CAPITOLO

11

Il fotone: effetto fotoelettrico ed effetto Compton

La luce viaggia come un'onda, ma quando incontra la materia paga in moneta: un fotone alla volta, e mai una frazione.

OBIETTIVI

1. Descrivere l'esperimento con il fototubo e leggere la curva caratteristica: corrente di saturazione e potenziale di arresto.
2. Riconoscere i fatti dell'effetto fotoelettrico che la teoria ondulatoria non spiega, anche con una stima quantitativa.
3. Usare l'equazione di Einstein, la frequenza di soglia e il grafico di Millikan per ricavare h e il lavoro di estrazione.
4. Calcolare energia, quantità di moto e flusso dei fotoni, convertendo fra joule ed elettronvolt.
5. Ricavare la formula dell'effetto Compton dalla conservazione relativistica di energia e quantità di moto e applicarla.
6. Discutere il dualismo onda-corpuscolo della luce e l'interpretazione probabilistica.

INDICE DEL CAPITOLO

11.1 L'effetto fotoelettrico 2
11.2 La spiegazione di Einstein 6
11.3 Il fotone 11
11.4 L'effetto Compton 13
11.5 Il dualismo onda-corpuscolo della luce 16

Fisica 5 · Parte IV · La fisica dei quanti · versione 1.0
Capitolo 11: Il fotone: effetto fotoelettrico ed effetto Compton · pagine 359–386 del volume completo · estratto per lo studio

Una lastra di zinco appena pulita, carica negativamente, perde la sua carica se la illumini con la luce di una lampada ad arco ricca di ultravioletto; illuminata da una lampada rossa, anche molto potente, resta carica per ore. Questo esperimento, che si può ripetere con un elettroscopio da laboratorio, contiene il germe di una delle idee più rivoluzionarie del Novecento: la luce, che dalla doppia fenditura di Young alle equazioni di Maxwell abbiamo imparato a trattare come un'onda, scambia energia con la materia **a pacchetti**.

Nel capitolo 10 hai visto che Planck, per spiegare lo spettro del corpo nero, dovette supporre che le cariche oscillanti nelle pareti di una cavità scambiassero energia soltanto in multipli di hf. In questo capitolo facciamo il passo successivo, quello di Einstein: sono la luce stessa, e ogni radiazione elettromagnetica, a essere fatte di quanti. Studieremo i due esperimenti che hanno reso inevitabile questa idea, l'**effetto fotoelettrico** e l'**effetto Compton**, e poi affronteremo la domanda che ne segue: come può la stessa luce comportarsi da onda nell'interferenza e da particella quando urta un elettrone?

11.1 L'effetto fotoelettrico

11.1.1 Luce che strappa elettroni

Nel 1887 Heinrich Hertz stava facendo gli esperimenti sulle onde elettromagnetiche che hai incontrato nel capitolo 5: una scintilla nel trasmettitore produceva onde che facevano scoccare una piccola scintilla nel ricevitore. Hertz notò un dettaglio curioso: la scintilla del ricevitore scoccava più facilmente quando i suoi elettrodi erano illuminati dalla luce ultravioletta della scintilla principale, e meno facilmente se fra le due metteva una lastra di vetro, che assorbe l'ultravioletto. Poco dopo Wilhelm Hallwachs mostrò l'effetto in forma più pulita, con la lastra di zinco dell'introduzione: la luce ultravioletta scarica un metallo carico negativamente, ma non uno carico positivamente.

La spiegazione arrivò quando J. J. Thomson ebbe scoperto l'elettrone (1897): la luce estrae elettroni dalla superficie del metallo. Philipp Lenard misurò il rapporto fra carica e massa delle particelle emesse e trovò lo stesso valore degli elettroni dei raggi catodici. Il fenomeno si chiama **effetto fotoelettrico** e gli elettroni emessi sono detti **fotoelettroni**: non sono particelle diverse dagli altri elettroni, il prefisso ricorda soltanto come sono stati estratti.

Che un elettrone possa uscire da un metallo non è sorprendente. Nel volume dello scorso anno hai visto che gli elettroni di conduzione si muovono liberamente dentro il conduttore ma restano intrappolati al suo interno: per portarne uno fuori serve un'energia minima, diversa da metallo a metallo, che chiameremo **lavoro di estrazione** e indicheremo con W_0. Nei metalli vale qualche elettronvolt (Tabella 11.2). Il problema è **come** la luce fornisca quell'energia.

11.1.2 Il fototubo e la sua curva caratteristica

Per studiare l'effetto in modo quantitativo si usa un **fototubo** (o fotocella a vuoto, Figura 11.1): un'ampolla in cui è stato fatto il vuoto, con un elettrodo di metallo, il **catodo**, su cui cade la luce, e un secondo elettrodo, l'**anodo**, che raccoglie gli elettroni. Un generatore regolabile stabilisce fra anodo e catodo una differenza di potenziale $\Delta V_{AC} = V_A - V_C$, che si può rendere positiva o negativa invertendo i collegamenti; un microamperometro misura la **corrente fotoelettrica** i, cioè il numero di elettroni che arrivano all'anodo ogni secondo moltiplicato per la carica elementare.

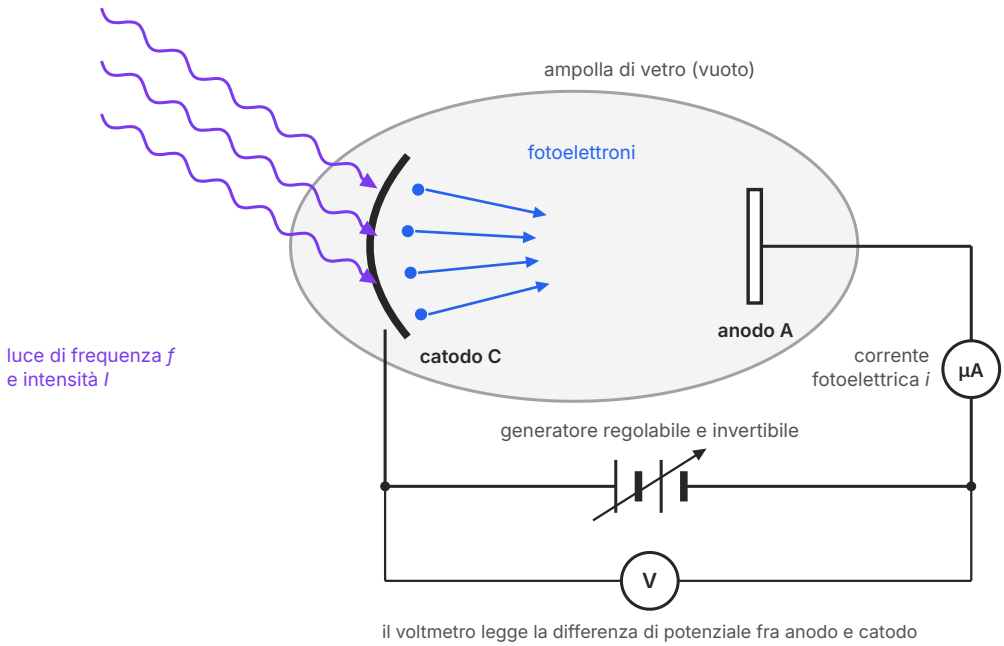

Figura 11.1 Schema di un esperimento sull'effetto fotoelettrico (non in scala). La luce di frequenza f cade sul catodo C, da cui escono i fotoelettroni; quelli che raggiungono l'anodo A chiudono il circuito, e il microamperometro misura la corrente fotoelettrica i. Il generatore regolabile fissa la differenza di potenziale fra anodo e catodo, letta dal voltmetro V; invertendone la polarità l'anodo diventa negativo rispetto al catodo e respinge gli elettroni.

Il grafico della corrente in funzione di ΔV_{AC} si chiama curva caratteristica (Figura 11.2). Leggiamolo da destra verso sinistra.

- Con l'anodo positivo e una tensione di qualche volt, tutti gli elettroni emessi vengono raccolti: la corrente non cresce più aumentando la tensione. È la **corrente di saturazione**, e misura quanti elettroni la luce estrae al secondo.

- Abbassando la tensione verso zero la corrente diminuisce un po', ma non si annulla: anche senza alcun campo che li acceleri, molti elettroni escono dal catodo con un'energia cinetica sufficiente ad arrivare all'anodo.
- Rendendo l'anodo negativo, il campo frena gli elettroni: arrivano all'anodo soltanto quelli emessi con un'energia cinetica maggiore del lavoro che il campo compie su di loro. La corrente si annulla del tutto a una tensione $-V_a$, dove V_a si chiama **potenziale di arresto**.

Al potenziale di arresto nemmeno l'elettrone più veloce riesce più a raggiungere l'anodo. Per la conservazione dell'energia (il lavoro della forza elettrica su una carica $-e$ che attraversa la differenza di potenziale $-V_a$ è $-eV_a$) l'energia cinetica massima dei fotoelettroni è

$$K_{max} = eV_a$$

Il potenziale di arresto è quindi un "termometro" dell'energia degli elettroni più veloci: un potenziale di arresto di 1,5 V significa $K_{max} = 1{,}5\ \text{eV} = 2{,}4 \times 10^{-19}$ J. Gli elettroni non escono tutti con la stessa energia, perché molti perdono una parte dell'energia negli urti prima di raggiungere la superficie: K_{max} è l'energia di quelli che escono senza perdite.

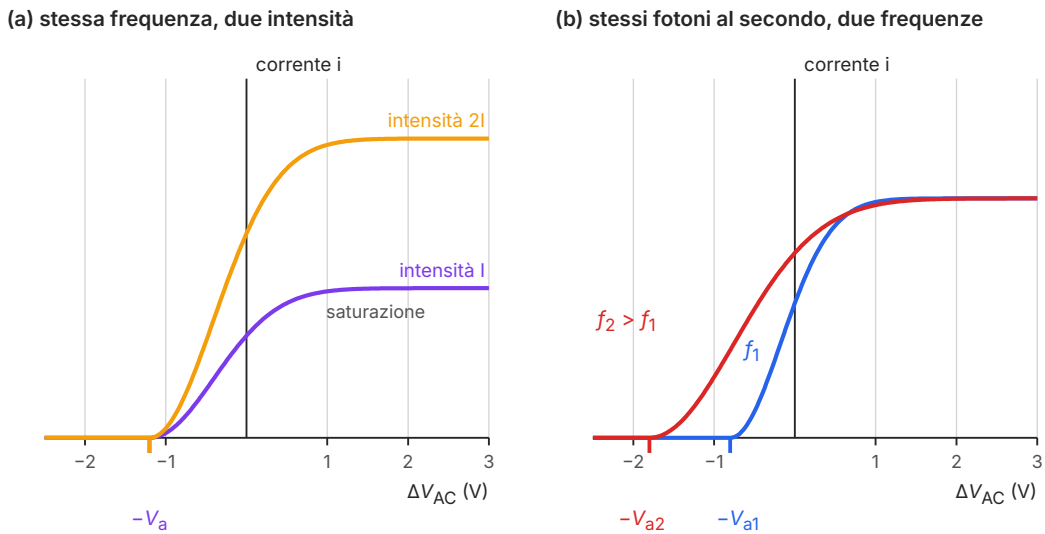

Figura 11.2 Curve caratteristiche di un fototubo (andamento schematico, ma coerente con i dati sperimentali). (a) Luce della stessa frequenza e due intensità: la corrente di saturazione raddoppia con l'intensità, ma il potenziale di arresto V_a è lo stesso. (b) Due frequenze diverse con lo stesso numero di fotoni al secondo (supponendo che ogni fotone estragga in media lo stesso numero di elettroni): la corrente di saturazione è la stessa, ma alla frequenza maggiore corrisponde un potenziale di arresto maggiore.

11.1.3 Tre fatti che le onde non spiegano

Gli esperimenti con il fototubo, ripetuti con metalli, frequenze e intensità diverse, danno risultati netti, riassunti nella Figura 11.2 e nella Tabella 11.1. Per capire perché fossero sconcertanti, chiediamoci che cosa prevede la teoria ondulatoria di Maxwell. Un'onda elettromagnetica che colpisce il metallo fa oscillare gli elettroni con il suo campo elettrico; la sua energia arriva in modo continuo, con un'intensità proporzionale al quadrato dell'ampiezza del campo, $I = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2$ (capitolo 5). Un elettrone dovrebbe quindi accumulare energia un poco alla volta, finché ne ha abbastanza per uscire.

Tabella 11.1 L'effetto fotoelettrico: le previsioni della teoria ondulatoria classica e ciò che si osserva.

Domanda	Previsione ondulatoria	Osservazione
Che cosa succede se la luce è più intensa?	il campo elettrico è più ampio: gli elettroni escono più veloci, K_{max} cresce	escono **più** elettroni (cresce la corrente di saturazione), ma K_{max} non cambia
Esiste una frequenza minima?	no: con luce abbastanza intensa, o aspettando abbastanza, l'emissione avviene a ogni frequenza	sì: sotto una **frequenza di soglia** f_0, che dipende dal metallo, non esce alcun elettrone, per quanto intensa sia la luce
Come dipende K_{max} dalla frequenza?	non dovrebbe dipenderne in modo particolare	K_{max} cresce in modo **lineare** con la frequenza
Quanto tempo passa prima dell'emissione?	con luce debole, un tempo misurabile: l'elettrone deve accumulare energia	nessun ritardo misurabile, anche con luce debolissima: meno di un miliardesimo di secondo

Il primo fatto dice che l'energia di ciascun elettrone non dipende da quanta energia porta la luce; il secondo che una luce rossa intensissima non riesce a fare ciò che una debole luce ultravioletta fa subito. L'esistenza di una **frequenza di soglia** f_0, con la corrispondente lunghezza d'onda di soglia $\lambda_0 = c/f_0$, è il contrario di quanto ci si aspetta da un'onda, per la quale conta l'intensità e non la frequenza. Il terzo fatto, l'assenza di ritardo, si può rendere quantitativo con una stima.

ESEMPIO SVOLTO

Quanto dovrebbe aspettare un elettrone? Una stima classica

Problema. Una lampada emette uniformemente in tutte le direzioni 1,0 W di luce di frequenza adatta a estrarre elettroni da un catodo di potassio, per il quale $W_0 = 2{,}3$ eV. Il catodo è a 5,0 m dalla lampada. Secondo la teoria ondulatoria, ogni elettrone assorbe l'energia che cade su un'area paragonabile a quella di un atomo, un cerchio di raggio 0,10 nm. Stima quanto tempo serve a un elettrone per accumulare l'energia necessaria a uscire.

1. L'intensità sul catodo. La potenza si distribuisce su una sfera di raggio r: $I = P/(4\pi r^2) = 1{,}0\ \text{W}/(4\pi \times (5{,}0\ \text{m})^2) = 3{,}2 \times 10^{-3}\ \text{W/m}^2$.

2. La potenza raccolta da un elettrone. L'area efficace è $S = \pi(1{,}0 \times 10^{-10}\ \text{m})^2 = 3{,}1 \times 10^{-20}\ \text{m}^2$, quindi $P_{\text{el}} = IS = 3{,}2 \times 10^{-3}\ \text{W/m}^2 \times 3{,}1 \times 10^{-20}\ \text{m}^2 = 1{,}0 \times 10^{-22}\ \text{W}$.

3. L'energia da accumulare, in joule. $W_0 = 2{,}3\ \text{eV} \times 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV} = 3{,}7 \times 10^{-19}\ \text{J}$.

4. Il tempo. $\Delta t = W_0/P_{\text{el}} = 3{,}7 \times 10^{-19}\ \text{J} / 1{,}0 \times 10^{-22}\ \text{W} = 3{,}7 \times 10^{3}\ \text{s}$, cioè circa un'ora.

Conclusione. La teoria ondulatoria prevede che, accendendo la lampada, il microamperometro resti a zero per circa un'ora. In realtà la corrente compare subito, entro un miliardesimo di secondo. Si potrebbe pensare che l'area efficace sia sottostimata, ma per ridurre il ritardo a 10^{-9} s l'area dovrebbe essere 4×10^{12} volte più grande: un elettrone dovrebbe raccogliere la luce caduta su un cerchio di circa 0,2 mm di raggio, due milioni di volte più largo di un atomo. È un'ipotesi senza senso fisico.

11.2 La spiegazione di Einstein

11.2.1 I quanti di luce

Nel 1905, lo stesso anno della relatività ristretta, Albert Einstein propose una soluzione radicale. Planck aveva quantizzato l'energia degli oscillatori nelle pareti del corpo nero, ma aveva continuato a pensare la radiazione come un'onda continua. Einstein fece un passo in più: è **la radiazione stessa** a essere formata da **quanti di luce** indipendenti, ciascuno con energia

$$E = hf$$

dove f è la frequenza della radiazione e h è la costante di Planck, $6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s. Oggi questi quanti si chiamano **fotoni**, un nome che si affermò soltanto parecchi anni dopo. Un fascio di luce monocromatica di intensità I è un flusso di fotoni tutti uguali: l'intensità dice **quanti** fotoni arrivano al secondo su un metro quadrato, la frequenza dice quanta energia porta **ciascuno**.

Nell'effetto fotoelettrico un fotone viene assorbito da **un solo** elettrone e gli cede tutta la sua energia in un colpo: o tutta o niente. Se hf è minore del lavoro di estrazione, l'elettrone non può uscire; l'energia si disperde in calore e il fotone successivo non lo aiuta, perché la probabilità

che lo stesso elettrone assorba due fotoni prima di cedere l'energia agli altri è trascurabile con la luce delle sorgenti comuni. Se hf supera W_0, l'eccesso diventa energia cinetica.

11.2.2 L'equazione di Einstein per l'effetto fotoelettrico

Il bilancio energetico per un elettrone che esce senza perdite è

$$K_{max} = hf - W_0 \text{ oppure } eV_a = hf - W_0$$

È l'**equazione di Einstein** per l'effetto fotoelettrico. Ponendo $K_{max} = 0$ si ottiene la frequenza di soglia, sotto la quale non esce alcun elettrone, e la corrispondente lunghezza d'onda di soglia, sopra la quale non esce alcun elettrone:

$$f_0 = \frac{W_0}{h} \lambda_0 = \frac{hc}{W_0}$$

Ora i tre fatti della Tabella 11.1 hanno una spiegazione immediata. Aumentare l'intensità significa mandare più fotoni, tutti con la stessa energia: escono più elettroni, ma ognuno riceve la stessa energia, quindi la corrente di saturazione cresce e K_{max} no. Sotto la soglia un fotone non basta, e moltiplicare i fotoni non serve. Non c'è ritardo, perché l'energia non viene accumulata: arriva tutta insieme con il primo fotone assorbito. Infine K_{max} cresce linearmente con la frequenza, con una pendenza h che è la stessa per tutti i metalli.

Nei calcoli conviene esprimere l'energia dei fotoni in elettronvolt. Poiché $E = hf = hc/\lambda$ e $hc = 1240$ eV·nm, vale la regola pratica

$$E \text{ (eV)} = \frac{1240}{\lambda \text{ (nm)}}$$

Un fotone di luce rossa da 620 nm ha energia 2,0 eV, uno di luce viola da 400 nm ne ha 3,1, uno di ultravioletto da 250 nm ne ha 5,0. La Tabella 11.2 riporta il lavoro di estrazione di alcuni metalli: si capisce perché la luce visibile estragga elettroni dai metalli alcalini (cesio, potassio, sodio), mentre per lo zinco della lastra di Hallwachs serva l'ultravioletto.

Tabella 11.2 Lavoro di estrazione W_0 di alcuni metalli e lunghezza d'onda di soglia $\lambda_0 = hc/W_0$. I valori sono indicativi: dipendono dallo stato della superficie (ossidazione, impurezze, faccia cristallina), e fonti diverse riportano valori che differiscono di qualche decimo di elettronvolt.

Metallo	W_0 (eV)	λ_0 (nm)	Regione della soglia
cesio	2,1	590	visibile (giallo)
potassio	2,3	540	visibile (verde)
sodio	2,4	520	visibile (verde)
calcio	2,9	430	visibile (violetto)
zinco	4,3	290	ultravioletto
rame	4,7	260	ultravioletto
platino	5,6	220	ultravioletto

ERRORE FREQUENTE

«Con una luce più intensa gli elettroni escono più veloci»

È l'intuizione classica, ed è sbagliata. L'intensità della luce stabilisce il **numero** di fotoni, e quindi il numero di elettroni estratti al secondo; l'energia cinetica massima dipende soltanto dalla **frequenza** e dal metallo. Raddoppiare l'intensità raddoppia la corrente di saturazione e lascia invariato il potenziale di arresto. Allo stesso modo, una luce di frequenza inferiore a quella di soglia non estrae alcun elettrone, anche se è intensissima.

Un secondo errore riguarda le unità: nell'equazione $K_{max} = hf - W_0$ tutte le energie devono essere nella stessa unità. Se h è in J·s, W_0 va convertito in joule (1 eV = 1,60 × 10^{-19} J); se si lavora in elettronvolt conviene usare hc = 1240 eV·nm. Il simbolo W_0 indica un lavoro di estrazione: non confonderlo con un flusso, che in questo libro si scrive Φ.

11.2.3 La verifica di Millikan

L'equazione di Einstein fa una previsione precisa: il grafico del potenziale di arresto in funzione della frequenza,

$$V_a = \frac{h}{e} f - \frac{W_0}{e}$$

è una retta. La pendenza h/e è la stessa per tutti i metalli, e vale 4,14 × 10^{-15} V·s; l'intersezione con l'asse delle frequenze dà la frequenza di soglia f_0, e il prolungamento della retta fino all'asse verticale dà $-W_0/e$ (Figura 11.3). Rette di metalli diversi sono parallele.

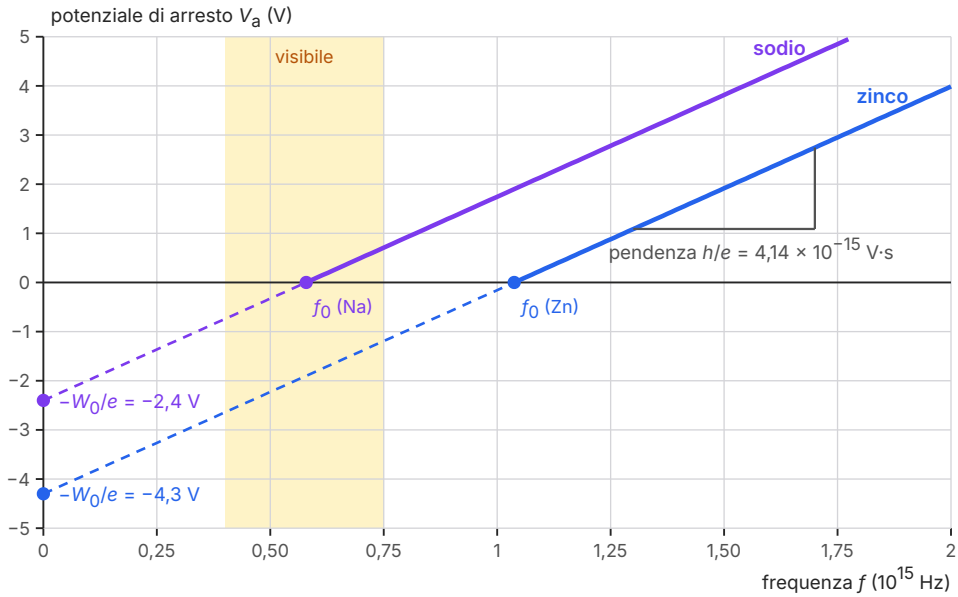

Figura 11.3 Potenziale di arresto in funzione della frequenza secondo l'equazione di Einstein, per il sodio (W_0 = 2,4 eV) e lo zinco (W_0 = 4,3 eV), calcolato con h/e = 4,14 × 10^{-15} V·s. Le due rette sono parallele: la pendenza è la stessa per tutti i metalli. Il tratto tratteggiato non corrisponde a misure (sotto la soglia non escono elettroni): è il prolungamento che incontra l'asse verticale in $-W_0/e$. La fascia colorata indica le frequenze della luce visibile.

Robert Millikan, il fisico che aveva misurato la carica dell'elettrone con le goccioline d'olio, dedicò circa dieci anni a mettere alla prova questa previsione. Lavorava con metalli alcalini, che hanno la soglia nel visibile, tagliandone la superficie sotto vuoto per evitare l'ossidazione, che altera il lavoro di estrazione. I risultati, pubblicati nel 1916, confermarono la retta in ogni dettaglio e diedero un valore di h in accordo, entro la precisione delle misure, con quello ottenuto da Planck dal corpo nero. Millikan stesso, come molti suoi colleghi, rimase a lungo scettico sull'idea dei quanti di luce: confermò l'equazione, ma ne considerava insostenibile l'interpretazione. Il premio Nobel per la fisica del 1921 fu assegnato a Einstein per i suoi contributi alla fisica teorica e in particolare per la scoperta della legge dell'effetto fotoelettrico; la motivazione non nominava la relatività.

ESEMPIO SVOLTO

Ricavare *h* e il lavoro di estrazione da una tabella di misure

Problema. Una fotocella viene illuminata, una alla volta, con cinque righe di una lampada a vapori di mercurio, isolate con dei filtri. Per ciascuna si misura il potenziale di arresto (dati tipici, incertezza ± 0,02 V). Ricava la costante di Planck, il lavoro di estrazione del catodo e la lunghezza d'onda di soglia.

Tabella 11.3 Potenziale di arresto di una fotocella illuminata con le righe del mercurio (dati tipici).

λ (nm)	f (10^{14} Hz)	V_a (V)
365,0	8,22	1,52
404,7	7,41	1,14
435,8	6,88	0,96
546,1	5,49	0,36
577,0	5,20	0,26

1. Dalla lunghezza d'onda alla frequenza. $f = c/\lambda$: per la prima riga $3{,}00 \times 10^{8}$ m/s / $365{,}0 \times 10^{-9}$ m = $8{,}22 \times 10^{14}$ Hz, e così via (seconda colonna).

2. Il grafico. Riportando V_a in funzione di f, i cinque punti sono allineati entro le incertezze: è la conferma della previsione di Einstein. La retta che passa meglio fra i punti, calcolata con il foglio elettronico, ha pendenza $4{,}16 \times 10^{-15}$ V·s e interseca l'asse verticale a −1,91 V. Con un calcolo a mano basta la retta per i due punti estremi: (1,52 V − 0,26 V)/(8,22 − 5,20) × 10^{14} Hz = $4{,}17 \times 10^{-15}$ V·s, in buon accordo.

3. La costante di Planck. La pendenza è h/e, quindi $h = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C × $4{,}16 \times 10^{-15}$ V·s = $6{,}66 \times 10^{-34}$ J·s, a meno dell'1% dal valore accettato.

4. Lavoro di estrazione e soglia. L'intercetta è $-W_0/e = -1{,}91$ V, quindi $W_0 = 1{,}91$ eV = $3{,}06 \times 10^{-19}$ J. La frequenza di soglia è $f_0 = 1{,}91$ V / $4{,}16 \times 10^{-15}$ V·s = $4{,}6 \times 10^{14}$ Hz, e $\lambda_0 = c/f_0 = 6{,}5 \times 10^{-7}$ m = 650 nm: la fotocella risponde a tutta la luce visibile tranne il rosso più profondo.

Osservazione. Per ricavare h non serve conoscere il metallo né la sua superficie, che influiscono soltanto sull'intercetta: è per questo che la pendenza è la grandezza più affidabile dell'esperimento.

11.3 Il fotone

11.3.1 Energia e quantità di moto

Se la luce è fatta di particelle, quelle particelle devono avere anche una quantità di moto. Nel capitolo 9 hai trovato la relazione fra energia, quantità di moto e massa di una particella, $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$, e hai visto che per una particella di massa nulla si riduce a $E = pc$. Il fotone è una particella di **massa nulla**, che nel vuoto si muove sempre alla velocità c. Combinando $E = pc$ con $E = hf = hc/\lambda$ si ottiene la sua **quantità di moto del fotone**:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Per la luce visibile i numeri sono minuscoli: un fotone da 500 nm ha $p = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s / $5{,}00 \times 10^{-7}$ m = $1{,}33 \times 10^{-27}$ kg·m/s. Eppure il risultato è coerente con quello che sai sulle onde: nel capitolo 5 hai visto che un'onda elettromagnetica che trasporta un'energia U trasporta anche una quantità di moto U/c, da cui la pressione di radiazione. Un fascio di N fotoni di energia hf porta energia Nhf e quantità di moto $Nh/\lambda = Nhf/c$: la descrizione ondulatoria e quella a fotoni danno lo stesso bilancio, come deve essere.

Il fotone ha quindi energia e quantità di moto, ma non ha massa e non può essere fermato: esiste solo in moto alla velocità della luce. Quando viene assorbito scompare, e la sua energia e la sua quantità di moto passano alla materia che lo assorbe; quando un atomo o un elettrone accelerato emette radiazione, i fotoni vengono creati. Il numero di fotoni, a differenza del numero di elettroni, non si conserva.

11.3.2 Quanti fotoni?

Il numero di fotoni al secondo emessi da una sorgente di potenza P che emette luce di frequenza f, o **flusso di fotoni**, è

$$\frac{N}{\Delta t} = \frac{P}{hf}$$

ESEMPIO SVOLTO

I fotoni di un puntatore laser

Problema. Un puntatore laser di classe 2 emette una potenza di 1,0 mW alla lunghezza d'onda di 650 nm. Calcola l'energia di un fotone, il numero di fotoni emessi al secondo e la forza che il fascio esercita su uno schermo che lo assorbe completamente.

1. Energia di un fotone. $E = hc/\lambda = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s × $3{,}00 \times 10^{8}$ m/s / $6{,}50 \times 10^{-7}$ m = $3{,}06 \times 10^{-19}$ J. In elettronvolt: $3{,}06 \times 10^{-19}$ J / $1{,}60 \times 10^{-19}$ J/eV = 1,91 eV (lo stesso che 1240/650).

2. Fotoni al secondo. $N/\Delta t = P/E = 1{,}0 \times 10^{-3}$ W / $3{,}06 \times 10^{-19}$ J = $3{,}3 \times 10^{15}$ fotoni al secondo: più di tre milioni di miliardi.

3. La forza. Ogni fotone assorbito cede allo schermo la sua quantità di moto $h/\lambda = 1{,}02 \times 10^{-27}$ kg·m/s. La forza è la quantità di moto ceduta al secondo: $F = (N/\Delta t) \times h/\lambda = 3{,}3 \times 10^{15}$ s^{-1} × $1{,}02 \times 10^{-27}$ kg·m/s = $3{,}3 \times 10^{-12}$ N. È lo stesso risultato che dà la formula ondulatoria del capitolo 5, $F = P/c = 1{,}0 \times 10^{-3}$ W / $3{,}00 \times 10^{8}$ m/s.

Che cosa concludere. Anche una sorgente debole emette un numero enorme di fotoni: in un fascio così ogni millimetro di lunghezza contiene in media circa diecimila fotoni ($3{,}3 \times 10^{15}$ fotoni al secondo distribuiti sui $3{,}0 \times 10^{11}$ mm percorsi dalla luce in un secondo). Per questo nella vita quotidiana la luce sembra un flusso continuo, e la sua granularità emerge solo con sorgenti debolissime o con rivelatori capaci di contare i singoli fotoni.

11.3.3 Fotoni e radiazioni ionizzanti

L'idea del fotone spiega una distinzione che nel capitolo 6 abbiamo dovuto accettare senza giustificarla: perché la radiazione ultravioletta, i raggi X e i raggi gamma sono **ionizzanti**, mentre le onde radio, le microonde e la luce visibile, anche molto intense, non lo sono. Per strappare un elettrone a un atomo o a una molecola servono in genere energie dell'ordine di 10 eV. Un singolo fotone di luce visibile porta 2–3 eV e non basta; un fotone di ultravioletto di 120 nm porta 1240/120 ≈ 10 eV; un fotone di raggi X ne porta migliaia. Poiché l'energia viene ceduta un fotone alla volta, la capacità di ionizzare dipende dalla frequenza, cioè dall'energia del singolo fotone, e non dall'intensità: un forno a microonde da 800 W non ionizza nulla, mentre una piccola dose di raggi X sì. La soglia «nell'ultravioletto» del capitolo 6 è dunque una soglia sull'energia dei fotoni.

COLLEGAMENTI

Rivelare la luce un fotone alla volta

L'effetto fotoelettrico è ovunque nella tecnologia. Nel **fotomoltiplicatore** i fotoelettroni estratti da un fotocatodo vengono accelerati verso una serie di elettrodi, i dinodi, ciascuno a un potenziale più alto del precedente: ogni elettrone che colpisce un dinodo ne libera alcuni altri, e dopo una decina di passaggi un singolo fotoelettrone è diventato un impulso di milioni di elettroni, misurabile con facilità. I fotomoltiplicatori contano singoli fotoni nei rivelatori di particelle, nei telescopi per raggi gamma, negli apparecchi medici per la PET e negli enormi serbatoi d'acqua che cercano i neutrini.

I sensori delle fotocamere digitali, sia CCD sia CMOS, usano l'**effetto fotoelettrico interno**: in ogni pixel di silicio i fotoni assorbiti liberano elettroni che restano nel materiale, e alla fine dell'esposizione la carica raccolta viene letta e trasformata in un numero. Lo stesso fenomeno è alla base delle **celle fotovoltaiche**, che studierai nel capitolo 13: nel silicio basta un fotone di energia superiore a circa 1,1 eV, quindi anche il vicino infrarosso è utile. Le barriere a fotocellula delle porte automatiche e dei cancelli, infine, sono interruttori comandati dalla luce: finché un fascio infrarosso colpisce il rivelatore circola una corrente, e quando qualcuno interrompe il fascio la corrente cessa.

11.4 L'effetto Compton

11.4.1 Raggi X diffusi da elettroni

Nell'effetto fotoelettrico il fotone scompare. Esiste un esperimento in cui il fotone sopravvive, e si comporta come una pallina che urta un'altra pallina? Nel 1923 Arthur Holly Compton inviò un fascio di raggi X monocromatici, la riga K_α del molibdeno di lunghezza d'onda 0,0709 nm, su un blocco di grafite, e misurò con uno spettrometro a cristallo la lunghezza d'onda della radiazione diffusa in varie direzioni. Accanto a una riga con la lunghezza d'onda iniziale ne trovò una seconda, con una lunghezza d'onda **maggiore**, e la differenza cresceva con l'angolo di diffusione.

Per la teoria ondulatoria questo non doveva accadere. Un'onda di frequenza f fa oscillare gli elettroni del bersaglio alla stessa frequenza, e una carica che oscilla irraggia onde della propria frequenza (capitolo 5): la radiazione diffusa dovrebbe avere la stessa lunghezza d'onda di quella incidente, in tutte le direzioni. Compton mostrò che il risultato si spiega in modo semplice e quantitativo se si tratta la radiazione come un insieme di fotoni che urtano singoli elettroni, con le leggi di conservazione della relatività ristretta. Il fenomeno si chiama **effetto Compton**.

11.4.2 Un urto fra un fotone e un elettrone

Gli elettroni esterni degli atomi di carbonio sono legati con energie dell'ordine di una decina di elettronvolt, mentre i fotoni dei raggi X di Compton ne portano circa 17 000: rispetto al fotone, l'elettrone è in pratica libero e fermo. Il fotone incidente, di lunghezza d'onda λ, urta l'elettrone; ne esce un fotone di lunghezza d'onda λ' deviato di un angolo θ, e l'elettrone rincula con una quantità di moto $\boldsymbol{p}_e$ (Figura 11.4). Nell'urto si conservano l'energia e la quantità di moto. Poiché il fotone diffuso cede una parte della sua energia all'elettrone, ha un'energia minore, quindi una frequenza minore e una lunghezza d'onda maggiore: è proprio ciò che Compton osservò.

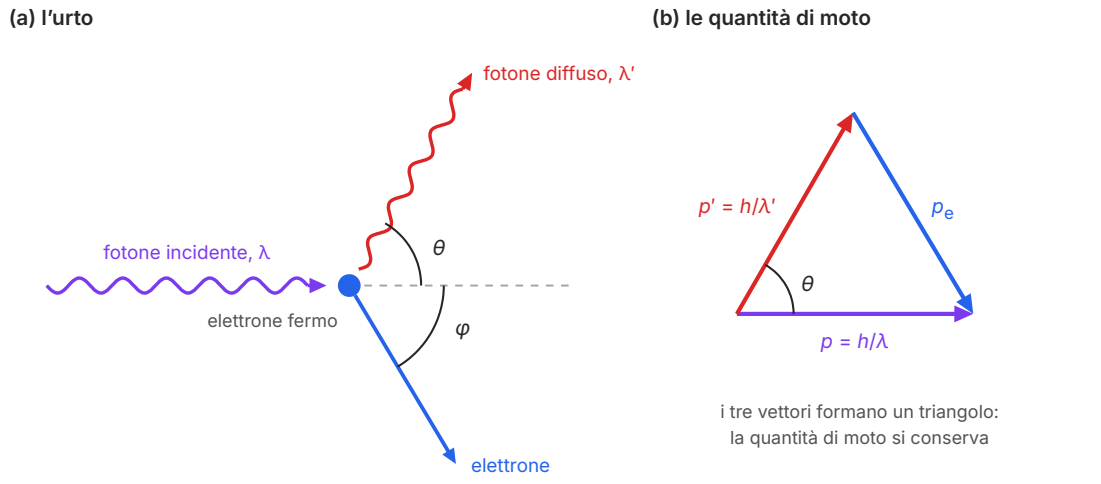

Figura 11.4 L'effetto Compton. (a) Un fotone di lunghezza d'onda λ urta un elettrone fermo; il fotone diffuso, di lunghezza d'onda $\lambda' > \lambda$, è deviato di un angolo θ, e l'elettrone rincula a un angolo φ dall'altra parte della direzione iniziale. (b) La conservazione della quantità di moto: il vettore $\boldsymbol{p}$ del fotone incidente è la somma dei vettori $\boldsymbol{p}'$ e $\boldsymbol{p}_e$. I vettori sono disegnati in scala per raggi X di 0,0709 nm diffusi a $\theta = 60°$: $\boldsymbol{p}'$ è più corto di $\boldsymbol{p}$ soltanto dell'1,7%.

ESEMPIO SVOLTO

La formula di Compton, passo per passo

Dati e ipotesi. Un fotone di energia $E = pc$ (con $p = h/\lambda$) urta un elettrone libero e fermo, di massa m_e ed energia a riposo $m_e c^2$. Dopo l'urto il fotone ha quantità di moto $p' = h/\lambda'$ ed energia $p'c$; l'elettrone ha quantità di moto p_e ed energia totale E_e, legate da $E_e^{\,2} = (p_e c)^2 + (m_e c^2)^2$ (capitolo 9). Usiamo le espressioni relativistiche perché l'elettrone può rinculare a velocità non trascurabili rispetto a c.

1. Conservazione dell'energia. $pc + m_e c^2 = p'c + E_e$, da cui $E_e = (p - p')c + m_e c^2$.

2. Conservazione della quantità di moto. $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}' + \boldsymbol{p}_e$, quindi $\boldsymbol{p}_e = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'$. Applicando il teorema di Carnot (del coseno) al triangolo della Figura 11.4b: $p_e^{\,2} = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos\theta$.

3. Eliminiamo l'elettrone. Sostituiamo nella relazione energia-quantità di moto: $[(p - p')c + m_e c^2]^2 = (p^2 + p'^2 - 2pp' \cos\theta)c^2 + m_e^{\,2} c^4$.

4. Sviluppiamo il quadrato. A sinistra: $p^2c^2 + p'^2c^2 - 2pp'c^2 + 2(p - p')m_e c^3 + m_e^{\,2}c^4$. I termini p^2c^2, p'^2c^2 e $m_e^{\,2}c^4$ compaiono uguali nei due membri e si semplificano. Resta $-2pp'c^2 + 2(p - p')m_e c^3 = -2pp'c^2 \cos\theta$, cioè, dividendo per $2c^2$: $m_e c(p - p') = pp'(1 - \cos\theta)$.

5. Passiamo alle lunghezze d'onda. Dividendo entrambi i membri per $m_e cpp'$ si ottiene $1/p' - 1/p = (1 - \cos\theta)/(m_e c)$. Poiché $1/p = \lambda/h$ e $1/p' = \lambda'/h$, moltiplicando per h:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

Controllo. Per $\theta = 0$ il fotone non è deviato e $\lambda' = \lambda$: non c'è stato urto. Lo spostamento è massimo per $\theta = 180°$, quando il fotone torna indietro e l'elettrone riceve la spinta più forte. La formula contiene la massa dell'elettrone e h, ma non la lunghezza d'onda iniziale né il materiale del bersaglio.

11.4.3 La lunghezza d'onda Compton

La grandezza $h/(m_e c)$ ha le dimensioni di una lunghezza e si chiama **lunghezza d'onda Compton** dell'elettrone:

$$\frac{h}{m_e c} = \frac{6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{J·s}}{9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg} \times 3{,}00 \times 10^{8}\ \text{m/s}} = 2{,}43 \times 10^{-12}\ \text{m} = 2{,}43\ \text{pm}$$

Lo **spostamento Compton** $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ va quindi da zero a 4,85 pm, e dipende soltanto dall'angolo. Per i raggi X di Compton, a $\theta = 90°$, si ha $\lambda' = 0{,}0709\ \text{nm} + 0{,}00243\ \text{nm} = 0{,}0733\ \text{nm}$: uno spostamento del 3,4%, ben misurabile. L'energia del fotone scende da 1240 eV·nm/0,0709 nm = 17,5 keV a 16,9 keV, e la differenza, circa 0,58 keV, è l'energia cinetica dell'elettrone di rinculo. Con la luce visibile, invece, lo stesso spostamento di qualche picometro su 500 nm è di qualche parte

per milione e si perde nella larghezza delle righe: è per questo che l'effetto Compton si osserva con i raggi X e i raggi gamma e non con la luce.

E la riga non spostata? Nasce dai fotoni diffusi dagli elettroni interni del carbonio, legati con forza al nucleo: in quel caso a rinculare è l'atomo intero, la cui massa è decine di migliaia di volte quella dell'elettrone, e la sua lunghezza d'onda Compton è altrettanto più piccola. Anche questo dettaglio dell'esperimento si spiega con la stessa formula.

APPROFONDIMENTO

Un'ipotesi «euristica» e vent'anni di resistenze

L'articolo di Einstein del 1905 sui quanti di luce porta un titolo prudente, che si può tradurre «Su un punto di vista euristico riguardante la produzione e la trasformazione della luce»: euristico vuol dire utile per scoprire, non ancora dimostrato. Il ragionamento centrale non riguardava l'effetto fotoelettrico, ma l'entropia della radiazione del corpo nero ad alte frequenze, dove la legge di Wien funzionava bene. Einstein mostrò che, in quel regime, l'entropia della radiazione in una cavità dipende dal volume nello stesso modo in cui dipende dal volume l'entropia di un gas di particelle indipendenti; ne dedusse che la radiazione si comporta «come se» fosse formata da quanti di energia hf. Solo alla fine dell'articolo applicò l'idea a tre fenomeni: la fluorescenza, l'effetto fotoelettrico e la ionizzazione dei gas da parte dell'ultravioletto.

Per quasi vent'anni l'ipotesi fu accolta con molta freddezza. Le prove dell'interferenza e della diffrazione sembravano escludere che la luce fosse fatta di particelle, e anche Planck, che pure aveva introdotto il quanto, la riteneva un'esagerazione: quando Einstein fu proposto per l'Accademia prussiana delle scienze, la lettera di presentazione, firmata anche da Planck, lo elogiava ma lo scusava di aver talvolta «mancato il bersaglio» con i quanti di luce (parafrasi). Abbiamo visto che Millikan confermò l'equazione restando scettico sulla sua interpretazione. La svolta venne dall'effetto Compton: un urto con conservazione di energia e quantità di moto è difficile da interpretare senza particelle. Nei pochi anni successivi la maggior parte dei fisici accettò il fotone, e la domanda diventò un'altra: come conciliarlo con le onde.

11.5 Il dualismo onda-corpuscolo della luce

11.5.1 Fotoni uno alla volta

Ora abbiamo due descrizioni della luce, entrambe confermate da esperimenti precisi. Nell'esperimento di Young (Fisica 4, capitolo 8) la luce si comporta come un'onda: le onde che passano dalle due fenditure si sovrappongono e producono frange di interferenza. Nell'effetto fotoelettrico e nell'effetto Compton si comporta come un insieme di particelle. Che cosa succede se si fa l'esperimento di Young con una luce così debole che i fotoni attraversano l'apparato **uno alla volta**?

L'esperimento è stato fatto molte volte, con sorgenti fortemente attenuate e oggi con sorgenti che emettono davvero un fotone alla volta, e con rivelatori capaci di registrare l'arrivo di ogni singolo fotone, come una fotocamera a fotomoltiplicatori. Il risultato è illustrato nella Figura 11.5, che è una simulazione al computer costruita con le regole che stiamo per enunciare. Ogni fotone arriva sullo schermo in **un punto** preciso, come una particella: non si osserva mai una frangia "sbiadita" prodotta da un singolo fotone. Dopo pochi arrivi i punti sembrano sparsi a caso. Ma quando i fotoni diventano migliaia, i punti si addensano in strisce e compare la figura d'interferenza, identica a quella che si ottiene con luce intensa.

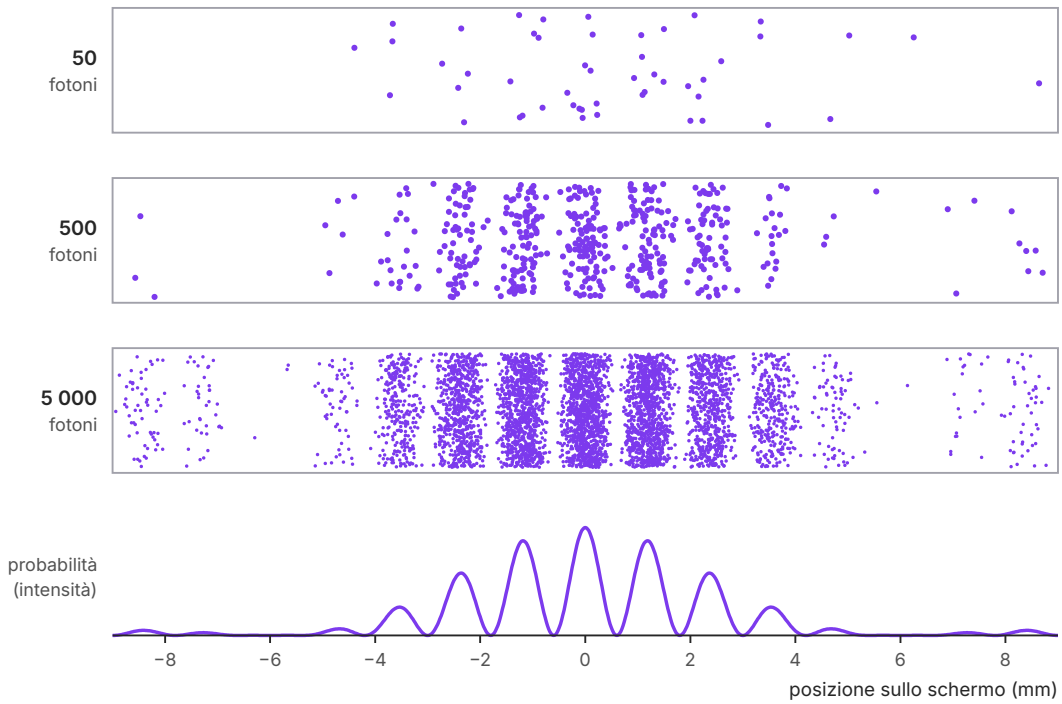

Figura 11.5 Formazione della figura d'interferenza di due fenditure, un fotone alla volta (simulazione al computer). Ogni punto è l'arrivo di un fotone sullo schermo; la posizione di ciascun arrivo è estratta a caso con una probabilità proporzionale all'intensità calcolata con la teoria ondulatoria (curva in basso: fenditure larghe 0,10 mm, a distanza 0,50 mm, luce da 600 nm, schermo a 1,0 m). Con 50 fotoni la figura non si riconosce; con 500 le frange si riconoscono già; con 5 000 la figura è evidente.

L'esperimento dice due cose. La prima: l'interferenza non nasce da fotoni diversi che interferiscono fra loro, perché nell'apparato c'è un fotone alla volta; ogni fotone "interferisce con se stesso". La seconda: non possiamo prevedere dove arriverà il singolo fotone, ma possiamo prevedere con grande precisione come si distribuiranno molti fotoni. È lo stesso tipo di regolarità che hai incontrato in probabilità: il risultato di un lancio di dadi è imprevedibile, la distribuzione di migliaia di lanci no.

11.5.2 L'interpretazione probabilistica

Il legame fra le due descrizioni è il seguente. L'onda elettromagnetica calcolata con le leggi di Maxwell non descrive una materia continua che si distribuisce sullo schermo, ma la **probabilità** di trovare un fotone: la probabilità che un fotone arrivi in una piccola regione dello schermo è proporzionale all'intensità dell'onda in quella regione, cioè al quadrato dell'ampiezza del campo. Dove l'onda ha frange scure i fotoni non arrivano mai; dove ha frange chiare ne arrivano molti. Con luce intensa i fotoni sono così numerosi che la distribuzione coincide con l'intensità classica, e la descrizione ondulatoria è perfetta. È l'**interpretazione probabilistica** della radiazione, che nel capitolo 13 estenderemo alla materia.

Si può allora chiedere da quale fenditura sia passato il fotone? Si può provare a scoprirlo, per esempio mettendo davanti alle fenditure due polarizzatori incrociati, che "marcano" il percorso del fotone. Il risultato è netto: quando l'apparato permette di sapere, anche solo in linea di principio, da quale fenditura è passato ciascun fotone, le frange spariscono, e sullo schermo resta la somma delle figure di due fenditure singole. Comportamento ondulatorio e informazione sul percorso si escludono a vicenda.

11.5.3 Né onda né particella

Il **dualismo onda-corpuscolo** non significa che la luce sia a volte un'onda e a volte una particella, come se cambiasse natura a seconda dell'esperimento. Significa che onda e particella sono due modelli classici, presi dalla nostra esperienza con le onde nell'acqua e con le palline, e che la luce non è esattamente né l'una né l'altra cosa. Si propaga come un'onda, che stabilisce le probabilità; scambia energia e quantità di moto con la materia come una particella, a quanti interi di energia hf e quantità di moto h/λ. Le due grandezze che descrivono l'aspetto corpuscolare, E e p, sono legate a quelle che descrivono l'aspetto ondulatorio, f e λ, dalla costante di Planck: è lei a fissare la scala a cui la granularità diventa visibile.

Nel 1924 Louis de Broglie si chiese se lo stesso dualismo potesse valere al contrario: se le particelle materiali, come gli elettroni, potessero comportarsi da onde. Sarà il punto di partenza del capitolo 13. Prima, nel capitolo 12, useremo i fotoni per leggere la struttura degli atomi: se la luce viene emessa a quanti, le righe degli spettri ci diranno quali energie sono permesse agli elettroni dentro un atomo.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: la costante di Planck con i LED

Un **LED** (diodo a emissione di luce) emette fotoni quando gli elettroni che lo attraversano scendono attraverso un salto di energia caratteristico del semiconduttore, il gap (capitolo 13). Il LED comincia a condurre e a emettere quando la tensione V ai suoi capi è tale che l'energia eV fornita a ogni elettrone che lo attraversa è circa uguale a quella del fotone emesso: $eV \approx hc/\lambda$. Misurando la tensione di soglia V di LED di colori diversi, il grafico di V in funzione di $1/\lambda$ dovrebbe essere una retta di pendenza hc/e.

Materiali. Cinque LED di colori diversi (rosso, giallo, verde, blu, viola) con la lunghezza d'onda di picco dichiarata dal costruttore (incertezza ± 5 nm); un alimentatore in continua regolabile da 0 a 5 V; un resistore di protezione da 1 kΩ in serie; un voltmetro e un milliamperometro digitali.

Procedimento. 1) Monta il circuito con il LED, il resistore e il milliamperometro in serie e il voltmetro ai capi del solo LED. 2) Aumenta la tensione a piccoli passi e registra le coppie tensione–corrente fino a circa 10 mA. 3) Riporta la caratteristica corrente–tensione: sopra una certa tensione la curva diventa quasi rettilinea; prolunga il tratto rettilineo fino a corrente nulla e leggi l'intersezione, la tensione di soglia V. 4) Ripeti per ogni LED. 5) Riporta V in funzione di $1/\lambda$, con le barre d'incertezza, e traccia la retta che passa meglio fra i punti e le rette di massima e minima pendenza.

Tabella 11.4 Tensioni di soglia di cinque LED (dati tipici). Incertezze: λ ± 5 nm, V ± 0,03 V. L'ultima colonna riporta l'energia dei fotoni calcolata con hc = 1240 eV·nm.

LED	λ (nm)	$1/\lambda$ (μm^{-1})	V (V)	$hc/(e\lambda)$ (V)
rosso	630	1,59	1,86	1,97
giallo	590	1,69	1,95	2,10
verde	525	1,90	2,22	2,36
blu	470	2,13	2,50	2,64
viola	405	2,47	2,87	3,06

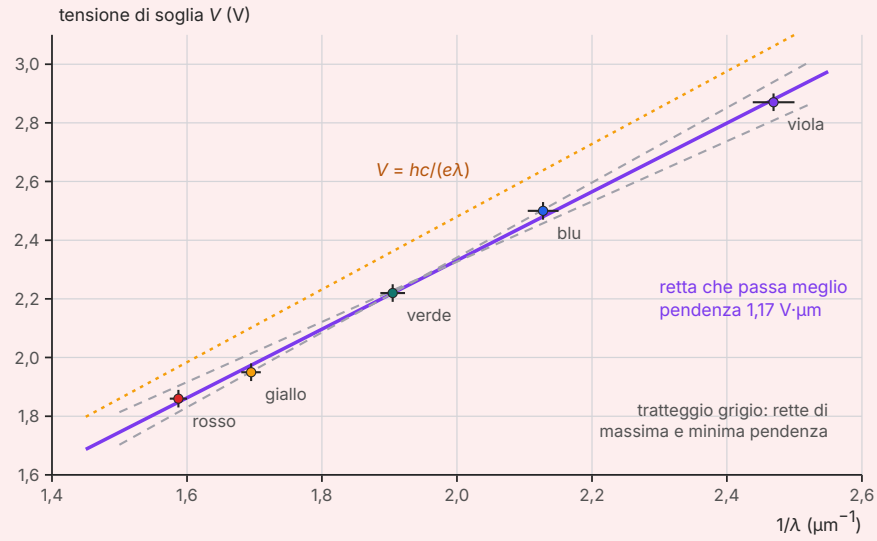

Figura 11.6 Tensione di soglia dei LED in funzione dell'inverso della lunghezza d'onda (dati tipici della Tabella 11.4), con le barre d'incertezza. In viola la retta che passa meglio fra i punti, in grigio tratteggiato le rette di massima e minima pendenza compatibili con le barre; la retta punteggiata arancione è la previsione ideale $V = hc/(e\lambda)$.

Che cosa concludere. I punti sono allineati (Figura 11.6): la tensione di soglia cresce in proporzione all'energia dei fotoni. La retta che passa meglio ha pendenza 1,17 V·μm = $1{,}17 \times 10^{-6}$ V·m; le rette di massima e minima pendenza, tracciate per gli angoli estremi delle barre del primo e dell'ultimo punto, hanno pendenze 1,28 V·μm e 1,03 V·μm, quindi la pendenza è (1,17 ± 0,13) V·μm. Poiché la pendenza è hc/e, $h = e \times$ pendenza $/ c = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C $\times 1{,}17 \times 10^{-6}$ V·m $/ 3{,}00 \times 10^{8}$ m/s = $6{,}2 \times 10^{-34}$ J·s, con un'incertezza di $1{,}60 \times 10^{-19} \times 0{,}13 \times 10^{-6} / 3{,}00 \times 10^{8} \approx 0{,}7 \times 10^{-34}$ J·s.

Confronto teoria–esperimento. Misura: $h = (6{,}2 \pm 0{,}7) \times 10^{-34}$ J·s; valore accettato $6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s. La differenza, $0{,}4 \times 10^{-34}$ J·s, è minore dell'incertezza: le due grandezze sono compatibili, nel senso del volume del primo anno. La compatibilità, però, non deve rassicurare troppo: la misura è **sistematicamente bassa**. Tutte le tensioni di soglia sono circa il 6% minori di $hc/(e\lambda)$, per ogni colore nella stessa proporzione, e quindi anche la pendenza, e con lei h, risulta bassa di circa il 6%. È un errore sistematico, che ripetere le misure o aggiungere altri LED non riduce: il valore accettato cade dentro l'intervallo soltanto perché l'incertezza, l'11%, è larga, molto più di quella dell'esempio con la fotocella. Le cause stanno nel metodo: la tensione di soglia dipende da come si sceglie il tratto «rettilineo» della caratteristica da prolungare; l'energia dei fotoni emessi è vicina a quella del gap, ma non esattamente uguale, e la tensione di accensione non coincide esattamente con nessuna delle due; la lunghezza d'onda di picco non è l'unica emessa, perché un LED ha una banda larga qualche decina di nanometri. Per questo il metodo

mostra in modo convincente che la tensione di soglia è proporzionale all'energia dei fotoni e dà l'ordine di grandezza giusto di h, ma non è una misura di precisione.

Sicurezza. Si lavora a bassa tensione, ma senza il resistore di protezione un LED si brucia in un istante. Non guardare direttamente da vicino i LED blu e viola accesi alla massima corrente.

Per la relazione. Riporta la caratteristica di almeno un LED con il tratto rettilineo prolungato; discuti come cambierebbe h se scegliessi la soglia a una corrente fissa (per esempio 1 mA) invece che per estrapolazione; se la scuola dispone di una fotocella con una lampada a mercurio e dei filtri, ripeti la misura con il metodo del potenziale di arresto e confronta le due incertezze.

DA RICORDARE

Verso l'esame: il fotone nella seconda prova

L'effetto fotoelettrico appartiene al nucleo tematico **Onde e particelle**, e il quadro di riferimento chiede esplicitamente di saper applicare l'equazione di Einstein e di discutere il dualismo onda-particella «anche quantitativamente». Le situazioni tipiche sono una tabella di potenziali di arresto da riportare in grafico per ricavare h e W_0, una sorgente di potenza data di cui contare i fotoni, un confronto fra due metalli, un urto Compton con il calcolo dell'energia dell'elettrone di rinculo.

Le insidie ricorrenti: mescolare elettronvolt e joule nella stessa equazione; scambiare la frequenza di soglia con la lunghezza d'onda di soglia (la condizione per l'emissione è $f > f_0$, cioè $\lambda < \lambda_0$); attribuire all'intensità un effetto sull'energia degli elettroni; dimenticare che K_{max} è l'energia **massima**. Nell'argomentazione conviene sempre partire dal bilancio di energia per un singolo fotone e un singolo elettrone: è il cuore dell'interpretazione di Einstein.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$E = hf = hc/\lambda$ — energia (J) di un fotone di frequenza f (Hz); $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s. In elettronvolt: E (eV) $= 1240/\lambda$ (nm).

$p = h/\lambda = E/c$ — quantità di moto (kg·m/s) di un fotone, particella di massa nulla che si muove sempre a velocità c.

$N/\Delta t = P/(hf)$ — numero di fotoni al secondo di una sorgente monocromatica di potenza P.

$K_{max} = eV_a$ — energia cinetica massima dei fotoelettroni, misurata dal potenziale di arresto V_a (V).

$K_{max} = hf - W_0$ — equazione di Einstein: un fotone cede tutta la sua energia a un elettrone, che spende almeno il lavoro di estrazione W_0 per uscire. Vale per $f \geq f_0$.

$f_0 = W_0/h$, $\lambda_0 = hc/W_0$ — frequenza e lunghezza d'onda di soglia; l'emissione avviene solo per $f > f_0$, cioè $\lambda < \lambda_0$, qualunque sia l'intensità.

$V_a = (h/e)f - W_0/e$ — retta di Millikan: pendenza $h/e = 4{,}14 \times 10^{-15}$ V·s uguale per tutti i metalli.

$\lambda' - \lambda = [h/(m_e c)](1 - \cos\theta)$ — effetto Compton: aumento della lunghezza d'onda di un fotone diffuso di un angolo θ da un elettrone libero e fermo; $h/(m_e c) = 2{,}43$ pm. Non dipende dalla lunghezza d'onda iniziale.

SINTESI

- Nell'effetto fotoelettrico la luce estrae elettroni da un metallo; in un fototubo la corrente di saturazione misura quanti elettroni escono, il potenziale di arresto la loro energia cinetica massima, $K_{max} = eV_a$.
- Tre fatti contraddicono la teoria ondulatoria: K_{max} non dipende dall'intensità; esiste una frequenza di soglia sotto la quale non esce alcun elettrone; l'emissione non ha ritardo misurabile.
- Einstein (1905): la radiazione è formata da quanti di luce, o fotoni, di energia hf; ogni fotone cede tutta la sua energia a un solo elettrone.
- Equazione di Einstein: $K_{max} = hf - W_0$, dove il lavoro di estrazione W_0 è l'energia minima per portare un elettrone fuori dal metallo; la soglia è $f_0 = W_0/h$.
- L'intensità della luce stabilisce il numero di fotoni, quindi il numero di elettroni emessi; la frequenza stabilisce l'energia di ciascun fotone, quindi l'energia degli elettroni.
- Millikan (1916) verificò che il potenziale di arresto cresce linearmente con la frequenza, con pendenza h/e uguale per tutti i metalli; il Nobel per la fisica del 1921 premiò Einstein in particolare per questa legge.
- Il fotone ha massa nulla, energia $E = hf$ e quantità di moto $p = h/\lambda = E/c$; una sorgente di potenza P emette $P/(hf)$ fotoni al secondo, un numero enorme anche per sorgenti deboli.
- La capacità di ionizzare dipende dall'energia del singolo fotone, non dall'intensità: per questo ultravioletto, raggi X e gamma sono ionizzanti e la luce visibile no.
- Nell'effetto Compton (1923) un fotone di raggi X urta un elettrone e ne esce con lunghezza d'onda maggiore: $\lambda' - \lambda = [h/(m_e c)](1 - \cos\theta)$, ricavata dalla conservazione relativistica di energia e quantità di moto.
- Lo spostamento Compton dipende solo dall'angolo e vale al massimo 4,85 pm: è rilevante per raggi X e gamma, trascurabile per la luce visibile.
- Nell'esperimento della doppia fenditura con un fotone alla volta ogni fotone arriva in un punto, e la figura d'interferenza emerge dalla distribuzione di molti arrivi.
- L'onda determina la probabilità di trovare un fotone, proporzionale all'intensità; onda e particella sono due modelli classici, e la luce si comporta come l'uno o l'altro a seconda di ciò che si misura.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Un catodo è illuminato con luce monocromatica di frequenza maggiore della soglia. Se l'intensità della luce raddoppia:
   - **A.** l'energia cinetica massima dei fotoelettroni raddoppia
   - **B.** raddoppia il numero di elettroni emessi al secondo, mentre l'energia cinetica massima resta la stessa
   - **C.** la frequenza di soglia si dimezza
   - **D.** il potenziale di arresto raddoppia

2. ● Un fotone di luce di lunghezza d'onda 620 nm ha un'energia di circa:
   - **A.** 1,0 eV
   - **B.** 3,0 eV
   - **C.** 2,0 eV
   - **D.** 0,50 eV

3. ● Il potenziale di arresto di un fototubo, moltiplicato per la carica elementare, è uguale:
   - **A.** all'energia cinetica massima dei fotoelettroni
   - **B.** al lavoro di estrazione del catodo
   - **C.** all'energia dei fotoni incidenti
   - **D.** all'energia cinetica media dei fotoelettroni

4. ●● Nell'effetto Compton la differenza fra la lunghezza d'onda del fotone diffuso e quella del fotone incidente dipende:
   - **A.** dalla lunghezza d'onda del fotone incidente
   - **B.** dall'intensità del fascio incidente
   - **C.** dal materiale del bersaglio
   - **D.** soltanto dall'angolo di diffusione

5. ●● La quantità di moto di un fotone di lunghezza d'onda 500 nm vale:
   - **A.** $4{,}0 \times 10^{-19}$ kg·m/s
   - **B.** $4{,}4 \times 10^{-36}$ kg·m/s
   - **C.** $1{,}3 \times 10^{-27}$ kg·m/s
   - **D.** zero, perché il fotone non ha massa

6. ●● Un metallo viene illuminato con luce di frequenza f e i fotoelettroni hanno energia cinetica massima K. Se la frequenza raddoppia, l'energia cinetica massima diventa:
   A. maggiore di $2K$
   B. esattamente $2K$
   C. compresa fra K e $2K$
   D. uguale a K

7. ●● Nel grafico del potenziale di arresto in funzione della frequenza, le rette ottenute con due metalli diversi:
   A. hanno la stessa intercetta sull'asse delle frequenze
   B. hanno pendenze diverse, proporzionali al lavoro di estrazione
   C. coincidono
   D. sono parallele, con pendenza h/e

8. ● In un esperimento di doppia fenditura in cui i fotoni arrivano uno alla volta:
   A. ogni fotone produce sullo schermo una debole figura d'interferenza completa
   B. ogni fotone arriva in un punto, e la figura d'interferenza si forma con l'arrivo di molti fotoni
   C. i fotoni arrivano soltanto nei due punti di fronte alle fenditure
   D. la figura d'interferenza si forma solo se due fotoni attraversano insieme l'apparato

Vero o falso

9. ● Un fotone di luce rossa ha un'energia minore di un fotone di luce blu. V / F

10. ● Se la luce ha una frequenza minore della soglia, aspettando abbastanza a lungo con una luce molto intensa si finisce per osservare l'emissione di elettroni. V / F

11. ●● Il fotone non ha massa, ma ha quantità di moto. V / F

12. ●● Nell'effetto Compton lo spostamento $\Delta\lambda$ prodotto da un elettrone libero sarebbe lo stesso per la luce visibile e per i raggi X; per la luce visibile, però, la variazione relativa della lunghezza d'onda è trascurabile. V / F

Applicare

13. ● Calcola l'energia di un fotone di luce blu di lunghezza d'onda 450 nm, in joule e in elettronvolt.

14. ● Il lavoro di estrazione del potassio è 2,3 eV. Calcola la frequenza di soglia e la lunghezza d'onda di soglia.

15. ● Una lastra di zinco ($W_0 = 4{,}30$ eV) è illuminata con radiazione ultravioletta di 250 nm. Calcola l'energia cinetica massima dei fotoelettroni, il potenziale di arresto e la velocità massima degli elettroni.

16. ●● Leggi la Figura 11.3. a) Stima la frequenza di soglia del sodio. b) Stima il potenziale di arresto per il sodio illuminato con radiazione di frequenza $1{,}0 \times 10^{15}$ Hz e controlla il valore con l'equazione di Einstein. c) Lo zinco emette elettroni se è illuminato con luce visibile?

17. ●● Completa. In un fototubo il potenziale di arresto è 1,2 V. L'energia cinetica massima dei fotoelettroni è _____ eV, cioè _____ J. Se si raddoppia l'intensità della luce, il potenziale di arresto _____ .

18. ●● Un laser verde da 5,0 mW emette luce di lunghezza d'onda 532 nm. Calcola quanti fotoni emette ogni secondo.

19. ●● Calcola lo spostamento Compton per fotoni diffusi da elettroni liberi a 60° e a 180°.

20. ●● Con l'aiuto della Tabella 11.2, stabilisci quali dei metalli elencati emettono elettroni se illuminati con luce viola di 400 nm, e calcola per ciascuno l'energia cinetica massima dei fotoelettroni.

Problemi

21. ●● Un catodo illuminato con luce di 400 nm presenta un potenziale di arresto di 1,10 V. a) Calcola il lavoro di estrazione del catodo. b) Calcola la lunghezza d'onda di soglia. c) Calcola il potenziale di arresto con luce di 500 nm.

22. ●● Un catodo illuminato con radiazione di 300 nm ha un potenziale di arresto di 2,03 V; con radiazione di 400 nm il potenziale di arresto scende a 1,00 V. Senza usare il valore tabulato di h, ricava dai dati la costante di Planck e il lavoro di estrazione del catodo (usa $c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s ed $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C).

23. ●●● Un catodo di rame ($W_0 = 4{,}7$ eV) è illuminato con radiazione ultravioletta di 200 nm. I fotoelettroni più veloci attraversano un foro nell'anodo ed entrano in una regione dove c'è un campo magnetico uniforme di $2{,}0 \times 10^{-4}$ T, perpendicolare alla loro velocità. a) Calcola l'energia cinetica massima dei fotoelettroni, in eV e in J. b) Calcola la loro velocità e verifica che il calcolo non relativistico è adeguato. c) Calcola il raggio della loro traiettoria circolare (Fisica 4, capitolo 15).

24. ●●● La luce solare arriva sulla Terra con un'intensità di 1,36 kW/m^2. Per semplicità supponi che sia tutta formata da fotoni di 550 nm. a) Calcola il numero di fotoni che arrivano ogni secondo su un metro quadrato perpendicolare ai raggi. b) Calcola la quantità di moto di un fotone e la quantità di moto trasportata ogni secondo su un metro quadrato. c) Confronta il risultato con la pressione di radiazione I/c del capitolo 5. d) Calcola la forza su una vela solare perfettamente riflettente di 100 m^2, perpendicolare ai raggi.

25. ●●● Fotoni di raggi X di lunghezza d'onda 0,0500 nm vengono diffusi da elettroni liberi e fermi, e si rivelano quelli deviati di 120°. a) Calcola la lunghezza d'onda dei fotoni diffusi. b) Calcola l'energia dei fotoni incidenti e diffusi, in keV. c) Calcola l'energia cinetica dell'elettrone di rinculo e stabilisci, con il fattore γ (capitolo 9), se per la sua velocità si può usare la formula classica.

26. ●● Il fotocatodo di un fotomoltiplicatore riceve 1,0 pW di luce di 500 nm; in media un fotone su quattro estrae un fotoelettrone. Il fotomoltiplicatore moltiplica ogni fotoelettrone per un fattore $1{,}0 \times 10^6$. a) Calcola quanti fotoni arrivano al secondo sul fotocatodo. b) Calcola quanti fotoelettroni vengono emessi al secondo. c) Calcola la corrente all'uscita del fotomoltiplicatore.

27. ●●● Una lampada al sodio emette 10 W di luce gialla di 589 nm, uniformemente in tutte le direzioni. Un osservatore la guarda di notte da 1,0 km di distanza, con la pupilla dilatata di diametro 6,0 mm. a) Calcola quanti fotoni emette la lampada al secondo. b) Calcola quale frazione di questi entra nella pupilla e quanti fotoni al secondo entrano nell'occhio. c) Spiega perché, nonostante la luce sia fatta di fotoni, l'osservatore vede una luce continua e non una pioggia di lampi.

28. ●● Un fotone e un elettrone hanno la stessa energia, 2,0 eV (per l'elettrone, energia cinetica). a) Calcola la quantità di moto del fotone. b) Calcola la quantità di moto dell'elettrone (non relativistico). c) Calcola il rapporto fra le due e commentalo alla luce del capitolo 9.

Ragionare e argomentare

29. ●● Un elettrone libero e fermo non può assorbire completamente un fotone, scomparendo il fotone e restando soltanto l'elettrone in moto. Spiega perché, usando la conservazione dell'energia e della quantità di moto. Perché invece un elettrone di un metallo, nell'effetto fotoelettrico, può farlo?

30. ●● Trova l'errore. Uno studente deve calcolare la lunghezza d'onda di soglia del potassio, con $W_0 = 2{,}3$ eV, e scrive: «$\lambda_0 = hc/W_0 = 6{,}63 \times 10^{-34} \times 3{,}00 \times 10^8/2{,}3 = 8{,}6 \times 10^{-26}$ m». Spiega perché il risultato è assurdo, individua l'errore e correggilo.

31. ●●● Progetta un esperimento con un fototubo per verificare che l'energia cinetica massima dei fotoelettroni non dipende dall'intensità della luce. Indica che cosa misuri, come fai variare l'intensità senza cambiare la frequenza, che cosa prevedono la teoria ondulatoria e la teoria dei fotoni, e quale grafico useresti per presentare i risultati.

Verso l'esame di Stato

32. ●●● **Quesito.** Un catodo metallico viene illuminato con radiazione monocromatica di diverse lunghezze d'onda e si misura il potenziale di arresto (incertezza ± 0,02 V): λ (nm) = 250; 300; 350; 400 e V_a (V) = 2,67; 1,82; 1,27; 0,79. a) Calcola le frequenze e riporta in un grafico il potenziale di arresto in funzione della frequenza. b) Dal grafico ricava la costante di Planck e il lavoro di estrazione del metallo. c) Con la Tabella 11.2 stabilisci di quale metallo si tratta probabilmente, e calcola la lunghezza d'onda di soglia. d) Uno studente propone di illuminare lo stesso catodo con un laser rosso di 650 nm molto potente, sostenendo che con un'intensità sufficiente gli elettroni usciranno comunque. Argomenta perché ha torto.

33. ●●● **Problema.** Un fototubo con catodo di cesio ($W_0 = 2{,}1$ eV) viene lasciato con i due elettrodi isolati, senza collegarli a un circuito. Il catodo e l'anodo si comportano come un condensatore di capacità 5,0 pF (Fisica 4, capitolo 12). All'istante iniziale il condensatore è scarico, e il catodo viene illuminato con luce viola di 405 nm che produce una corrente fotoelettrica iniziale di 2,0 nA. a) Calcola l'energia dei fotoni e l'energia cinetica massima dei fotoelettroni. b) Gli elettroni che arrivano all'anodo lo caricano negativamente: spiega perché a un certo punto la corrente si arresta e calcola la differenza di potenziale finale fra anodo e catodo. c) Calcola la carica finale sull'anodo, il numero di elettroni che vi sono arrivati e una stima del tempo necessario, supponendo per semplicità che la corrente resti 2,0 nA. Il tempo reale è maggiore o minore? d) Che cosa cambia se si raddoppia l'intensità della luce? E se si usa luce rossa di 650 nm?

PER APPROFONDIRE

- [EIN] A. Einstein, L. Infeld, *L'evoluzione della fisica*: i capitoli sui quanti, dove gli autori raccontano senza formule perché l'effetto fotoelettrico costrinse a tornare a un'immagine corpuscolare della luce, e come conviverci con l'interferenza.
- [QED] R. P. Feynman, *QED. La strana teoria della luce e della materia*: il primo capitolo, sui fotomoltiplicatori che «fanno clic» e sulla luce che arriva a granelli, è il miglior commento possibile alla figura dei fotoni che arrivano uno alla volta.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. III: i primi capitoli, sul comportamento quantistico e sull'esperimento delle due fenditure con proiettili, onde ed elettroni.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sui fotoni e le onde di materia, con molti esercizi sull'effetto fotoelettrico e sull'effetto Compton.
- [TAY] J. R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*: il capitolo sul metodo dei minimi quadrati, per calcolare la retta che passa meglio fra i punti nell'esperimento di Millikan o in quello con i LED.

Glossario del capitolo

Corrente di saturazione
Valore massimo della corrente in un fototubo, raggiunto quando l'anodo raccoglie tutti i fotoelettroni emessi; è proporzionale all'intensità della luce.

Dualismo onda-corpuscolo
Il fatto che la radiazione (e, come si vedrà, la materia) mostri proprietà ondulatorie nella propagazione e corpuscolari nello scambio di energia e quantità di moto.

Effetto Compton
Aumento della lunghezza d'onda di un fotone (di raggi X o gamma) diffuso da un elettrone, spiegato come un urto fra particelle.

Effetto fotoelettrico
Emissione di elettroni da parte di un metallo (o di un altro materiale) colpito da radiazione elettromagnetica di frequenza sufficientemente alta.

Equazione di Einstein (effetto fotoelettrico)
$K_{max} = hf - W_0$: bilancio energetico di un fotone che cede tutta la sua energia a un elettrone del metallo.

Flusso di fotoni
Numero di fotoni emessi o ricevuti nell'unità di tempo; per una sorgente monocromatica di potenza P vale $P/(hf)$.

Fotoelettrone
Elettrone estratto da un materiale per effetto fotoelettrico.

Fotomoltiplicatore
Rivelatore in cui un fotoelettrone, accelerato contro una serie di dinodi, viene moltiplicato fino a dare un impulso di corrente misurabile; può contare singoli fotoni.

Fotone
Quanto della radiazione elettromagnetica: particella di massa nulla, che si muove alla velocità c, con energia hf e quantità di moto h/λ.

Fototubo
Ampolla vuota con un catodo illuminato e un anodo che raccoglie i fotoelettroni; permette di misurare la corrente fotoelettrica in funzione della tensione.

Frequenza di soglia
Frequenza minima $f_0 = W_0/h$ della radiazione capace di estrarre elettroni da un metallo, indipendentemente dall'intensità.

Interpretazione probabilistica
Lettura dell'intensità di un'onda come probabilità di rivelare in un punto una particella (un fotone).

Lavoro di estrazione
Energia minima W_0 necessaria per portare un elettrone fuori da un metallo; vale qualche elettronvolt.

Lunghezza d'onda Compton
La costante $h/(m_e c) = 2{,}43$ pm, che fissa la scala dello spostamento Compton.

Potenziale di arresto
Differenza di potenziale (con l'anodo negativo) che annulla la corrente fotoelettrica; eV_a è l'energia cinetica massima dei fotoelettroni.

Quantità di moto del fotone
$p = h/\lambda = E/c$; è la quantità di moto che un fotone cede alla materia quando viene assorbito.

Quanto di luce
Nome dato da Einstein (1905) ai pacchetti indivisibili di energia hf di cui è formata la radiazione elettromagnetica.

Spostamento Compton
Differenza $\lambda' - \lambda = [h/(m_e c)](1 - \cos\theta)$ fra la lunghezza d'onda del fotone diffuso e quella del fotone incidente.

Soluzioni

1. B. L'intensità stabilisce il numero di fotoni al secondo, quindi il numero di elettroni; l'energia di ciascun elettrone dipende solo dalla frequenza.

2. C. $E = 1240\ \text{eV·nm} / 620\ \text{nm} = 2{,}0\ \text{eV}$.

3. A. $K_{max} = eV_a$: al potenziale di arresto si fermano anche gli elettroni più veloci.

4. D. $\Delta\lambda = [h/(m_e c)](1 - \cos\theta)$ contiene solo l'angolo e costanti universali.

5. C. $p = h/\lambda = 6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{J·s} / 5{,}00 \times 10^{-7}\ \text{m} = 1{,}3 \times 10^{-27}\ \text{kg·m/s}$.

6. A. $K = hf - W_0$; con $2f$: $K' = 2hf - W_0 = 2K + W_0 > 2K$.

7. D. $V_a = (h/e)f - W_0/e$: la pendenza è universale, cambia solo l'intercetta.

8. B. Ogni fotone viene rivelato in un punto; la figura è la distribuzione statistica di molti arrivi.

9. V. $E = hc/\lambda$: il rosso ha lunghezza d'onda maggiore, quindi fotoni di energia minore (circa 1,9 eV contro 2,7 eV).

10. F. Sotto la soglia nessun fotone ha energia sufficiente, e l'energia non si accumula: non esce alcun elettrone, per quanto intensa sia la luce e per quanto a lungo si aspetti.

11. V. Per una particella di massa nulla $E = pc$, quindi $p = E/c = h/\lambda \neq 0$.

12. V. $\Delta\lambda$ non dipende da λ: è al massimo 4,85 pm, cioè circa l'1% di λ per raggi X di 0,5 nm, ma 1 parte su 100 000 per luce di 500 nm.

13. $E = hc/\lambda = 6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{J·s} \times 3{,}00 \times 10^{8}\ \text{m/s} / 4{,}50 \times 10^{-7}\ \text{m} = 4{,}42 \times 10^{-19}\ \text{J}$; in eV: $4{,}42 \times 10^{-19}\ \text{J} / 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV} = 2{,}76\ \text{eV}$ (oppure 1240/450 = 2,76 eV).

14. $W_0 = 2{,}3\ \text{eV} \times 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV} = 3{,}7 \times 10^{-19}\ \text{J}$; $f_0 = W_0/h = 3{,}7 \times 10^{-19}\ \text{J} / 6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{J·s} = 5{,}6 \times 10^{14}\ \text{Hz}$; $\lambda_0 = 1240\ \text{eV·nm} / 2{,}3\ \text{eV} = 5{,}4 \times 10^{2}\ \text{nm}$ (luce verde).

15. $E = 1240\ \text{eV·nm} / 250\ \text{nm} = 4{,}96\ \text{eV}$; $K_{max} = 4{,}96\ \text{eV} - 4{,}30\ \text{eV} = 0{,}66\ \text{eV} = 0{,}66 \times 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J} = 1{,}06 \times 10^{-19}$ J; $V_a = K_{max}/e = 0{,}66\ \text{V}$; $v = \sqrt{(2K_{max}/m_e)} = \sqrt{(2 \times 1{,}06 \times 10^{-19}\ \text{J} / 9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})} = 4{,}8 \times 10^{5}\ \text{m/s}$.

16. a) La retta del sodio incontra l'asse delle frequenze a circa $0{,}58 \times 10^{15}\ \text{Hz} = 5{,}8 \times 10^{14}\ \text{Hz}$ (calcolo: $f_0 = 2{,}4 \times 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J} / 6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{J·s} = 5{,}8 \times 10^{14}\ \text{Hz}$). b) Dal grafico circa 1,7 V; calcolo: $V_a = 4{,}14 \times 10^{-15}\ \text{V·s} \times 1{,}0 \times 10^{15}\ \text{Hz} - 2{,}4\ \text{V} = 1{,}7\ \text{V}$. c) No: la soglia dello zinco, circa $1{,}04 \times 10^{15}\ \text{Hz}$ (290 nm), è fuori dalla fascia del visibile, nell'ultravioletto.

17. 1,2 eV; $1{,}2 \times 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J} = 1{,}9 \times 10^{-19}\ \text{J}$; resta lo stesso (aumenta solo la corrente di saturazione).

18. $E = hc/\lambda = 6{,}63 \times 10^{-34} \times 3{,}00 \times 10^{8} / 5{,}32 \times 10^{-7}\ \text{J} = 3{,}74 \times 10^{-19}\ \text{J}$; $N/\Delta t = P/E = 5{,}0 \times 10^{-3}\ \text{W} / 3{,}74 \times 10^{-19}\ \text{J} = 1{,}3 \times 10^{16}$ fotoni al secondo.

19. $\Delta\lambda = 2{,}43\ \text{pm} \times (1 - \cos\theta)$. A 60°: 2,43 pm × 0,500 = 1,21 pm. A 180°: 2 × 2,426 pm = 4,85 pm (con il valore non arrotondato).

20. $E = 1240/400\ \text{eV} = 3{,}10\ \text{eV}$. Emettono i metalli con $W_0 < 3{,}10$ eV: cesio ($K_{max} = 3{,}10 - 2{,}1 = 1{,}0$ eV), potassio (0,8 eV), sodio (0,7 eV), calcio (0,2 eV). Zinco, rame e platino no: i fotoni non hanno energia sufficiente.

21. a) $E = 1240/400\ \text{eV} = 3{,}10\ \text{eV}$; $K_{max} = eV_a = 1{,}10\ \text{eV}$; $W_0 = E - K_{max} = 2{,}00\ \text{eV} = 3{,}20 \times 10^{-19}\ \text{J}$. b) $\lambda_0 = 1240\ \text{eV·nm} / 2{,}00\ \text{eV} = 620\ \text{nm}$. c) $E = 1240/500\ \text{eV} = 2{,}48\ \text{eV}$; $V_a = (2{,}48\ \text{eV} - 2{,}00\ \text{eV})/e = 0{,}48\ \text{V}$.

22. $f_1 = c/\lambda_1 = 3{,}00 \times 10^{8}/3{,}00 \times 10^{-7}\ \text{Hz} = 1{,}00 \times 10^{15}\ \text{Hz}$; $f_2 = 7{,}50 \times 10^{14}\ \text{Hz}$. Sottraendo le due equazioni $eV_a = hf - W_0$: $e(V_1 - V_2) = h(f_1 - f_2)$, quindi $h = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C} \times 1{,}03\ \text{V} / 2{,}50 \times 10^{14}\ \text{Hz} = 6{,}59 \times 10^{-34}\ \text{J·s}$. $W_0 = hf_1 - eV_1 = 6{,}59 \times 10^{-19}\ \text{J} - 3{,}25 \times 10^{-19}\ \text{J} = 3{,}34 \times 10^{-19}\ \text{J} = 2{,}09\ \text{eV}$.

23. a) $E = 1240/200\ \text{eV} = 6{,}20\ \text{eV}$; per l'equazione di Einstein $K_{max} = 6{,}20\ \text{eV} - 4{,}7\ \text{eV} = 1{,}5\ \text{eV} = 1{,}5 \times 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J} = 2{,}4 \times 10^{-19}\ \text{J}$. b) $v = \sqrt{(2K/m_e)} = \sqrt{(2 \times 2{,}4 \times 10^{-19}\ \text{J} / 9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})} = 7{,}3 \times 10^{5}\ \text{m/s}$; $v/c = 2{,}4 \times 10^{-3}$ e $K = 1{,}5\ \text{eV} \ll m_e c^2 = 511\ \text{keV}$, quindi la formula classica va

bene. c) La forza di Lorentz è centripeta: $r = m_e v/(eB) = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg × $7{,}3 \times 10^5$ m/s / ($1{,}60 \times 10^{-19}$ C × $2{,}0 \times 10^{-4}$ T) = $2{,}1 \times 10^{-2}$ m = 2,1 cm. Gli elettroni più lenti percorrono circonferenze più piccole.

24. a) Energia di un fotone: $E = hc/\lambda = 6{,}63 \times 10^{-34} \times 3{,}00 \times 10^8 / 5{,}50 \times 10^{-7}$ J = $3{,}62 \times 10^{-19}$ J. Fotoni al secondo su 1 m^2: 1360 W / $3{,}62 \times 10^{-19}$ J = $3{,}8 \times 10^{21}$. b) $p = h/\lambda = 1{,}21 \times 10^{-27}$ kg·m/s; quantità di moto al secondo su 1 m^2: $3{,}8 \times 10^{21} \times 1{,}21 \times 10^{-27} = 4{,}5 \times 10^{-6}$ kg·m/s. c) Per il teorema dell'impulso, la quantità di moto ceduta al secondo a 1 m^2 di superficie assorbente è una pressione: $4{,}5 \times 10^{-6}$ Pa, uguale a $I/c = 1360/(3{,}00 \times 10^8)$ Pa = $4{,}5 \times 10^{-6}$ Pa. Il risultato non dipende dalla lunghezza d'onda scelta: con i fotoni si ritrova la formula ondulatoria. d) Per una superficie riflettente ogni fotone inverte la quantità di moto, che varia di $2h/\lambda$: $F = 2IS/c = 2 \times 1360$ W/m^2 × 100 m^2 / $3{,}00 \times 10^8$ m/s = $9{,}1 \times 10^{-4}$ N.

25. a) Per la formula di Compton $\Delta\lambda = 2{,}43$ pm × (1 − cos 120°) = 2,43 pm × 1,50 = 3,64 pm; $\lambda' = 50{,}0$ pm + 3,64 pm = 53,6 pm = 0,0536 nm. b) $E = 1240$ eV·nm / 0,0500 nm = 24,8 keV; $E' = 1240$ eV·nm / 0,0536 nm = 23,1 keV. c) Per la conservazione dell'energia $K = E - E' \approx 1{,}7$ keV (senza arrotondare le energie intermedie: 1,69 keV). $\gamma - 1 = K/(m_e c^2) = 1{,}7$ keV / 511 keV = $3{,}3 \times 10^{-3}$: l'elettrone è poco relativistico e la formula classica dà $v = \sqrt{(2K/m_e)} = \sqrt{(2 \times 2{,}7 \times 10^{-16}}$ J / $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg) = $2{,}4 \times 10^7$ m/s, circa $0{,}08c$, con un errore di qualche millesimo.

26. a) $E = hc/\lambda = 6{,}63 \times 10^{-34} \times 3{,}00 \times 10^8 / 5{,}00 \times 10^{-7}$ J = $3{,}98 \times 10^{-19}$ J; $N/\Delta t = 1{,}0 \times 10^{-12}$ W / $3{,}98 \times 10^{-19}$ J = $2{,}5 \times 10^6$ fotoni al secondo. b) Un quarto: $6{,}3 \times 10^5$ fotoelettroni al secondo. c) Elettroni al secondo all'uscita: $6{,}3 \times 10^5 \times 1{,}0 \times 10^6 = 6{,}3 \times 10^{11}$; $i = 6{,}3 \times 10^{11}$ s^{-1} × $1{,}60 \times 10^{-19}$ C = $1{,}0 \times 10^{-7}$ A = 0,10 μA, una corrente facile da misurare.

27. a) $E = hc/\lambda = 6{,}63 \times 10^{-34} \times 3{,}00 \times 10^8 / 5{,}89 \times 10^{-7}$ J = $3{,}38 \times 10^{-19}$ J; $N/\Delta t = 10$ W / $3{,}38 \times 10^{-19}$ J = $3{,}0 \times 10^{19}$ fotoni al secondo. b) La frazione è il rapporto fra l'area della pupilla e quella della sfera di raggio 1,0 km: $\pi(3{,}0 \times 10^{-3}\text{ m})^2 / [4\pi(1{,}0 \times 10^3\text{ m})^2] = 2{,}3 \times 10^{-12}$; fotoni nell'occhio: $3{,}0 \times 10^{19} \times 2{,}25 \times 10^{-12} = 6{,}7 \times 10^7$ al secondo. c) Arrivano circa settanta milioni di fotoni al secondo, distribuiti a caso nel tempo: in ogni intervallo di qualche centesimo di secondo, il tempo che l'occhio usa per formare un'immagine, ne arrivano milioni, e le fluttuazioni relative (dell'ordine di $1/\sqrt{N}$) sono minuscole. La granularità diventerebbe percepibile solo con poche decine di fotoni per intervallo, cioè con una sorgente da decine a centinaia di migliaia di volte più debole.

28. a) $p_{\text{fot}} = E/c = 2{,}0 \times 1{,}60 \times 10^{-19}$ J / $3{,}00 \times 10^8$ m/s = $1{,}1 \times 10^{-27}$ kg·m/s. b) $p_{\text{el}} = \sqrt{(2m_e K)} = \sqrt{(2 \times 9{,}11 \times 10^{-31}}$ kg × $3{,}2 \times 10^{-19}$ J) = $7{,}6 \times 10^{-25}$ kg·m/s. c) $p_{\text{el}}/p_{\text{fot}} \approx 7{,}2 \times 10^2$. A parità di energia, la particella con massa ha una quantità di moto molto maggiore: l'elettrone è lento ($v \ll c$), quindi $p = 2K/v \gg K/c$, mentre il fotone, che ha $v = c$, ha la quantità di moto più piccola possibile per la sua energia.

29. Traccia di risposta. Se il fotone (energia E, quantità di moto E/c) fosse assorbito per intero, l'elettrone dovrebbe avere quantità di moto $p = E/c$ ed energia cinetica $K = E$. Ma per una particella con massa $K < pc$ a ogni velocità (dal capitolo 9: $pc = \sqrt{(K^2 + 2Km_e c^2)} > K$): le due leggi di conservazione non si possono soddisfare insieme, e il fotone può solo essere diffuso (effetto Compton). Nel metallo l'elettrone è legato al reticolo: la quantità di moto in eccesso viene assorbita dal metallo intero, che grazie alla sua grande massa la prende senza acquistare un'energia apprezzabile.

30. Una lunghezza d'onda di 10^{-26} m è assurda: è molto più piccola di un nucleo. L'errore è nelle unità: h è in J·s, ma W_0 è stato lasciato in eV. Correzione: $W_0 = 2{,}3 \times 1{,}60 \times 10^{-19}$ J = $3{,}7 \times 10^{-19}$ J; $\lambda_0 = 6{,}63 \times 10^{-34} \times 3{,}00 \times 10^8 / 3{,}7 \times 10^{-19}$ m = $5{,}4 \times 10^{-7}$ m = 540 nm, come con 1240/2,3.

31. Traccia di risposta. Si usa un fototubo con un filtro (o un LED, o un laser) che fissa la frequenza, sopra la soglia. Si misura la curva caratteristica, e in particolare il potenziale di arresto, per diverse intensità; l'intensità si varia senza cambiare la frequenza allontanando la sorgente ($I \propto 1/r^2$), con filtri grigi neutri o con due polarizzatori di cui si ruota l'uno rispetto all'altro (legge di Malus). Per controllare che l'intensità sia davvero cambiata si misura la corrente di saturazione. Previsioni: per la teoria ondulatoria V_a dovrebbe crescere con l'intensità;

per la teoria dei fotoni V_a resta costante e la corrente di saturazione è proporzionale all'intensità. Grafici: V_a e corrente di saturazione in funzione dell'intensità relativa, con le barre d'incertezza; la verifica consiste nel constatare che i valori di V_a sono compatibili fra loro, mentre la corrente cresce linearmente.

32. a) $f = c/\lambda$: $1{,}20 \times 10^{15}$; $1{,}00 \times 10^{15}$; $8{,}57 \times 10^{14}$; $7{,}50 \times 10^{14}$ Hz. I quattro punti (f, V_a) sono allineati entro le incertezze, come prevede l'equazione di Einstein. b) La retta che passa meglio fra i punti ha pendenza $4{,}14 \times 10^{-15}$ V·s (con i due punti estremi: (2,67 − 0,79) V / $4{,}50 \times 10^{14}$ Hz = $4{,}18 \times 10^{-15}$ V·s); $h = e \times$ pendenza = $1{,}60 \times 10^{-19}$ C × $4{,}14 \times 10^{-15}$ V·s = $6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s. Intercetta: −2,31 V, quindi W_0 = 2,31 eV = $3{,}7 \times 10^{-19}$ J. c) Il valore è quello del potassio (2,3 eV). Soglia: λ_0 = 1240 eV·nm / 2,31 eV = 537 nm ≈ 540 nm. d) Un fotone di 650 nm ha energia 1240/650 eV = 1,91 eV < 2,31 eV: nessun fotone può estrarre un elettrone. Aumentare l'intensità significa aumentare il numero di fotoni, non l'energia di ciascuno, e un elettrone assorbe un fotone alla volta: l'emissione non avviene. *Indicatori*: a) Interpretare/elaborare i dati; b) Sviluppare il processo risolutivo; c) Analizzare; d) Argomentare.

33. a) E = 1240 eV·nm / 405 nm = 3,06 eV = $4{,}90 \times 10^{-19}$ J; per l'equazione di Einstein K_{max} = 3,06 eV − 2,1 eV = 0,96 eV ≈ 1,0 eV. b) La carica negativa accumulata sull'anodo crea fra anodo e catodo una differenza di potenziale che frena gli elettroni successivi, come il generatore invertito della curva caratteristica. Quando l'anodo è a −0,96 V rispetto al catodo, nemmeno gli elettroni più veloci lo raggiungono: la differenza di potenziale finale è uguale al potenziale di arresto, $\Delta V = V_a \approx 0{,}96$ V (l'anodo è negativo). c) $Q = C\Delta V$ = $5{,}0 \times 10^{-12}$ F × 0,96 V = $4{,}8 \times 10^{-12}$ C; elettroni: Q/e = $4{,}8 \times 10^{-12}$ C / $1{,}60 \times 10^{-19}$ C = $3{,}0 \times 10^{7}$; $\Delta t \approx Q/i$ = $4{,}8 \times 10^{-12}$ C / $2{,}0 \times 10^{-9}$ A = $2{,}4 \times 10^{-3}$ s. Il tempo reale è maggiore: man mano che l'anodo si carica, sempre meno elettroni hanno energia sufficiente a raggiungerlo e la corrente diminuisce, avvicinandosi a zero gradualmente. d) Con intensità doppia la corrente iniziale raddoppia e il tempo di carica si dimezza, ma la differenza di potenziale finale resta 0,96 V, perché dipende solo dall'energia dei fotoni. Con luce di 650 nm i fotoni hanno 1240/650 eV = 1,91 eV < 2,1 eV: non esce alcun elettrone e il condensatore resta scarico. *Indicatori*: a) Sviluppare il processo risolutivo; b) Analizzare e Argomentare; c) Sviluppare il processo risolutivo e Interpretare/elaborare i dati; d) Argomentare.