CAPITOLO

10

La radiazione termica e l'ipotesi di Planck

Il filamento di una lampadina, una brace e il Sole raccontano la stessa storia con colori diversi; per leggerla fino in fondo la fisica ha dovuto ammettere che l'energia si scambia a pacchetti.

OBIETTIVI

1. Descrivere la radiazione termica e il modello del corpo nero, e leggere lo spettro di un corpo nero a diverse temperature.
2. Usare la legge di Stefan-Boltzmann, anche con l'emissività, e la legge di Wien per stimare temperature e potenze di corpi caldi, stelle e pianeti.
3. Spiegare perché la fisica classica porta alla catastrofe ultravioletta.
4. Enunciare l'ipotesi di Planck e spiegare, con il fattore di Boltzmann, perché i quanti sopprimono l'emissione alle alte frequenze.
5. Ricavare dalla legge di Planck, anche numericamente, le leggi di Wien e di Stefan-Boltzmann.
6. Confrontare il quanto hf con $k_{\mathrm{B}}T$ e spiegare perché la quantizzazione non si osserva nei fenomeni macroscopici.

INDICE DEL CAPITOLO

10.1 Ogni corpo emette radiazione 2
10.2 Le leggi del corpo nero 5
10.3 La catastrofe ultravioletta 11
10.4 L'ipotesi di Planck 13
10.5 Le conseguenze dell'ipotesi di Planck 18

Fisica 5 · Parte IV · La fisica dei quanti · versione 1.0
Capitolo 10: La radiazione termica e l'ipotesi di Planck · pagine 329–358 del volume completo · estratto per lo studio

Avvicina la mano a una stufa elettrica spenta ma ancora calda: senti il calore sulla pelle anche senza toccarla, e anche se l'aria fra la mano e la stufa è fredda. Al buio, una stufa così non si vede. Se la accendi, le resistenze diventano prima rosso cupo, poi arancioni; il filamento di una vecchia lampadina a incandescenza è giallo-bianco; il Sole è bianco abbagliante. Tutti questi oggetti emettono onde elettromagnetiche per il solo fatto di essere caldi, e il colore della luce che emettono dipende dalla loro temperatura: un fabbro, guardando il colore di un pezzo di ferro nella forgia, sa a che temperatura è arrivato.

Alla fine dell'Ottocento spiegare questo fenomeno sembrava un compito facile. La fisica disponeva di due teorie perfettamente collaudate, la termodinamica con la teoria cinetica e l'elettromagnetismo di Maxwell, e la radiazione emessa da un corpo caldo sta proprio all'incrocio fra le due. Invece le due teorie, messe insieme, davano una previsione assurda: un corpo caldo avrebbe dovuto emettere una quantità infinita di energia, quasi tutta nell'ultravioletto. Per far tornare i conti con le misure Max Planck, nel dicembre 1900, dovette introdurre un'ipotesi che lui stesso considerava un espediente: l'energia si scambia a pacchetti, i *quanti*. In questo capitolo seguiamo quella strada, dalle leggi sperimentali del corpo nero alla legge di Planck, e vediamo perché i quanti, invisibili nella vita quotidiana, decidono il colore delle stelle.

10.1 Ogni corpo emette radiazione

10.1.1 La radiazione termica

Nel volume di seconda hai visto che il calore si propaga anche nel vuoto, per irraggiamento, e che tutti i corpi emettono radiazione, tanto più quanto più sono caldi (*Fisica 2*, capitolo 12). Ora sappiamo che cos'è quella radiazione: sono onde elettromagnetiche (capitolo 5). La materia è fatta di cariche, elettroni e nuclei, che per l'agitazione termica oscillano e urtano di continuo; ogni carica accelerata irraggia, e così ogni corpo a temperatura assoluta maggiore di zero emette onde elettromagnetiche. La radiazione emessa da un corpo a causa della sua temperatura si chiama **radiazione termica**.

La radiazione termica ha uno **spettro continuo**: contiene tutte le lunghezze d'onda, ma non con la stessa intensità. A temperatura ambiente quasi tutta la potenza emessa è nell'infrarosso, intorno a 10 μm (capitolo 6): per questo i corpi che ci circondano non brillano al buio, ma una termocamera li «vede». Scaldando un pezzo di ferro, verso i 500 °C compare un debole bagliore rosso cupo; verso i 900 °C il ferro è rosso vivo, verso i 1100 °C arancione, e oltre i 1200 °C diventa giallo-bianco. Al crescere della temperatura aumenta la potenza emessa e la radiazione si sposta verso le lunghezze d'onda più corte.

Un corpo che riceve radiazione ne **assorbe** una parte, ne riflette un'altra e, se è trasparente, ne lascia passare il resto. La parte assorbita lo scalda, la parte emessa lo raffredda; un corpo in equilibrio termico con l'ambiente emette, in ogni istante, tanta energia quanta ne assorbe. Da questo equilibrio discende una regola che già conosci: **un buon assorbitore è anche un buon emettitore**. Una superficie nera opaca, che assorbe quasi tutta la radiazione, è anche quella che a parità di temperatura irraggia di più; una superficie lucida, che riflette quasi tutto, irraggia poco, ed è per questo che le pareti interne di un thermos sono argentate.

10.1.2 Il corpo nero

Per studiare la radiazione termica senza che il risultato dipenda dal materiale conviene pensare al caso limite: un **corpo nero** è un corpo ideale che assorbe **tutta** la radiazione che lo colpisce, a qualunque lunghezza d'onda, senza rifletterne né trasmetterne alcuna. Il nome dice che, a temperatura ambiente, un corpo così apparirebbe perfettamente nero; ma, scaldato, è il miglior emettitore possibile, e a qualche migliaio di kelvin brilla in modo accecante.

Nessuna superficie reale è un corpo nero perfetto: anche il velluto nero o la fuliggine riflettono qualche percento della luce. Un ottimo corpo nero si ottiene però con un trucco geometrico (Figura 10.1a): una **cavità** con le pareti opache e un **piccolo foro**. La radiazione che entra dal foro colpisce la parete interna; una parte è assorbita, il resto è riflesso verso un altro punto della parete, dove di nuovo una parte è assorbita, e così via. Prima che il raggio ritrovi per caso il foro passano molte riflessioni, e dell'energia entrata ne esce praticamente nulla: **il foro** è il corpo nero. È per lo stesso motivo che la pupilla dell'occhio appare nera e che le finestre di un palazzo, viste da lontano in pieno giorno, sembrano scure anche se le stanze sono chiare.

Scaldiamo ora le pareti della cavità a una temperatura uniforme T (Figura 10.1b). Le pareti emettono radiazione verso l'interno, la riassorbono, la riemettono, finché la radiazione nella cavità è in equilibrio con le pareti; dal foro ne esce un campione. Questa è la **radiazione di corpo nero**. Gustav Kirchhoff dimostrò con un ragionamento termodinamico che il suo spettro dipende **soltanto dalla temperatura**: non dal materiale delle pareti, non dalla forma né dalle dimensioni della cavità. Una cavità di ferro e una di porcellana alla stessa temperatura emettono dal foro esattamente la stessa radiazione. Lo spettro di corpo nero è quindi una proprietà universale, che dipende da una sola variabile: per questo trovarne la formula era considerato uno dei grandi problemi della fisica di fine Ottocento. In pratica, un forno con uno spioncino, l'interno di una fornace o la superficie di una stella si comportano con buona approssimazione come corpi neri.

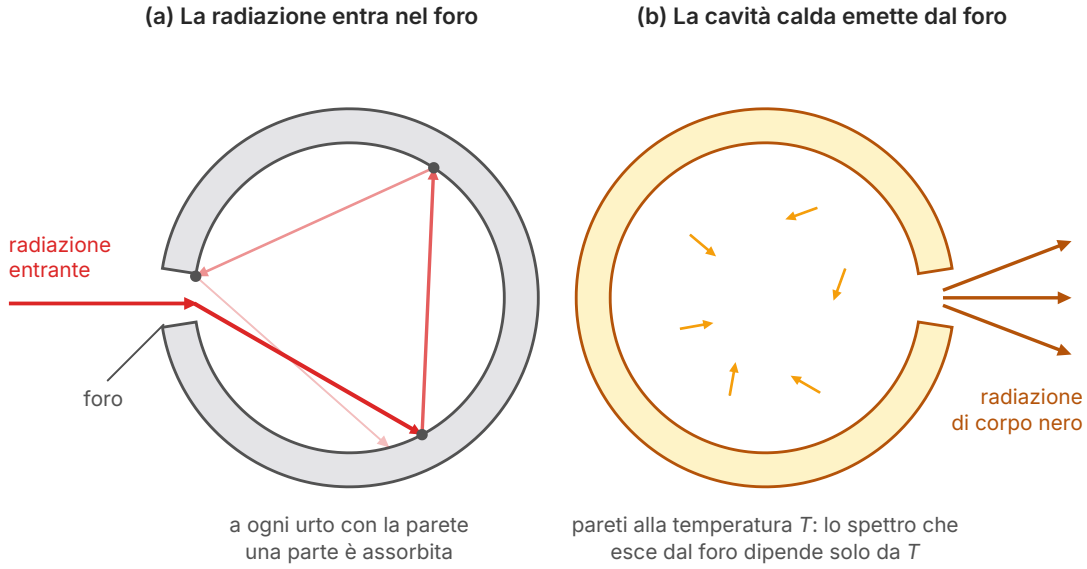

Figura 10.1 Il modello del corpo nero: una cavità con un piccolo foro (sezione, non in scala). (a) La radiazione che entra dal foro subisce molte riflessioni sulle pareti interne e a ogni urto ne viene assorbita una parte (lo spessore delle frecce diminuisce): dal foro non torna fuori quasi nulla. (b) Se le pareti sono alla temperatura T, dal foro esce radiazione di corpo nero, il cui spettro dipende soltanto da T.

10.1.3 Lo spettro del corpo nero

Per descrivere quanta radiazione un corpo emette a ciascuna lunghezza d'onda si usa l'**intensità spettrale** I_λ: la potenza emessa da un metro quadrato di superficie, per ogni nanometro di intervallo di lunghezza d'onda. Si misura in W/(m^2·nm), o in W/(m^2·m) nel SI. Il prodotto $I_\lambda \Delta\lambda$ è la potenza emessa da 1 m^2 nella stretta banda di larghezza $\Delta\lambda$; sommando i contributi di tutte le bande si ottiene la potenza totale emessa per unità di superficie, che indichiamo con I e misuriamo in W/m^2. Nel grafico di I_λ in funzione di λ, quindi, **la potenza totale I è l'area sotto la curva**. (Attenzione: qui I è la potenza che esce da un metro quadrato della superficie emittente; nel capitolo 5 l'intensità di un'onda era la potenza che attraversa un metro quadrato perpendicolare alla direzione di propagazione.)

La Figura 10.2 mostra lo spettro del corpo nero a tre temperature, come lo misurarono con grande accuratezza i fisici di Berlino alla fine dell'Ottocento (le curve sono calcolate con la legge di Planck, che incontreremo più avanti in questo capitolo e che riproduce le misure). Tre fatti saltano all'occhio. Primo: ogni curva parte da zero alle lunghezze d'onda molto corte, sale fino a un **massimo** e poi scende lentamente verso le lunghezze d'onda lunghe. Secondo: una curva a temperatura più alta sta **sopra** quella a temperatura più bassa a **tutte** le lunghezze d'onda, e l'area cresce in fretta, molto più che in proporzione a T. Terzo: al crescere della tempe-

ratura il massimo si **sposta** verso le lunghezze d'onda più corte. A 4000 K il massimo è appena oltre il rosso, nel vicino infrarosso; a 6000 K è nel visibile, nel blu-verde. Queste tre osservazioni sono il contenuto delle leggi del prossimo paragrafo.

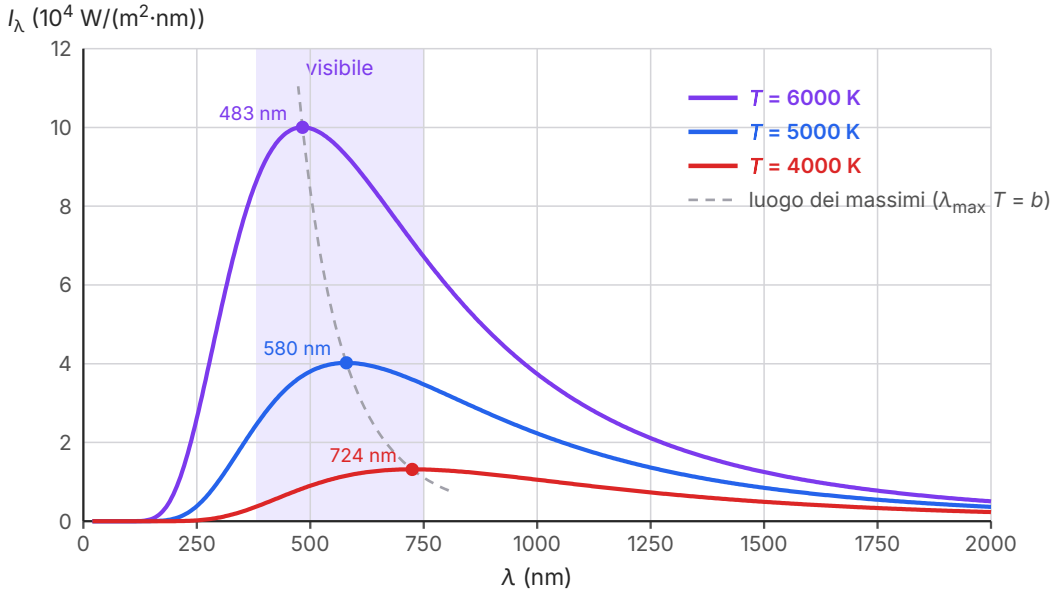

Figura 10.2 Intensità spettrale I_λ di un corpo nero a 4000 K, 5000 K e 6000 K, calcolata con la legge di Planck. I punti segnano i massimi; la linea tratteggiata grigia unisce i massimi delle curve al variare della temperatura (legge di Wien). La banda colorata è l'intervallo visibile (380–750 nm). L'area sotto ciascuna curva è la potenza emessa per unità di superficie: a 6000 K vale $7{,}35 \times 10^7$ W/m², a 4000 K è 5,06 volte più piccola, cioè $(6000/4000)^4$.

10.2 Le leggi del corpo nero

10.2.1 La legge di Stefan-Boltzmann

Nel 1879 Josef Stefan, analizzando misure della potenza irraggiata da corpi caldi, propose che la potenza emessa crescesse come la quarta potenza della temperatura assoluta; nel 1884 il suo allievo Ludwig Boltzmann ricavò la stessa legge per il corpo nero dalla termodinamica, trattando la radiazione nella cavità come un gas che esercita una pressione sulle pareti (la pressione di radiazione del capitolo 5). La **legge di Stefan-Boltzmann** afferma che la potenza emessa per unità di superficie da un corpo nero alla temperatura assoluta T è

$$I = \sigma T^4$$

dove la **costante di Stefan-Boltzmann** vale $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}$ W/(m^2·K^4). La temperatura va espressa in kelvin. La quarta potenza rende la legge molto «ripida»: raddoppiando la temperatura assoluta la potenza emessa diventa $2^4 = 16$ volte maggiore. Un metro quadrato di corpo nero a 300 K emette $\sigma T^4 = 5{,}67 \times 10^{-8} \times (300)^4$ W ≈ 459 W; a 6000 K, la temperatura approssimativa della superficie del Sole, ne emette $7{,}35 \times 10^7$ W, cioè 160 000 volte di più per una temperatura 20 volte maggiore.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere lo spettro: il massimo e l'area

Problema. La Tabella 10.1 riporta l'intensità spettrale di un corpo nero a 5000 K, calcolata con la legge di Planck ogni 250 nm. a) In quale intervallo cade il massimo? Confronta con la legge di Wien. b) Stima la potenza emessa per unità di superficie sommando i contributi $I_\lambda \Delta\lambda$ e confrontala con la legge di Stefan-Boltzmann.

Tabella 10.1 Intensità spettrale di un corpo nero a 5000 K (legge di Planck).

λ (nm)	I_λ (W/(m²·nm))	λ (nm)	I_λ (W/(m²·nm))
250	3842	1750	5457
500	38 036	2000	3636
750	34 751	2250	2503
1000	22 311	2500	1773
1250	13 632	2750	1288
1500	8481	3000	957

Passo 1: il massimo. Il valore più alto della tabella è a 500 nm, ma il valore a 750 nm è di poco inferiore: il massimo cade fra 500 e 750 nm, più vicino a 500 nm. La legge di Wien prevede $\lambda_{\text{max}} = 2{,}898 \times 10^{-3}$ m·K/5000 K = 580 nm, in accordo con la tabella. Per localizzarlo meglio servirebbero valori più fitti: è il limite di una tabella a passo largo.

Passo 2: l'area come somma di rettangoli. Ogni valore della tabella rappresenta una striscia larga $\Delta\lambda = 250$ nm centrata su quella lunghezza d'onda (la prima va da 125 a 375 nm, l'ultima da 2875 a 3125 nm). La somma dei dodici valori è 136 667 W/(m²·nm); moltiplicando per 250 nm:

$$I \approx \Sigma\, I_\lambda\, \Delta\lambda = 136\,667 \text{ W/(m}^2\text{·nm)} \times 250 \text{ nm} = 3{,}42 \times 10^7 \text{ W/m}^2$$

Passo 3: il confronto. La legge di Stefan-Boltzmann dà $\sigma T^4 = 5{,}670 \times 10^{-8} \times (5000)^4$ W/m² = $3{,}54 \times 10^7$ W/m². La somma ne raccoglie il 96%. La differenza non è un errore: la tabella si ferma a 3125 nm, e la coda della curva oltre quel valore, che scende lentamente, contiene circa il 3% della potenza; il resto viene dall'approssimazione a rettangoli.

Controllo. Dalla tabella si legge anche che fra 375 e 625 nm, una sola striscia, esce più di un quarto della potenza totale: 38 036 × 250 W/m² ≈ $9{,}5 \times 10^6$ W/m², il 27% di σT^4.

10.2.2 I corpi reali: l'emissività

Un corpo reale emette meno di un corpo nero alla stessa temperatura. Per tenerne conto si scrive

$$I = e\sigma T^4 \qquad \text{e la potenza emessa da una superficie di area } S \text{ è } \quad P = e\sigma S T^4$$

dove l'**emissività** e è un numero puro compreso fra 0 e 1, uguale a 1 per il corpo nero. Per la regola «buon assorbitore, buon emettitore» la stessa e indica anche la frazione della radiazione incidente che il corpo assorbe. Una vernice nera opaca ha $e \approx 0{,}95$; la pelle umana, nell'infrarosso, circa 0,97–0,98, qualunque sia il suo colore alla luce visibile; l'alluminio lucidato solo qualche centesimo; il tungsteno incandescente circa 0,3. In generale l'emissività dipende anche dalla lunghezza d'onda e dalla temperatura; qui la trattiamo come una costante.

Un corpo alla temperatura T immerso in un ambiente alla temperatura T_a emette e, nello stesso tempo, assorbe la radiazione emessa dall'ambiente. Se le temperature non sono troppo diverse, la potenza netta che perde per irraggiamento è

$$P_{\text{netta}} = e\sigma S(T^4 - T_a{}^4)$$

Prendiamo una persona svestita in una stanza a 20 °C (293 K), con la pelle a 34 °C (307 K), una superficie esposta di 1,8 m^2 ed $e = 0{,}97$. Il corpo emette $0{,}97 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 1{,}8 \times (307)^4$ W ≈ 880 W, ma ne assorbe dalle pareti $0{,}97 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 1{,}8 \times (293)^4$ W ≈ 730 W: la perdita netta è di circa 150 W. È più di quanto produca a riposo il metabolismo di un adulto, circa 100 W: per questo, senza vestiti, in una stanza a 20 °C si sente freddo anche se l'aria è ferma. I vestiti funzionano anche perché la loro superficie esterna è più fredda della pelle.

10.2.3 La legge dello spostamento di Wien

Nel 1893 Wilhelm Wien dimostrò, ancora con un ragionamento termodinamico, che quando la temperatura cambia lo spettro del corpo nero si deforma in modo ben preciso; in particolare la lunghezza d'onda λ_{max} alla quale l'intensità spettrale è massima è inversamente proporzionale alla temperatura assoluta. È la **legge dello spostamento di Wien**:

$$\lambda_{max} T = b \qquad \text{con} \quad b = 2{,}898 \times 10^{-3}\ \text{m·K} \ \ (\text{negli esercizi } 2{,}90 \times 10^{-3}\ \text{m·K})$$

La costante b si chiama **costante di Wien**. Con T in kelvin e b in m·K si ottiene λ_{max} in metri; conviene ricordare che $b \approx 2900$ μm·K, quindi a 2900 K il massimo cade a 1 μm. Nella Figura 10.2 i massimi a 6000 K, 5000 K e 4000 K cadono a 483 nm, 580 nm e 724 nm: i prodotti $\lambda_{max} T$ sono tutti uguali a $2{,}90 \times 10^{-3}$ m·K.

La legge di Wien è un termometro: misurando la lunghezza d'onda del massimo si ricava la temperatura di un corpo lontano o irraggiungibile. Il corpo umano, a circa 310 K, ha il massimo di emissione a $\lambda_{max} = 2900$ μm·K/310 K ≈ 9,4 μm, in pieno infrarosso: proprio nella banda fra 8 e 14 μm in cui lavorano le termocamere (capitolo 6). Una brace a 1000 K ha il massimo a 2,9 μm e la coda visibile dello spettro le dà il colore rosso. Le stelle più fredde, a circa 3000–3500 K, appaiono rossastre; il Sole, intorno ai 5800 K, bianco-giallastro; le stelle più calde, oltre i 10 000 K, bianco-azzurre, con il massimo nell'ultravioletto.

Lo stesso linguaggio si usa per le lampade: la **temperatura di colore** di una sorgente di luce è la temperatura del corpo nero che ha lo stesso colore apparente. Una lampadina «a luce calda» ha una temperatura di colore di circa 2700 K, una «a luce fredda» o «luce diurna» di 5000–6500 K. Per i LED il numero è solo un'etichetta: un LED non è un corpo caldo (vedremo nel capitolo 13 come emette), ma imita il colore di un corpo nero a quella temperatura.

ESEMPIO SVOLTO

La temperatura e la potenza del Sole

Problema. Lo spettro della luce solare misurato fuori dall'atmosfera ha il massimo dell'intensità spettrale a $\lambda_{max} = 502$ nm. Trattando il Sole come un corpo nero di raggio $6{,}96 \times 10^8$ m, calcola: a) la temperatura della sua superficie; b) la potenza emessa da un metro quadrato di superficie solare; c) la potenza totale irraggiata dal Sole (la sua *luminosità*); d) l'intensità della radiazione solare alla distanza della Terra, $1{,}50 \times 10^{11}$ m.

Soluzione. a) Per la legge di Wien:

$$T = \frac{b}{\lambda_{max}} = \frac{2{,}90 \times 10^{-3}\ \text{m·K}}{502 \times 10^{-9}\ \text{m}} = 5{,}78 \times 10^3\ \text{K}$$

b) Per la legge di Stefan-Boltzmann, con $e = 1$: $I = \sigma T^4 = 5{,}67 \times 10^{-8}\ \text{W/(m}^2\text{·K}^4\text{)} \times (5{,}78 \times 10^3\ \text{K})^4 = 6{,}31 \times 10^7\ \text{W/m}^2$. Ogni metro quadrato della superficie del Sole irraggia circa 63 MW, la potenza di una piccola centrale elettrica.

c) La superficie di una sfera di raggio R è $4\pi R^2 = 4\pi \times (6{,}96 \times 10^8\ \text{m})^2 = 6{,}09 \times 10^{18}\ \text{m}^2$, quindi la luminosità è $L = 6{,}31 \times 10^7\ \text{W/m}^2 \times 6{,}09 \times 10^{18}\ \text{m}^2 = 3{,}84 \times 10^{26}$ W.

d) Alla distanza d questa potenza è distribuita su una sfera di area $4\pi d^2$ (capitolo 5):

$$I_{\text{Terra}} = \frac{L}{4\pi d^2} = \frac{3{,}84 \times 10^{26}\ \text{W}}{4\pi \times (1{,}50 \times 10^{11}\ \text{m})^2} = 1{,}36 \times 10^3\ \text{W/m}^2$$

Controllo. Il valore misurato dai satelliti, la «costante solare», è circa 1361 W/m^2: l'accordo è ottimo, anche se il Sole non è un corpo nero perfetto e il suo spettro ha molte righe di assorbimento. Si noti la sensibilità del risultato: un errore dell'1% su λ_{max}, cioè su T, diventa un errore del 4% sulla potenza, per via della quarta potenza.

La Figura 10.3 mette a confronto, su scale logaritmiche, corpi neri a temperature molto diverse, dal corpo umano al Sole. Su queste scale le curve hanno tutte la stessa forma, semplicemente spostata; i massimi stanno su una retta, perché per la legge di Wien $\lambda_{max} \propto 1/T$ e, come vedremo, il valore del massimo cresce come T^5, cioè come $1/\lambda_{max}^5$. Si vede anche che un corpo a 310 K emette nel visibile una potenza del tutto trascurabile, decine di ordini di grandezza sotto quella del Sole.

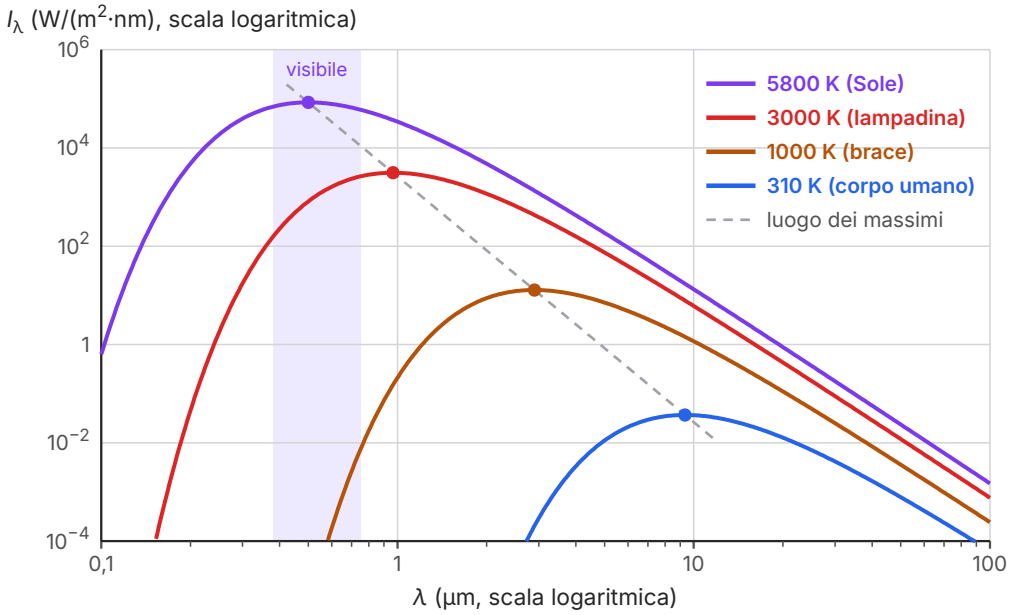

Figura 10.3 Spettri di corpo nero a quattro temperature su scale logaritmiche per entrambi gli assi (calcolati con la legge di Planck). Ogni curva a temperatura maggiore sta sopra le altre a tutte le lunghezze d'onda. La retta tratteggiata unisce i massimi: su queste scale è una retta perché $\lambda_{max} \propto 1/T$ e il valore massimo di I_λ cresce come T^5. Nel visibile (banda colorata) un corpo a 310 K emette quasi nulla.

COLLEGAMENTI

Termometri senza contatto e colori delle stelle

I termometri a infrarossi che si puntano sulla fronte, e i **pirometri** usati nelle acciaierie e nelle vetrerie, misurano la temperatura di un corpo dalla radiazione che emette, senza toccarlo: un sensore raccoglie la radiazione infrarossa in una banda di lunghezze d'onda e l'elettronica, nota l'emissività della superficie, ne ricava la temperatura con la legge di Stefan-Boltzmann o confrontando l'intensità a due lunghezze d'onda diverse. Lo stesso principio fa funzionare le termocamere che cercano le dispersioni di calore negli edifici e i satelliti che misurano la temperatura della superficie del mare.

In astronomia la legge di Wien è il primo strumento per «prendere la temperatura» alle stelle. Il colore di una stella dipende quasi solo dalla temperatura della sua superficie: nella costellazione di Orione la rossa Betelgeuse ha una superficie intorno ai 3500 K, l'azzurra Rigel supera i 10 000 K. Gli astronomi misurano la luminosità di una stella attraverso due filtri colorati, per esempio uno blu e uno giallo, e dal rapporto ricavano la temperatura; insieme alla legge di Stefan-Boltzmann questo permette di stimare anche il **raggio** della stella, come farai in uno dei problemi di fine capitolo (Scienze della Terra).

ERRORE FREQUENTE

«La legge di Wien con la temperatura in gradi Celsius.» **No:** $\lambda_{\max}T = b$ e σT^4 valgono solo con la temperatura **assoluta**. Per il corpo umano a 37 °C, scrivere $2{,}90 \times 10^{-3}/37$ dà 78 µm, otto volte troppo; il conto giusto si fa con 310 K e dà 9,4 µm.

«Il Sole ha il massimo nel verde, quindi il Sole è verde.» **No:** l'occhio non vede il massimo di una curva ma l'effetto complessivo di tutte le lunghezze d'onda visibili, che per la luce solare è un bianco. Inoltre il massimo dipende da come si rappresenta lo spettro: se si riporta l'intensità per unità di **frequenza** invece che di lunghezza d'onda, il massimo della radiazione solare cade a circa $3{,}4 \times 10^{14}$ Hz, che corrisponde a 880 nm, nell'infrarosso. Non è una contraddizione: un intervallo di 1 nm nel blu e uno di 1 nm nel rosso corrispondono a intervalli di frequenza diversi, quindi le due curve hanno forme diverse. Il massimo in λ e il massimo in f **non** sono legati da $\lambda = c/f$.

10.3 La catastrofe ultravioletta

10.3.1 La previsione della fisica classica

Le leggi di Stefan-Boltzmann e di Wien descrivono il **totale** e la **posizione del massimo**, ma non la forma della curva. Per ricavarla dalla fisica classica si può ragionare così. All'interno della cavità la radiazione è un insieme di onde elettromagnetiche stazionarie, perché le pareti conduttrici impongono che il campo elettrico tangente alle pareti sia nullo. È la stessa situazione di una corda fissata ai due estremi (*Fisica 4*, capitolo 6), dove sono possibili soltanto le onde stazionarie con $\lambda_n = 2L/n$; in una cavità a tre dimensioni i modi di oscillazione sono moltissimi, e tanto più fitti quanto più è corta la lunghezza d'onda. Contandoli si trova che il numero di modi con lunghezza d'onda compresa in un intervallo $\Delta\lambda$ è proporzionale a $\Delta\lambda/\lambda^4$: dimezzando la lunghezza d'onda, i modi disponibili in ogni nanometro diventano 16 volte più numerosi.

Quanta energia tocca a ciascun modo? Per la fisica classica la risposta è il principio di equipartizione dell'energia (*Fisica 3*, capitolo 15): in equilibrio termico ogni modo di oscillazione si comporta come un oscillatore armonico e ha in media un'energia $k_{\mathrm{B}}T$, metà cinetica e metà potenziale, qualunque sia la sua frequenza. Moltiplicando il numero di modi per $k_{\mathrm{B}}T$ si ottiene la **legge di Rayleigh-Jeans**:

$$I_\lambda = \frac{2\pi c k_{\mathrm{B}} T}{\lambda^4} \qquad \text{(fisica classica)}$$

La Figura 10.4 la confronta con lo spettro misurato. Alle lunghezze d'onda **lunghe** l'accordo è buono: a 5000 K e a 20 µm la previsione classica supera il valore vero solo dell'8%. Ma andando verso le lunghezze d'onda corte la formula classica continua a salire, come $1/\lambda^4$, mentre lo spettro vero ha un massimo e poi crolla: a 1000 nm la previsione classica è già quasi 6 volte il valore

misurato, a 500 nm 55 volte, a 200 nm più di centomila volte. Peggio ancora, l'area sotto la curva classica è **infinita**: sommando i contributi di modi sempre più numerosi alle lunghezze d'onda sempre più corte, la potenza totale emessa cresce senza limite. Secondo la fisica classica, qualunque corpo caldo dovrebbe irraggiare una potenza infinita, quasi tutta nell'ultravioletto e oltre; e una cavità non potrebbe mai raggiungere l'equilibrio, perché la radiazione assorbirebbe tutta l'energia delle pareti. Questa conclusione, evidentemente falsa, fu chiamata più tardi **catastrofe ultravioletta**.

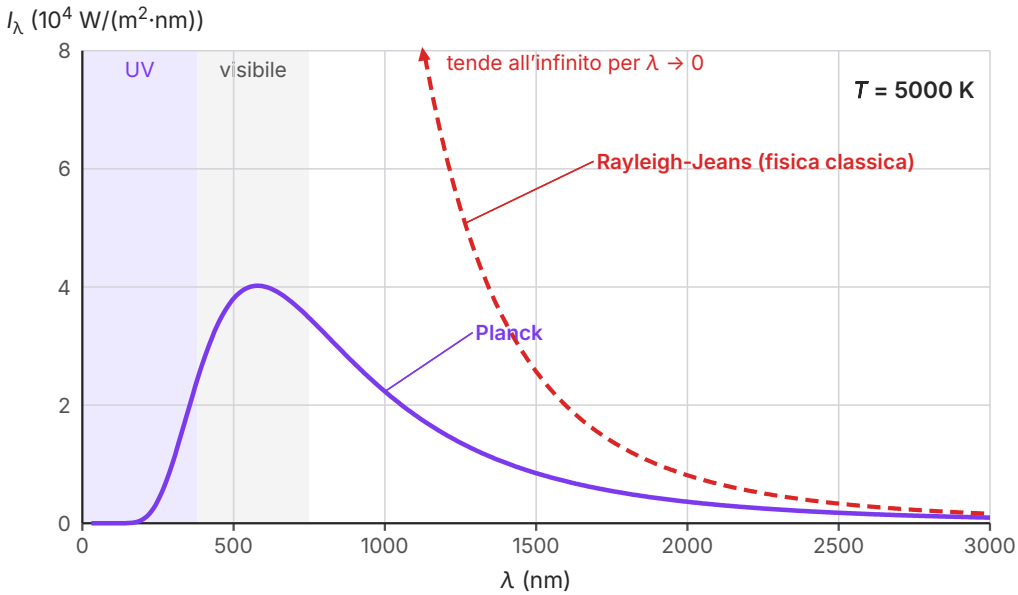

Figura 10.4 Lo spettro di un corpo nero a 5000 K secondo la legge di Planck, che riproduce le misure (viola, continua), e secondo la legge classica di Rayleigh-Jeans (rossa, tratteggiata). Le due curve coincidono alle lunghezze d'onda lunghe; verso l'ultravioletto la previsione classica cresce come $1/\lambda^4$ e tende all'infinito, mentre lo spettro vero tende a zero.

10.3.2 Che cosa non funziona

La catastrofe non nasce da un errore di calcolo. Il conteggio dei modi è geometria delle onde e l'equipartizione è un risultato solido della meccanica statistica, che spiega bene, per esempio, il calore specifico dei gas monoatomici. Il problema è più profondo: una delle due teorie, o il modo di combinarle, non può essere applicato alle alte frequenze. Le misure dicevano chiaramente che i modi ad alta frequenza ricevono molto meno di $k_B T$: quasi nulla. Bisognava capire perché.

C'era anche un altro indizio, che veniva dai gas. Per la teoria cinetica una molecola biatomica come quella dell'azoto dovrebbe avere, oltre ai gradi di libertà di traslazione e di rotazione, anche quelli della vibrazione dei due atomi, che si comportano come due masse unite da una

molla; ma a temperatura ambiente le vibrazioni non contribuiscono all'energia interna, come se fossero «congelate»: il volume di terza lo aveva già segnalato (*Fisica 3*, capitolo 15), rimandando la spiegazione alla fisica quantistica. Anche qui l'equipartizione falliva per le oscillazioni di frequenza elevata. Vedremo alla fine del capitolo che la soluzione è la stessa.

10.4 L'ipotesi di Planck

10.4.1 L'energia a pacchetti

Max Planck, professore a Berlino, lavorava al problema da anni. Nell'autunno del 1900, quando le nuove misure mostrarono che la formula proposta da Wien per lo spettro non funzionava alle lunghezze d'onda lunghe, trovò per tentativi una formula che le riproduceva tutte, a ogni lunghezza d'onda e a ogni temperatura. Restava da capire da dove venisse. Nel dicembre 1900 presentò alla Società tedesca di fisica una giustificazione basata su un'ipotesi senza precedenti.

Planck rappresentava le pareti della cavità come un insieme di **oscillatori** elettrici, cariche che vibrano con tutte le frequenze possibili e scambiano energia con la radiazione. La sua **ipotesi di Planck** era che un oscillatore di frequenza f non possa avere un'energia qualsiasi, ma solo i valori

$$E = nhf \qquad \text{con } n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

e che quindi scambi energia con la radiazione soltanto a **pacchetti** di valore hf. Il pacchetto minimo di energia hf si chiama **quanto** (dal latino *quantum*, «quanto», «una certa quantità»). La costante di proporzionalità h è la **costante di Planck**:

$$h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J·s} \qquad (\text{negli esercizi } 6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{J·s})$$

In meccanica quantistica compare spesso anche la **costante di Planck ridotta** $\hbar = h/(2\pi) = 1{,}055 \times 10^{-34}$ J·s. L'ipotesi di Planck è il primo esempio di **quantizzazione**: una grandezza che la fisica classica considerava continua può assumere soltanto valori discreti, separati da salti. È come se un'altalena potesse oscillare solo con ampiezze ben precise e passare dall'una all'altra senza mai stare nel mezzo.

10.4.2 Perché le alte frequenze si spengono

Che cosa cambia, per l'energia media di un modo, se l'energia è quantizzata? Ci serve un risultato della meccanica statistica, la stessa da cui viene la distribuzione delle velocità di Maxwell (*Fisica 3*, capitolo 15): in equilibrio alla temperatura T, la probabilità di trovare un sistema in uno stato di energia E è proporzionale al **fattore di Boltzmann** $e^{-E/(k_B T)}$. Gli stati di energia molto maggiore di $k_B T$ sono molto improbabili: ogni volta che l'energia aumenta di $k_B T$, la probabilità si riduce di un fattore $e \approx 2{,}7$. L'energia $k_B T$ è la «moneta» che l'agitazione termica ha a disposizione.

Confrontiamo ora il quanto hf con $k_B T$ (Figura 10.5a).

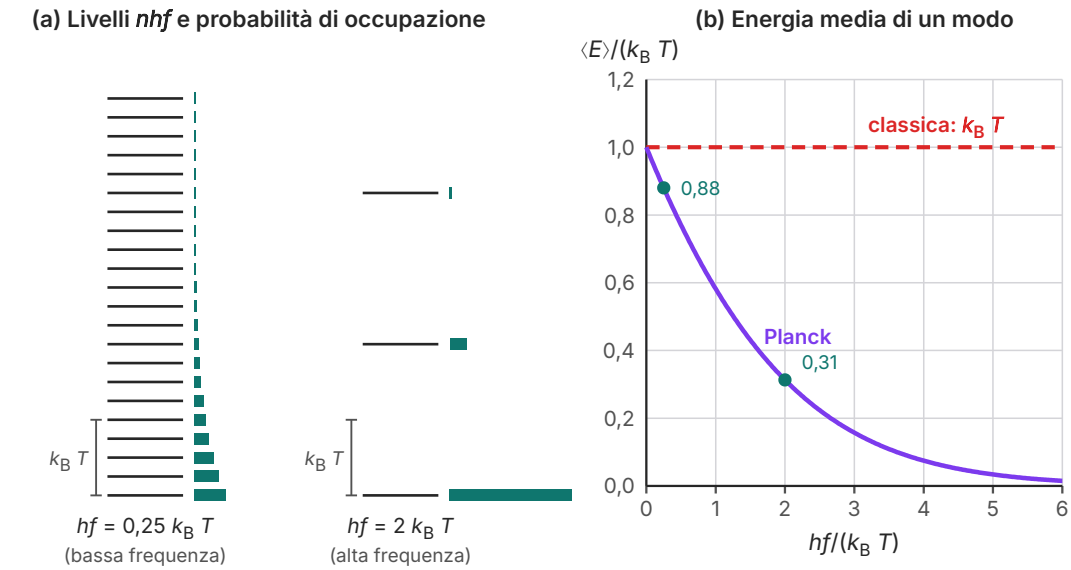

Figura 10.5 (a) I livelli di energia permessi nhf di un oscillatore per due frequenze, nella stessa scala di energia (il segmento grigio indica $k_B T$); le barre sono proporzionali alla probabilità di occupazione, data dal fattore di Boltzmann. Se $hf \ll k_B T$ molti livelli sono occupati; se $hf = 2k_B T$ l'oscillatore sta per lo più nel livello più basso (con probabilità $1 - e^{-2} \approx 0{,}86$). (b) Energia media di un modo, in unità di $k_B T$, in funzione di $hf/(k_B T)$: costante per la fisica classica (rossa), decrescente per Planck (viola). I punti corrispondono ai due casi di (a).

- **Bassa frequenza, $hf \ll k_B T$.** I livelli permessi 0, hf, $2hf$, … sono molto fitti rispetto a $k_B T$, e molti di essi sono occupati con probabilità simili. La quantizzazione quasi non si nota e l'energia media è circa $k_B T$, come nella fisica classica. Per questo la legge di Rayleigh-Jeans funziona alle lunghezze d'onda lunghe.
- **Alta frequenza, $hf \gg k_B T$.** Il primo livello eccitato sta già molto più in alto di $k_B T$: per raggiungerlo l'agitazione termica dovrebbe fornire in un colpo solo un quanto intero, e la probabilità che ciò accada è proporzionale a $e^{-hf/(k_B T)}$, piccolissima. Quasi sempre l'oscillatore resta nel livello $n = 0$, e la sua energia media è quasi nulla. Il modo è «congelato».

Facendo la media con i fattori di Boltzmann, Planck ottenne l'energia media di un modo di frequenza f:

$$\langle E \rangle = \frac{hf}{e^{hf/(k_B T)} - 1}$$

La Figura 10.5b ne mostra l'andamento. Per $hf = 0{,}25\ k_B T$ l'energia media è $0{,}88\ k_B T$, vicina al valore classico; per $hf = 2\ k_B T$ è già scesa a $0{,}31\ k_B T$; per $hf = 10\ k_B T$ è $4{,}5 \times 10^{-4}\ k_B T$. I modi ad alta

frequenza, che per la fisica classica erano infiniti e portavano ciascuno $k_B T$, ricevono un'energia che diminuisce esponenzialmente: la loro somma resta finita, e la catastrofe ultravioletta scompare.

10.4.3 La legge di Planck

Moltiplicando il numero di modi per l'energia media di Planck, invece che per $k_B T$, si ottiene la **legge di Planck** per lo spettro del corpo nero:

$$I_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/(\lambda k_B T)} - 1}$$

È la formula con cui sono state calcolate tutte le curve di questo capitolo, e riproduce le misure a ogni lunghezza d'onda e a ogni temperatura. Leggiamola. Il primo fattore, che cresce come $1/\lambda^5$, viene dal conteggio dei modi; il secondo è l'energia media di un modo, in unità di hf, con $f = c/\lambda$. L'esponente $hc/(\lambda k_B T) = hf/(k_B T)$ è il rapporto fra il quanto e l'energia termica, e decide tutto.

- **Lunghezze d'onda lunghe.** Se $hc/(\lambda k_B T)$ è piccolo, $e^x - 1 \approx x$ (come vedrai in matematica, $e^x \approx 1 + x$ per x piccolo; con la calcolatrice: $e^{0{,}01} = 1{,}01005$). Allora il secondo fattore diventa $\lambda k_B T/(hc)$ e la legge di Planck diventa $2\pi c k_B T/\lambda^4$: è la legge di Rayleigh-Jeans, e h sparisce. Dove i quanti sono piccoli rispetto a $k_B T$, la fisica classica funziona.
- **Lunghezze d'onda corte.** Se $hc/(\lambda k_B T)$ è grande, l'esponenziale al denominatore diventa enorme e prevale sul fattore $1/\lambda^5$: l'intensità crolla a zero. È la soppressione dei modi ad alta frequenza.

Fra i due regimi la curva ha un massimo. La legge di Planck contiene quindi, come casi particolari, la legge di Rayleigh-Jeans e le leggi di Wien e di Stefan-Boltzmann, che ora si possono **ricavare** da essa insieme ai valori delle costanti b e σ.

APPROFONDIMENTO

Un «atto di disperazione» e due nuove costanti

Planck non era un rivoluzionario. Aveva studiato a lungo la termodinamica e sperava di ricavare la legge del corpo nero dal secondo principio, senza ipotesi sulla struttura della materia. Quando si convinse che la formula trovata per tentativi era giusta, per giustificarla dovette ricorrere ai metodi statistici di Boltzmann, che fino ad allora aveva guardato con diffidenza, e introdurre i pacchetti di energia. Considerava la quantizzazione un'ipotesi puramente formale, un artificio di calcolo che sperava di eliminare in seguito; molti anni dopo, in una lettera, descrisse la sua scelta come un atto di disperazione, compiuto perché una spiegazione teorica andava trovata a qualunque costo.

Il primo frutto concreto dell'ipotesi furono i numeri. Confrontando la sua formula con le misure di σ e di b, Planck ricavò i valori di due costanti: la nuova h, che trovò circa $6{,}55 \times 10^{-34}$ J·s, e la costante k_B, circa $1{,}346 \times 10^{-23}$ J/K. Fu lui a introdurre per quest'ultima il simbolo k; oggi porta il nome di Boltzmann. Dal valore di k_B e dalla costante dei gas ottenne il numero di Avogadro e da questo, con la costante di Faraday, la carica elementare: valori più precisi di quelli disponibili all'epoca.

Per alcuni anni quasi nessuno, Planck compreso, prese sul serio i quanti come fatto fisico. Fu Einstein, nel 1905, a fare il passo successivo: non solo gli oscillatori delle pareti, ma la **radiazione stessa** è fatta di quanti di energia hf. Con questa idea spiegò l'effetto fotoelettrico, come vedremo nel prossimo capitolo. Dal 2019 il valore di h è fissato per definizione, $h = 6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}$ J·s esatti, e serve a definire il kilogrammo.

ESEMPIO SVOLTO

Le leggi di Wien e di Stefan-Boltzmann dalla legge di Planck, passo per passo

Problema. Mostra che dalla legge di Planck seguono la legge di Wien, con $b = 2{,}898 \times 10^{-3}$ m·K, e la proporzionalità a T^4 della legge di Stefan-Boltzmann.

Passo 1: una variabile sola. Poniamo $x = hc/(\lambda k_B T)$, cioè $\lambda = hc/(x k_B T)$. Sostituendo nella legge di Planck, $1/\lambda^5 = (x k_B T)^5/(hc)^5$, e si ottiene

$$I_\lambda = \frac{2\pi (k_B T)^5}{h^4 c^3} \cdot g(x) \qquad \text{con} \quad g(x) = \frac{x^5}{e^x - 1}$$

Tutta la dipendenza dalla forma della curva è nella funzione $g(x)$, che è la **stessa** a ogni temperatura; la temperatura compare solo nel fattore davanti, come T^5, e nella relazione fra x e λ.

Passo 2: il massimo. Calcoliamo $g(x)$ per alcuni valori (Tabella 10.2). La funzione cresce fino a $x \approx 5$ e poi diminuisce; infittendo i valori intorno a 5, o usando la derivata come imparerai in matematica, si trova che il massimo è a $x_{max} = 4{,}965$.

Tabella 10.2 Valori della funzione $g(x) = x^5/(e^x - 1)$, che dà la forma dello spettro di corpo nero.

x	1	2	3	4	4,5	5	5,5	6	8	10
$g(x)$	0,58	5,01	12,7	19,1	20,7	21,2	20,7	19,3	11,0	4,54

Passo 3: la legge di Wien. Poiché il massimo cade sempre allo stesso valore di x, a ogni temperatura vale $hc/(\lambda_{max} k_B T) = 4{,}965$, cioè

$$\lambda_{max} T = \frac{hc}{4{,}965\, k_B} = \frac{6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J·s} \times 2{,}998 \times 10^{8}\ \text{m/s}}{4{,}965 \times 1{,}381 \times 10^{-23}\ \text{J/K}} = 2{,}897 \times 10^{-3}\ \text{m·K}$$

È la legge di Wien, e il valore della costante coincide con quello misurato (la piccola differenza nell'ultima cifra viene dagli arrotondamenti delle costanti).

Passo 4: la quarta potenza. Raddoppiamo la temperatura. Allo stesso valore di x corrisponde una lunghezza d'onda dimezzata: la curva si «schiaccia» orizzontalmente di un fattore 2. Le altezze, per il fattore T^5, si moltiplicano per $2^5 = 32$. L'area sotto la curva, base per altezza, cambia di un fattore $32/2 = 16 = 2^4$. Lo stesso ragionamento con un fattore qualsiasi mostra che l'area è proporzionale a T^4: è la legge di Stefan-Boltzmann. Il calcolo esatto dell'area richiede un integrale, che darai per buono: si trova $\sigma = 2\pi^5 k_B^4/(15 h^3 c^2) = 5{,}670 \times 10^{-8}$ W/(m²·K⁴).

Controllo. La costante di Stefan-Boltzmann, misurata prima che Planck scrivesse la sua formula, e la costante di Wien sono ora calcolate a partire da tre costanti fondamentali, h, c e k_B. È proprio così, al contrario, che Planck ricavò i valori di h e k_B: dai valori misurati di σ e b.

ERRORE FREQUENTE

«Planck dimostrò che la luce è fatta di fotoni.» **No.** Planck quantizzò l'energia degli **oscillatori** della materia, cioè l'energia scambiata fra materia e radiazione; continuava a pensare la radiazione come un'onda elettromagnetica classica. L'idea che sia la radiazione stessa a essere divisa in quanti, poi chiamati fotoni, è di Einstein (1905) e sarà l'oggetto del capitolo 11.

«Secondo Planck l'energia emessa da un corpo caldo è sempre un multiplo di una stessa quantità.» **No:** il quanto hf è proporzionale alla frequenza, quindi è diverso per ogni frequenza. Un corpo nero emette a tutte le frequenze, e a ciascuna corrisponde un quanto diverso: a 1 μm vale circa 1,2 eV, a 10 μm circa 0,12 eV.

10.5 Le conseguenze dell'ipotesi di Planck

10.5.1 Due energie a confronto: il quanto e l'agitazione termica

L'ipotesi di Planck ha introdotto una scala di energia nuova, hf, da confrontare con la scala dell'agitazione termica, $k_B T$. Conviene misurarle in elettronvolt (*Fisica 4*, capitolo 11): 1 eV = 1,60 × 10^{-19} J. A temperatura ambiente, 300 K,

$$k_B T = \frac{1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J/K} \times 300\ \text{K}}{1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV}} = 0{,}0259\ \text{eV} \approx \frac{1}{40}\ \text{eV}$$

Il quanto di una radiazione visibile di lunghezza d'onda 500 nm, invece, vale $hf = hc/\lambda$ = 2,48 eV. Per i calcoli con la luce è comodo il prodotto hc = 1240 eV·nm, che dà l'energia in eV dividendo per la lunghezza d'onda in nanometri: 1240/500 = 2,48. Il rapporto $hf/(k_B T)$ è circa 96, e il fattore di Boltzmann $e^{-96} \approx 10^{-42}$: i modi visibili, a temperatura ambiente, sono completamente congelati. È la ragione microscopica per cui gli oggetti intorno a noi non brillano al buio.

A 3000 K, la temperatura del filamento di una lampadina, $k_B T$ = 0,26 eV e il rapporto con il quanto visibile scende a circa 9,6: $e^{-9,6} \approx 7 \times 10^{-5}$ è piccolo, ma i modi sono tantissimi e il filamento emette una luce intensa. Tuttavia la maggior parte della potenza resta nell'infrarosso, dove hf è confrontabile con $k_B T$. Calcolando con la legge di Planck l'area della parte visibile dello spettro, si trova che a 2700 K solo il 7% circa della potenza irraggiata cade fra 380 e 750 nm: una lampadina a incandescenza è, prima di tutto, una stufa. Per lo spettro di un corpo nero alla temperatura del Sole la frazione visibile sale a circa il 44%. Non è un caso che i nostri occhi si siano evoluti per essere sensibili proprio dove la luce del Sole è più abbondante.

La stessa scala spiega l'altro mistero incontrato con la catastrofe ultravioletta, quello dei gas. La vibrazione della molecola di azoto ha una frequenza di circa 7×10^{13} Hz, cioè un quanto $hf \approx$ 0,29 eV, undici volte $k_B T$ a 300 K: $e^{-11} \approx 2 \times 10^{-5}$, e la vibrazione resta congelata. Per questo il calore specifico dell'azoto a temperatura ambiente si spiega con le sole traslazioni e rotazioni. Ri-

scaldando il gas a migliaia di kelvin, quando $k_B T$ diventa confrontabile con il quanto, le vibrazioni si «scongelano» e il calore specifico aumenta, come si osserva.

10.5.2 Perché non ce ne accorgiamo

Se l'energia degli oscillatori è quantizzata, perché non vediamo un pendolo o una molla oscillare solo con ampiezze ben precise? Perché h è piccolissima rispetto alle grandezze della vita quotidiana, come mostra l'esempio che segue.

ESEMPIO SVOLTO

I quanti di un pendolo

Problema. Un pendolo è formato da una massa di 0,20 kg appesa a un filo lungo 1,0 m e oscilla con un'ampiezza di 5,0 cm. Calcola: a) la frequenza e l'energia di oscillazione; b) il quanto hf e il numero quantico n corrispondente; c) la variazione relativa di energia in un salto da un livello al successivo.

Soluzione. a) Per piccole oscillazioni $f = (1/2\pi)\sqrt{(g/l)} = (1/2\pi)\sqrt{(9{,}8\ \text{m/s}^2/1{,}0\ \text{m})} = 0{,}50$ Hz. L'energia del moto armonico (*Fisica 3*, capitolo 4) è $E = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2$ con $\omega^2 = g/l$:

$$E = \tfrac{1}{2} \times 0{,}20\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{s}^{-2} \times (0{,}050\ \text{m})^2 = 2{,}5 \times 10^{-3}\ \text{J}$$

b) Il quanto vale $hf = 6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{J·s} \times 0{,}50\ \text{Hz} = 3{,}3 \times 10^{-34}$ J, e il numero di quanti contenuti nell'energia del pendolo è

$$n = \frac{E}{hf} = \frac{2{,}5 \times 10^{-3}\ \text{J}}{3{,}3 \times 10^{-34}\ \text{J}} \approx 7 \times 10^{30}$$

c) Passando da n a $n + 1$ l'energia cambia di hf, cioè di una frazione $hf/E = 1/n \approx 1 \times 10^{-31} = 10^{-29}$ %. L'attrito dell'aria fa perdere al pendolo, a ogni oscillazione, miliardi di miliardi di quanti: nessuno strumento può distinguere un salto così piccolo da una variazione continua.

Controllo. Il quanto è minuscolo perché la frequenza del pendolo è piccola e h lo è ancora di più. Per avere hf confrontabile con $k_B T$ a temperatura ambiente servirebbe una frequenza $f = k_B T/h \approx 6 \times 10^{12}$ Hz: le frequenze di vibrazione delle molecole, non quelle dei pendoli. Il mondo macroscopico è quello dei numeri quantici enormi, dove la quantizzazione è invisibile e la fisica classica funziona.

10.5.3 Una nuova costante della natura

La costante h si misura in J·s, cioè energia per tempo; la stessa unità, scritta come $\text{kg·m}^2/\text{s}$, è quella del momento angolare (*Fisica 3*, capitolo 10). Una grandezza con queste dimensioni si chiama *azione*, e per questo h è detta anche «quanto d'azione». Come c segna il confine fra la fisica di Galileo e quella della relatività (capitolo 7), h segna il confine fra la fisica classica e quella quantistica: quando le energie, i momenti angolari e le azioni in gioco sono enormi rispetto

ai multipli di h, la quantizzazione non si vede; quando sono confrontabili con h, la fisica classica sbaglia, a volte in modo catastrofico. Nel resto di questa parte incontreremo h nella luce (capitolo 11), negli atomi (capitolo 12) e nel moto delle particelle (capitolo 13).

APPROFONDIMENTO

Il corpo nero più perfetto: la radiazione cosmica di fondo

Il corpo nero meglio misurato non sta in un laboratorio: riempie tutto l'universo. È la radiazione cosmica di fondo che hai incontrato nel capitolo 6, il debole segnale a microonde scoperto nel 1965 da Penzias e Wilson, che arriva con la stessa intensità da tutte le direzioni del cielo: il residuo della radiazione che riempiva l'universo primordiale, caldo e denso, raffreddata dall'espansione nel corso di miliardi di anni.

Le misure da satellite hanno mostrato che il suo spettro coincide con quello di un corpo nero alla temperatura di 2,725 K con una precisione straordinaria: nessuna sorgente costruita in laboratorio si avvicina tanto alla curva di Planck. Per la legge di Wien il massimo cade a $\lambda_{max} = 2{,}898 \times 10^{-3}$ m·K/2,725 K = 1,06 mm, nelle microonde; nel capitolo 6 il massimo era a circa 160 GHz, cioè 2 mm, perché lì lo spettro era riportato in funzione della frequenza: è la stessa differenza fra i due massimi che hai visto per il Sole. Che la curva sia proprio quella di Planck dice che quella radiazione è stata a lungo in equilibrio termico con la materia: è una delle prove principali del modello del Big Bang, che riprenderemo nel capitolo 16.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: la legge di Stefan-Boltzmann con una lampadina

Materiali. Una lampadina a incandescenza per auto da 12 V e 20 W circa, con filamento di tungsteno; un alimentatore in corrente continua a bassa tensione, regolabile da 0 a 12 V; due multimetri digitali, uno usato come voltmetro (risoluzione 0,01 V) collegato direttamente ai capi della lampadina, l'altro come amperometro (risoluzione 0,001 A); la Tabella 10.3, che dà il rapporto fra la resistività del tungsteno e il suo valore a 293 K.

L'idea. Se il filamento si comporta come un corpo grigio di emissività costante e quasi tutta la potenza elettrica $P = VI$ che riceve viene irraggiata, all'equilibrio $P = e\sigma S T^4$, cioè $P \propto T^4$. La temperatura del filamento si ricava dalla sua resistenza, che cresce con T: per il tungsteno la relazione lineare con il coefficiente $4{,}5 \times 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$ della Tabella A.7 di *Fisica 4* vale solo vicino alla temperatura ambiente, e a migliaia di kelvin si usa una tabella.

Procedimento. 1) Misura la resistenza R_0 del filamento freddo, a 293 K, con una tensione molto piccola (qualche decina di millivolt), così che la corrente non lo scaldi: si trova $R_0 = (0{,}50 \pm 0{,}01)\ \Omega$. 2) Aumenta la tensione a passi, da 0,5 V a 12 V; a ogni passo attendi qualche secondo che il filamento raggiunga l'equilibrio e leggi tensione e corrente. 3) Per ogni misura calcola $P = VI$, $R = V/I$, il rapporto R/R_0 e, interpolando linearmente nella Tabella 10.3, la temperatura T. 4) Riporta P in funzione di T su un grafico con scale logaritmiche su entrambi gli assi.

Tabella 10.3 Rapporto fra la resistenza del tungsteno alla temperatura T e quella a 293 K (valori approssimati, ricavati dalla resistività tabulata del tungsteno e arrotondati: tabelle di fonti diverse differiscono di qualche percento; la dilatazione del filamento è trascurabile).

T (K)	293	600	1000	1400	1800	2200	2600	3000
R/R_0	1,00	2,41	4,55	6,78	9,13	11,58	14,14	16,79

Tabella 10.4 Misure sulla lampadina da 12 V (dati tipici). Incertezze: V ± 0,01 V; I ± 0,002 A; T ± 3% (dovuta soprattutto a R_0 e alla tabella).

V (V)	I (A)	P (W)	R (Ω)	R/R_0	T (K)
0,50	0,346	0,173	1,45	2,90	690
1,00	0,450	0,450	2,22	4,44	980
2,00	0,619	1,238	3,23	6,46	1340
3,00	0,764	2,292	3,93	7,86	1580
4,00	0,888	3,552	4,50	9,00	1780
6,00	1,107	6,642	5,42	10,84	2080
8,00	1,302	10,42	6,14	12,28	2310
10,00	1,467	14,67	6,82	13,64	2520
12,00	1,622	19,46	7,40	14,80	2700

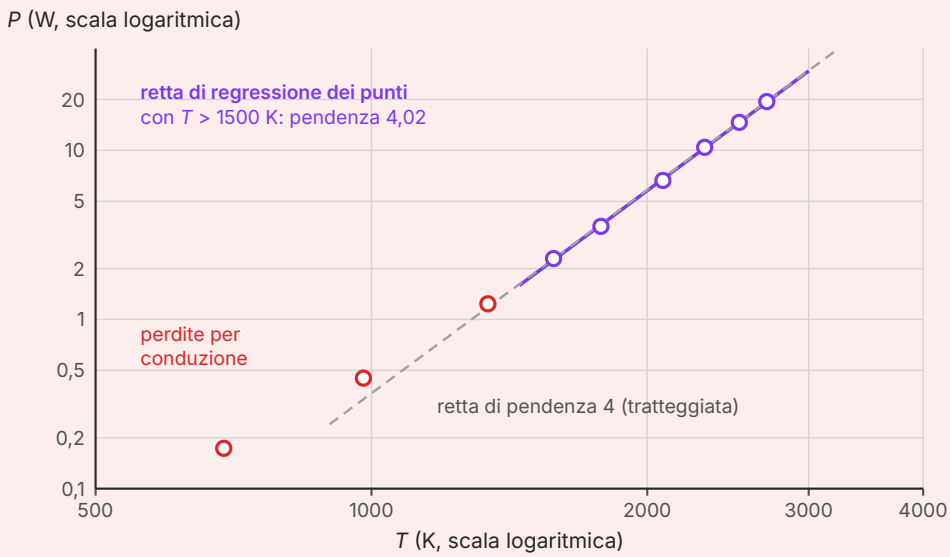

Figura 10.6 Potenza elettrica assorbita dal filamento in funzione della sua temperatura, su scale logaritmiche (dati tipici della Tabella 10.4). La retta viola è la retta di regressione dei sei punti con T > 1500 K; la retta grigia tratteggiata ha pendenza 4 ed è tracciata per il punto a 2700 K. I tre punti con T < 1500 K (rossi), esclusi dalla regressione, stanno sopra la retta, tanto più quanto più la temperatura è bassa: lì una parte importante della potenza esce per conduzione attraverso i supporti del filamento e il gas della lampadina.

Che cosa concludere. Se $P = aT^n$, allora $\log P = \log a + n \log T$: su scale logaritmiche il grafico è una retta di pendenza n. Nella Figura 10.6 i punti con $T > 1500$ K stanno su una retta; la regressione su questi sei punti dà una pendenza $n = 4{,}02$, con un'incertezza statistica di $\pm\, 0{,}04$. Per esempio, fra 1580 K e 2700 K la potenza passa da 2,29 W a 19,5 W: $\log(19{,}5/2{,}29)/\log(2700/1580) = 0{,}930/0{,}233 = 4{,}0$. Tenendo conto dell'incertezza sulle temperature, che sposta i punti in modo non del tutto uniforme, si può stimare $n = 4{,}0 \pm 0{,}1$.

Confronto teoria–esperimento. La legge di Stefan-Boltzmann prevede $n = 4$ (esatto). Il valore misurato, $4{,}0 \pm 0{,}1$, è compatibile con la previsione. Il buon accordo nasce anche da una compensazione: l'emissività del tungsteno cresce un po' con la temperatura, e questo da solo renderebbe la pendenza maggiore di 4, mentre le perdite per conduzione la rendono minore. Alle temperature basse le perdite per conduzione dominano: fra 690 K e 980 K la pendenza scende a circa 2,7, e quei punti vanno esclusi dalla verifica.

Sicurezza. Usa solo l'alimentatore a bassa tensione, mai la rete. Il bulbo della lampadina raggiunge temperature elevate: non toccarlo durante e subito dopo le misure. Non fissare a lungo il filamento acceso alla massima tensione.

Per la relazione. Segui lo schema di *Fisica 1*. Spiega perché R_0 va misurata con una corrente piccolissima; disegna il grafico log–log con le barre d'errore sulla temperatura e le rette di massima e minima pendenza; discuti perché non si può verificare la legge di Stefan-Boltzmann a basse temperature con questo apparato e quale effetto ha sul risultato un errore del 2% su R_0. Con la potenza a 12 V, la temperatura e un'emissività di 0,35, stima infine l'area della superficie del filamento.

DA RICORDARE

Verso l'esame: il corpo nero nella seconda prova

Fra gli obiettivi del quadro di riferimento della seconda prova c'è, esplicitamente, saper leggere lo spettro di un corpo nero con la legge di Planck. In una prova tipica ti viene dato un grafico o una tabella dell'intensità spettrale: devi individuare il massimo e ricavare la temperatura con la legge di Wien, stimare la potenza come area sotto la curva e confrontarla con σT^4, e poi usare la potenza per una stella, un pianeta, una lampada o un corpo umano.

Le insidie ricorrenti: la temperatura in gradi Celsius invece che in kelvin; dimenticare l'emissività o il fattore $4\pi R^2$ della superficie; confondere la potenza emessa da 1 m^2 di superficie con l'intensità ricevuta a distanza; scambiare il massimo in lunghezza d'onda con quello in frequenza. Nelle domande da argomentare ti si chiede spesso di spiegare la catastrofe ultravioletta e il ruolo di hf rispetto a $k_B T$: la frase chiave è che i modi con $hf \gg k_B T$ sono congelati.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$I = \sigma T^4$ — legge di Stefan-Boltzmann: potenza emessa per unità di superficie (W/m^2) da un corpo nero alla temperatura assoluta T (K); $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}$ $W/(m^2 \cdot K^4)$. È l'area sotto lo spettro $I_\lambda(\lambda)$.

$P = e\sigma S T^4$ e $P_{\text{netta}} = e\sigma S(T^4 - T_a^{\,4})$ — potenza emessa da un corpo reale di area S ed emissività e ($0 \le e \le 1$), e potenza netta persa verso un ambiente alla temperatura T_a.

$\lambda_{\max} T = b$ — legge di Wien: la lunghezza d'onda del massimo dell'intensità spettrale è inversamente proporzionale alla temperatura assoluta; $b = 2{,}90 \times 10^{-3}$ m·K. Vale per il massimo in λ, non per quello in f.

$I_\lambda = 2\pi c k_B T/\lambda^4$ — legge di Rayleigh-Jeans (fisica classica, equipartizione): corretta solo per $hf \ll k_B T$, cioè a lunghezze d'onda lunghe; porta alla catastrofe ultravioletta.

$E = nhf$ — ipotesi di Planck (1900): l'energia di un oscillatore di frequenza f è un multiplo intero del quanto hf; $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s, $\hbar = h/(2\pi)$.

$\langle E \rangle = hf/(e^{hf/(k_B T)} - 1)$ — energia media di un modo: $\approx k_B T$ se $hf \ll k_B T$, quasi nulla se $hf \gg k_B T$.

$I_\lambda = \dfrac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \dfrac{1}{e^{hc/(\lambda k_B T)} - 1}$ — legge di Planck: lo spettro del corpo nero a ogni λ e T; contiene le leggi di Rayleigh-Jeans (per λ grandi), di Wien e di Stefan-Boltzmann.

$k_B T \approx 1/40$ eV a 300 K; $hc = 1240$ eV·nm — le due scale da confrontare: un quanto è «congelato» se hf è molte volte $k_B T$.

SINTESI

- Ogni corpo a temperatura maggiore dello zero assoluto emette radiazione termica, onde elettromagnetiche prodotte dall'agitazione delle sue cariche, con uno spettro continuo che dipende dalla temperatura.
- Un corpo nero assorbe tutta la radiazione che riceve; si realizza con una cavità con un piccolo foro. Lo spettro della radiazione di corpo nero dipende soltanto dalla temperatura, non dal materiale né dalla forma.
- L'intensità spettrale I_λ è la potenza emessa per unità di superficie e per unità di lunghezza d'onda; l'area sotto il grafico di I_λ è la potenza totale per unità di superficie.
- Legge di Stefan-Boltzmann: $I = \sigma T^4$; per un corpo reale $I = e\sigma T^4$, con l'emissività e fra 0 e 1, uguale anche alla frazione di radiazione assorbita.
- Legge di Wien: $\lambda_{\text{max}} T = b = 2{,}90 \times 10^{-3}$ m·K. Il massimo si sposta verso lunghezze d'onda più corte al crescere della temperatura: il corpo umano emette intorno a 9 μm, il Sole intorno a 500 nm.
- Il colore di una stella o di una lampada ne indica la temperatura; termocamere e pirometri misurano la temperatura dalla radiazione emessa.
- La fisica classica (conteggio dei modi della cavità ed equipartizione, $k_B T$ per modo) prevede la legge di Rayleigh-Jeans, corretta alle lunghezze d'onda lunghe ma divergente a quelle corte: è la catastrofe ultravioletta.
- Ipotesi di Planck (dicembre 1900): l'energia di un oscillatore di frequenza f può valere solo nhf; $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s è la costante di Planck.
- Con i quanti, i modi con $hf \gg k_B T$ restano quasi sempre nel livello più basso (fattore di Boltzmann): la loro energia media è quasi nulla e la catastrofe scompare.
- La legge di Planck riproduce lo spettro del corpo nero e contiene le leggi di Rayleigh-Jeans, di Wien e di Stefan-Boltzmann, con le costanti espresse tramite h, c e k_B.
- A 300 K $k_B T \approx 0{,}026$ eV, mentre un quanto di luce visibile vale circa 2 eV: per questo i corpi a temperatura ambiente non brillano. Negli oscillatori macroscopici il quanto è una frazione infinitesima dell'energia, e la quantizzazione non si osserva.
- Planck quantizzò l'energia degli oscillatori della materia; Einstein, nel 1905, estese la quantizzazione alla radiazione stessa.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Un corpo nero è:
   - **A.** un corpo che non emette radiazione
   - **B.** un corpo che appare nero alla luce del giorno, qualunque sia la sua temperatura
   - **C.** un corpo ideale che assorbe tutta la radiazione che lo colpisce, a ogni lunghezza d'onda
   - **D.** un corpo che emette soltanto radiazione infrarossa

2. ● Se la temperatura assoluta di un corpo nero raddoppia, la potenza emessa per unità di superficie:
   - **A.** raddoppia
   - **B.** quadruplica
   - **C.** diventa 8 volte maggiore
   - **D.** diventa 16 volte maggiore

3. ● Se la temperatura assoluta di un corpo nero raddoppia, la lunghezza d'onda del massimo dell'intensità spettrale:
   - **A.** si dimezza
   - **B.** raddoppia
   - **C.** si riduce a un quarto
   - **D.** non cambia

4. ●● Nel cielo invernale si vedono una stella rossastra e una stella bianco-azzurra. Si può concludere che:
   - **A.** la stella rossastra ha la superficie più calda
   - **B.** la stella bianco-azzurra ha la superficie più calda
   - **C.** la stella bianco-azzurra è più vicina
   - **D.** le due stelle hanno la stessa temperatura ma composizione diversa

5. ● La legge classica di Rayleigh-Jeans per lo spettro del corpo nero:
   - **A.** è in accordo con le misure a tutte le lunghezze d'onda
   - **B.** prevede un massimo dell'intensità nel visibile
   - **C.** fu ricavata da Planck con l'ipotesi dei quanti
   - **D.** prevede un'intensità che cresce senza limite al diminuire della lunghezza d'onda

6. ●● Secondo l'ipotesi di Planck, un oscillatore di frequenza f nelle pareti di una cavità:
   - **A.** può avere solo energie multiple intere di hf
   - **B.** può avere qualunque energia, ma emette solo alla frequenza f
   - **C.** ha sempre l'energia $k_B T$
   - **D.** ha energia hf qualunque sia la temperatura

7. ●● Per un modo della cavità con $hf = 5\,k_B T$, l'energia media secondo Planck, confrontata con il valore classico $k_B T$, è:

   A. uguale

   B. circa la metà

   C. circa il 3%

   D. esattamente zero

8. ● La costante di Planck si misura in:

   A. J/s

   B. J·s

   C. J/K

   D. $W/(m^2 \cdot K^4)$

Vero o falso

9. ● Un corpo a temperatura ambiente non emette radiazione elettromagnetica, perché non brilla al buio. V / F

10. ●● Lo spettro del Sole ha il massimo in lunghezza d'onda a circa 500 nm; quindi, se si rappresenta l'intensità spettrale in funzione della frequenza, il massimo cade a $c/(500\ \text{nm}) = 6{,}0 \times 10^{14}$ Hz. V / F

11. ●● Due lastre identiche alla stessa temperatura, una verniciata di nero opaco e una lucidata a specchio, irraggiano la stessa potenza. V / F

12. ● Planck introdusse la quantizzazione per l'energia degli oscillatori della materia; fu Einstein a estenderla alla radiazione stessa. V / F

Applicare

13. ● Il filamento di tungsteno di una lampadina si trova a 2800 K. Calcola la lunghezza d'onda del massimo della sua emissione e di' in quale banda dello spettro cade.

14. ● Lo spettro di una stella ha il massimo a 350 nm. Calcola la temperatura della sua superficie.

15. ● Una piccola apertura di 2,0 cm^2 nella parete di un forno a 1000 K si comporta come un corpo nero. Calcola la potenza emessa per unità di superficie e la potenza che esce dall'apertura.

16. ●● La temperatura di un corpo nero passa da 300 K a 330 K. Di quale percentuale aumenta la potenza emessa?

17. ● Completa. Nella legge di Wien la temperatura va espressa in _____ . Se la lunghezza d'onda del massimo raddoppia, la temperatura _____ e la potenza emessa per unità di superficie diventa _____ di quella iniziale.

18. ●● Calcola, in joule e in elettronvolt, il quanto di energia di un oscillatore di frequenza $1{,}0 \times 10^{14}$ Hz e confrontalo con $k_B T$ a 300 K.

19. ●● Nella Figura 10.2 leggi il valore massimo di I_λ per la curva a 6000 K. Stima poi la potenza emessa da 1,0 cm^2 di quella superficie fra 480 nm e 490 nm.

20. ●● Una sfera di raggio 5,0 cm, con emissività 0,80, si trova alla temperatura di 600 K. Calcola la potenza che irraggia.

Problemi

21. ●● Una persona svestita, con una superficie esposta di 1,7 m^2 ed emissività 0,98, ha la pelle a 33 °C e si trova in una stanza le cui pareti sono a 18 °C. a) Calcola la potenza emessa e quella assorbita per irraggiamento. b) Calcola la potenza netta persa e confrontala con la potenza metabolica a riposo, circa 100 W.

22. ●●● In una lampadina a incandescenza da 60 W il 90% della potenza elettrica è irraggiato dal filamento, che si trova a 2800 K e ha emissività 0,35. a) Calcola l'area della superficie del filamento. b) Se il filamento è un cilindro di diametro 0,046 mm, quanto è lungo? c) Dove cade il massimo della sua emissione? Perché la lampadina è poco efficiente come sorgente di luce?

23. ●●● La Terra riceve dal Sole un'intensità di 1361 W/m^2 (capitolo 5) e ne riflette il 30%. Considera la Terra un corpo nero sferico di raggio R che assorbe la radiazione sulla sezione πR^2 e la riemette da tutta la superficie $4\pi R^2$. a) Calcola la temperatura di equilibrio. b) A quale lunghezza d'onda cade il massimo della radiazione emessa dalla Terra? c) La temperatura media misurata al suolo è circa 15 °C: a che cosa è dovuta la differenza? (Collega con il capitolo 6 e con Scienze della Terra.)

24. ●●● Una stella bianco-azzurra ha una superficie a 9900 K, un raggio di $1{,}2 \times 10^9$ m e una massa di $4{,}0 \times 10^{30}$ kg. a) Dove cade il massimo della sua emissione? Calcola la sua luminosità e confrontala con quella del Sole ($3{,}83 \times 10^{26}$ W). b) Come nel capitolo 9 per il Sole, usa l'equivalenza massa-energia per calcolare di quanti kilogrammi al secondo diminuisce la massa della stella a causa della radiazione emessa, e confronta il risultato con la perdita del Sole, circa $4{,}3 \times 10^9$ kg/s. c) A questo ritmo, in quanti anni la stella perderebbe l'1% della sua massa?

25. ●●● La stella rossa di una costellazione ha il massimo di emissione a 830 nm e una luminosità $1{,}0 \times 10^5$ volte quella del Sole ($3{,}83 \times 10^{26}$ W). Calcola la temperatura della sua superficie e il suo raggio, ed esprimi il raggio in raggi solari ($6{,}96 \times 10^8$ m) e in unità astronomiche ($1{,}50 \times 10^{11}$ m).

26. ●●● Una sferetta di rame di raggio 1,0 cm, verniciata di nero ($e = 1$), si trova nel vuoto di una camera le cui pareti sono a temperatura bassissima, così che la radiazione assorbita sia trascurabile. All'inizio la sferetta è a 400 K. Densità del rame: $8{,}96 \times 10^3$ kg/m^3; calore specifico: 385 J/(kg·K). a) Calcola la potenza irraggiata all'inizio. b) Calcola la rapidità iniziale del raffreddamento in K/s. c) Stima il tempo necessario perché la temperatura scenda a 390 K e discuti l'approssimazione usata.

27. ●● Considera i modi della radiazione di lunghezza d'onda 500 nm in una cavità. Calcola il rapporto $hf/(k_B T)$ e l'energia media di un modo, in unità di $k_B T$, a 300 K e a 6000 K. Commenta il risultato.

28. ●● Una massa di 0,50 kg appesa a una molla di costante elastica 200 N/m oscilla con un'ampiezza di 2,0 cm. a) Calcola la frequenza e l'energia dell'oscillazione. b) Calcola il quanto hf e il numero quantico n. c) A quale frequenza un oscillatore avrebbe $hf = k_B T$ a 300 K?

Ragionare e argomentare

29. ●● Guardando nello spioncino di una fornace in cui tutti gli oggetti sono alla stessa temperatura, non si riesce a distinguere gli oggetti l'uno dall'altro né dalle pareti: si vede una luce uniforme. Spiega perché.

30. ●● Trova l'errore. Uno studente calcola la lunghezza d'onda del massimo di emissione del corpo umano così: «$\lambda_{max} = 2{,}90 \times 10^{-3}$ m·K / 37 = $7{,}8 \times 10^{-5}$ m = 78 μm». Individua l'errore, correggi il risultato e indica in quale banda cade.

31. ●●● Progetta un esperimento per mostrare che, alla stessa temperatura, una superficie nera opaca irraggia più di una superficie metallica lucida. Hai a disposizione un cubo cavo di metallo con una faccia verniciata di nero e una lucidata, acqua calda e un sensore di radiazione infrarossa. Descrivi il procedimento, che cosa ti aspetti di misurare e quale grandezza del capitolo ricavi dal rapporto delle due letture.

Verso l'esame di Stato

32. ●●● **Quesito.** Lo spettro di una stella, corretto per l'assorbimento dell'atmosfera, è descritto dalla tabella seguente, in cui l'intensità spettrale è espressa in unità arbitrarie (1,00 al valore più alto misurato). λ (nm) = 250; 300; 350; 400; 450; 500; 600; 700; 800 e intensità relativa = 0,58; 0,84; 0,98; 1,00; 0,95; 0,86; 0,67; 0,50; 0,37. a) Stima la lunghezza d'onda del massimo, con la sua incertezza, e la temperatura della superficie della stella. b) Calcola la potenza emessa da un metro quadrato della sua superficie, assumendo che sia un corpo nero. c) La luminosità della stella è 40 volte quella del Sole ($3{,}8 \times 10^{26}$ W): calcola il raggio della stella in raggi solari ($6{,}96 \times 10^{8}$ m). d) Argomenta, in base alla tabella, di che colore appare la stella e spiega perché il colore non basterebbe, da solo, a stabilire se la radiazione è proprio quella di un corpo nero.

33. ●●● **Problema.** Una lastra sottile di 1,0 m^2, nera su entrambe le facce ($e = 1$), si trova nello spazio alla distanza della Terra dal Sole, con una faccia perpendicolare ai raggi solari, che hanno intensità 1,36 kW/m^2. La lastra è un buon conduttore di calore, quindi le due facce hanno la stessa temperatura. a) Scrivi il bilancio energetico all'equilibrio e calcola la temperatura della lastra, in kelvin e in gradi Celsius. b) Calcola la lunghezza d'onda del massimo della radiazione emessa dalla lastra. c) Calcola la forza che la radiazione solare esercita sulla lastra (capitolo 5) e confrontala con il peso di un granello di sabbia di 1 mg sulla Terra. d) La stessa lastra viene portata alla distanza di Marte, 1,52 volte quella della Terra: come cambiano l'intensità ricevuta e la temperatura di equilibrio? Argomenta perché la temperatura diminuisce meno dell'intensità.

PER APPROFONDIRE

- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*: le lezioni sulla teoria cinetica e sull'equipartizione, dove la catastrofe ultravioletta è presentata come il primo fallimento della fisica classica, e quelle introduttive alla meccanica quantistica.
- [EIN] A. Einstein, L. Infeld, *L'evoluzione della fisica*: il capitolo sui quanti, che racconta come l'idea di una struttura discreta dell'energia sia passata dalla materia alla luce.
- [WEI] S. Weinberg, *I primi tre minuti*: il capitolo sulla scoperta della radiazione cosmica di fondo e sul perché il suo spettro di corpo nero è una prova dell'universo caldo primordiale.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: le pagine sulla radiazione termica e sull'inizio della fisica quantistica, con esercizi sulle leggi di Stefan-Boltzmann e di Wien.
- [TAY] J. R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*: i capitoli sulla regressione lineare, per l'analisi dei dati dell'esperienza con la lampadina sul grafico logaritmico.

Glossario del capitolo

Catastrofe ultravioletta
La conclusione assurda della fisica classica per cui un corpo caldo emetterebbe una potenza infinita, concentrata alle lunghezze d'onda corte.

Corpo nero
Corpo ideale che assorbe tutta la radiazione che lo colpisce, a ogni lunghezza d'onda; si realizza con una cavità dotata di un piccolo foro ed è il miglior emettitore possibile.

Costante di Planck
La costante fondamentale $h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ J·s che lega l'energia di un quanto alla frequenza; dal 2019 ha un valore esatto per definizione. $\hbar = h/(2\pi)$ è la costante ridotta.

Costante di Stefan-Boltzmann
La costante $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}$ W/(m^2·K^4) della legge di Stefan-Boltzmann; si esprime tramite h, c e k_B.

Emissività
Rapporto e (fra 0 e 1) fra la potenza emessa da una superficie e quella di un corpo nero alla stessa temperatura; è anche la frazione della radiazione incidente che la superficie assorbe.

Fattore di Boltzmann
Il fattore $e^{-E/(k_B T)}$, proporzionale alla probabilità che un sistema in equilibrio alla temperatura T si trovi in uno stato di energia E.

Intensità spettrale
Potenza emessa per unità di superficie e per unità di intervallo di lunghezza d'onda, I_λ, in W/(m^2·nm); l'area sotto il suo grafico è la potenza totale per unità di superficie.

Ipotesi di Planck
Un oscillatore di frequenza f può avere solo energie $E = nhf$, con n intero, e scambia energia con la radiazione a pacchetti hf (dicembre 1900).

Legge dello spostamento di Wien
La lunghezza d'onda del massimo dell'intensità spettrale di un corpo nero è inversamente proporzionale alla temperatura assoluta: $\lambda_{max} T = b$, con $b = 2{,}898 \times 10^{-3}$ m·K.

Legge di Planck
La formula dello spettro del corpo nero, $I_\lambda = (2\pi hc^2/\lambda^5)/(e^{hc/(\lambda k_B T)} - 1)$; contiene le leggi di Rayleigh-Jeans, di Wien e di Stefan-Boltzmann.

Legge di Rayleigh-Jeans
Previsione classica dello spettro del corpo nero, $I_\lambda = 2\pi c k_B T/\lambda^4$, ottenuta assegnando l'energia $k_B T$ a ogni modo della cavità; corretta solo alle lunghezze d'onda lunghe.

Legge di Stefan-Boltzmann
La potenza emessa per unità di superficie da un corpo nero è proporzionale alla quarta potenza della temperatura assoluta: $I = \sigma T^4$.

Pirometro
Strumento che misura a distanza la temperatura di un corpo dalla radiazione termica che emette.

Quantizzazione
Il fatto che una grandezza fisica possa assumere solo valori discreti, separati da salti, invece di variare con continuità.

Quanto
Il pacchetto minimo di energia hf che un oscillatore di frequenza f può scambiare.

Radiazione di corpo nero
Radiazione in equilibrio termico con le pareti di una cavità, che esce dal suo foro; il suo spettro dipende soltanto dalla temperatura.

Radiazione termica
Radiazione elettromagnetica emessa da un corpo a causa della sua temperatura, per l'agitazione termica delle cariche che lo compongono; ha uno spettro continuo.

Spettro continuo
Spettro che contiene tutte le lunghezze d'onda di un intervallo, senza righe separate, come quello della radiazione termica di un solido o di un liquido caldo.

Temperatura di colore
Temperatura del corpo nero che ha lo stesso colore apparente di una sorgente di luce; per esempio circa 2700 K per una luce «calda».

Soluzioni

1. C. Il corpo nero è un modello ideale definito dall'assorbimento totale; scaldato è il miglior emettitore possibile, quindi non è affatto «nero» a ogni temperatura.

2. D. Per la legge di Stefan-Boltzmann $I \propto T^4$: $2^4 = 16$.

3. A. Per la legge di Wien $\lambda_{max} = b/T$: se T raddoppia, λ_{max} si dimezza.

4. B. Il colore dipende dalla posizione del massimo: una stella bianco-azzurra ha il massimo a lunghezze d'onda più corte, quindi, per la legge di Wien, la temperatura superficiale più alta.

5. D. La legge di Rayleigh-Jeans cresce come $1/\lambda^4$: funziona solo alle lunghezze d'onda lunghe e prevede la catastrofe ultravioletta.

6. A. L'ipotesi di Planck è $E = nhf$, con n intero; l'energia media dipende poi dalla temperatura.

7. C. $\langle E \rangle/(k_B T) = 5/(e^5 - 1) = 5/147{,}4 = 0{,}034$, circa il 3%.

8. B. Dalla relazione $E = hf$: $h = E/f$, in J/Hz = J·s.

9. F. Ogni corpo sopra lo zero assoluto emette radiazione termica; a 300 K un corpo nero emette circa 460 W/m^2, quasi tutti nell'infrarosso, che l'occhio non vede.

10. F. Il massimo in frequenza non corrisponde al massimo in lunghezza d'onda: per la luce solare cade a circa $3{,}4 \times 10^{14}$ Hz (880 nm). La relazione $\lambda = c/f$ lega una lunghezza d'onda a una frequenza, non i massimi di due curve diverse.

11. F. A parità di temperatura la potenza emessa è $e\sigma ST^4$: la superficie nera opaca ha emissività molto maggiore (≈ 0,95 contro pochi centesimi) e irraggia molto di più.

12. V. Planck (1900) quantizzò l'energia degli oscillatori delle pareti; Einstein (1905) ipotizzò che la radiazione stessa fosse fatta di quanti di energia hf.

13. $\lambda_{max} = b/T = 2{,}90 \times 10^{-3}$ m·K/2800 K $= 1{,}04 \times 10^{-6}$ m = 1,04 μm: vicino infrarosso. Il visibile è solo la coda a lunghezze d'onda più corte.

14. $T = b/\lambda_{max} = 2{,}90 \times 10^{-3}$ m·K/$(350 \times 10^{-9}$ m) = $8{,}3 \times 10^3$ K.

15. $I = \sigma T^4 = 5{,}67 \times 10^{-8}$ W/(m^2·K^4) × (1000 K)$^4 = 5{,}67 \times 10^4$ W/m^2; $P = IS = 5{,}67 \times 10^4$ W/m^2 × $2{,}0 \times 10^{-4}$ m^2 = 11 W.

16. $P_2/P_1 = (330/300)^4 = 1{,}1^4 = 1{,}46$: la potenza aumenta del 46%, per un aumento di temperatura del 10%.

17. kelvin; si dimezza; 1/16 (la potenza è proporzionale a T^4 e $(1/2)^4 = 1/16$).

18. $hf = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s × $1{,}0 \times 10^{14}$ Hz $= 6{,}6 \times 10^{-20}$ J; in eV: $6{,}6 \times 10^{-20}$ J/$(1{,}60 \times 10^{-19}$ J/eV) = 0,41 eV. A 300 K $k_B T = 1{,}38 \times 10^{-23} \times 300$ J $= 4{,}14 \times 10^{-21}$ J = 0,026 eV: il quanto è circa 16 volte $k_B T$, quindi a temperatura ambiente questi oscillatori sono quasi sempre nello stato più basso.

19. Dal grafico il massimo a 6000 K vale circa $10 \times 10^4 = 1{,}0 \times 10^5$ W/(m^2·nm), a 483 nm. Fra 480 e 490 nm l'intensità spettrale è praticamente quella del massimo, quindi $P \approx I_\lambda \Delta\lambda S = 1{,}0 \times 10^5$ W/(m^2·nm) × 10 nm × $1{,}0 \times 10^{-4}$ m^2 = 0,10 W.

20. $S = 4\pi r^2 = 4\pi \times (0{,}050$ m$)^2 = 3{,}14 \times 10^{-2}$ m^2; $P = e\sigma ST^4 = 0{,}80 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 3{,}14 \times 10^{-2} \times (600)^4$ W = $1{,}8 \times 10^2$ W.

21. a) $T = 306$ K, $T_a = 291$ K. Emessa: $e\sigma ST^4 = 0{,}98 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 1{,}7 \times (306)^4$ W = $8{,}3 \times 10^2$ W; assorbita: $0{,}98 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 1{,}7 \times (291)^4$ W = $6{,}8 \times 10^2$ W. b) $P_{netta} = 8{,}28 \times 10^2$ W − $6{,}77 \times 10^2$ W = $1{,}5 \times 10^2$ W, più dei 100 W prodotti dal metabolismo: senza vestiti la temperatura della pelle scende e si avverte freddo.

22. a) *Principio*: conservazione dell'energia, la potenza elettrica non dispersa per conduzione è irraggiata: 0,90 × 60 W = 54 W. Per la legge di Stefan-Boltzmann con l'emissività, $P = e\sigma ST^4$: $S = 54$ W/$(0{,}35 \times 5{,}67 \times 10^{-8}$ W/(m^2·K^4) × (2800 K)$^4) = 4{,}4 \times 10^{-5}$ m^2 = 44

mm^2. b) La superficie laterale di un cilindro è πdL: $L = S/(\pi d) = 4{,}4 \times 10^{-5}\ m^2/(\pi \times 4{,}6 \times 10^{-5}\ m) = 0{,}31$ m (per questo è avvolto a spirale). c) Per la legge di Wien $\lambda_{max} = 2{,}90 \times 10^{-3}/2800$ m = 1,04 μm, nell'infrarosso: la legge di Planck dà nel visibile solo l'8% circa della potenza irraggiata a 2800 K; il resto scalda l'ambiente.

23. a) *Principio*: all'equilibrio la potenza assorbita è uguale a quella emessa. Assorbita: $(1 - 0{,}30) \times 1361\ W/m^2 \times \pi R^2$; emessa (legge di Stefan-Boltzmann): $\sigma T^4 \times 4\pi R^2$. Il raggio si semplifica: $T = [0{,}70 \times 1361/(4 \times 5{,}67 \times 10^{-8})]^{1/4}$ K = 255 K, cioè −18 °C. b) Per la legge di Wien $\lambda_{max} = 2{,}90 \times 10^{-3}$ m·K/255 K = $1{,}1 \times 10^{-5}$ m = 11 μm, nell'infrarosso. c) La differenza di circa 33 K è dovuta all'effetto serra: l'atmosfera è quasi trasparente alla luce visibile del Sole ma assorbe buona parte dell'infrarosso emesso dal suolo (vapore acqueo, anidride carbonica) e ne riemette una parte verso il basso; il suolo deve quindi essere più caldo perché la Terra, vista dallo spazio, irraggi quanto assorbe.

24. a) *Principio*: legge di Wien. $\lambda_{max} = 2{,}90 \times 10^{-3}$ m·K/9900 K = $2{,}93 \times 10^{-7}$ m = 293 nm, nell'ultravioletto. *Principio*: legge di Stefan-Boltzmann su tutta la superficie. $L = \sigma 4\pi R^2 T^4 = 5{,}67 \times 10^{-8} \times 4\pi \times (1{,}2 \times 10^9)^2 \times (9900)^4$ W = $9{,}9 \times 10^{27}$ W, circa 26 volte la luminosità del Sole. b) *Principio*: l'energia irraggiata corrisponde a una massa $\Delta m = \Delta E/c^2$. $\Delta m/\Delta t = L/c^2 = 9{,}9 \times 10^{27}\ W/(3{,}00 \times 10^8\ m/s)^2 = 1{,}1 \times 10^{11}$ kg/s, circa 25 volte la perdita del Sole: la luminosità cresce come R^2T^4, e la temperatura più alta pesa più del raggio. c) 1% della massa: $4{,}0 \times 10^{28}$ kg; $\Delta t = 4{,}0 \times 10^{28}\ kg/(1{,}1 \times 10^{11}\ kg/s) = 3{,}7 \times 10^{17}$ s; con 1 anno = $3{,}16 \times 10^7$ s, circa $1{,}2 \times 10^{10}$ anni. Anche per una stella così luminosa la massa persa a causa della radiazione è una frazione piccola della massa totale.

25. *Principio*: legge di Wien per la temperatura. $T = b/\lambda_{max} = 2{,}90 \times 10^{-3}$ m·K/$(830 \times 10^{-9}$ m) = $3{,}5 \times 10^3$ K. *Principio*: legge di Stefan-Boltzmann applicata a tutta la superficie sferica. $L = 1{,}0 \times 10^5 \times 3{,}83 \times 10^{26}$ W = $3{,}8 \times 10^{31}$ W. Da $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$: $R = \sqrt{[L/(4\pi\sigma T^4)]} = \sqrt{[3{,}83 \times 10^{31}/(4\pi \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times (3494)^4)]}$ m = $6{,}0 \times 10^{11}$ m, cioè circa $8{,}6 \times 10^2$ raggi solari e 4,0 UA: è una supergigante rossa, che al posto del Sole inglobererebbe l'orbita di Marte.

26. a) $m = \rho(4/3)\pi r^3 = 8{,}96 \times 10^3 \times 4{,}19 \times 10^{-6}$ kg = $3{,}75 \times 10^{-2}$ kg; $S = 4\pi r^2 = 1{,}26 \times 10^{-3}\ m^2$. *Principio*: legge di Stefan-Boltzmann con $e = 1$ e assorbimento trascurabile: $P = \sigma S T^4 = 5{,}67 \times 10^{-8} \times 1{,}26 \times 10^{-3} \times (400)^4$ W = 1,82 W. b) *Principio*: la potenza persa diminuisce l'energia interna, $P\Delta t = mc|\Delta T|$ (calorimetria, *Fisica 2*): $|\Delta T|/\Delta t = P/(mc) = 1{,}82\ W/(3{,}75 \times 10^{-2}\ kg \times 385\ J/(kg{\cdot}K)) = 0{,}126$ K/s. c) Con potenza costante: $\Delta t \approx 10\ K/(0{,}126\ K/s) = 79$ s. Ma a 390 K la potenza è scesa a 1,65 W (del 10% circa, per la quarta potenza); usando la potenza media, 1,73 W, si ottiene $\Delta t \approx mc\Delta T/P_{media} = 83$ s. L'approssimazione è buona perché in 10 K la temperatura cambia poco; per raffreddamenti grandi bisognerebbe procedere a piccoli passi.

27. $hf/(k_B T) = hc/(\lambda k_B T)$. A 300 K: $6{,}63 \times 10^{-34} \times 3{,}00 \times 10^8/(500 \times 10^{-9} \times 1{,}38 \times 10^{-23} \times 300) = 96$; $\langle E\rangle/(k_B T) = 96/(e^{96} - 1) \approx 2 \times 10^{-40}$: modo completamente congelato. A 6000 K il rapporto è 20 volte più piccolo, 4,8; $\langle E\rangle/(k_B T) = 4{,}8/(e^{4{,}8} - 1) = 0{,}040$. A 6000 K il modo visibile è debolmente eccitato e un corpo a quella temperatura brilla di luce visibile; a 300 K no. Il valore classico sarebbe 1 in entrambi i casi.

28. a) $\omega = \sqrt{(k/m)} = \sqrt{(200/0{,}50)}$ rad/s = 20 rad/s; $f = \omega/(2\pi) = 3{,}2$ Hz; $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \times 200\ N/m \times (0{,}020\ m)^2 = 0{,}040$ J. b) $hf = 6{,}63 \times 10^{-34} \times 3{,}18$ J = $2{,}1 \times 10^{-33}$ J; $n = E/(hf) = 1{,}9 \times 10^{31}$: un salto di livello cambia l'energia di una parte su 10^{31}, impossibile da rivelare. c) $f = k_B T/h = 1{,}38 \times 10^{-23} \times 300/(6{,}63 \times 10^{-34})$ Hz = $6{,}2 \times 10^{12}$ Hz, nell'infrarosso lontano: la frequenza tipica delle vibrazioni molecolari, non degli oscillatori macroscopici.

29. Traccia di risposta. Dentro la fornace tutto è in equilibrio alla stessa temperatura: la radiazione è quella di una cavità, che dipende solo da T. Un oggetto con emissività $e < 1$ emette meno di un corpo nero, ma riflette la frazione $1 - e$ della radiazione di cavità che lo colpisce; emessa più riflessa ricostruisce esattamente lo spettro di corpo nero. Ogni punto manda all'occhio la stessa radiazione e non c'è contrasto: gli oggetti si distinguono solo se hanno temperature diverse.

30. La temperatura va espressa in kelvin, non in gradi Celsius: $T = 37 + 273 = 310$ K, $\lambda_{max} = 2{,}90 \times 10^{-3}$ m·K/310 K = $9{,}4 \times 10^{-6}$ m = 9,4 μm, nell'infrarosso (la banda in cui lavorano le termocamere). Il risultato sbagliato, 78 μm, è più di otto volte troppo grande.

31. Traccia di risposta. Si riempie il cubo di acqua calda (per esempio a 80 °C) e si attende che le pareti siano alla temperatura dell'acqua, controllata con un termometro. Si pone il sensore alla stessa distanza (qualche centimetro) davanti alla faccia nera e poi davanti a quella lucida, con lo stesso orientamento, e si leggono i due segnali; si ripetono le letture più volte. Ci si aspetta un segnale molto maggiore davanti alla faccia nera. Poiché le due facce hanno la stessa temperatura e la stessa area, per la legge $P = e\sigma ST^4$ il rapporto delle letture (al netto del segnale dell'ambiente, misurato con il cubo freddo) è il rapporto delle emissività: dando alla vernice nera $e \approx 0{,}95$ si ricava l'emissività della faccia lucida. Ripetendo mentre l'acqua si raffredda si può anche controllare che il segnale netto segua $T^4 - T_a{}^4$.

32. a) Il valore più alto è a 400 nm, ma il valore a 350 nm (0,98) è maggiore di quello a 450 nm (0,95): il massimo è un po' sotto 400 nm. Stima: $\lambda_{max} = (390 \pm 20)$ nm. Per la legge di Wien $T = 2{,}90 \times 10^{-3}$ m·K/$(390 \times 10^{-9}$ m) = $7{,}4 \times 10^3$ K; gli estremi 370 nm e 410 nm danno $7{,}8 \times 10^3$ K e $7{,}1 \times 10^3$ K, quindi $T = (7{,}4 \pm 0{,}4) \times 10^3$ K. b) Per la legge di Stefan-Boltzmann $I = \sigma T^4 = 5{,}67 \times 10^{-8} \times (7{,}4 \times 10^3)^4$ W/m^2 = $1{,}7 \times 10^8$ W/m^2 (con un'incertezza di circa il 20%, quattro volte quella relativa su T). c) $L = 40 \times 3{,}8 \times 10^{26}$ W = $1{,}5 \times 10^{28}$ W; da $L = 4\pi R^2 I$: $R = \sqrt{[1{,}52 \times 10^{28}/(4\pi \times 1{,}70 \times 10^8)]}$ m = $2{,}7 \times 10^9$ m ≈ 3,8 raggi solari. d) Nel visibile l'intensità diminuisce dal violetto al rosso: a 400 nm è il doppio che a 700 nm (1,00 contro 0,50), mentre per il Sole i due valori sono quasi uguali; la stella appare bianco-azzurra. Il colore dipende solo da come la luce si distribuisce nel visibile, e spettri di forma molto diversa possono dare lo stesso colore; per dire che la radiazione è di corpo nero bisogna confrontare la forma di tutta la curva con la legge di Planck: qui, a 7400 K, la legge di Planck dà per il rapporto fra 400 e 700 nm il valore 1,93, in accordo con la tabella. *Indicatori*: a) Interpretare/elaborare i dati; b) e c) Sviluppare il processo risolutivo; d) Argomentare.

33. a) *Principio*: all'equilibrio la potenza assorbita è uguale a quella emessa. La lastra assorbe da una faccia $IS = 1{,}36 \times 10^3$ W/m^2 × 1,0 m^2 e, per la legge di Stefan-Boltzmann, emette da entrambe le facce $2\sigma ST^4$. Quindi $T = [I/(2\sigma)]^{1/4} = [1{,}36 \times 10^3/(2 \times 5{,}67 \times 10^{-8})]^{1/4}$ K = 331 K = 58 °C. b) Per la legge di Wien $\lambda_{max} = 2{,}90 \times 10^{-3}$ m·K/331 K = $8{,}8 \times 10^{-6}$ m = 8,8 μm, nell'infrarosso. c) Per una superficie che assorbe tutta la radiazione la pressione è I/c (capitolo 5): $F = IS/c = 1{,}36 \times 10^3$ W/$(3{,}00 \times 10^8$ m/s) = $4{,}5 \times 10^{-6}$ N; il peso del granello è $1{,}0 \times 10^{-6}$ kg × 9,8 m/s^2 = $9{,}8 \times 10^{-6}$ N: la forza della luce solare su un metro quadrato è circa la metà del peso di un milligrammo. La radiazione infrarossa emessa dalla lastra, uguale sulle due facce, non dà forza netta. d) L'intensità diminuisce come l'inverso del quadrato della distanza: $I_{Marte} = 1{,}36 \times 10^3/1{,}52^2$ W/m^2 = 589 W/m^2, il 43%. Poiché $T \propto I^{1/4} \propto 1/\sqrt{d}$, $T = 331$ K/√1,52 = 268 K (−5 °C), l'81% del valore precedente. La temperatura diminuisce meno dell'intensità perché la potenza emessa cresce come T^4: basta un piccolo calo di temperatura per ridurre molto l'emissione e ristabilire l'equilibrio. *Indicatori*: a) Analizzare e Sviluppare il processo risolutivo; b) Sviluppare il processo risolutivo; c) Interpretare/elaborare i dati; d) Argomentare.