei livelli energetici dell'atomo di idrogeno, in scala, con le transizioni delle prime tre serie spettrali. Le frecce di ciascuna serie terminano sullo stesso livello: $n = 1$ (Lyman), $n = 2$ (Balmer), $n = 3$ (Paschen). Gli intervalli di lunghezza d'onda (nel vuoto) vanno dalla riga più corta, al limite della serie, alla più lunga.

12.4.2 Le righe spiegate

Ora possiamo ricavare la formula di Rydberg. In una transizione da n_i a n_f, con $n_\mathrm{i} > n_\mathrm{f}$, il fotone emesso ha energia

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = E(n_\mathrm{i}) - E(n_\mathrm{f}) = |E_1| \left(\frac{1}{n_\mathrm{f}^2} - \frac{1}{n_\mathrm{i}^2} \right)$$

Dividendo per hc si ottiene esattamente la formula di Rydberg, con $R_\mathrm{H} = |E_1|/(hc)$. Il controllo numerico è immediato: con $hc = 1240$ eV·nm, $R_\mathrm{H} = 13{,}6$ eV/(1240 eV·nm) $= 0{,}010\,97$ nm$^{-1} = 1{,}097 \times 10^7$ m^{-1}. La costante empirica di Rydberg, misurata dagli spettroscopisti con grande precisione, risultava espressa in funzione di m_e, e, h e ε_0: fu il successo più clamoroso del modello di Bohr. Anche il significato delle serie diventa chiaro. La serie di Lyman è formata dalle transizioni che

terminano nello stato fondamentale, quella di Balmer dalle transizioni che terminano in $n = 2$, quella di Paschen in $n = 3$. La riga rossa H_α nasce dal salto $3 \to 2$, di 1,89 eV.

Un gas di idrogeno freddo, in cui quasi tutti gli atomi sono nello stato fondamentale, assorbe solo le righe della serie di Lyman, nell'ultravioletto: tutte le sue transizioni in assorbimento partono da $n = 1$. Perché compaiano righe di Balmer in assorbimento, come nello spettro del Sole, servono atomi già eccitati in $n = 2$, quindi un gas caldo, a migliaia di kelvin.

ESEMPIO SVOLTO

La riga H_β: dal salto di energia alla lunghezza d'onda

Problema. Un atomo di idrogeno passa dallo stato $n = 4$ allo stato $n = 2$. a) Calcola l'energia del fotone emesso, in eV e in J, la sua lunghezza d'onda e la sua frequenza. b) Di quanto cambia il raggio dell'orbita? c) Quale energia minima serve per ionizzare un atomo che si trova nello stato $n = 2$, e a quale lunghezza d'onda corrisponde?

a) Le energie dei due livelli sono $E_4 = -13{,}6\ \text{eV}/16 = -0{,}850\ \text{eV}$ e $E_2 = -13{,}6\ \text{eV}/4 = -3{,}40\ \text{eV}$. Per il terzo postulato il fotone emesso porta via la differenza:

$$hf = E_4 - E_2 = -0{,}850\ \text{eV} - (-3{,}40\ \text{eV}) = 2{,}55\ \text{eV} = 2{,}55 \times 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J} = 4{,}08 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

La lunghezza d'onda è $\lambda = hc/(hf) = 1240\ \text{eV·nm}/2{,}55\ \text{eV} = 486$ nm, e la frequenza $f = c/\lambda = 3{,}00 \times 10^8\ \text{m/s}/(4{,}86 \times 10^{-7}\ \text{m}) = 6{,}17 \times 10^{14}$ Hz. È la riga azzurra H_β della Tabella 12.1. Controllo con la formula di Rydberg: $1/\lambda = 1{,}097 \times 10^7\ \text{m}^{-1} \times (1/4 - 1/16) = 2{,}057 \times 10^6\ \text{m}^{-1}$, $\lambda = 486$ nm.

b) $r_4 = 16r_1 = 0{,}846$ nm e $r_2 = 4r_1 = 0{,}212$ nm: il raggio diventa quattro volte più piccolo, e diminuisce di 0,635 nm.

c) Ionizzare l'atomo significa portare l'elettrone da $n = 2$ a energia zero: servono almeno $0 - (-3{,}40\ \text{eV}) = 3{,}40$ eV. Un fotone di questa energia ha $\lambda = 1240\ \text{eV·nm}/3{,}40\ \text{eV} = 365$ nm. È il limite della serie di Balmer: le righe della serie sono le transizioni verso $n = 2$ dai livelli via via più alti, e il loro limite è la transizione da $n = \infty$.

Controllo. L'energia del fotone, 2,55 eV, è compresa fra quelle dei fotoni visibili (da circa 1,7 eV per il rosso a 3,3 eV per il violetto), coerentemente con il colore azzurro della riga.

12.4.3 Ionizzazione e ioni idrogenoidi

Per strappare l'elettrone a un atomo di idrogeno nello stato fondamentale bisogna fornirgli almeno $0 - E_1 = 13{,}6$ eV: è l'**energia di ionizzazione** dell'idrogeno, che il modello di Bohr riproduce in pieno accordo con le misure. Un fotone di energia maggiore di 13,6 eV, cioè di lunghezza d'onda minore di 91,2 nm (il limite della serie di Lyman), ionizza l'atomo, e l'eccesso di energia diventa energia cinetica dell'elettrone liberato. È un fenomeno simile all'effetto fotoelettrico del capitolo 11, con l'energia di ionizzazione al posto del lavoro di estrazione.

Il modello si applica senza cambiamenti a ogni sistema formato da un solo elettrone e un nucleo di carica $+Ze$: lo ione elio He^+ ($Z = 2$), lo ione litio Li^{2+} ($Z = 3$), e così via. Sono gli **ioni idro-**

genoidi. Rifacendo il calcolo con la carica Ze al posto di e nella forza di Coulomb, ogni k_0e^2 diventa k_0Ze^2, e si trova

$$r_n = \frac{n^2}{Z} r_1 \qquad E_n = -13{,}6\ \text{eV} \cdot \frac{Z^2}{n^2}$$

Il nucleo più carico attira più fortemente l'elettrone: le orbite sono Z volte più strette e i livelli Z^2 volte più profondi. Per lo ione He^+ lo stato fondamentale è a −54,4 eV, e le sue righe sono, a parità di transizione, quattro volte più energetiche di quelle dell'idrogeno. Il modello prevede bene anche gli spettri di questi ioni, osservati nelle stelle calde e nei plasmi di laboratorio.

APPROFONDIMENTO

I raggi X caratteristici e il numero atomico

Un tubo a raggi X (capitolo 6) emette uno spettro continuo, dovuto agli elettroni frenati dal bersaglio, e sopra di esso alcune righe molto intense, diverse per ogni metallo: i **raggi X caratteristici**. Il modello di Bohr ne spiega l'origine. Un elettrone del fascio, molto energetico, può espellere uno dei due elettroni più interni di un atomo del bersaglio, quelli con $n = 1$ (lo strato K). Nel posto rimasto libero scende un elettrone dallo strato $n = 2$ (lo strato L), emettendo un fotone: è la riga K_α.

Per un atomo pesante questi elettroni interni sono molto vicini al nucleo, e il calcolo di Bohr per gli ioni idrogenoidi è una buona approssimazione, con una correzione: l'elettrone che scende «vede» il nucleo schermato dall'altro elettrone dello strato K, cioè una carica efficace $(Z - 1)e$. L'energia della riga è allora circa

$$E(K_\alpha) \approx 13{,}6\ \text{eV} \cdot (Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = 10{,}2\ \text{eV} \cdot (Z-1)^2$$

Per il rame ($Z = 29$) si ottiene $10{,}2\ \text{eV} \times 28^2 = 8{,}0$ keV, cioè $\lambda = 1240\ \text{eV·nm}/8000\ \text{eV} = 0{,}155$ nm; il valore misurato è 0,154 nm. Poco dopo il modello di Bohr, il giovane fisico inglese Henry Moseley misurò le righe K_α di molti elementi e trovò che la radice quadrata della frequenza cresce in proporzione a $Z - 1$. Il numero d'ordine degli elementi nella tavola periodica, fino ad allora una semplice posizione, risultò essere la carica del nucleo; Moseley confermò l'ordine di alcune coppie di elementi che la massa atomica avrebbe messo al contrario, come il cobalto e il nichel, e indicò i posti vuoti di elementi non ancora scoperti. La riga K_α del rame è ancora oggi la radiazione più usata per studiare la struttura dei cristalli.

12.4.4 I limiti del modello di Bohr

Il successo del modello con l'idrogeno fu travolgente, ma i suoi limiti apparvero presto. Non funziona per gli atomi con più di un elettrone, nemmeno per l'elio neutro: le energie calcolate trattando ogni elettrone come se fosse solo sono sbagliate, perché gli elettroni si respingono fra loro. Non dice nulla sull'**intensità** delle righe, cioè su quali transizioni avvengono più spesso,

né sulla loro **struttura fine**: osservate con spettroscopi molto risolutivi, molte righe dell'idrogeno si rivelano formate da più righe vicinissime. Soprattutto, è un ibrido: usa la meccanica classica per calcolare le orbite, poi la sospende per decreto (l'elettrone in orbita non irraggia) e aggiunge una condizione di quantizzazione senza spiegarla.

Il modello di Bohr resta però un passo decisivo. Ha introdotto i livelli energetici e le transizioni fra livelli, concetti che sono sopravvissuti intatti nella meccanica quantistica e su cui si basa tutto il resto di questo capitolo. Le orbite, invece, non sono sopravvissute: nel capitolo 13 vedrai che il principio di indeterminazione vieta di attribuire all'elettrone una traiettoria, e che le «orbite» vanno sostituite da distribuzioni di probabilità. I valori delle energie dell'idrogeno, curiosamente, restano quelli di Bohr.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: lo spettro dell'idrogeno e la costante di Rydberg

Materiali. Un tubo spettrale a idrogeno con il suo alimentatore ad alta tensione (alcuni kilovolt), acceso e maneggiato solo dall'insegnante; uno spettrometro a goniometro, con collimatore, cannocchiale e nonio che permette di leggere gli angoli a 1′ (un sessantesimo di grado); un reticolo di trasmissione da 600 righe/mm, cioè di passo $d = 1{,}667$ µm; un'aula oscurabile.

Procedimento. 1) Regola il cannocchiale all'infinito e il collimatore in modo che l'immagine della fenditura sia nitida e sottile. 2) Monta il reticolo sulla piattaforma, perpendicolare al fascio del collimatore, e individua l'immagine di ordine zero. 3) Ruota il cannocchiale da una parte e dall'altra e, per ognuna delle quattro righe visibili, leggi le posizioni angolari del primo ordine a destra e a sinistra: l'angolo di diffrazione θ è metà della differenza fra le due letture, un metodo che elimina l'errore sullo zero. 4) Calcola $\lambda = d \operatorname{sen} \theta$ e $1/\lambda$; assegna a ogni riga il suo numero n, a partire da $n = 3$ per la riga rossa. 5) Costruisci il grafico di $1/\lambda$ in funzione di $1/4 - 1/n^2$.

Tabella 12.3 Angoli di diffrazione del primo ordine delle righe visibili dell'idrogeno, con un reticolo da 600 righe/mm (dati tipici). Incertezza sugli angoli ±0,05°; l'incertezza su $1/\lambda$ va da $0{,}003 \times 10^6$ m^{-1} (H_α) a $0{,}008 \times 10^6$ m^{-1} (H_δ).

Riga	n	θ (°)	λ (nm)	$1/4 - 1/n^2$	$1/\lambda$ (10^6 m^{-1})
H_α	3	23,20	656,6 ± 1,3	0,1389	1,523
H_β	4	16,95	485,9 ± 1,4	0,1875	2,058
H_γ	5	15,10	434,2 ± 1,4	0,2100	2,303
H_δ	6	14,25	410,3 ± 1,4	0,2222	2,438

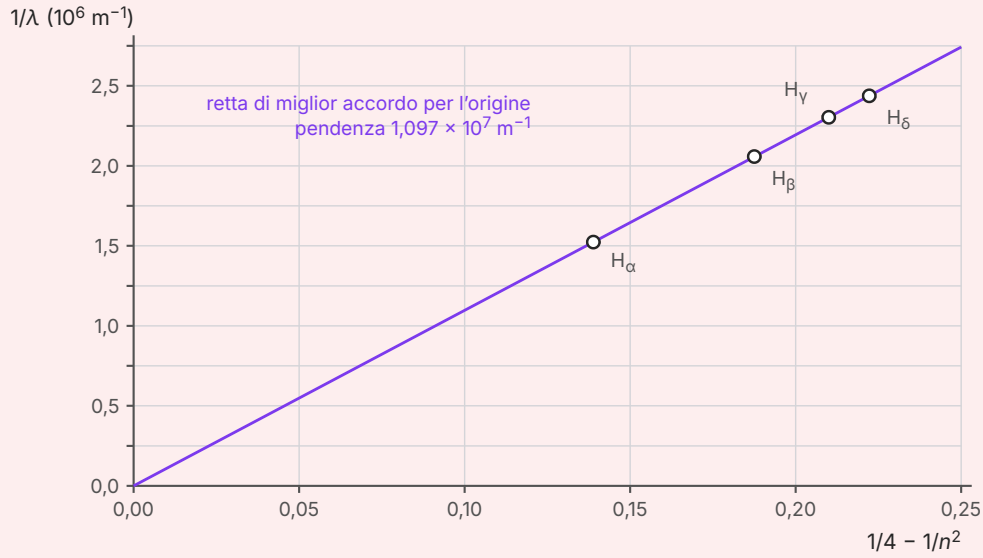


Figura 12.5 L'inverso delle lunghezze d'onda misurate (dati tipici della Tabella 12.3) in funzione di $1/4 - 1/n^2$. I punti stanno su una retta che passa per l'origine, come prevede la formula di Rydberg; la pendenza è la costante di Rydberg. Le barre d'errore sono più piccole dei punti.

Che cosa concludere. Le quattro lunghezze d'onda misurate coincidono, entro l'incertezza di circa ±1,4 nm, con quelle tabulate in aria (656,3 nm, 486,1 nm, 434,0 nm e 410,2 nm). Nella Figura 12.5 i punti sono allineati su una retta per l'origine: la dipendenza da $1/4 - 1/n^2$ prevista da Balmer e da Bohr è confermata, e con essa l'assegnazione $n = 3, 4, 5, 6$. La retta di miglior accordo per l'origine ha pendenza $1{,}0970 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$; le rette di massima e di minima pendenza compatibili con tutte le barre d'errore hanno pendenze $1{,}0988 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$ e $1{,}0945 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$. La misura è quindi $R_\text{H} = (1{,}097 \pm 0{,}002) \times 10^7\ \text{m}^{-1}$, con un'incertezza relativa dello 0,2%.

Confronto teoria–esperimento. Il valore accettato della costante di Rydberg per l'idrogeno è $1{,}0968 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$, ma vale per le lunghezze d'onda nel vuoto; quelle misurate in aria sono più corte di circa 0,03%, quindi la pendenza attesa con le nostre misure è $1{,}0971 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$. La differenza fra misura e previsione, $0{,}0001 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$, è molto minore dell'incertezza della misura, $0{,}002 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$: i due valori sono compatibili, e la correzione per l'aria è troppo piccola per essere rivelata con questo strumento. Il risultato conferma anche la previsione di Bohr $R_\text{H} = |E_1|/(hc)$: con $hc = 1240$ eV·nm la pendenza misurata corrisponde a $|E_1| = (13{,}60 \pm 0{,}03)$ eV.

Sicurezza. L'alimentatore del tubo spettrale lavora ad alta tensione: lo accende, lo spegne e lo maneggia soltanto l'insegnante, e nessuno tocca il tubo o i suoi contatti mentre è acceso. Il tubo si scalda: lascialo raffreddare prima di sostituirlo. Non fissare a lungo il tubo a breve distanza, perché emette anche un po' di ultravioletto.

Per la relazione. Segui lo schema di *Fisica 1*. Riporta le letture a destra e a sinistra per ogni riga e spiega perché il metodo elimina l'errore sullo zero. Costruisci il grafico con le barre d'errore e

determina la pendenza con le rette di massima e minima pendenza. Discuti l'incertezza sul passo del reticolo, che qui è stata trascurata: come potresti misurarlo usando una riga di lunghezza d'onda nota, per esempio la riga verde del mercurio a 546,1 nm? Infine, prevedi l'angolo a cui comparirebbe la riga H_α nel secondo ordine e verifica la previsione.

12.5 L'esperimento di Franck e Hertz

12.5.1 Livelli energetici senza luce

Il modello di Bohr era costruito per spiegare gli spettri, cioè la luce. Se però i livelli energetici sono una proprietà reale degli atomi, devono comparire anche quando gli atomi scambiano energia in altro modo, per esempio negli urti con gli elettroni. Un atomo che possiede solo certi livelli non può assorbire da un elettrone una quantità di energia qualsiasi, ma solo i salti fra i suoi livelli. Nel 1914 James Franck e Gustav Hertz realizzarono un esperimento che lo mostra in modo diretto.

L'apparato è schematizzato nella Figura 12.6a. In un tubo contenente vapore di mercurio a bassa pressione (il tubo viene scaldato a circa 150–200 °C perché il mercurio evapori) un catodo K, riscaldato, emette elettroni per emissione termoionica (*Fisica 4*, capitolo 11). Una tensione regolabile V fra il catodo e una griglia G accelera gli elettroni, che attraversano la griglia e raggiungono l'anodo A, dove sono raccolti e misurati da un amperometro. Fra griglia e anodo c'è una piccola tensione frenante, di circa 1,5 V: arrivano all'anodo solo gli elettroni che superano la griglia con un'energia cinetica di almeno 1,5 eV.

12.5.2 La corrente anodica

Lungo il percorso gli elettroni urtano molte volte gli atomi di mercurio. Finché la loro energia cinetica è inferiore a 4,9 eV gli urti sono **elastici**: l'atomo è circa 370 000 volte più pesante dell'elettrone, e l'elettrone rimbalza cambiando direzione ma perdendo una frazione trascurabile della sua energia, come una pallina contro un muro. Aumentando V, la corrente anodica cresce. Quando però un elettrone raggiunge, vicino alla griglia, l'energia di 4,9 eV, può cedere tutta questa energia a un atomo di mercurio in un urto **anelastico**, portandolo dallo stato fondamentale al primo stato eccitato. L'elettrone resta con un'energia quasi nulla e non riesce più a superare la tensione frenante: la corrente anodica **diminuisce bruscamente** (Figura 12.6b).

Aumentando ancora la tensione, l'urto anelastico avviene sempre più lontano dalla griglia, e dopo l'urto l'elettrone ha lo spazio per riaccelerare: la corrente torna a crescere. Quando la tensione permette a un elettrone di acquistare due volte 4,9 eV lungo il percorso, l'elettrone può eccitare due atomi uno dopo l'altro, e la corrente cala una seconda volta; poi una terza, e così via. Il risultato è una curva con massimi e minimi regolarmente spaziati di 4,9 V. La spaziatura misura direttamente, in elettronvolt, la distanza fra lo stato fondamentale del mercurio e il suo primo stato eccitato. Le posizioni assolute dei picchi, invece, sono spostate di qualche volt, so-

prattutto per la differenza di potenziale di contatto fra i metalli del catodo e della griglia: per questo nell'analisi si usano le differenze fra le posizioni.

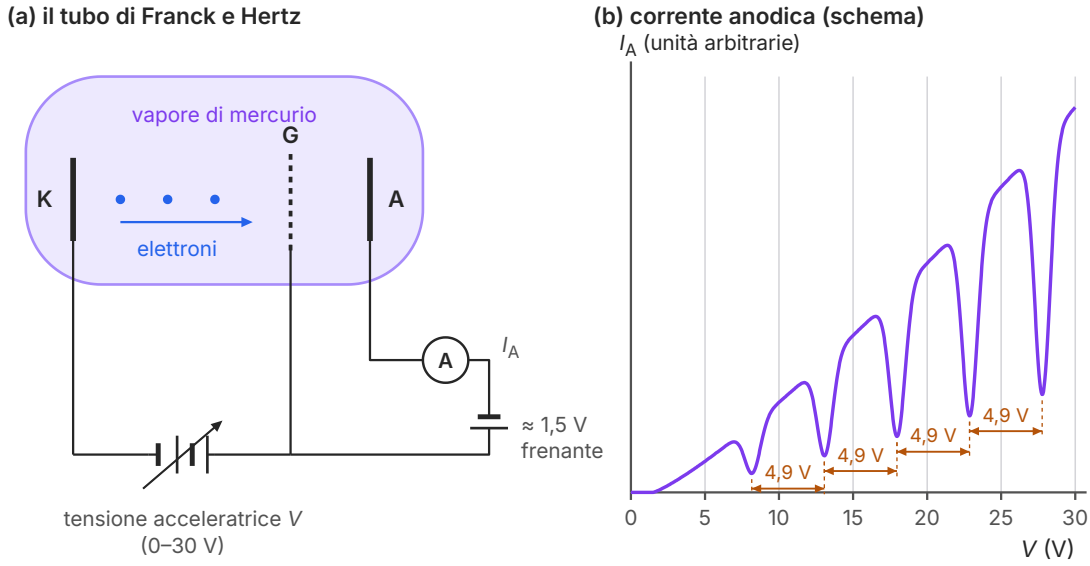


Figura 12.6 (a) Schema del tubo di Franck e Hertz: il catodo K emette elettroni, che la tensione V accelera verso la griglia G; fra griglia e anodo A una piccola tensione frenante respinge gli elettroni troppo lenti, e l'amperometro misura la corrente anodica I_A. (b) Andamento della corrente anodica in funzione di V (schema qualitativo, in unità arbitrarie): i minimi sono spaziati di 4,9 V, l'energia del primo stato eccitato dell'atomo di mercurio.

12.5.3 La riga a 254 nm

Che cosa succede agli atomi eccitati? Dopo un tempo brevissimo tornano allo stato fondamentale, emettendo ciascuno un fotone di energia 4,9 eV. La sua lunghezza d'onda è $\lambda = 1240\ \text{eV·nm}/4{,}9\ \text{eV} \approx 253$ nm, nell'ultravioletto. In un tubo con una finestra trasparente all'ultravioletto (il vetro comune lo assorbe; serve il quarzo) si osserva proprio questo: quando la tensione supera 4,9 V il vapore emette la riga a 253,7 nm, una delle righe più intense dello spettro del mercurio, e al di sotto non emette nulla. La stessa energia, 4,9 eV, misurata in due modi indipendenti: con gli elettroni, come perdita di energia negli urti, e con la luce, come energia del fotone emesso.

Curiosamente, Franck e Hertz interpretarono all'inizio i 4,9 V come l'energia necessaria per **ionizzare** il mercurio; solo in seguito fu chiaro che si trattava dell'energia di eccitazione del primo livello, in accordo con il modello di Bohr (l'energia di ionizzazione del mercurio è circa 10,4 eV). Il loro esperimento è diventato la conferma più diretta dell'esistenza dei livelli energetici: l'atomo assorbe energia solo a pacchetti, sia dalla luce sia dalla materia.

ESEMPIO SVOLTO

Dalla curva di Franck e Hertz alla lunghezza d'onda

Problema. In un esperimento con un tubo a mercurio si leggono sulla curva della corrente anodica le posizioni di cinque minimi consecutivi: 8,2 V, 13,1 V, 18,0 V, 22,9 V, 27,8 V, ciascuna con un'incertezza di ±0,1 V (dati tipici). a) Ricava l'energia del primo stato eccitato del mercurio con la sua incertezza. b) Calcola la lunghezza d'onda della radiazione emessa dagli atomi eccitati e confrontala con il valore tabulato, 253,7 nm.

Passo 1: le differenze. Le differenze fra minimi consecutivi sono 4,9 V, 4,9 V, 4,9 V e 4,9 V: costanti, come previsto. Per stimare la spaziatura con la migliore precisione non conviene fare la media delle quattro differenze, perché la media si riduce a (ultimo − primo)/4 e le letture intermedie si cancellano. Si usa direttamente:

$$\Delta V = \frac{27{,}8\ \text{V} - 8{,}2\ \text{V}}{4} = \frac{19{,}6\ \text{V}}{4} = 4{,}90\ \text{V}$$

Passo 2: l'incertezza. L'incertezza su una differenza è la somma delle incertezze, 0,2 V; divisa per 4 dà 0,05 V. Quindi $\Delta V = (4{,}90 \pm 0{,}05)$ V, e l'energia di eccitazione è $\Delta E = e\Delta V = (4{,}90 \pm 0{,}05)$ eV. Dividere un intervallo lungo per il numero di spaziature è lo stesso trucco che si usa misurando il periodo di molte oscillazioni insieme (*Fisica 1*).

Passo 3: la lunghezza d'onda. Il fotone emesso nella diseccitazione ha energia ΔE, quindi

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1240\ \text{eV·nm}}{4{,}90\ \text{eV}} = 253\ \text{nm}$$

con incertezza relativa uguale a quella di ΔE, 0,05/4,90 ≈ 1%, cioè ±3 nm: $\lambda = (253 \pm 3)$ nm.

Passo 4: il confronto. Il valore tabulato, 253,7 nm, differisce dalla previsione di meno di 1 nm, molto meno dell'incertezza: i due valori sono compatibili. Viceversa, dalla riga tabulata si ricava l'energia di eccitazione 1240 eV·nm/253,7 nm = 4,89 eV.

Controllo. Il primo minimo non cade a 4,9 V ma a 8,2 V: non è un errore, è l'effetto della differenza di potenziale di contatto e della tensione frenante, che spostano tutti i minimi della stessa quantità e non cambiano le differenze.

12.6 Livelli energetici e luce

12.6.1 Assorbimento ed emissione spontanea

I livelli energetici non sono una particolarità dell'idrogeno o del mercurio: ogni atomo, ogni molecola, ogni solido ha i suoi, e le loro differenze stabiliscono quali fotoni la materia può assorbire ed emettere. Consideriamo due livelli di energia $E_1 < E_2$ di un atomo qualsiasi (Figura 12.7). Un fotone di energia $hf = E_2 - E_1$ può essere assorbito da un atomo che si trova in E_1: il fo-

tone scompare e l'atomo sale in E_2. Un atomo che si trova in E_2 ridiscende in E_1 da solo, dopo un tempo casuale, emettendo un fotone in una direzione casuale: è l'**emissione spontanea**. Per la maggior parte dei livelli eccitati degli atomi il tempo medio di permanenza è dell'ordine di 10^{-8} s.

Il tempo di ogni singola emissione è imprevedibile: si può dire soltanto con quale probabilità l'atomo si disecciterà nel prossimo nanosecondo. È lo stesso tipo di legge probabilistica che ritroverai nel decadimento dei nuclei radioattivi (capitolo 14). La luce di una lampada a scarica, di una fiamma, del Sole è prodotta da emissione spontanea: miliardi di atomi emettono ciascuno per conto proprio, in direzioni e istanti casuali, senza alcuna relazione di fase fra i fotoni.

12.6.2 L'emissione stimolata

Fra il 1916 e il 1917 Einstein, ragionando sull'equilibrio fra atomi e radiazione, capì che ai due processi ne andava aggiunto un terzo. Se un fotone di energia esattamente $E_2 - E_1$ incontra un atomo che si trova **già** nello stato eccitato E_2, può indurlo a ridiscendere in E_1 emettendo un secondo fotone **identico** al primo: stessa frequenza, stessa direzione, stessa fase, stessa polarizzazione. È l'**emissione stimolata** (Figura 12.7c). Entra un fotone, ne escono due uguali: la luce è stata amplificata.

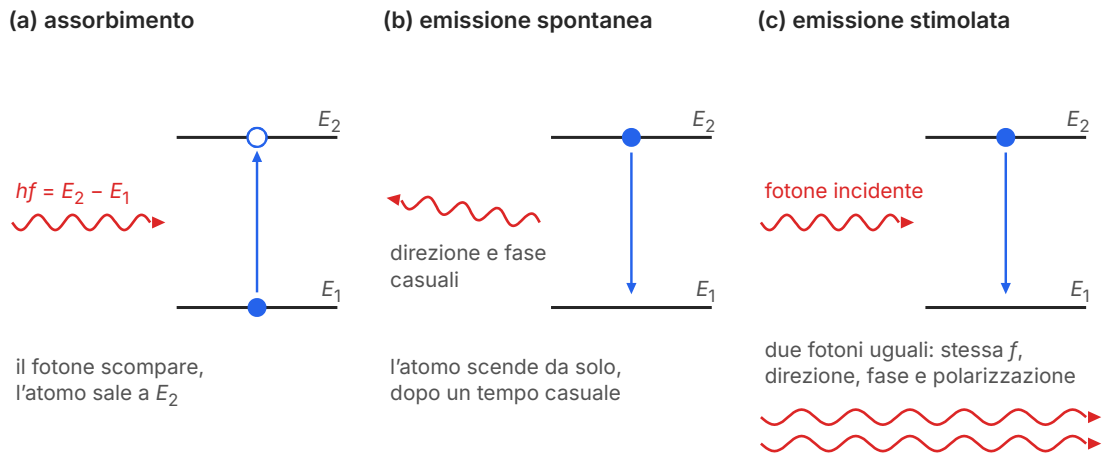


Figura 12.7 I tre processi di interazione fra un atomo con due livelli e la radiazione. (a) Assorbimento: un fotone di energia $E_2 - E_1$ viene assorbito e l'atomo passa allo stato eccitato. (b) Emissione spontanea: l'atomo eccitato ridiscende da solo, emettendo un fotone in direzione casuale. (c) Emissione stimolata: un fotone della stessa energia provoca la diseccitazione, e i due fotoni uscenti sono identici.

In condizioni normali l'emissione stimolata non si nota. In un gas all'equilibrio termico gli atomi nello stato più basso sono enormemente più numerosi di quelli nello stato eccitato, e un fotone che attraversa il gas ha molte più probabilità di essere assorbito che di stimolare un'emissione: la luce si attenua invece di amplificarsi. Per ottenere un'amplificazione serve una

situazione innaturale, in cui gli atomi nello stato più alto sono più numerosi di quelli nello stato più basso: un'**inversione di popolazione**.

12.6.3 Il laser

Il **laser** (dall'inglese *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*, amplificazione della luce per emissione stimolata di radiazione) è una sorgente che sfrutta proprio l'emissione stimolata. Ha tre componenti. Il **mezzo attivo** è un gas, un cristallo o un semiconduttore i cui atomi hanno un livello eccitato con una vita media lunga, anche millesimi di secondo invece di nanosecondi: uno **stato metastabile**. La **pompa** (una scarica elettrica, un lampo di luce, una corrente) porta continuamente gli atomi in livelli più alti, da cui scendono rapidamente nel livello metastabile e vi si accumulano, fino a realizzare l'inversione di popolazione. La **cavità ottica**, formata da due specchi paralleli, uno dei quali lascia passare una piccola frazione della luce, rimanda avanti e indietro nel mezzo attivo i fotoni emessi lungo l'asse, che a ogni passaggio stimolano nuove emissioni identiche; la frazione che attraversa lo specchio semitrasparente è il fascio laser.

Il primo laser, a cristallo di rubino, funzionò nel 1960. Nel comune laser a elio-neon la scarica porta gli atomi di elio in un livello metastabile; negli urti l'elio cede questa energia agli atomi di neon, portandoli in un livello eccitato di energia quasi uguale; il livello più basso della transizione laser si svuota rapidamente, e così si mantiene l'inversione di popolazione. La transizione del neon fra questi due livelli dà la riga rossa a 632,8 nm. La luce laser ha proprietà che nessuna lampada possiede: è quasi **monocromatica**, perché tutti i fotoni nascono dalla stessa transizione; è **coerente**, perché i fotoni hanno la stessa fase, e può quindi produrre interferenza anche dopo percorsi molto lunghi (*Fisica 4*, capitolo 8); è **direzionale**, perché la cavità seleziona i fotoni che viaggiano lungo il suo asse, e il fascio si allarga pochissimo.

12.6.4 La fluorescenza

Una molecola o un atomo eccitato non torna sempre allo stato di partenza con un solo salto: può scendere a gradini, passando per livelli intermedi, e parte dell'energia può essere ceduta al materiale come energia termica, senza emissione di luce. In questo caso i fotoni emessi hanno energia **minore** di quelli assorbiti, cioè lunghezza d'onda maggiore. È la fluorescenza, che hai incontrato nel capitolo 6 a proposito dell'ultravioletto: ora ne vedi l'origine nei livelli energetici. Certe sostanze illuminate con ultravioletto, invisibile, emettono luce visibile. Brillano così, sotto la «luce nera» di una lampada UV, gli inchiostri degli evidenziatori, le fibre e gli inchiostri di sicurezza delle banconote, alcuni minerali. Se l'emissione avviene dopo molto tempo, secondi o minuti, perché il livello intermedio è metastabile, si parla di fosforescenza: è la luce delle lancette che brillano al buio.

Nelle lampade fluorescenti tubolari la fluorescenza lavora insieme all'esperimento di Franck e Hertz. Nel tubo, contenente vapore di mercurio, una scarica elettrica accelera elettroni che eccitano gli atomi di mercurio; diseccitandosi, gli atomi emettono soprattutto la riga ultravio-

letta a 254 nm. Il rivestimento bianco all'interno del tubo è una miscela di sostanze fluorescenti che assorbono l'ultravioletto e riemettono luce visibile in diverse bande di colore, scelte in modo che l'insieme appaia bianco.

COLLEGAMENTI

Il laser in medicina, nell'industria e nella vita quotidiana

I lettori di codici a barre alle casse dei supermercati usano un fascio laser che scorre sul codice; le fibre ottiche che portano internet nelle case trasmettono impulsi di luce laser infrarossa a migliaia di chilometri. In chirurgia oculistica il laser rimodella la cornea per correggere la miopia, con una precisione di pochi micrometri; in dermatologia elimina macchie e tatuaggi, perché ogni pigmento assorbe meglio certe lunghezze d'onda. Nell'industria laser di potenza tagliano e saldano lamiere d'acciaio. Gli astronomi inviano impulsi laser verso i catarifrangenti lasciati sulla Luna dalle missioni Apollo e misurano la distanza Terra–Luna dal tempo di andata e ritorno, con un'incertezza dell'ordine del centimetro o inferiore.

I puntatori laser e i laser didattici sono di classe 2: potenza inferiore a 1 mW, sicuri perché il riflesso di chiusura delle palpebre protegge l'occhio da una esposizione accidentale. Anche così, il fascio non va mai diretto negli occhi di qualcuno, né guardato direttamente o attraverso strumenti ottici: concentrato dal cristallino in un punto minuscolo della retina, anche un milliwatt dà un'intensità altissima. I laser di classe superiore richiedono occhiali protettivi specifici per la loro lunghezza d'onda.

DA RICORDARE

Verso l'esame: livelli energetici e righe spettrali

Questo capitolo appartiene al nucleo tematico **Onde e particelle**, con collegamenti a **Energia e materia** e a **Forze e campi** (la diffusione delle particelle α è un problema di campo coulombiano e di conservazione dell'energia). Fra gli obiettivi del quadro di riferimento c'è esplicitamente il calcolo delle frequenze emesse nelle transizioni fra i livelli dell'atomo di Bohr. Le richieste tipiche sono: calcolare energia, frequenza e lunghezza d'onda di una riga; riconoscere la serie a cui appartiene e la regione dello spettro; contare le righe che può emettere un gas eccitato fino a un certo livello; calcolare l'energia di ionizzazione da un livello qualsiasi, anche per uno ione idrogenoide; interpretare una curva di Franck e Hertz o una tabella di righe misurate.

Le insidie ricorrenti: confondere l'energia di un livello con l'energia del fotone, che è una differenza; invertire n_i e n_f e ottenere una lunghezza d'onda negativa; dimenticare la conversione fra eV e J (1 eV = 1,60 × 10^{-19} J), o usare hc = 1240 eV·nm con le lunghezze d'onda in metri; arrotondare troppo presto, perché le differenze fra livelli vicini richiedono tre cifre significative sulle energie. Quando devi argomentare, la chiave è quasi sempre la stessa: l'atomo scambia energia solo per salti fra livelli, e un fotone viene assorbito solo se la sua energia è esattamente uguale a uno di questi salti (o supera l'energia di ionizzazione); un elettrone, invece, può cedere anche solo una parte della sua energia.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$r_{\text{min}} = k_0 qQ/K_0$ — distanza di minimo avvicinamento in un urto frontale fra una particella di carica q e energia cinetica K_0 e un nucleo di carica Q (modello nucleare, forza di Coulomb, nucleo fermo). $\tan(\theta/2) = r_{\text{min}}/(2b)$: angolo di deflessione per il parametro d'urto b.

$\frac{1}{\lambda} = R_{\text{H}} \left(\frac{1}{n_{\text{f}}^2} - \frac{1}{n_{\text{i}}^2}\right)$ — formula di Rydberg per le righe dell'idrogeno, con $R_{\text{H}} = 1{,}097 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$ e $n_{\text{i}} > n_{\text{f}}$ interi; con $n_{\text{f}} = 2$ è la formula di Balmer. Dà le lunghezze d'onda nel vuoto.

$L = m_{\text{e}} v r = nh/(2\pi) = n\hbar$ — condizione di quantizzazione di Bohr; $n = 1, 2, 3, \ldots$ è il numero quantico principale.

$r_n = n^2 r_1$, $r_1 = \varepsilon_0 h^2/(\pi m_{\text{e}} e^2) = 5{,}29 \times 10^{-11}$ m — raggi delle orbite di Bohr nell'idrogeno (crescono come n^2).

$E_n = -13{,}6\ \text{eV}/n^2$ — livelli energetici dell'idrogeno: negativi perché legati, con lo zero per l'elettrone libero; 13,6 eV è l'energia di ionizzazione dallo stato fondamentale.

$hf = hc/\lambda = E_{\text{i}} - E_{\text{f}}$ — energia del fotone emesso (o assorbito) in una transizione; con le energie in eV, λ (nm) $= 1240/(hf$ in eV$)$. $R_{\text{H}} = |E_1|/(hc)$.

$r_n = n^2 r_1/Z$, $E_n = -13{,}6\ \text{eV} \cdot Z^2/n^2$ — ioni idrogenoidi (un solo elettrone, nucleo di carica Ze).

$\Delta E = e\Delta V$ — energia di eccitazione dalla spaziatura ΔV dei minimi della curva di Franck e Hertz (4,9 eV per il mercurio).

$E(\text{K}_\alpha) \approx 10{,}2\ \text{eV} \cdot (Z - 1)^2$ — stima di Bohr per la riga K_α dei raggi X caratteristici di un elemento pesante.

SINTESI

- Nel modello di Thomson la carica positiva dell'atomo era diffusa in tutto il suo volume. Le grandi deviazioni delle particelle α osservate da Geiger e Marsden (1909) portarono Rutherford (1911) al modello nucleare: carica positiva e quasi tutta la massa in un nucleo di circa 10^{-14} m, cioè decine di migliaia di volte più piccolo dell'atomo.
- Una particella α che si avvicina a un nucleo percorre un ramo d'iperbole; nell'urto frontale si ferma alla distanza di minimo avvicinamento $r_{min} = k_0 qQ/K_0$, e l'angolo di deflessione cresce al diminuire del parametro d'urto: $\tan(\theta/2) = r_{min}/(2b)$.
- Secondo l'elettromagnetismo classico un elettrone in orbita irraggia e cade sul nucleo in circa 10^{-11} s, emettendo uno spettro continuo: la fisica classica non spiega né la stabilità degli atomi né gli spettri a righe.
- Un gas rarefatto eccitato emette uno spettro a righe caratteristico dell'elemento; lo stesso gas, più freddo, assorbe dalla luce bianca le stesse lunghezze d'onda (spettro di assorbimento, righe di Fraunhofer del Sole).
- Le righe dell'idrogeno seguono la formula di Rydberg, $1/\lambda = R_H(1/n_f^2 - 1/n_i^2)$, con $R_H = 1{,}097 \times 10^7\ m^{-1}$; le serie di Lyman (ultravioletto), Balmer (visibile) e Paschen (infrarosso) hanno $n_f = 1, 2, 3$.
- Bohr (1913) postulò stati stazionari che non irraggiano, la quantizzazione del momento angolare $m_e vr = n\hbar$ e l'emissione di un fotone $hf = E_i - E_f$ nelle transizioni fra stati.
- Dai postulati seguono $r_n = n^2 r_1$, con il raggio di Bohr $r_1 = 5{,}29 \times 10^{-11}$ m, e i livelli $E_n = -13{,}6\ \text{eV}/n^2$, negativi perché legati; la costante di Rydberg risulta $|E_1|/(hc)$, in accordo con le misure.
- Lo stato fondamentale ($n = 1$) è il più stabile; l'energia di ionizzazione dell'idrogeno è 13,6 eV. Negli ioni idrogenoidi i livelli sono Z^2 volte più profondi. Il modello di Bohr non funziona per gli atomi con più elettroni e non spiega le intensità delle righe; i livelli energetici sopravvivono nella meccanica quantistica, le orbite no.
- Nell'esperimento di Franck e Hertz (1914) la corrente di elettroni in vapore di mercurio cala ogni 4,9 V: gli elettroni cedono energia agli atomi solo a pacchetti di 4,9 eV, e gli atomi eccitati emettono la riga a 254 nm. I livelli si osservano anche senza la luce.
- Un atomo può assorbire un fotone, emetterne uno spontaneamente o, colpito da un fotone di energia giusta mentre è eccitato, emetterne uno identico per emissione stimolata. Il laser sfrutta l'emissione stimolata in un mezzo con inversione di popolazione, dentro una cavità ottica: la sua luce è monocromatica, coerente e direzionale.
- Nella fluorescenza la materia riemette a lunghezza d'onda maggiore la radiazione assorbita (lampade fluorescenti, evidenziatori); i raggi X caratteristici nascono dalle transizioni degli elettroni più interni degli atomi pesanti, con energia circa $10{,}2\ \text{eV} \cdot (Z-1)^2$.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Nell'esperimento di Geiger e Marsden alcune particelle α vengono deviate di più di 90° attraversando una lamina d'oro. Rutherford ne dedusse che:
   A. la carica positiva dell'atomo è distribuita uniformemente in tutto il suo volume
   B. gli elettroni sono molto più pesanti di quanto si credesse
   C. la carica positiva e quasi tutta la massa dell'atomo sono concentrate in un nucleo piccolissimo
   D. le particelle α sono attratte dai nuclei d'oro

2. ● Nel modello di Bohr l'energia dello stato n dell'atomo di idrogeno:
   A. è negativa e proporzionale a $1/n^2$
   B. è positiva e proporzionale a n^2
   C. è negativa e proporzionale a n
   D. è positiva e proporzionale a $1/n$

3. ● Un atomo di idrogeno passa dallo stato $n = 3$ allo stato $n = 2$. L'atomo:
   A. assorbe un fotone di energia $E_3 - E_2$
   B. emette un fotone di energia E_3
   C. emette un elettrone
   D. emette un fotone di energia $E_3 - E_2$

4. ●● Nel modello di Bohr il raggio dell'orbita con $n = 3$ è, rispetto al raggio di Bohr r_1:
   A. 3 volte più grande
   B. 9 volte più grande
   C. 9 volte più piccolo
   D. 27 volte più grande

5. ● L'esperimento di Franck e Hertz ha mostrato che:
   A. gli atomi di mercurio assorbono energia dagli elettroni solo in quantità determinate
   B. gli elettroni si comportano come onde
   C. la carica elettrica è quantizzata
   D. l'atomo di mercurio ha un nucleo piccolissimo

6. ●● Luce bianca attraversa un recipiente contenente vapore di sodio freddo e poi uno spettroscopio. Si osserva:
   A. uno spettro continuo senza righe
   B. soltanto le righe gialle del sodio su fondo scuro
   C. uno spettro continuo con righe scure alle stesse lunghezze d'onda delle righe di emissione del sodio
   D. uno spettro continuo con righe scure a lunghezze d'onda diverse da quelle delle righe di emissione del sodio

7. ●● La luce di un laser è prodotta soprattutto per:
   A. emissione spontanea di atomi eccitati da una scarica
   B. fluorescenza di un rivestimento colpito da ultravioletto
   C. assorbimento di fotoni da parte di un gas freddo
   D. emissione stimolata in un mezzo con inversione di popolazione

8. ●● Un atomo di idrogeno si trova nello stato $n = 2$. L'energia minima necessaria per ionizzarlo è:
   A. 13,6 eV
   B. 3,40 eV
   C. 10,2 eV
   D. 6,80 eV

Vero o falso

9. ● Nel modello di Bohr le energie degli stati legati dell'atomo di idrogeno sono negative. V / F

10. ● Tutte le righe della serie di Balmer cadono nel visibile. V / F

11. ●● Se si aumenta l'intensità di una luce ultravioletta di 11,0 eV, un gas di idrogeno nello stato fondamentale comincia ad assorbirla. V / F

12. ●● Secondo l'elettromagnetismo classico, un elettrone in orbita circolare attorno a un nucleo dovrebbe irraggiare energia e cadere sul nucleo. V / F

Applicare

13. ● Calcola l'energia, in eV e in joule, e la lunghezza d'onda del fotone emesso da un atomo di idrogeno nella transizione da $n = 5$ a $n = 2$. Di quale riga si tratta?

14. ● Calcola il raggio dell'orbita e l'energia dello stato $n = 5$ dell'atomo di idrogeno nel modello di Bohr.

15. ● Usa la formula di Rydberg per calcolare la lunghezza d'onda della riga dell'idrogeno con $n_i = 6$ e $n_f = 2$. Di che colore è?

16. ●● Un atomo di idrogeno si trova nello stato $n = 3$. Calcola l'energia minima necessaria per ionizzarlo e la frequenza minima di un fotone capace di farlo. In quale regione dello spettro cade questo fotone?

17. ● Completa. In un atomo di idrogeno le transizioni che terminano nello stato $n = 1$ formano la serie di _____ , e i fotoni emessi cadono nella regione dell'_____. Un gas di idrogeno freddo, con gli atomi nello stato fondamentale, assorbe dalla luce soltanto le righe della serie di _____ . L'energia di ogni fotone emesso è uguale alla _____ fra le energie di due livelli.

18. ●● Nel diagramma dei livelli della Figura 12.4 considera atomi di idrogeno eccitati nello stato $n = 4$. Quante righe diverse possono emettere tornando allo stato fondamentale, direttamente o a gradini? Calcola le lunghezze d'onda di quelle che cadono nel visibile.

19. ●● Particelle α con energia cinetica 5,3 MeV colpiscono frontalmente nuclei d'oro ($Z = 79$). Calcola la distanza di minimo avvicinamento e confrontala con il raggio del nucleo d'oro, circa $7{,}0 \times 10^{-15}$ m.

20. ●● Calcola l'energia, la lunghezza d'onda e la frequenza del fotone emesso nella transizione da $n = 2$ a $n = 1$ dell'idrogeno (la riga Lyman α). Perché questa radiazione, emessa abbondantemente dal Sole, non si osserva con un telescopio a terra?

Problemi

21. ●●● (Con *Fisica 4*, capitolo 16.) Nel modello di Bohr l'elettrone dell'idrogeno nello stato fondamentale percorre un'orbita di raggio $5{,}29 \times 10^{-11}$ m alla velocità di $2{,}19 \times 10^{6}$ m/s. a) Calcola il periodo del moto. b) L'elettrone in orbita equivale a una spira percorsa da corrente: calcola l'intensità media della corrente. c) Calcola il campo magnetico che questa corrente produce al centro dell'orbita, cioè nella posizione del protone. d) Confronta il risultato con il campo di uno scanner per la risonanza magnetica (1,5–3 T).

22. ●●● Lo ione He^+ ha un solo elettrone e un nucleo con $Z = 2$. a) Calcola l'energia dello stato fondamentale e l'energia di ionizzazione dello ione. b) Calcola il raggio della prima orbita. c) Calcola la lunghezza d'onda del fotone emesso nella transizione da $n = 4$ a $n = 3$ e indica la regione dello spettro. d) Mostra che la transizione da $n = 4$ a $n = 2$ dello ione He^+ emette fotoni della stessa energia della transizione da $n = 2$ a $n = 1$ dell'idrogeno.

23. ●● (Con il capitolo 11.) Un atomo di idrogeno, inizialmente fermo, emette un fotone della riga H_α ($\lambda = 656$ nm). a) Calcola la quantità di moto del fotone. b) Per la conservazione della quantità di moto l'atomo rincula: calcola la sua velocità di rinculo (massa dell'atomo $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg). c) Calcola l'energia cinetica di rinculo in eV e confrontala con l'energia del fotone: è giustificato scrivere $hf = E_3 - E_2$?

24. ●● Un gas di idrogeno con tutti gli atomi nello stato fondamentale è illuminato da fotoni ultravioletti di quattro energie: 10,2 eV, 11,0 eV, 12,1 eV e 12,5 eV. a) Quali fotoni vengono assorbiti? Giustifica la risposta. b) Gli atomi che hanno assorbito i fotoni di 12,1 eV tornano allo stato fondamentale: elenca i fotoni che possono emettere, con le loro lunghezze d'onda.

25. ●●● In un tubo contenente idrogeno atomico a bassa pressione, elettroni accelerati da una differenza di potenziale ΔV urtano atomi che si trovano nello stato fondamentale. a) Qual è il valore minimo di ΔV perché il gas emetta la riga H_α? b) Con $\Delta V = 13{,}0$ V, qual è il livello più alto che gli elettroni possono eccitare? c) Quante righe diverse emette allora il gas, e quali sono visibili? d) Che cosa cambierebbe con $\Delta V = 14{,}0$ V?

26. ●● (Con *Fisica 4*, capitolo 8.) La luce di una lampada a idrogeno incide perpendicolarmente su un reticolo da 500 righe/mm. a) Calcola gli angoli di diffrazione del primo e del secondo ordine delle righe H_α (656,3 nm) e H_β (486,1 nm). b) Qual è l'ordine più alto in cui si può osservare la riga H_α, e a quale angolo?

27. ●●● (Con il capitolo 11.) Un laser a elio-neon emette 1,0 mW di luce a 632,8 nm. a) Calcola l'energia di un fotone in eV e in joule. b) Calcola il numero di fotoni emessi in un secondo. c) All'equilibrio termico, il rapporto fra il numero di atomi in due livelli separati da ΔE è $N_2/N_1 = e^{-\Delta E/(k_B T)}$. Calcolalo per i due livelli del neon che danno la riga laser, a 300 K. d) Spiega perché il laser ha bisogno di una pompa.

28. ●●● Usa la stima $E(K_\alpha) \approx 10{,}2 \text{ eV} \cdot (Z-1)^2$ dell'Approfondimento sui raggi X caratteristici. a) Calcola energia e lunghezza d'onda della riga K_α del molibdeno ($Z = 42$) e confrontala con il valore misurato, 0,0709 nm. b) Il bersaglio di un tubo a raggi X emette una riga K_α a 0,193 nm: di quale elemento è fatto? c) Perché per produrre le righe K di un elemento la tensione del tubo deve superare un valore minimo, maggiore di $E(K_\alpha)/e$?

Ragionare e argomentare

29. ●●● Nello spettro del Sole, la cui superficie è a circa 5800 K, la riga H_α compare in assorbimento. Invece, se la luce di una lampada a incandescenza attraversa un tubo di idrogeno atomico a temperatura ambiente, nel visibile non si osserva nessuna riga scura. Spiega la differenza, stimando con il fattore $e^{-\Delta E/(k_B T)}$ la frazione di atomi che si trovano nello stato $n = 2$ alle due temperature.

30. ●● Trova l'errore. «La riga Lyman α ha una lunghezza d'onda maggiore della riga H_α, perché la transizione termina nel livello più basso, dove l'elettrone ha meno energia.»

31. ●●● Stima di Fermi. Una lamina d'oro spessa 1,0 μm (densità 19,3 g/cm^3, massa molare 197 g/mol) è colpita da particelle α da 7,7 MeV. Stima la frazione di particelle deviate di più di 90°, ricordando che servono parametri d'urto minori di $r_{min}/2$, e confrontala con l'osservazione di Geiger e Marsden. Spiega perché si può trascurare la possibilità che una particella passi vicino a due nuclei.

Verso l'esame di Stato

32. ●●● **Quesito.** Con uno spettroscopio a reticolo si osserva la luce di un tubo a scarica contenente idrogeno, e si misurano tre righe visibili a 656 nm, 486 nm e 434 nm. a) Calcola l'energia dei fotoni delle tre righe, in eV, e mostra che ciascuna coincide con la differenza fra due livelli dell'atomo di idrogeno nel modello di Bohr, identificando le transizioni. b) Disegna in scala il diagramma dei livelli da $n = 1$ a $n = 5$ e indica le tre transizioni. c) Calcola la lunghezza d'onda della riga successiva della stessa serie e quella del limite della serie, e spiega perché a occhio la riga successiva è molto difficile da vedere. d) Nella stessa scarica gli atomi emettono anche le righe della serie di Lyman, più energetiche, ma lo spettroscopio non le mostra. Proponi una spiegazione.

33. ●●● **Problema.** Una sorgente di americio-241 emette particelle α con energia cinetica 5,5 MeV (energia a riposo della particella α: 3727 MeV). a) (Con il capitolo 9.) Calcola il fattore di Lorentz e la velocità delle particelle, e verifica che l'espressione classica dell'energia cinetica dà la stessa velocità entro tre cifre significative. b) Calcola la distanza di minimo avvicinamento a un nucleo d'oro ($Z = 79$) in un urto frontale e confrontala con il raggio del nucleo, circa 7×10^{-15} m. c) Calcola l'angolo di deflessione per parametri d'urto $b = r_{min}$ e $b = 5r_{min}$, e il parametro d'urto massimo per cui la particella è deviata di più di 90°. d) La frazione di particelle deviate oltre 90° è proporzionale all'area del cerchio di raggio $r_{min}/2$ attorno a ogni nucleo. Argomenta come cambierebbe questa frazione usando una lamina d'argento ($Z = 47$) con lo stesso numero di atomi per unità di superficie, e raddoppiando l'energia delle particelle.

PER APPROFONDIRE

- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. III: i primi capitoli, dove le dimensioni e le energie dell'atomo di idrogeno si stimano con un ragionamento di poche righe, e la discussione dell'emissione stimolata e del laser.
- [EIN] A. Einstein, L. Infeld, *L'evoluzione della fisica*: le pagine sui quanti, sugli spettri a righe e sul modello di Bohr, raccontati senza formule da uno dei protagonisti.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: i capitoli sulla struttura dell'atomo, con l'esperimento di Rutherford, i livelli dell'idrogeno, i raggi X caratteristici e il laser, e molti esercizi.
- [QED] R. P. Feynman, *QED. La strana teoria della luce e della materia*: per capire che cosa diventano, nella teoria moderna, l'assorbimento e l'emissione di un fotone da parte di un elettrone.
- [TAY] J. R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*: il metodo dei minimi quadrati per una retta che passa per l'origine, utile per l'attività di laboratorio sulla costante di Rydberg.

Glossario del capitolo

Costante di Rydberg
La costante $R_H = 1{,}097 \times 10^7\ m^{-1}$ della formula di Rydberg; nel modello di Bohr vale $|E_1|/(hc)$.

Emissione spontanea
La diseccitazione di un atomo che, dopo un tempo casuale, scende a un livello inferiore emettendo un fotone in direzione casuale.

Emissione stimolata
L'emissione di un fotone da parte di un atomo eccitato, provocata da un fotone di uguale energia; il fotone emesso è identico a quello incidente.

Energia di ionizzazione
L'energia minima necessaria per strappare un elettrone a un atomo nello stato fondamentale; per l'idrogeno vale 13,6 eV.

Formula di Rydberg
La relazione $1/\lambda = R_H(1/n_f^2 - 1/n_i^2)$ che dà tutte le righe dell'idrogeno; per $n_f = 2$ è la formula di Balmer.

Inversione di popolazione
La condizione, non di equilibrio, in cui un livello energetico superiore è più popolato di uno inferiore; è necessaria per il funzionamento del laser.

Ione idrogenoide
Uno ione con un solo elettrone e un nucleo di carica Ze (He^+, Li^{2+}...), i cui livelli sono $-13{,}6\ eV \cdot Z^2/n^2$.

Laser
Sorgente di luce monocromatica, coerente e direzionale, basata sull'emissione stimolata in un mezzo con inversione di popolazione posto in una cavità ottica.

Livello energetico
Uno dei valori discreti che può assumere l'energia di un atomo (o di una molecola); per l'idrogeno $E_n = -13{,}6\ eV/n^2$.

Modello di Thomson
Modello dell'atomo come sfera di carica positiva uniforme, del raggio dell'atomo, in cui sono immersi gli elettroni; smentito dalla diffusione delle particelle α.

Modello nucleare
Modello dell'atomo proposto da Rutherford nel 1911: un nucleo positivo piccolissimo e, attorno, gli elettroni in uno spazio quasi vuoto.

Nucleo atomico
La regione centrale dell'atomo, di dimensioni dell'ordine di 10^{-15}–10^{-14} m, in cui sono concentrate la carica positiva e quasi tutta la massa.

Numero quantico principale
Il numero intero $n = 1, 2, 3, \ldots$ che individua lo stato stazionario dell'atomo di idrogeno e ne determina energia e raggio.

Parametro d'urto
La distanza fra la retta lungo cui si muove una particella prima dell'urto e il centro che la devia; più è piccolo, più la deviazione è grande.

Raggio di Bohr
Il raggio dell'orbita più piccola dell'atomo di idrogeno nel modello di Bohr: $r_1 = 5{,}29 \times 10^{-11}$ m.

Spettro di assorbimento
Spettro continuo in cui compaiono righe scure, alle lunghezze d'onda assorbite da un gas attraversato dalla luce; coincidono con le righe di emissione dello stesso gas.

Spettro di emissione
L'insieme delle lunghezze d'onda emesse da una sorgente; per un gas rarefatto eccitato è formato da righe luminose su fondo scuro.

Stato eccitato
Uno stato di energia maggiore di quella dello stato fondamentale, da cui l'atomo ridiscende emettendo fotoni.

Stato fondamentale
Lo stato di energia più bassa di un atomo, in cui l'atomo si trova normalmente e da cui non può scendere ulteriormente.

Stato stazionario
Nel modello di Bohr, uno stato dell'atomo con energia definita in cui l'elettrone non irraggia.

Soluzioni

1. C. Una carica positiva diffusa non può respingere all'indietro una particella pesante e veloce; serve una carica concentrata in una regione minuscola, vicino alla quale la repulsione coulombiana diventa enorme.

2. A. $E_n = -13{,}6\ \text{eV}/n^2$: negativa (stato legato) e proporzionale a $1/n^2$.

3. D. Scendendo a un livello più basso l'atomo emette un fotone che porta via la differenza di energia fra i due livelli.

4. B. $r_n = n^2 r_1$, quindi $r_3 = 9r_1$.

5. A. La corrente cala ogni 4,9 V perché gli elettroni cedono energia agli atomi solo a pacchetti di 4,9 eV, la distanza fra lo stato fondamentale e il primo stato eccitato.

6. C. Il gas assorbe proprio le lunghezze d'onda che è capace di emettere: le righe scure coincidono con quelle di emissione.

7. D. Nel mezzo attivo, con più atomi nel livello alto che in quello basso, ogni fotone stimola l'emissione di fotoni identici, e la cavità ottica amplifica il fascio.

8. B. Per ionizzare bisogna portare l'energia da $E_2 = -3{,}40$ eV a zero: servono 3,40 eV.

9. V. Lo zero corrisponde all'elettrone libero; negli stati legati l'energia totale è negativa, $E_n = -13{,}6\ \text{eV}/n^2$.

10. F. Le righe con n elevato cadono nell'ultravioletto vicino, e si addensano verso il limite della serie a 365 nm.

11. F. 11,0 eV non coincide con nessuna differenza fra lo stato fondamentale e un livello eccitato (10,2 eV, 12,1 eV, ...) ed è minore di 13,6 eV: ogni fotone è assorbito o no da solo, e aumentare l'intensità aumenta solo il numero di fotoni.

12. V. Un elettrone in moto circolare è accelerato, quindi irraggia; perdendo energia dovrebbe scendere a spirale sul nucleo in circa 10^{-11} s. Il modello di Bohr esclude questo comportamento con un postulato.

13. $\Delta E = 13{,}6\ \text{eV} \times (1/4 - 1/25) = 2{,}86\ \text{eV} = 2{,}86 \times 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J} = 4{,}57 \times 10^{-19}\ \text{J}$; $\lambda = 1240\ \text{eV·nm}/2{,}856\ \text{eV} = 434$ nm. È la riga violetta H_γ.

14. $r_5 = 25 \times 5{,}29 \times 10^{-11}\ \text{m} = 1{,}32 \times 10^{-9}\ \text{m}$; $E_5 = -13{,}6\ \text{eV}/25 = -0{,}544$ eV.

15. $1/\lambda = 1{,}097 \times 10^7\ \text{m}^{-1} \times (1/4 - 1/36) = 2{,}438 \times 10^6\ \text{m}^{-1}$, $\lambda = 410$ nm: violetto (riga H_δ).

16. Serve portare l'energia da $E_3 = -1{,}51$ eV a zero: $1{,}51\ \text{eV} = 1{,}51 \times 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J} = 2{,}42 \times 10^{-19}$ J. Frequenza minima: $f = E/h = 2{,}42 \times 10^{-19}\ \text{J}/6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{J·s} = 3{,}65 \times 10^{14}$ Hz, cioè $\lambda = 1240/1{,}51$ nm = 821 nm: infrarosso vicino (è il limite della serie di Paschen).

17. Lyman; ultravioletto; Lyman (tutte le transizioni in assorbimento partono da $n = 1$); differenza.

18. Sei righe: 4 → 3, 4 → 2, 4 → 1, 3 → 2, 3 → 1, 2 → 1. Lunghezze d'onda con $\lambda = 1240\ \text{eV·nm}/\Delta E$: 1875 nm, 486 nm, 97,3 nm, 656 nm, 103 nm, 122 nm. Visibili: 4 → 2 ($\Delta E = 2{,}55$ eV, 486 nm, azzurra) e 3 → 2 ($\Delta E = 1{,}89$ eV, 656 nm, rossa).

19. $K_0 = 5{,}3 \times 10^6 \times 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J} = 8{,}48 \times 10^{-13}$ J; $r_{\text{min}} = k_0(2e)(79e)/K_0 = 8{,}99 \times 10^9 \times 158 \times (1{,}60 \times 10^{-19})^2/8{,}48 \times 10^{-13}\ \text{m} = 4{,}3 \times 10^{-14}$ m, circa 6 volte il raggio del nucleo: la particella non lo raggiunge.

20. $\Delta E = 13{,}6\ \text{eV} \times (1 - 1/4) = 10{,}2$ eV; $\lambda = 1240/10{,}2$ nm = 122 nm; $f = c/\lambda = 3{,}00 \times 10^8/1{,}22 \times 10^{-7}$ Hz $= 2{,}46 \times 10^{15}$ Hz. È ultravioletto lontano, completamente assorbito dall'atmosfera: si osserva solo con telescopi su satelliti o razzi.

21. a) $T = 2\pi r/v = 2\pi \times 5{,}29 \times 10^{-11}\ \text{m}/2{,}19 \times 10^6\ \text{m/s} = 1{,}52 \times 10^{-16}$ s. b) In un periodo passa per ogni punto dell'orbita la carica e: $I = e/T = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C}/1{,}52 \times 10^{-16}\ \text{s} = 1{,}05 \times 10^{-3}$ A. c) Per il campo al centro di

una spira, $B = \mu_0 I/(2r) = 4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A × 1,05 × 10^{-3} A/(2 × 5,29 × 10^{-11} m) = 12,5 T, perpendicolare al piano dell'orbita. d) È da 4 a 8 volte il campo di uno scanner per la risonanza magnetica: alla scala dell'atomo i campi sono enormi, perché le distanze sono minuscole.

22. a) Per uno ione idrogenoide $E_1 = -13{,}6$ eV × $Z^2 = -54{,}4$ eV; l'energia di ionizzazione è 54,4 eV. b) $r_1 = 5{,}29 \times 10^{-11}$ m/$Z = 2{,}65 \times 10^{-11}$ m: il nucleo più carico attira l'elettrone su un'orbita due volte più stretta. c) $\Delta E = 54{,}4$ eV × (1/9 − 1/16) = 2,64 eV; λ = 1240/2,644 nm = 469 nm, nel visibile (azzurro). d) $\Delta E(\mathrm{He}^+, 4 \to 2) = 54{,}4$ eV × (1/4 − 1/16) = 54,4 eV × 3/16 = 10,2 eV, e $\Delta E(\mathrm{H}, 2 \to 1) = 13{,}6$ eV × 3/4 = 10,2 eV: poiché 4 × 3/16 = 3/4, le due energie coincidono (nel modello di Bohr con il nucleo fermo).

23. a) $p = h/\lambda = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s/6,56 × 10^{-7} m = 1,01 × 10^{-27} kg·m/s. b) L'atomo, inizialmente fermo, acquista una quantità di moto uguale e opposta: $v = p/m = 1{,}01 \times 10^{-27}/1{,}67 \times 10^{-27}$ m/s = 0,605 m/s. c) $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg × (0,605 m/s)$^2 = 3{,}06 \times 10^{-28}$ J = 1,9 × 10^{-9} eV, circa un miliardesimo dell'energia del fotone (1,89 eV): l'energia di rinculo è del tutto trascurabile e $hf = E_3 - E_2$ vale con ottima approssimazione.

24. a) Le differenze fra lo stato fondamentale e i livelli eccitati sono 10,2 eV (n = 2), 12,1 eV (n = 3), 12,75 eV (n = 4)... e l'energia di ionizzazione è 13,6 eV. Sono assorbiti soltanto i fotoni da 10,2 eV e da 12,1 eV, che portano gli atomi in n = 2 e n = 3; quelli da 11,0 eV e 12,5 eV non coincidono con alcun salto e attraversano il gas. b) Da n = 3 l'atomo può scendere direttamente (3 → 1, 12,1 eV, λ = 103 nm) oppure a gradini (3 → 2, 1,89 eV, 656 nm, seguito da 2 → 1, 10,2 eV, 122 nm).

25. a) La riga H_α è la transizione 3 → 2, quindi gli atomi devono essere portati almeno in n = 3: servono $E_3 - E_1 = 12{,}1$ eV, cioè $\Delta V \geq 12{,}1$ V (un elettrone accelerato da ΔV ha energia $e\Delta V$). b) $E_4 - E_1 = 12{,}75$ eV < 13,0 eV, mentre $E_5 - E_1 = 13{,}06$ eV > 13,0 eV: il livello più alto è n = 4. c) Sei righe (4 → 3, 4 → 2, 4 → 1, 3 → 2, 3 → 1, 2 → 1); visibili H_α (656 nm) e H_β (486 nm). d) Con 14,0 eV gli elettroni possono eccitare tutti i livelli e anche ionizzare gli atomi (13,6 eV): nello spettro compaiono tutte le righe delle serie, e gli elettroni liberati, ricombinandosi con i nuclei, contribuiscono a popolare tutti i livelli.

26. Passo d = 1/500 mm = 2,000 μm. a) Da d sen $\theta = m\lambda$: H_α, sen $\theta_1 = 0{,}3282$, $\theta_1 = 19{,}2°$; sen $\theta_2 = 0{,}6563$, $\theta_2 = 41{,}0°$. H_β: sen $\theta_1 = 0{,}2431$, $\theta_1 = 14{,}1°$; sen $\theta_2 = 0{,}4861$, $\theta_2 = 29{,}1°$. b) Deve essere sen $\theta = m\lambda/d \leq 1$, cioè $m \leq d/\lambda = 3{,}05$: l'ordine più alto è il terzo, con sen $\theta = 0{,}984$ e $\theta = 79{,}9°$, quasi radente al reticolo.

27. a) E = 1240 eV·nm/632,8 nm = 1,96 eV = 1,96 × 1,60 × 10^{-19} J = 3,14 × 10^{-19} J. b) $N = P/E = 1{,}0 \times 10^{-3}$ W/3,14 × 10^{-19} J = 3,2 × 10^{15} fotoni al secondo. c) $k_\mathrm{B}T = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K × 300 K = 4,14 × 10^{-21} J = 0,0259 eV; $\Delta E/(k_\mathrm{B}T)$ = 1,96/0,0259 = 75,7; $N_2/N_1 = \mathrm{e}^{-75{,}7} \approx 1 \times 10^{-33}$. d) All'equilibrio termico il livello alto è praticamente vuoto: un fotone verrebbe assorbito, non amplificato. Per avere emissione stimolata prevalente serve l'inversione di popolazione, e l'unico modo di ottenerla è fornire energia dall'esterno, portando continuamente atomi nel livello alto: è il compito della pompa (nel laser a elio-neon, la scarica elettrica).

28. a) $E \approx 10{,}2$ eV × $41^2 = 1{,}71 \times 10^4$ eV = 17,1 keV; λ = 1240 eV·nm/17 150 eV = 0,0723 nm, il 2% in più del valore misurato: la stima è buona, ma lo schermo non vale esattamente una carica. b) E = 1240 eV·nm/0,193 nm = 6,42 keV; $(Z-1)^2$ = 6420/10,2 = 630, $Z - 1$ = 25,1, quindi Z = 26: è il ferro. c) Prima che un elettrone scenda dallo strato L allo strato K bisogna creare il posto vuoto, cioè strappare un elettrone dallo strato K e portarlo fuori dall'atomo (o su un livello libero molto alto): serve un'energia maggiore del salto L → K. Gli elettroni del fascio, accelerati dalla tensione V, hanno energia eV, quindi la tensione deve superare l'energia di estrazione di un elettrone K divisa per e, che è maggiore di $E(\mathrm{K}_\alpha)/e$.

29. Traccia di risposta. Una riga H_α in assorbimento richiede atomi nello stato n = 2, a 10,2 eV sopra lo stato fondamentale. A 5800 K, $k_\mathrm{B}T = 0{,}50$ eV e $\mathrm{e}^{-10{,}2/0{,}50} \approx 1{,}4 \times 10^{-9}$: una frazione minuscola, ma l'atmosfera solare attraversata dalla luce contiene un numero enorme di atomi di idrogeno, e gli atomi in n = 2 bastano a produrre una riga ben visibile. A 300 K, $k_\mathrm{B}T = 0{,}026$ eV e il fattore è circa $\mathrm{e}^{-394} \approx 10^{-171}$: non c'è praticamente nessun atomo in n = 2, e il gas

freddo assorbe soltanto le righe di Lyman, nell'ultravioletto. (Il fattore di Boltzmann dà solo l'ordine di grandezza; il calcolo preciso tiene conto anche del numero di stati di ogni livello e della ionizzazione.)

30. L'errore è pensare che l'energia del fotone dipenda dall'energia del livello finale. Conta la differenza fra i livelli: Lyman α ($2 \to 1$) ha $\Delta E = 10{,}2$ eV, H_α ($3 \to 2$) ha $\Delta E = 1{,}89$ eV. Poiché $\lambda = hc/\Delta E$, la riga Lyman α ha la lunghezza d'onda **minore**: 122 nm contro 656 nm.

31. Traccia di risposta. Numero di atomi per unità di volume: $n = (19\,300\ \text{kg/m}^3/0{,}197\ \text{kg/mol}) \times 6{,}02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1} = 5{,}9 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$; per unità di superficie della lamina: $n \cdot 1{,}0 \times 10^{-6}\ \text{m} = 5{,}9 \times 10^{22}\ \text{m}^{-2}$. Con $r_{\text{min}} = 2{,}95 \times 10^{-14}$ m (esempio svolto) ogni nucleo offre un «bersaglio» di area $\pi(r_{\text{min}}/2)^2 = 6{,}8 \times 10^{-28}\ \text{m}^2$. La frazione deviata oltre 90° è il rapporto fra l'area coperta dai bersagli e l'area della lamina: $5{,}9 \times 10^{22} \times 6{,}8 \times 10^{-28} \approx 4 \times 10^{-5}$, circa una particella su 25 000. È una frazione piccolissima, come quella osservata (dell'ordine di una su qualche migliaio con le lamine e le sorgenti di Geiger e Marsden): la stima dà l'ordine di grandezza giusto, mentre un confronto preciso richiederebbe lo spessore e l'energia effettivi. I bersagli coprono solo 4 parti su centomila della superficie, quindi la probabilità di passare vicino a due nuclei è dell'ordine di $(4 \times 10^{-5})^2$: trascurabile, anche se la lamina contiene circa 4000 strati di atomi.

32. a) $E = 1240\ \text{eV·nm}/\lambda$: 1,89 eV, 2,55 eV e 2,86 eV. I livelli di Bohr sono $E_1 = -13{,}6$ eV, $E_2 = -3{,}40$ eV, $E_3 = -1{,}51$ eV, $E_4 = -0{,}850$ eV, $E_5 = -0{,}544$ eV; le differenze $E_3 - E_2 = 1{,}89$ eV, $E_4 - E_2 = 2{,}55$ eV, $E_5 - E_2 = 2{,}86$ eV coincidono con le energie dei fotoni: le righe sono le transizioni $3 \to 2$, $4 \to 2$, $5 \to 2$ della serie di Balmer. b) Diagramma in scala (per esempio 1 cm per eV) con i cinque livelli e tre frecce verso il basso che terminano tutte su $n = 2$, come nella Figura 12.4. c) Riga successiva, $6 \to 2$: $\Delta E = 13{,}6\ \text{eV} \times (1/4 - 1/36) = 3{,}02$ eV, $\lambda = 410$ nm; limite ($\infty \to 2$): 3,40 eV, $\lambda = 365$ nm. La riga a 410 nm è al bordo violetto dello spettro visibile, dove la sensibilità dell'occhio è molto bassa, ed è meno intensa delle precedenti. d) Le righe di Lyman (da 91 nm a 122 nm) sono nell'ultravioletto lontano: sono assorbite dal vetro del tubo e delle ottiche dello spettroscopio e dall'aria, e l'occhio non le vede. Per osservarle servono un rivelatore sensibile all'ultravioletto e uno strumento sotto vuoto. *Indicatori*: a) Analizzare e Sviluppare il processo risolutivo; b) Interpretare/elaborare i dati; c) Sviluppare il processo risolutivo; d) Argomentare.

33. a) Per la relatività (capitolo 9) $K = (\gamma - 1)mc^2$, quindi $\gamma = 1 + 5{,}5/3727 = 1{,}0015$; $\beta = \sqrt{(1 - 1/\gamma^2)} = 0{,}0543$, $v = 1{,}63 \times 10^7$ m/s. Con l'espressione classica $v/c = \sqrt{(2K/(mc^2))} = \sqrt{(11/3727)} = 0{,}0543$: lo stesso risultato a tre cifre, perché K è solo lo 0,15% dell'energia a riposo. b) Per la conservazione dell'energia, $r_{\text{min}} = k_0(2e)(79e)/K = 8{,}99 \times 10^9 \times 158 \times (1{,}60 \times 10^{-19})^2/(5{,}5 \times 10^6 \times 1{,}60 \times 10^{-19})\ \text{m} = 4{,}1 \times 10^{-14}$ m, circa 6 volte il raggio del nucleo: la particella sente solo la forza di Coulomb. c) Con $\tan(\theta/2) = r_{\text{min}}/(2b)$: per $b = r_{\text{min}}$, $\theta = 2 \arctan 0{,}5 = 53{,}1°$; per $b = 5r_{\text{min}}$, $\theta = 2 \arctan 0{,}1 = 11{,}4°$. Per $\theta > 90°$ serve $\tan(\theta/2) > 1$, cioè $b < r_{\text{min}}/2 = 2{,}1 \times 10^{-14}$ m. d) La frazione è proporzionale a $r_{\text{min}}{}^2$, e r_{min} è proporzionale a Z/K. Con l'argento la frazione si riduce del fattore $(47/79)^2 = 0{,}35$, a circa un terzo; raddoppiando l'energia r_{min} si dimezza e la frazione diventa un quarto. Sono le dipendenze che Geiger e Marsden verificarono per confermare il modello di Rutherford. *Indicatori*: a) Analizzare; b) Sviluppare il processo risolutivo; c) Sviluppare il processo risolutivo e Interpretare/elaborare i dati; d) Argomentare.