CAPITOLO

9

La dinamica relativistica

Un grammo di materia ferma contiene l'energia di ventimila tonnellate di esplosivo. Per accorgersene è servito ripensare lo spazio e il tempo.

OBIETTIVI

1. Spiegare perché la quantità di moto classica non si conserva in tutti i sistemi inerziali e usare $\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v}$, con la massa invariante.
2. Calcolare energia totale, energia a riposo ed energia cinetica di una particella e riconoscere quando vale il limite classico.
3. Usare la relazione $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ e le unità MeV, MeV/c, MeV/c^2, anche per particelle di massa nulla.
4. Interpretare l'equivalenza fra massa ed energia nei sistemi legati, nel Sole, nella creazione e nell'annichilazione di coppie.
5. Studiare il moto relativistico sotto una forza costante e sotto la forza di Lorentz, e capire perché gli acceleratori di alta energia sono sincrotroni.
6. Analizzare dati sperimentali (tempo di volo, tracce in un campo magnetico, tubo a fascio filiforme) e decidere se servono le formule relativistiche.

INDICE DEL CAPITOLO

9.1 Una nuova quantità di moto 2
9.2 L'energia relativistica 5
9.3 Energia e quantità di moto 9
9.4 L'equivalenza fra massa ed energia 12
9.5 Il moto relativistico sotto l'azione di una forza 14
9.6 Le prove sperimentali 17

Fisica 5 · Parte III · La relatività ristretta · versione 1.0
Capitolo 9: La dinamica relativistica · pagine 287–316 del volume completo · estratto per lo studio

Nel tunnel circolare dell'LHC, al CERN di Ginevra, i protoni compiono più di undicimila giri al secondo lungo un anello di 27 chilometri. Per tenerli in traiettoria servono magneti superconduttori con campi di circa 8 tesla, e l'energia di ciascun protone, misurata con estrema precisione, è circa settemila volte la sua energia a riposo. Eppure la loro velocità è inferiore a quella della luce di meno di tre metri al secondo. Nessuna spinta, per quanto prolungata, riesce a portarli oltre.

Nel volume dello scorso anno (*Fisica 4*, capitolo 11) avevi incontrato un primo segnale di questo limite: la formula classica $v = \sqrt{(2e\Delta V/m)}$ prevede che un elettrone accelerato da circa 256 kV raggiunga la velocità della luce, e che da tensioni maggiori la superi. Non succede. Nei capitoli 7 e 8 hai visto che spazio e tempo non sono quelli di Galileo e di Newton; in questo capitolo scoprirai che, di conseguenza, devono cambiare anche le grandezze della dinamica. La quantità di moto e l'energia acquistano una forma nuova, la massa resta una proprietà del corpo uguale per tutti gli osservatori, e dall'energia salta fuori un termine che nella fisica classica non c'era: l'energia a riposo $E_0 = mc^2$, la formula più famosa della fisica, che nei capitoli 14 e 15 userai per capire da dove viene l'energia dei nuclei.

9.1 Una nuova quantità di moto

9.1.1 Ripartiamo dalla conservazione della quantità di moto

Nel volume del terzo anno (*Fisica 3*, capitolo 6) hai definito la quantità di moto di un corpo di massa m e velocità $\boldsymbol{v}$ come $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, e hai visto che in un sistema isolato la quantità di moto totale si conserva: in un urto, in un'esplosione, nel rinculo di un fucile, la somma vettoriale delle quantità di moto è la stessa prima e dopo. Hai anche visto che la legge vale in tutti i sistemi inerziali: con le trasformazioni di Galileo le velocità cambiano da un sistema all'altro, ma se la quantità di moto totale si conserva in uno, si conserva anche negli altri. È proprio questa proprietà che il principio di relatività richiede a ogni legge fisica.

9.1.2 Un urto visto da due sistemi di riferimento

Che cosa succede se, al posto delle trasformazioni di Galileo, usiamo quelle di Lorentz? Consideriamo un esperimento ideale, studiato nel 1909 da Gilbert Lewis e Richard Tolman. Due palline identiche, A e B, di massa m, si urtano in modo elastico. Il sistema S è quello in cui A si muove soltanto lungo l'asse y, verso l'alto, con una piccola velocità u; il sistema S′, in configurazione standard, si muove rispetto a S con velocità v lungo x, ed è quello in cui B si muove soltanto lungo y, verso il basso, con la stessa velocità u. L'urto è perfettamente simmetrico: ciò che

A fa in S, B lo fa in S′ (Figura 9.1). Nell'urto ciascuna pallina inverte la componente verticale della velocità.

Guardiamo l'urto da S. La pallina A inverte la sua velocità, quindi la sua quantità di moto verticale cambia di $2mu$. E la pallina B? Gli spostamenti lungo y sono uguali nei due sistemi ($y' = y$), ma i tempi no: per percorrere lo stesso tratto verticale, B impiega in S un tempo γ volte più lungo che in S′, perché i due istanti che delimitano lo spostamento avvengono nello stesso punto di S′, dove sono misurati come tempo proprio, e in S quell'intervallo è dilatato (capitolo 8). La componente verticale della velocità di B, vista da S, è dunque u/γ, con $\gamma = 1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$. Con la definizione classica la quantità di moto verticale di B cambia di $2mu/\gamma$: la somma delle due variazioni non è zero, e la quantità di moto **non** si conserverebbe in S. Per la simmetria della situazione, lo stesso accadrebbe in S′.

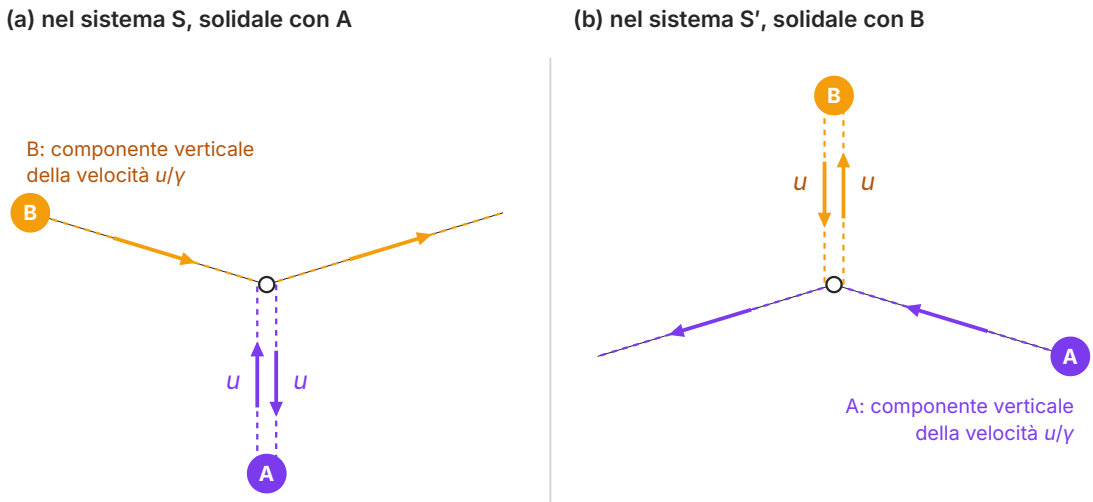

Figura 9.1 L'urto simmetrico di Lewis e Tolman (schema, non in scala; la velocità u è molto minore di v). (a) Nel sistema S la pallina A va su e giù lungo la verticale con velocità u; la pallina B si sposta anche lungo x, con velocità v, e la sua componente verticale vale u/γ, perché in S gli intervalli di tempo misurati da un orologio solidale con B sono dilatati. (b) Nel sistema S′ i ruoli si scambiano. Con $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ la quantità di moto verticale non si conserverebbe; con $\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v}$ sì.

Il principio di relatività, però, chiede che le leggi di conservazione valgano in tutti i sistemi inerziali. Le possibilità sono due: o si rinuncia alla conservazione della quantità di moto, o si cambia la definizione della quantità di moto. Lewis e Tolman mostrarono che basta moltiplicare $m\boldsymbol{v}$ per il fattore γ calcolato con la velocità **del corpo**. Se u è molto piccola, A è praticamente ferma in S e il suo fattore vale circa 1, mentre B si muove con velocità quasi uguale a v e il suo fattore è circa γ: la variazione di B diventa $\gamma \cdot 2mu/\gamma = 2mu$, e le due variazioni si compensano.

Un calcolo completo, che qui non svolgiamo, mostra che il risultato è esatto per qualsiasi valore di u.

9.1.3 La quantità di moto relativistica

Si definisce quindi la **quantità di moto relativistica** di un corpo di massa m che si muove con velocità $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}$$

Attenzione al significato di γ: nel capitolo 8 il fattore di Lorentz era legato alla velocità relativa di due sistemi di riferimento; qui è calcolato con la velocità del corpo nel sistema in cui misuri $\boldsymbol{p}$. Una stessa pallina ha quantità di moto diverse in sistemi diversi, come accadeva già nella fisica classica. Con questa definizione la quantità di moto totale di un sistema isolato si conserva in tutti i sistemi inerziali, e gli esperimenti con le particelle veloci lo confermano ogni giorno.

Le due proprietà più importanti si leggono nella Tabella 9.1. Per velocità piccole rispetto a quella della luce γ è praticamente 1 e ritrovi $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$: a $0{,}1c$, cioè a trentamila chilometri al secondo, la differenza è appena dello 0,5%. Quando invece v si avvicina a c, il denominatore tende a zero e la quantità di moto cresce senza limite. Una quantità di moto finita, per quanto grande, corrisponde sempre a una velocità minore di c.

Tabella 9.1 Il fattore γ e le grandezze relativistiche di un corpo di massa m per alcuni valori di $\beta = v/c$ (calcolati). Le ultime due colonne confrontano l'energia cinetica relativistica (paragrafo successivo) con quella classica, $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\beta^2 mc^2$.

$\beta = v/c$	γ	$p/(mc) = \gamma\beta$	$K/(mc^2) = \gamma - 1$	$\frac{1}{2}\beta^2$	rapporto relativistica/classica
0,10	1,005	0,1005	0,0050	0,0050	1,008
0,30	1,048	0,314	0,048	0,045	1,07
0,50	1,155	0,577	0,155	0,125	1,24
0,60	1,250	0,750	0,250	0,180	1,39
0,80	1,667	1,333	0,667	0,320	2,08
0,90	2,294	2,065	1,294	0,405	3,20
0,99	7,089	7,018	6,089	0,490	12,4

ERRORE FREQUENTE

«La massa aumenta con la velocità»

In molti libri della prima metà del Novecento, e ancora oggi in qualche testo divulgativo, la formula $p = \gamma m v$ è scritta come $p = m_r v$, con una **massa relativistica** $m_r = \gamma m$ che crescerebbe con la velocità. È un modo di dire che oggi i fisici evitano. La massa m che compare in tutte le formule di questo capitolo è la **massa invariante**: la massa del corpo misurata nel sistema in cui è fermo, una proprietà del corpo uguale per tutti gli osservatori, come la carica elettrica. È quella che trovi nelle tabelle, per esempio $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg per l'elettrone.

Il motivo non è solo di gusto. Con la «massa relativistica» si è tentati di scrivere $\boldsymbol{F} = m_r \boldsymbol{a}$, che è sbagliata: una forza parallela alla velocità e una perpendicolare producono accelerazioni diverse anche a parità di intensità. Quello che resta vero è la seconda legge nella forma $\boldsymbol{F} = \Delta \boldsymbol{p}/\Delta t$, che ritroverai quando studieremo il moto sotto l'azione di una forza. Un secondo errore tipico riguarda l'energia cinetica: **non** è $\tfrac{1}{2}\gamma m v^2$, ma $(\gamma - 1)mc^2$, come vedrai fra poco.

9.2 L'energia relativistica

9.2.1 Energia totale ed energia a riposo

Anche l'energia deve cambiare forma. Nella fisica classica, in un urto elastico si conservano la quantità di moto e l'energia cinetica. Perché le leggi di conservazione valgano in tutti i sistemi inerziali, insieme alla nuova quantità di moto deve conservarsi la grandezza

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}$$

detta **energia relativistica** (o energia totale) del corpo. Già nel 1905, nell'articolo sulla relatività, Einstein ricavò per l'energia cinetica di un elettrone l'espressione che troverai fra poco. Non ti chiediamo di dimostrare la formula: è la scelta che rende coerente la dinamica con le trasformazioni di Lorentz, e la sua prova sono gli esperimenti. La novità più sorprendente si vede ponendo $v = 0$: allora $\gamma = 1$ e l'energia non si annulla, ma vale

$$E_0 = mc^2$$

È l'**energia a riposo** del corpo: un corpo fermo possiede energia per il solo fatto di avere massa. Il fattore c^2 è enorme: un grammo di materia ha un'energia a riposo di 10^{-3} kg $\times$ $(3{,}00 \times 10^8$ m/s$)^2$ $= 9{,}0 \times 10^{13}$ J, quanto si libera nell'esplosione di circa ventimila tonnellate di tritolo. Nel 1905 Einstein stesso, in un breve articolo successivo a quello sulla relatività, concluse che la massa di un corpo è una misura del suo contenuto di energia; più avanti, nel paragrafo sull'equivalenza fra massa ed energia, vedrai che cosa significa.

La parte dell'energia dovuta al moto è la differenza fra l'energia totale e quella a riposo; la chiamiamo **energia cinetica relativistica**:

$$K = E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2$$

Quando $v \to c$, γ cresce senza limite e con lui l'energia cinetica: per portare un corpo dotato di massa alla velocità della luce servirebbe un'energia infinita. È la seconda faccia, energetica, del limite che hai visto per la quantità di moto.

9.2.2 Il limite classico

A basse velocità la nuova formula deve ridare $\frac{1}{2}mv^2$, che funziona benissimo nella vita di tutti i giorni. Per verificarlo usiamo l'approssimazione $(1 - x)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2$, valida per x piccolo, che si ottiene dallo sviluppo del binomio e che puoi controllare con la calcolatrice (con $x = 0{,}01$ i due membri valgono 1,005038 e 1,005038). Con $x = v^2/c^2$:

$$K = (\gamma - 1)mc^2 \approx \tfrac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2}$$

Il primo termine è l'energia cinetica classica; il secondo è la correzione relativistica, che rispetto al primo vale $\frac{3}{4}\beta^2$. Per un aereo di linea a 250 m/s, β è circa 8×10^{-7} e la correzione relativa è di 5×10^{-13}: nessuna bilancia, nessun cronometro la vedrebbe. La correzione raggiunge l'1% quando $\frac{3}{4}\beta^2 = 0{,}01$, cioè per $\beta \approx 0{,}115$: oltre un decimo della velocità della luce la formula classica comincia a sbagliare in modo apprezzabile, e a metà della velocità della luce dà un valore inferiore di circa il 20% a quello vero (Figura 9.2 e Tabella 9.1).

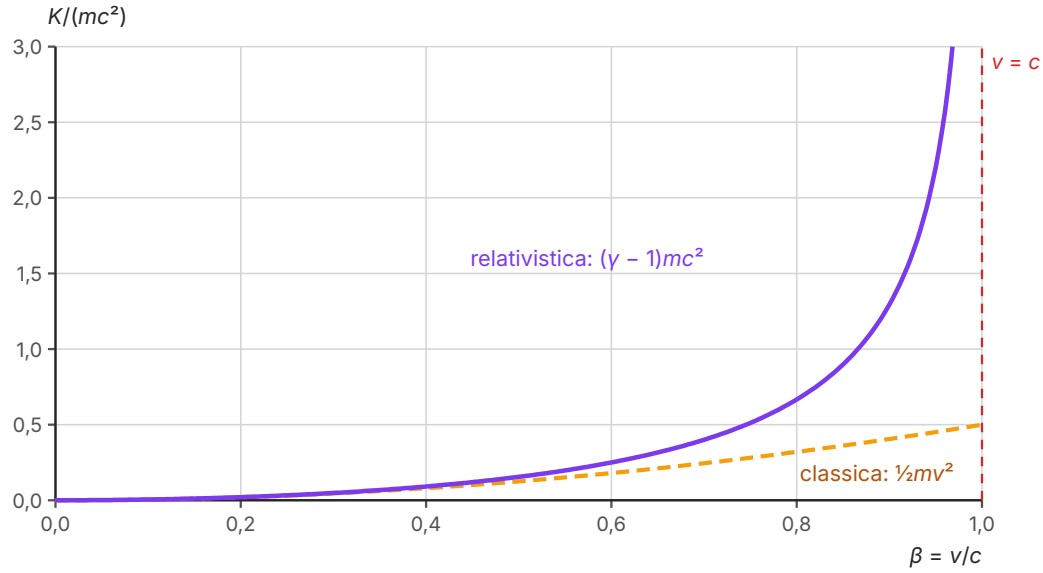

Figura 9.2 Energia cinetica di un corpo, in unità della sua energia a riposo mc^2, in funzione di $\beta = v/c$ (curve calcolate). In viola la formula relativistica $(\gamma - 1)mc^2$, che cresce senza limite quando v si avvicina a c; in arancione tratteggiato la formula classica $\frac{1}{2}mv^2$, che a $v = c$ vale soltanto $\frac{1}{2}mc^2$. A basse velocità le due curve coincidono; per $\beta = 0{,}5$ valgono 0,155 e 0,125.

9.2.3 Le unità dell'energia, della massa e della quantità di moto

Per le particelle il joule è un'unità scomoda. Si usa l'elettronvolt ($1\ \text{eV} = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J}$) con i suoi multipli keV, MeV, GeV e TeV, e si misurano le masse attraverso la loro energia a riposo: dire che la massa dell'elettrone è 0,511 MeV/c^2 significa che $mc^2 = 0{,}511$ MeV. Il **MeV/c^2** è dunque un'unità di massa: $1\ \text{MeV}/c^2 = (1{,}60 \times 10^{-13}\ \text{J})/(3{,}00 \times 10^{8}\ \text{m/s})^2 = 1{,}78 \times 10^{-30}$ kg. Allo stesso modo il **MeV/c** è un'unità di quantità di moto: una particella ha $p = 1$ MeV/c se $pc = 1$ MeV, cioè $p = 5{,}33 \times 10^{-22}$ kg·m/s. Il vantaggio è che nelle formule c «si semplifica»: le energie a riposo della Tabella 9.2 si confrontano direttamente con le energie cinetiche delle particelle.

Tabella 9.2 Energie a riposo di alcune particelle (valori arrotondati; i primi tre sono quelli usati negli esercizi). Una particella con energia cinetica molto minore della sua energia a riposo è non relativistica; una con energia cinetica molto maggiore è ultrarelativistica.

Particella	Energia a riposo mc^2	Massa
elettrone (e positrone)	0,511 MeV	$9{,}11 \times 10^{-31}$ kg
protone	938,3 MeV	$1{,}67 \times 10^{-27}$ kg
neutrone	939,6 MeV	$1{,}67 \times 10^{-27}$ kg
muone	105,7 MeV	$1{,}88 \times 10^{-28}$ kg
particella α (nucleo di elio)	3727 MeV	$6{,}64 \times 10^{-27}$ kg

ESEMPIO SVOLTO

Un elettrone da 1 MeV

Problema. Un acceleratore lineare per radioterapia fornisce elettroni con energia cinetica $K = 1{,}00$ MeV. Calcola: a) l'energia totale e il fattore γ; b) la velocità; c) la quantità di moto, in MeV/c e in unità SI; d) la velocità che prevederebbe la formula classica.

a) L'energia totale è la somma di energia a riposo ed energia cinetica: $E = mc^2 + K = 0{,}511$ MeV + 1,00 MeV = 1,51 MeV. Poiché $E = \gamma mc^2$, $\gamma = E/(mc^2) = 1{,}511/0{,}511 = 2{,}96$.

b) Da $\gamma = 1/\sqrt{(1-\beta^2)}$ si ricava $\beta = \sqrt{(1 - 1/\gamma^2)} = \sqrt{(1 - 1/2{,}957^2)} = \sqrt{(1 - 0{,}1144)} = 0{,}941$. La velocità è $v = 0{,}941 \times 3{,}00 \times 10^8$ m/s $= 2{,}82 \times 10^8$ m/s.

c) $pc = \gamma\beta mc^2 = 2{,}957 \times 0{,}941 \times 0{,}511$ MeV = 1,42 MeV, quindi $p = 1{,}42$ MeV/c. In unità SI: $p = (1{,}42 \times 10^6 \times 1{,}60 \times 10^{-19}$ J$)/(3{,}00 \times 10^8$ m/s$) = 7{,}6 \times 10^{-22}$ kg·m/s.

d) Con $\tfrac{1}{2}mv^2 = K$ si avrebbe $\beta = \sqrt{(2K/(mc^2))} = \sqrt{(2 \times 1{,}00/0{,}511)} = 1{,}98$: quasi il doppio della velocità della luce, un risultato impossibile. La formula classica non si può usare: l'energia cinetica è il doppio dell'energia a riposo, e l'elettrone è fortemente relativistico.

Controllo. Il risultato del punto c) si ritrova anche con la relazione fra energia e quantità di moto che ricaverai nel prossimo paragrafo: $pc = \sqrt{(E^2 - (mc^2)^2)} = \sqrt{(1{,}511^2 - 0{,}511^2)}$ MeV = 1,42 MeV.

APPROFONDIMENTO

L'energia cinetica come lavoro

Nella meccanica classica l'energia cinetica di un corpo che parte da fermo è il lavoro fatto dalla forza risultante per metterlo in moto. Vale anche in relatività, con la seconda legge nella forma $F = \Delta p/\Delta t$. Per un piccolo spostamento $\Delta x = v\Delta t$ il lavoro è $F\Delta x = (\Delta p/\Delta t)v\Delta t = v\Delta p$: l'energia cresce di v per ogni aumento della quantità di moto. Con il linguaggio delle derivate, che stai studiando in matematica, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}p = v$.

Si può controllare che la formula di Einstein soddisfa proprio questa condizione. Scritta in funzione di p, l'energia è $E = \sqrt{((pc)^2 + (mc^2)^2)}$ (lo ricaverai nel prossimo paragrafo), e la sua derivata rispetto a p è $pc^2/E = \gamma mvc^2/(\gamma mc^2) = v$. Chi conosce già gli integrali può fare il conto all'inverso: il lavoro totale è l'integrale di $v\,\mathrm{d}p$ da 0 a p, e integrando per parti si trova $K = \gamma mv^2 + mc^2/\gamma - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$. Senza calcolo integrale si arriva allo stesso risultato numericamente: si fa crescere p a piccoli passi, si somma $v\Delta p$ con una tabella di calcolo, e il totale coincide con $(\gamma - 1)mc^2$ entro l'errore dei passi finiti.

DA RICORDARE

Le tre energie e le loro unità

Energia totale $E = \gamma mc^2$; **energia a riposo** $E_0 = mc^2$; **energia cinetica** $K = E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$. Quando un testo dice «un protone da 7 TeV» parla di energia (di solito l'energia totale di ciascun protone, che a quelle energie coincide in pratica con quella cinetica); quando dice «un elettrone da 1 MeV» in un tubo o in un acceleratore lineare parla di solito di energia cinetica. Nelle soluzioni scrivi sempre quale delle tre stai usando.

Masse in MeV/c^2, quantità di moto in MeV/c, energie in MeV: con queste unità le formule diventano relazioni fra numeri, per esempio $pc = \sqrt{(K^2 + 2Kmc^2)}$. Per tornare al SI moltiplica per $1{,}60 \times 10^{-13}$ J/MeV e dividi per c o c^2.

9.3 Energia e quantità di moto

9.3.1 Una relazione che non contiene la velocità

Energia e quantità di moto dipendono entrambe dalla velocità attraverso γ. Eliminando la velocità si ottiene una relazione fra le due che è fra le più usate di tutta la fisica delle particelle. La ricaviamo passo per passo.

ESEMPIO SVOLTO

Dalla velocità alla relazione fra energia e quantità di moto

Passo 1. Scrivi i quadrati delle due grandezze, moltiplicando la quantità di moto per c perché abbia le dimensioni di un'energia: $E^2 = \gamma^2 m^2 c^4$ e $(pc)^2 = \gamma^2 m^2 v^2 c^2$.

Passo 2. Sottrai e raccogli: $E^2 - (pc)^2 = \gamma^2 m^2 c^4 (1 - v^2/c^2)$.

Passo 3. Per definizione $\gamma^2 = 1/(1 - v^2/c^2)$, quindi $\gamma^2(1 - v^2/c^2) = 1$, e resta $E^2 - (pc)^2 = m^2 c^4$.

Passo 4. Riordinando:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

Passo 5 (controllo). Per un corpo fermo $p = 0$ e $E = mc^2$, l'energia a riposo. Per una particella con $K = 1{,}00$ MeV e $mc^2 = 0{,}511$ MeV (esempio precedente): $E^2 = 1{,}511^2$ MeV$^2 = 2{,}283$ MeV^2, e $(pc)^2 + (mc^2)^2 = 1{,}422^2 + 0{,}511^2 = 2{,}022 + 0{,}261 = 2{,}283$ MeV^2. ✓

Due conseguenze utili. Dividendo $pc = \gamma mvc$ per $E = \gamma mc^2$ si ottiene $\beta = pc/E$, cioè $v = pc^2/E$: la velocità si ricava da energia e quantità di moto senza passare per γ. E sostituendo $E = K + mc^2$ si trova $(pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2$, la formula che dà la quantità di moto a partire dall'energia cinetica.

Questa **relazione fra energia e quantità di moto** ha la forma del teorema di Pitagora, e la si ricorda con un triangolo rettangolo (Figura 9.3): i cateti sono mc^2 e pc, l'ipotenusa è E. Per una data particella il cateto orizzontale è fisso; quando la particella accelera, il cateto verticale si allunga e l'ipotenusa con lui. Il seno dell'angolo opposto a pc vale $pc/E = \beta$. Quando pc è molto maggiore di mc^2 il triangolo è quasi verticale, $E \approx pc$ e la particella si muove quasi alla velocità della luce: si dice che è ultrarelativistica.

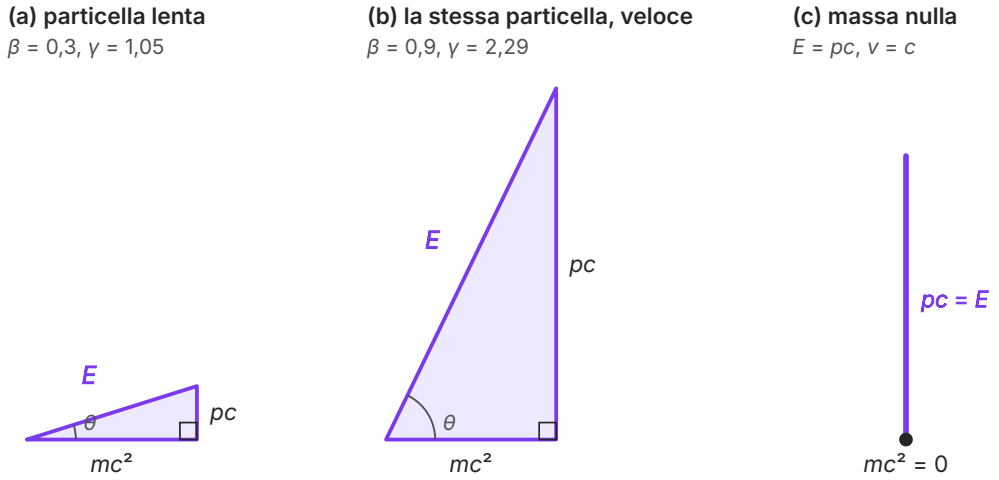

Figura 9.3 Il triangolo dell'energia, disegnato in scala. (a) e (b): la stessa particella (stesso cateto orizzontale mc^2) con $\beta = 0{,}3$ e $\beta = 0{,}9$; il cateto verticale $pc = \gamma\beta mc^2$ e l'ipotenusa $E = \gamma mc^2$ crescono con la velocità, e sen $\theta = pc/E = \beta$. (c) Una particella di massa nulla: il cateto orizzontale si annulla, $E = pc$ e la velocità è sempre c.

9.3.2 Particelle di massa nulla

La formula $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ non contiene la velocità, e per questo ammette un caso che le formule con γ non possono descrivere: $m = 0$. Una **particella di massa nulla** ha

$$E = pc$$

e, poiché $\beta = pc/E = 1$, si muove sempre alla velocità della luce, in ogni sistema di riferimento: non può essere né accelerata né fermata. Una particella così trasporta energia e quantità di moto senza avere massa. È ciò che accade alla luce: nel capitolo 5 hai visto che un'onda elettromagnetica che porta l'energia ΔE porta anche la quantità di moto $\Delta E/c$, ed è per questo che esercita una pressione di radiazione. Nel capitolo 11 scoprirai che la luce stessa è fatta di particelle di massa nulla, i fotoni, per ciascuno dei quali vale $E = pc$.

9.3.3 Un invariante e la massa di un sistema

Energia e quantità di moto cambiano da un sistema di riferimento all'altro, ma la combinazione $E^2 - (pc)^2$ è la stessa per tutti gli osservatori, perché è uguale a $(mc^2)^2$ e la massa è invariante. Somiglia all'intervallo invariante del capitolo 8, $(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$, e non per caso: energia e quantità di moto si trasformano fra loro come il tempo e lo spazio.

L'invariante si usa anche per un **sistema** di particelle. Se E_{tot} è la somma delle energie e $\boldsymbol{p}_{\text{tot}}$ la somma vettoriale delle quantità di moto, la quantità $(E_{\text{tot}})^2 - (p_{\text{tot}}c)^2$ è la stessa in ogni sistema

inerziale, e la sua radice, divisa per c^2, è la massa del sistema. Nel sistema in cui la quantità di moto totale è nulla, la massa del sistema è semplicemente l'energia totale divisa per c^2. Ecco un risultato che sorprende: due fotoni che viaggiano in versi opposti, ciascuno con energia E, hanno massa nulla uno per uno, ma il sistema dei due ha massa $2E/c^2$. **La massa di un sistema non è la somma delle masse dei suoi componenti.** È il punto di partenza del prossimo paragrafo.

9.4 L'equivalenza fra massa ed energia

9.4.1 La massa di un sistema non è la somma delle masse

Pensa a un sistema composto, fermo nel suo insieme: un gas in una scatola, una molla compressa, un atomo. La sua energia totale comprende le energie a riposo dei componenti, ma anche le loro energie cinetiche e le energie potenziali con cui interagiscono. Per quanto visto nel paragrafo precedente, la massa del sistema è la sua energia totale (nel sistema in cui è fermo) divisa per c^2. Quindi, se il sistema riceve o cede energia ΔE restando fermo, la sua massa cambia di

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$$

È l'**equivalenza fra massa ed energia**: ogni energia contribuisce alla massa, e la massa è a sua volta una forma di energia. Un litro d'acqua scaldato di 80 °C riceve circa $3{,}3 \times 10^5$ J e la sua massa aumenta di $3{,}3 \times 10^5/(9{,}0 \times 10^{16})$ kg $\approx 4 \times 10^{-12}$ kg, qualche milionesimo di milligrammo; una molla compressa ha una massa un po' maggiore della stessa molla scarica. Effetti veri, ma molto al di sotto della sensibilità di qualsiasi bilancia: per questo nella chimica e nella vita quotidiana la massa sembra conservarsi.

Il discorso vale anche al contrario. Un sistema legato, come un atomo o un nucleo, ha energia **minore** di quella delle sue parti separate e ferme: per separarle bisogna fornire un'energia, l'energia di legame. La massa del sistema legato è quindi minore della somma delle masse delle parti. L'atomo di idrogeno ha una massa minore di quella di un protone più un elettrone separati, di 13,6 eV/c^2: una frazione $1{,}4 \times 10^{-8}$ della sua massa. Il deutone, il nucleo formato da un protone e un neutrone, ha un'energia di legame di 2,224 MeV, e la sua massa è minore della somma delle masse di protone e neutrone di circa un millesimo. Nel capitolo 14 chiamerai questa differenza difetto di massa e la userai per calcolare l'energia liberata dalle reazioni nucleari.

La Tabella 9.3 mette a confronto alcuni processi. La frazione di massa che si trasforma in altre forme di energia è circa un decimo di miliardesimo in una combustione, un millesimo nella fissione dell'uranio, quasi quattro millesimi nella fusione di deuterio e trizio, e il cento per cento quando una particella incontra la sua antiparticella. La differenza fra la chimica e la fisica nucleare sta tutta in quell'ordine di grandezza: un milione di volte o più.

Tabella 9.3 Frazione della massa dei reagenti che si trasforma in altre forme di energia, $\Delta m/m$ (calcolata dalle energie liberate indicate; ordini di grandezza).

Processo	Energia liberata	$\Delta m/m$
combustione del metano: $CH_4 + 2\,O_2 \rightarrow CO_2 + 2\,H_2O$	890 kJ per 80 g di reagenti	1×10^{-10}
ionizzazione dell'atomo di idrogeno	13,6 eV per atomo	$1{,}4 \times 10^{-8}$
separazione del deutone in protone e neutrone	2,224 MeV per nucleo	$1{,}2 \times 10^{-3}$
fissione di un nucleo di uranio-235 (capitolo 15)	circa 200 MeV per fissione	9×10^{-4}
fusione deuterio–trizio (capitolo 15)	17,6 MeV per reazione	$3{,}8 \times 10^{-3}$
annichilazione elettrone–positrone	1,022 MeV per coppia	1

9.4.2 Il Sole perde massa

Il Sole irradia nello spazio una potenza di circa $3{,}8 \times 10^{26}$ W. L'energia viene dalle reazioni di fusione nel suo nucleo, che trasformano idrogeno in elio (capitolo 15): non è una combustione, e il Sole non «brucia» nulla. Ogni secondo, l'energia che lascia il Sole corrisponde a una massa

$$\Delta m/\Delta t = \frac{L}{c^2} = \frac{3{,}8 \times 10^{26}\ \text{W}}{(3{,}00 \times 10^{8}\ \text{m/s})^2} = 4{,}2 \times 10^{9}\ \text{kg/s}$$

Più di quattro milioni di tonnellate al secondo. Sembra moltissimo, ma in 4,6 miliardi di anni, l'età del Sistema solare, la perdita totale è di circa 6×10^{26} kg: tre decimillesimi della massa del Sole, $2{,}0 \times 10^{30}$ kg. L'energia non nasce dal nulla: è energia a riposo dei nuclei di idrogeno che diventa energia della radiazione.

9.4.3 Creazione e annichilazione di coppie

Il caso estremo dell'equivalenza è la trasformazione completa della massa in energia, e viceversa. L'elettrone ha un'antiparticella, il positrone, con la stessa massa e carica opposta (lo incontrerai di nuovo nel capitolo 16). Quando un elettrone e un positrone si incontrano possono scomparire entrambi, lasciando al loro posto radiazione elettromagnetica: è l'**annichilazione**. Se le due particelle sono praticamente ferme, la quantità di moto totale è nulla prima, e deve esserlo anche dopo: per questo non può nascere un solo fotone, che avrebbe $p = E/c \neq 0$, ma ne nascono (almeno) due, emessi in versi opposti con la stessa energia. Per la conservazione dell'energia, ciascuno porta 0,511 MeV, l'energia a riposo di una delle due particelle.

Il processo inverso è la **creazione di coppie**: un fotone di energia sufficiente, passando vicino a un nucleo, si trasforma in un elettrone e un positrone. L'energia minima è la somma delle due energie a riposo, 1,022 MeV. Il nucleo è indispensabile: un fotone isolato non può creare una coppia nel vuoto. Lo mostra l'invariante $E^2 - (pc)^2$: per il fotone $E^2 - (pc)^2 = 0$, mentre per la

coppia vale almeno $(2mc^2)^2$; poiché l'invariante si conserva insieme a energia e quantità di moto, il processo è impossibile senza un terzo corpo che assorba parte della quantità di moto.

COLLEGAMENTI

La PET: l'annichilazione al servizio della medicina

La tomografia a emissione di positroni (PET) usa proprio l'annichilazione. Al paziente si somministra una molecola simile al glucosio, marcata con un nucleo radioattivo, il fluoro-18, che decade emettendo positroni (capitolo 14). Le cellule che consumano più glucosio, come quelle di molti tumori, accumulano la molecola. Ogni positrone percorre nei tessuti al più qualche millimetro, rallenta e si annichila con un elettrone: nascono due fotoni da 0,511 MeV che partono in versi opposti.

Un anello di rivelatori intorno al paziente registra le coppie di fotoni che arrivano nello stesso istante su due rivelatori opposti: l'annichilazione è avvenuta lungo la retta che li congiunge. Raccogliendo milioni di queste rette, un calcolatore ricostruisce la mappa tridimensionale delle zone in cui la molecola si è accumulata. Due leggi di conservazione, dell'energia (0,511 MeV per fotone) e della quantità di moto (fotoni opposti), diventano così un'immagine diagnostica.

9.5 Il moto relativistico sotto l'azione di una forza

9.5.1 La seconda legge della dinamica

Newton scrisse la seconda legge della dinamica in termini di «quantità di moto», e proprio questa forma sopravvive in relatività: la forza risultante su un corpo è uguale alla rapidità con cui varia la sua quantità di moto,

$$\boldsymbol{F} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta t}$$

nel limite di intervalli Δt piccoli (la derivata $\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$), con $\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v}$. Quella che non sopravvive è la forma $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$: poiché γ cambia con la velocità, la quantità di moto non è più proporzionale alla velocità, e a forza costante l'accelerazione non è costante.

Consideriamo una forza costante F che agisce su un corpo inizialmente fermo, nella direzione del moto. La quantità di moto cresce linearmente, $p = Ft$, esattamente come nella fisica classica. Ma la velocità si ottiene risolvendo $\gamma m v = Ft$ rispetto a v:

$$v = \frac{Ft/m}{\sqrt{1 + (Ft/(mc))^2}}$$

Per tempi brevi il denominatore vale circa 1 e ritrovi il moto uniformemente accelerato, $v = (F/m)t$. Per tempi lunghi il denominatore cresce come il numeratore e la velocità si avvicina a c

senza mai raggiungerla (Figura 9.4). Il tempo caratteristico è mc/F: il tempo che la forza impiegherebbe a portare il corpo alla velocità della luce se valesse la fisica classica. Dopo un tempo pari a mc/F la velocità vera è $c/\sqrt{2} = 0{,}71c$; dopo un tempo tre volte maggiore è $0{,}95c$.

Un esempio concreto: un elettrone parte da fermo in un campo elettrico uniforme $\boldsymbol{E}$ di intensità $1{,}0 \times 10^{6}$ V/m, che esercita su di esso la forza costante $F = eE = 1{,}6 \times 10^{-13}$ N. Il tempo caratteristico è $mc/F = 9{,}11 \times 10^{-31} \times 3{,}00 \times 10^{8}/1{,}6 \times 10^{-13}$ s $= 1{,}7 \times 10^{-9}$ s. Dopo 10 ns la quantità di moto è $p = Ft = 1{,}6 \times 10^{-21}$ kg·m/s, cioè $pc = 3{,}0$ MeV, e la velocità è $0{,}986c$; la formula classica avrebbe dato $5{,}9c$. Anche il lavoro della forza continua a valere: l'energia cinetica cresce di $F\Delta x$, ma quasi tutta va ad aumentare γ, e quasi niente la velocità.

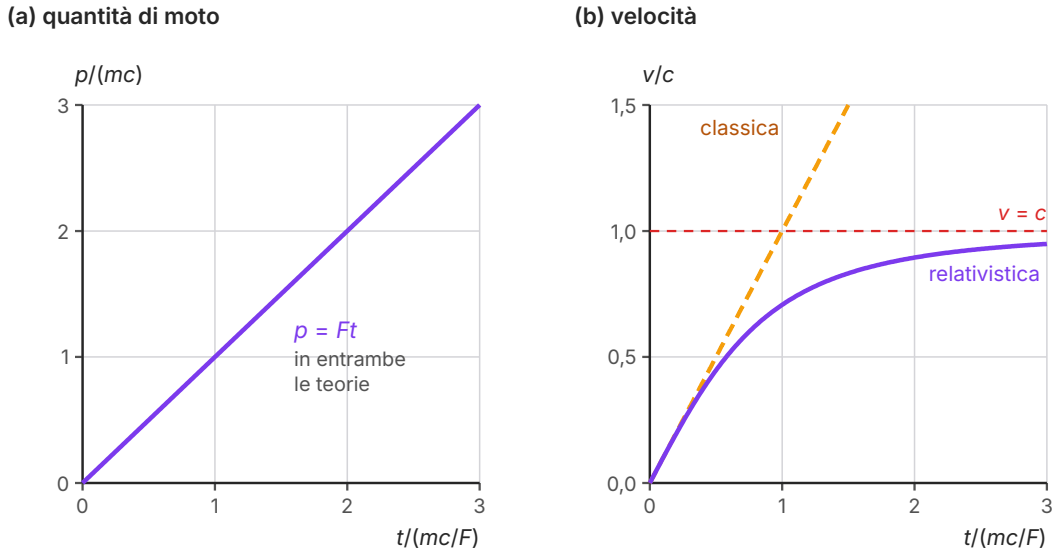

Figura 9.4 Moto di un corpo, inizialmente fermo, sotto una forza costante F (curve calcolate; il tempo è misurato in unità di mc/F). (a) La quantità di moto cresce linearmente nel tempo, sia nella fisica classica sia in relatività. (b) La velocità: secondo la fisica classica (arancione, tratteggiata) cresce linearmente e raggiunge c al tempo mc/F; secondo la relatività (viola) si avvicina a c senza mai raggiungerla.

9.5.2 Una carica in un campo magnetico uniforme

Nel volume dello scorso anno (*Fisica 4*, capitolo 15) hai studiato una particella di carica q che entra con velocità $\boldsymbol{v}$ perpendicolare a un campo magnetico uniforme $\boldsymbol{B}$: la forza di Lorentz $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ è perpendicolare alla velocità, non compie lavoro e fa percorrere alla particella una circonferenza di raggio $r = mv/(|q|B)$. Che cosa cambia in relatività?

Poiché la forza magnetica non compie lavoro, l'energia della particella non cambia; quindi restano costanti γ e il modulo della velocità. La forza cambia soltanto la direzione della quantità di moto: in un tempo Δt la particella percorre l'arco $v\Delta t$, il vettore $\boldsymbol{p}$ ruota dell'angolo $v\Delta t/r$ e la sua variazione ha modulo $pv\Delta t/r$. Uguagliando $\Delta p/\Delta t = pv/r$ alla forza $|q|vB$ si ottiene

$$r = \frac{p}{|q|B} = \frac{\gamma m v}{|q|B}$$

È la formula dello scorso anno con la quantità di moto relativistica al posto di mv: a parità di velocità, una particella relativistica è γ volte più «rigida» e percorre una circonferenza più larga. È anche il modo in cui, negli esperimenti, si misura la quantità di moto: dal raggio di curvatura della traccia in un campo noto. Una formula pratica per particelle di carica e: p (in GeV/c) = 0,3 B (in T) × r (in m).

Anche il periodo cambia: $T = 2\pi r/v = 2\pi\gamma m/(|q|B)$. Nella fisica classica il periodo non dipende dalla velocità, ed è su questo che si basa il ciclotrone: la tensione alternata che accelera le particelle a ogni mezzo giro ha una frequenza fissa, sincronizzata con il loro moto. In relatività il periodo cresce con l'energia: per un protone da 20 MeV è già più lungo del 2%, e le particelle arrivano alla fessura sempre più in ritardo rispetto alla tensione. Il ciclotrone a campo uniforme smette di funzionare oltre qualche decina di MeV per i protoni (si costruiscono ciclotroni con campo che cresce verso il bordo, che compensano il ritardo e arrivano a qualche centinaio di MeV). Per energie più alte si usa il **sincrotrone**: le particelle percorrono un anello di raggio fisso, e il campo dei magneti e la frequenza della tensione acceleratrice vengono aumentati man mano che l'energia cresce, in modo da tenerle sempre sulla stessa orbita. L'LHC è un sincrotrone.

ESEMPIO SVOLTO

Il raggio di curvatura di un elettrone veloce

Problema. Un elettrone con energia cinetica 1,00 MeV entra perpendicolarmente in un campo magnetico uniforme di 0,0100 T. a) Calcola il raggio della traiettoria. b) Calcola il raggio che si otterrebbe con la formula classica $r = mv/(eB)$, usando la velocità vera dell'elettrone. c) Calcola il periodo del moto e confrontalo con quello classico.

a) Dall'esempio svolto sull'elettrone da 1 MeV: pc = 1,42 MeV. Allora $r = p/(eB) = pc/(ecB)$. Con pc espresso in eV, pc/e è in volt: $r = 1{,}42 \times 10^6$ V/$(3{,}00 \times 10^8$ m/s × 0,0100 T) = 0,474 m. Controllo con la formula pratica: 0,3 × 0,0100 × 0,474 = $1{,}42 \times 10^{-3}$ GeV/c. ✓

b) Con $v = 0{,}941c$: $mv/(eB) = 9{,}11 \times 10^{-31} \times 2{,}82 \times 10^8/(1{,}60 \times 10^{-19} \times 0{,}0100)$ m = 0,161 m. Il raggio vero è γ = 2,96 volte maggiore.

c) $T = 2\pi r/v = 2\pi \times 0{,}474$ m/$(2{,}82 \times 10^8$ m/s) = $1{,}06 \times 10^{-8}$ s. La formula classica, $2\pi m/(eB) = 3{,}58 \times 10^{-9}$ s, dà un periodo γ volte più breve: a questa energia, un acceleratore che contasse sul periodo classico perderebbe subito la sincronia.

9.5.3 Un elettrone accelerato da una differenza di potenziale

Possiamo ora mantenere la promessa del volume dello scorso anno. Un elettrone che parte da fermo e attraversa una differenza di potenziale ΔV riceve dal campo elettrico il lavoro $e\Delta V$, che

diventa energia cinetica. Questo resta vero; ciò che cambia è il legame fra energia cinetica e velocità:

$$eΔV = K = (\gamma - 1)mc^2, \quad \text{quindi} \quad \gamma = 1 + \frac{eΔV}{mc^2}$$

Con mc^2 = 0,511 MeV, l'elettrone ha γ = 1,5 quando $eΔV$ = 0,256 MeV, cioè proprio alla tensione di circa 256 kV a cui la formula classica lo farebbe arrivare alla velocità della luce. In realtà a quella tensione la velocità è $\sqrt{(1 - 1/1{,}5^2)}c = 0{,}745c$. Il grafico della Figura 9.5 mette a confronto le due previsioni: a 10 kV differiscono dell'1,4%, a 30 kV del 4%, a 100 kV del 14%; poi la curva classica sale oltre c e quella relativistica le si avvicina sempre più lentamente.

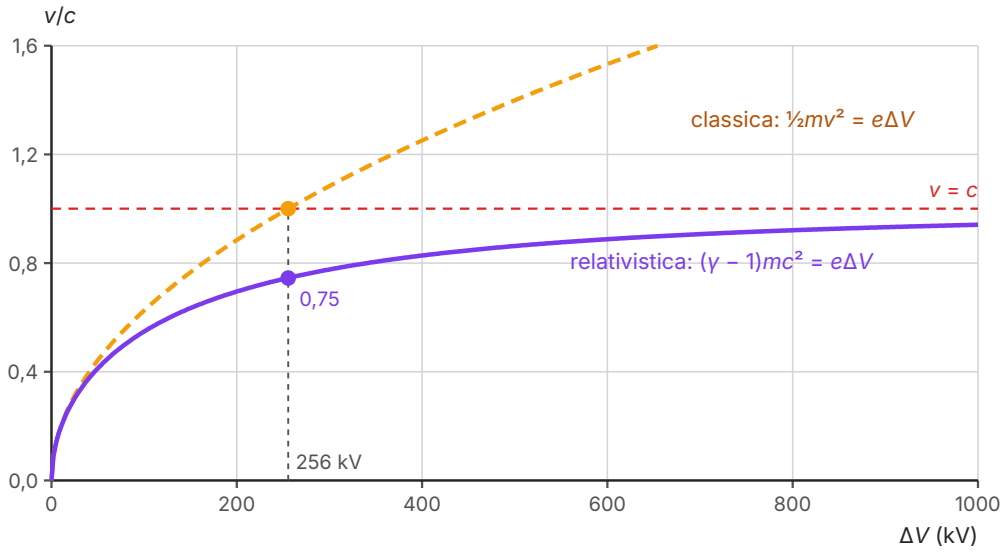

Figura 9.5 Velocità di un elettrone accelerato da fermo con una differenza di potenziale $ΔV$ (curve calcolate con mc^2 = 0,511 MeV). La formula classica (arancione, tratteggiata) raggiunge la velocità della luce a 256 kV, dove la velocità vera, calcolata con la relatività (viola), è 0,745c. A 1 MV la velocità vera è 0,941c.

9.6 Le prove sperimentali

9.6.1 L'esperimento di Bertozzi

Una delle verifiche più dirette della dinamica relativistica è un esperimento didattico, realizzato nel 1964 al MIT da William Bertozzi e filmato per le scuole. L'idea è semplice: si accelerano elettroni fino a energie cinetiche note e si misura la loro velocità con il **tempo di volo**, cioè il tempo impiegato a percorrere una distanza nota. Bertozzi usò un acceleratore elettrostatico di Van de Graaff per le energie fino a 1,5 MeV e un acceleratore lineare per le energie maggiori,

fino a 15 MeV; brevi impulsi di elettroni percorrevano un tratto rettilineo di alcuni metri, e un oscilloscopio misurava il tempo fra il passaggio all'inizio e l'arrivo su un bersaglio di alluminio. Per controllare che l'energia degli elettroni fosse proprio quella prevista, in una delle prove misurò anche il riscaldamento del bersaglio.

Il risultato è rappresentato nella Figura 9.6, dove in ordinata c'è il quadrato della velocità, in unità di c^2. Secondo la fisica classica $(v/c)^2 = 2K/(mc^2)$ dovrebbe crescere linearmente con K, e a 15 MeV dovrebbe valere quasi 60. Le misure, invece, non superano 1: aumentare di trenta volte l'energia cinetica, da 0,5 a 15 MeV, fa crescere la velocità soltanto da $0{,}86c$ a quasi c. È la curva relativistica $1 - 1/\gamma^2$, con $\gamma = 1 + K/(mc^2)$.

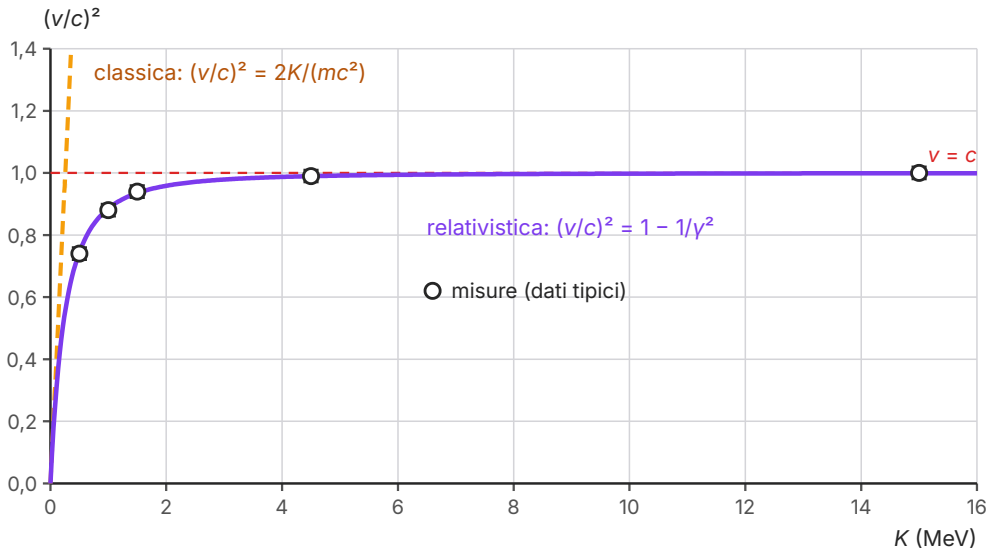

Figura 9.6 Quadrato della velocità di elettroni in funzione della loro energia cinetica, in un esperimento a tempo di volo nello spirito di quello di Bertozzi (1964). Cerchi: misure (dati tipici, incertezza ±0,02, minore delle dimensioni dei cerchi); in viola la previsione relativistica, in arancione tratteggiato quella classica, che esce dal grafico già sotto 1 MeV.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere i dati di un esperimento a tempo di volo

Problema. In un esperimento a tempo di volo gli elettroni percorrono un tratto di lunghezza d = 8,40 m. La Tabella 9.4 riporta le energie cinetiche e i tempi misurati (dati tipici). a) Calcola v/c per ogni energia. b) Confronta con le previsioni classica e relativistica. c) Che cosa si può concludere sull'esistenza di una velocità limite?

Tabella 9.4 Tempi di volo di elettroni su 8,40 m (dati tipici; incertezza sui tempi ±0,3 ns) e velocità ricavate. Le previsioni sono calcolate con mc^2 = 0,511 MeV.

K (MeV)	t (ns)	v/c misurata	v/c relativistica	v/c classica
0,50	32,5	0,862 ± 0,008	0,863	1,40
1,0	29,8	0,940 ± 0,009	0,941	1,98
1,5	28,9	0,969 ± 0,010	0,967	2,42
4,5	28,2	0,993 ± 0,011	0,995	4,20
15	28,0	1,000 ± 0,011	0,9995	7,66

a) $v = d/t$; per esempio a 0,50 MeV: $v = 8{,}40\ \text{m}/(32{,}5 \times 10^{-9}\ \text{s}) = 2{,}58 \times 10^{8}$ m/s, cioè $v/c = 0{,}862$. L'incertezza relativa sul tempo, 0,3/32,5 ≈ 0,9%, si trasferisce sulla velocità: ±0,008. Le altre righe si calcolano allo stesso modo.

b) La previsione relativistica è $v/c = \sqrt{(1 - 1/\gamma^2)}$ con $\gamma = 1 + K/(mc^2)$: a 0,50 MeV γ = 1,978 e v/c = 0,863. In tutte le righe la differenza fra misura e previsione relativistica è minore dell'incertezza: le misure sono compatibili. La previsione classica $\sqrt{(2K/(mc^2))}$ è già maggiore di 1 alla prima energia ed è sbagliata in tutte le righe.

c) Fra la prima e l'ultima riga l'energia cinetica cresce di trenta volte, ma il tempo di volo diminuisce solo da 32,5 ns a 28,0 ns, e tende al valore d/c = 28,0 ns. Gli elettroni non superano la velocità della luce, per quanta energia si fornisca loro: l'energia in più va ad aumentare γ, non la velocità.

9.6.2 Gli acceleratori di particelle

Oggi la verifica più impressionante della dinamica relativistica è il funzionamento stesso degli acceleratori. Nell'LHC ogni fascio di protoni ha un'energia di 6,8 TeV per protone (dal 2022). Poiché l'energia a riposo del protone è 938,3 MeV = 0,9383 GeV, il fattore è $\gamma = E/(mc^2) = 6800/0{,}9383 \approx 7{,}2 \times 10^{3}$ (a queste energie è indifferente usare l'energia totale o quella cinetica). La velocità è allora così vicina a c che conviene calcolare la differenza: da $\beta = \sqrt{(1 - 1/\gamma^2)} \approx 1 - 1/(2\gamma^2)$, si trova $1 - \beta \approx 9{,}5 \times 10^{-9}$, e $c - v \approx 2{,}9$ m/s.

I magneti dell'anello sono progettati con la formula relativistica del raggio: con $p = 6{,}8$ TeV/c e un raggio di curvatura di circa 2,8 km, serve un campo $B = p/(er)$ di circa 8,1 T, quello dei magneti superconduttori dell'LHC. Con la formula classica, usando la stessa velocità, il campo necessario sarebbe settemila volte più piccolo, e i protoni uscirebbero subito dall'anello. Ogni giorno, in decine di acceleratori nel mondo, migliaia di magneti e cavità acceleratrici funzionano come prevede la relatività: è una verifica continua, più precisa di qualsiasi esperimento dedicato.

APPROFONDIMENTO

Oltre la relatività ristretta: la relatività generale

La relatività ristretta riguarda i sistemi inerziali e non tratta la gravità. Einstein lavorò per anni per estenderla, e nel 1915 completò la relatività generale, che è fuori dal programma del liceo ma di cui è utile conoscere le idee. Il punto di partenza è il **principio di equivalenza**: in una piccola regione e per un breve tempo, gli effetti di un campo gravitazionale uniforme non si distinguono da quelli di un'accelerazione del sistema di riferimento. Un osservatore chiuso in un ascensore in caduta libera non sente il proprio peso, come un astronauta in orbita.

Da questo principio seguono previsioni verificate: la luce viene deviata dalle grandi masse (osservato per la prima volta durante un'eclissi di Sole, nel 1919); gli orologi in un campo gravitazionale più intenso vanno più lentamente, e per questo i satelliti GPS devono correggere i loro orologi anche per questo effetto, che li fa anticipare di circa 45 µs al giorno; sottratti i circa 7 µs persi per la dilatazione dei tempi dovuta al moto, resta il guadagno netto di circa 38 µs al giorno del capitolo 8; masse accelerate producono onde gravitazionali, deformazioni dello spazio-tempo che si propagano alla velocità della luce, rivelate direttamente per la prima volta nel 2015 dagli interferometri LIGO. Nella relatività generale la gravità non è più una forza, ma una proprietà della geometria dello spazio-tempo.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: il rapporto carica/massa dell'elettrone con il tubo a fascio filiforme

Materiali. Un tubo a fascio filiforme (un'ampolla con idrogeno a bassa pressione e un cannone elettronico, in cui il fascio lascia una traccia luminosa); due bobine di Helmholtz di $N = 130$ spire e raggio $R = 0{,}150$ m, che producono al centro un campo uniforme $B = (4/5)^{3/2}\mu_0 NI/R = (7{,}79 \times 10^{-4}\ \text{T/A}) \times I$; un alimentatore per le bobine con amperometro; l'alimentatore anodico (150–300 V) con voltmetro; una scala a specchio per misurare il diametro della circonferenza senza errori di parallasse.

Procedimento. 1) In un'aula oscurata, con il tubo collegato e acceso dall'insegnante, imposta la corrente nelle bobine a $I = 1{,}50$ A, cioè $B = 1{,}17$ mT. 2) Ruota il tubo finché il fascio, uscendo dal cannone perpendicolare al campo, descrive una circonferenza chiusa. 3) Per sei valori della tensione acceleratrice ΔV, da 150 V a 300 V, misura il diametro D della circonferenza allineando l'immagine riflessa dell'occhio con la traccia sui due lati (incertezza ±0,2 cm). 4) Ripeti con un'altra corrente per controllo.

Sicurezza. La tensione anodica, fino a 300 V, è pericolosa: il tubo si collega e si accende solo con l'insegnante, a circuito spento, e non si toccano i morsetti durante la misura. Il tubo è di vetro sottile e sotto vuoto: non va urtato né spostato quando è caldo.

L'analisi. L'elettrone, accelerato da ΔV, ha $e\Delta V = \tfrac{1}{2}mv^2$ (verificheremo dopo che la formula classica è adeguata) e percorre una circonferenza di raggio $r = mv/(eB)$. Eliminando la velocità si trova $r^2 = (2/(e/m))\ \Delta V/B^2$: a campo fisso, r^2 è proporzionale a ΔV, e dalla pendenza k della retta si ricava $e/m = 2/(kB^2)$.

Tabella 9.5 Diametro della traiettoria degli elettroni per diverse tensioni acceleratrici, con $I = 1{,}50$ A ($B = 1{,}17$ mT). Dati tipici; incertezze: ΔV ±1%, D ±0,2 cm.

ΔV (V)	D (cm)	r (cm)	r^2 (cm^2)	e/m (10^{11} C/kg)
150	7,0	3,50	12,3	1,79
180	7,8	3,90	15,2	1,73
210	8,3	4,15	17,2	1,78
240	8,9	4,45	19,8	1,77
270	9,5	4,75	22,6	1,75
300	9,9	4,95	24,5	1,79

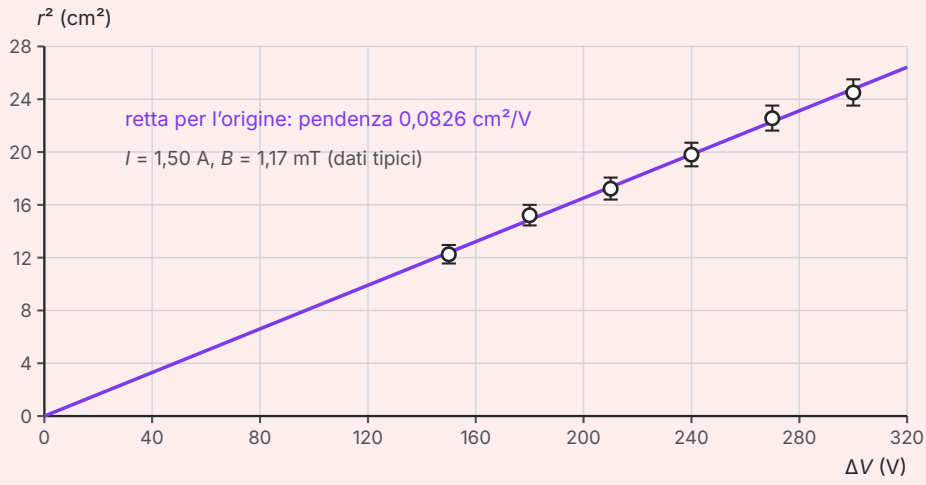

Figura 9.7 I dati della Tabella 9.5: il quadrato del raggio in funzione della tensione acceleratrice, con le barre d'incertezza, e la retta per l'origine che meglio li approssima (pendenza 0,0826 cm^2/V). L'allineamento conferma che r^2 è proporzionale a ΔV.

Che cosa concludere. I punti sono allineati su una retta per l'origine (Figura 9.7) di pendenza k = 0,0826 cm^2/V = 8,26 × 10^{-6} m^2/V; le rette di pendenza massima e minima compatibili con le barre danno un'incertezza di circa il 3%. Allora $e/m = 2/(kB^2)$ = 2/(8,26 × 10^{-6} × (1,169 × 10^{-3})^2) C/kg = 1,77 × 10^{11} C/kg. L'incertezza relativa su B è circa 1,7% (1% per la geometria delle bobine, 0,7% per la corrente) e conta due volte: in totale 3% + 2 × 1,7% ≈ 6%. Risultato: e/m = (1,77 ± 0,11) × 10^{11} C/kg.

Confronto teoria–esperimento. Il valore accettato è 1,759 × 10^{11} C/kg. La differenza, 0,01 × 10^{11} C/kg, è molto minore dell'incertezza: le due misure sono compatibili. E la relatività? A 300 V l'energia cinetica è 300 eV e $\gamma - 1$ = 300/511 000 = 5,9 × 10^{-4}. Con la formula relativistica $(pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2$, il quadrato del raggio è maggiore di quello classico del fattore $1 + K/(2mc^2)$, cioè dello 0,03%: duecento volte meno dell'incertezza della misura. La formula classica qui è più che adeguata. La correzione arriverebbe all'1% per $K/(2mc^2)$ = 0,01, cioè per $K \approx 10$ keV, e diventerebbe paragonabile all'incertezza di questa misura (6%) intorno a 60 kV: tensioni che un tubo didattico non raggiunge.

Per la relazione. Riporta il grafico di r^2 in funzione di ΔV con le barre d'incertezza e le rette di massima e minima pendenza; discuti perché la retta deve passare per l'origine; calcola e/m con la sua incertezza e confrontalo con il valore accettato; stima $\gamma - 1$ alla tensione più alta e giustifica l'uso della formula classica. Indica infine le principali fonti di errore sistematico: il campo terrestre, che si somma a quello delle bobine; la non uniformità del campo lontano dal centro; il fatto che gli elettroni non partono esattamente da fermi.

DA RICORDARE

Verso l'esame: la dinamica relativistica nella seconda prova

La dinamica relativistica appartiene a due nuclei tematici: **Spazio, tempo e moto** (la cinematica relativistica) ed **Energia e materia** (l'equivalenza massa-energia). Fra gli obiettivi del quadro di riferimento ci sono il moto relativistico sotto una forza costante o sotto la forza di Lorentz, e l'uso dell'equivalenza massa-energia nei decadimenti e nelle reazioni nucleari. Le situazioni tipiche sono una particella accelerata da una differenza di potenziale, una traccia curva in un campo magnetico da cui ricavare la quantità di moto, il decadimento di una particella ferma in due prodotti, il bilancio di massa di una reazione.

Le insidie ricorrenti: usare $\frac{1}{2}mv^2$ o $\frac{1}{2}\gamma mv^2$ al posto di $(\gamma - 1)mc^2$; confondere energia totale e cinetica; dimenticare la conversione fra eV e J; scrivere $r = mv/(qB)$ invece di $p/(qB)$. Il controllo più rapido è $v < c$: se trovi una velocità maggiore di quella della luce, hai usato una formula classica. Un secondo controllo è il triangolo $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$. Prima di decidere se servono le formule relativistiche, confronta l'energia cinetica con l'energia a riposo.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v}$ — quantità di moto relativistica (kg·m/s, oppure MeV/c); $\gamma = 1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$ è calcolato con la velocità del corpo nel sistema in cui si misura $\boldsymbol{p}$; m è la massa invariante. Si conserva in ogni sistema isolato, in tutti i sistemi inerziali.

$E = \gamma mc^2$, $E_0 = mc^2$, $K = (\gamma - 1)mc^2$ — energia totale, energia a riposo, energia cinetica (J, oppure MeV). Per $v \ll c$, $K \approx \frac{1}{2}mv^2$; l'errore della formula classica è $\frac{3}{4}\beta^2$, l'1% a $\beta \approx 0{,}115$.

$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ e $\beta = pc/E$ — relazione fra energia e quantità di moto, valida per ogni particella; $E^2 - (pc)^2$ è invariante. Per una particella di massa nulla $E = pc$ e $v = c$. Utile anche: $(pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2$.

$\Delta m = \Delta E/c^2$ — equivalenza massa-energia: un sistema fermo che acquista o cede l'energia ΔE cambia massa di Δm; un sistema legato ha massa minore della somma delle masse dei componenti.

$\boldsymbol{F} = \Delta\boldsymbol{p}/\Delta t$ — seconda legge della dinamica, valida anche in relatività (non $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$). A forza costante $p = Ft$ e la velocità tende a c.

$r = p/(|q|B) = \gamma mv/(|q|B)$ e $T = 2\pi\gamma m/(|q|B)$ — raggio e periodo di una carica che si muove perpendicolarmente a un campo magnetico uniforme; p (GeV/c) = 0,3 B (T) r (m) per carica e.

$e\Delta V = (\gamma - 1)mc^2$ — energia acquistata da un elettrone accelerato da fermo con una differenza di potenziale ΔV.

SINTESI

- Con le trasformazioni di Lorentz la quantità di moto classica $m\boldsymbol{v}$ non si conserva in tutti i sistemi inerziali; si conserva invece la quantità di moto relativistica $\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v}$, che per $v \ll c$ si riduce a quella classica.
- La massa m è invariante: è la stessa per tutti gli osservatori. La «massa relativistica» γm è un concetto superato.
- L'energia totale di un corpo è $E = \gamma mc^2$. Un corpo fermo ha l'energia a riposo $E_0 = mc^2$; l'energia cinetica è $K = (\gamma - 1)mc^2$, e per basse velocità vale circa $\frac{1}{2}mv^2$.
- Quantità di moto ed energia di un corpo dotato di massa crescono senza limite quando $v \to c$: nessun corpo con massa raggiunge la velocità della luce.
- In fisica delle particelle si usano il MeV per le energie, il MeV/c per le quantità di moto e il MeV/c^2 per le masse; l'elettrone ha $mc^2 = 0{,}511$ MeV, il protone 938,3 MeV.
- Energia e quantità di moto sono legate da $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$; la combinazione $E^2 - (pc)^2$ è invariante, e $\beta = pc/E$.
- Le particelle di massa nulla hanno $E = pc$ e si muovono sempre alla velocità della luce.
- La massa di un sistema non è la somma delle masse dei componenti: un'energia ΔE ricevuta o ceduta cambia la massa di $\Delta E/c^2$. I sistemi legati hanno massa minore delle parti separate.
- Nelle reazioni chimiche la massa che si trasforma è circa 10^{-10} di quella dei reagenti, nelle reazioni nucleari circa 10^{-3}; nell'annichilazione elettrone–positrone tutta la massa diventa energia di radiazione. Il Sole perde circa 4×10^9 kg al secondo.
- La seconda legge vale nella forma $\boldsymbol{F} = \Delta\boldsymbol{p}/\Delta t$: a forza costante la quantità di moto cresce linearmente, ma la velocità si avvicina a c senza raggiungerla.
- In un campo magnetico uniforme una carica percorre una circonferenza di raggio $r = p/(|q|B)$ con periodo proporzionale a γ: per questo alle alte energie si usano i sincrotroni.
- L'esperimento di Bertozzi e il funzionamento degli acceleratori confermano le formule relativistiche: per elettroni da 15 MeV la velocità differisce da c di meno di un millesimo.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● La quantità di moto di un corpo di massa m che si muove con velocità v paragonabile a quella della luce è:

   A. mv
   B. γmv
   C. mv/γ
   D. $\gamma^2 mv$

2. ● L'energia cinetica di un corpo di massa m che si muove con velocità v è:

   A. $\frac{1}{2}mv^2$

   B. $\frac{1}{2}\gamma mv^2$

   C. γmc^2

   D. $(\gamma - 1)mc^2$

3. ● Una particella di massa nulla:

   A. si muove sempre alla velocità della luce e ha $E = pc$

   B. ha energia nulla

   C. ha quantità di moto nulla

   D. può essere fermata da un campo magnetico intenso

4. ● Una forza costante agisce per un tempo molto lungo su un corpo inizialmente fermo. La velocità del corpo:

   A. cresce linearmente nel tempo, senza limite

   B. raggiunge c dopo il tempo mc/F e poi resta costante

   C. si avvicina a c senza mai raggiungerla

   D. dopo un certo tempo comincia a diminuire

5. ● La massa di 1 MeV/c^2, espressa in kilogrammi, vale circa:

   A. $1{,}60 \times 10^{-13}$ kg

   B. $5{,}33 \times 10^{-22}$ kg

   C. $1{,}78 \times 10^{-30}$ kg

   D. $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg

6. ●● Un blocco di ferro viene scaldato da 20 °C a 200 °C senza perdere materiale. La sua massa:

   A. aumenta, di una quantità troppo piccola per essere misurata con una bilancia

   B. resta esattamente la stessa

   C. diminuisce, perché il ferro si dilata

   D. aumenta del fattore γ delle sue molecole

7. ●● Un elettrone percorre una circonferenza in un campo magnetico uniforme. Se la sua energia aumenta, il periodo del moto:

   A. resta costante, come prevede la fisica classica

   B. diminuisce

   C. diventa nullo quando la velocità si avvicina a c

   D. aumenta, in proporzione a γ

8. ●● Un elettrone e un positrone praticamente fermi si annichilano. Il risultato è:
   A. un solo fotone di energia 1,022 MeV
   B. due fotoni di 0,511 MeV ciascuno, emessi in versi opposti
   C. due fotoni di 0,511 MeV emessi nello stesso verso
   D. un fotone di 0,511 MeV e un neutrino

Vero o falso

9. ● Secondo la relatività ristretta, la massa di un corpo cresce con la sua velocità. V / F

10. ● La quantità $E^2 - (pc)^2$ di una particella ha lo stesso valore in tutti i sistemi inerziali. V / F

11. ●● L'energia cinetica di un corpo che si muove a $0{,}80c$ è $\frac{1}{2}\gamma mv^2$. V / F

12. ●● Un fotone isolato, nel vuoto, può trasformarsi in una coppia elettrone–positrone se la sua energia è maggiore di 1,022 MeV. V / F

Applicare

13. ● Un protone si muove alla velocità $0{,}60c$. Calcola γ, la sua quantità di moto in unità SI e la sua energia cinetica in MeV.

14. ● La massa del protone è 938,3 MeV/c^2. Esprimila in kilogrammi.

15. ● Un elettrone ha energia cinetica 2,0 MeV. Calcola il fattore γ e la velocità, in unità di c.

16. ●● Una particella ha energia totale 5,0 GeV e quantità di moto 4,8 GeV/c. Calcola la sua massa (in GeV/c^2) e la sua velocità.

17. ●● Quanta energia si otterrebbe trasformando completamente in energia 1,0 g di materia? Esprimila in joule e in kilowattora, e confrontala con l'energia liberata da un'esplosione di una tonnellata di tritolo, $4{,}184 \times 10^9$ J.

18. ●● Completa. Una molla di costante elastica $2{,}0 \times 10^3$ N/m viene compressa di 5,0 cm: la sua energia aumenta di _____ J e la sua massa di _____ kg.

19. ●● Leggi il grafico della Figura 9.5. a) A quale tensione la formula classica prevede che l'elettrone raggiunga la velocità della luce? b) Quale velocità ha davvero l'elettrone a quella tensione? Verifica la lettura con un calcolo.

20. ●● Un elettrone con quantità di moto 10 MeV/c si muove perpendicolarmente a un campo magnetico uniforme di 0,50 T. Calcola il raggio della traiettoria.

Problemi

21. ●● (Con il capitolo 6.) In un tubo per raggi X gli elettroni partono da fermi e sono accelerati da una differenza di potenziale di 50 kV prima di colpire l'anodo. a) Calcola l'energia cinetica degli elettroni, in keV e in joule. b) Calcola γ e la velocità con la formula relativistica. c) Calcola la velocità con la formula classica e la differenza percentuale fra i due risultati.

22. ●● Una stella irradia una potenza di $1{,}0 \times 10^{28}$ W. a) Calcola la massa che perde ogni secondo a causa della radiazione. b) Calcola la massa persa in un anno ($3{,}156 \times 10^7$ s). c) Se la stella ha una massa di $4{,}0 \times 10^{30}$ kg, quale frazione della sua massa perde in un miliardo di anni con questa luminosità?

23. ●●● (Con il capitolo 6 di *Fisica 3*.) Un mesone K^0 (massa 497,6 MeV/c^2), fermo, decade in due pioni carichi π^+ e π^-, ciascuno di massa 139,6 MeV/c^2. a) Usando la conservazione della quantità di moto, spiega perché i due pioni hanno quantità di moto opposte e la stessa energia. b) Calcola l'energia totale e l'energia cinetica di ciascun pione. c) Calcola la quantità di moto (in MeV/c) e la velocità di ciascun pione.

24. ●●● Un protone parte da fermo in un campo elettrico uniforme di intensità $5{,}0 \times 10^6$ V/m. a) Calcola il tempo necessario perché raggiunga la velocità 0,80c. b) Calcola il tempo che servirebbe secondo la fisica classica. c) Calcola, con il teorema dell'energia cinetica, la distanza percorsa per raggiungere 0,80c. d) Calcola la distanza che prevederebbe la fisica classica e commenta.

25. ●●● (Con il capitolo 15 di *Fisica 4*.) Un ciclotrone ha un campo magnetico uniforme di 1,50 T. a) Calcola la frequenza di rivoluzione dei protoni secondo la fisica classica. b) Calcola il fattore γ di un protone con energia cinetica 20 MeV e la sua frequenza di rivoluzione relativistica. c) Di quanto, in percentuale, la frequenza vera è minore di quella classica? Perché questo è un problema per il ciclotrone? d) Calcola il raggio dell'orbita del protone da 20 MeV.

26. ●●● Nel collisionatore LEP del CERN, negli anni Novanta, elettroni e positroni da 45,6 GeV ciascuno si scontravano frontalmente. a) Calcola l'energia totale e la quantità di moto totale del sistema elettrone–positrone. b) Calcola la massa del sistema, cioè la massa massima della particella che può essere prodotta (il bosone Z ha massa 91,2 GeV/c^2). c) Se invece un positrone colpisce un elettrone fermo, la massa del sistema è data da $(Mc^2)^2 = 2Emc^2 + 2(mc^2)^2$, dove E è l'energia del positrone. Verifica la formula con l'invariante e calcola quale energia servirebbe per produrre un bosone Z. Commenta.

27. ●● L'energia di legame del deutone è 2,224 MeV. a) Di quanto la massa del deutone è minore della somma delle masse del protone e del neutrone, in MeV/c^2, in unità di massa atomica (1 u = 931,5 MeV/c^2) e in kg? b) Quale frazione della massa del sistema rappresenta? c) Confrontala con la frazione analoga per l'atomo di idrogeno (energia di legame 13,6 eV).

28. ●●● (Con il capitolo 15 di *Fisica 4*.) In uno spettrometro magnetico si vuole che elettroni con energia cinetica 1,0 MeV percorrano una semicirconferenza di raggio 10 cm. a) Calcola il campo magnetico necessario. b) Calcola il campo che si otterrebbe usando la quantità di moto classica $\sqrt{(2mK)}$. c) Quale dei due funzionerebbe?

Ragionare e argomentare

29. ●● Stima di ordine di grandezza. La batteria di uno smartphone immagazzina, a piena carica, circa 15 Wh. Di quanto aumenta la sua massa quando la carichi? Una bilancia di precisione da laboratorio, che apprezza il decimo di milligrammo, potrebbe rivelarlo?

30. ●● Trova l'errore. «Un elettrone accelerato da una differenza di potenziale di 1,0 MV ha energia cinetica 1,0 MeV, quindi $v = \sqrt{(2K/m)} = 1{,}98c$. Poiché niente supera la velocità della luce, l'elettrone si muove esattamente a c.» Correggi il ragionamento e calcola la velocità vera.

31. ●●● Argomenta, in due modi diversi, perché un corpo dotato di massa non può raggiungere la velocità della luce: una volta con l'energia, una volta con la quantità di moto e la seconda legge della dinamica. Spiega poi perché questo non vale per la luce.

Verso l'esame di Stato

32. ●●● **Quesito.** In un esperimento, elettroni di diverse energie attraversano prima uno spettrometro magnetico, con un campo uniforme di 0,0500 T perpendicolare alla velocità, in cui si misura il raggio r della traiettoria; poi un tratto rettilineo di 2,00 m, in cui si misura il tempo di volo t. I risultati sono: r = 5,83 cm, 9,48 cm, 16,4 cm e, rispettivamente, t = 7,73 ns, 7,08 ns, 6,81 ns. a) Calcola per ogni elettrone la quantità di moto, dal raggio, e la velocità, dal tempo di volo. b) Calcola il rapporto p/v: secondo la fisica classica che cosa dovrebbe valere? Che cosa osservi? c) Mostra che i dati sono compatibili con $p = \gamma mv$, ricavando la massa dell'elettrone da ciascuna coppia di misure. d) Calcola l'energia cinetica dell'elettrone più veloce e argomenta perché un raggio di 16,4 cm non si potrebbe spiegare con la fisica classica.

33. ●●● **Problema.** (Con il capitolo 8.) Un fascio di muoni (massa 105,7 MeV/c^2, vita media propria 2,2 μs) percorre, in un campo magnetico uniforme di 1,00 T perpendicolare alla velocità, una circonferenza di raggio 1,00 m. a) Calcola la quantità di moto dei muoni, in MeV/c, e la loro energia totale e cinetica. b) Calcola il fattore γ e la velocità. c) Calcola la distanza media che un muone percorre prima di decadere, nel sistema del laboratorio, e confrontala con quella che si otterrebbe trascurando la dilatazione dei tempi. Quale frazione dei muoni sopravvive dopo un chilometro, nei due casi? d) Il periodo di rivoluzione dei muoni è maggiore o minore di quello previsto dalla formula classica $2\pi m/(eB)$? Argomenta e calcola il periodo vero.

PER APPROFONDIRE

- [EINR] A. Einstein, *Relatività: esposizione divulgativa*: i capitoli sulla «relatività ristretta» in cui Einstein spiega, senza formule difficili, perché massa ed energia sono la stessa cosa.
- [TWH] E. F. Taylor, J. A. Wheeler, *Spacetime Physics*: i capitoli sulla quantità di moto e sull'energia nello spazio-tempo, con molti problemi su urti e decadimenti risolti con l'invariante.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: i capitoli sulla dinamica relativistica e sull'equivalenza fra massa ed energia, con la discussione dell'urto simmetrico.
- [EIN] A. Einstein, L. Infeld, *L'evoluzione della fisica*: le pagine sulla relatività, per seguire il ragionamento che porta dalla crisi dello spazio e del tempo a quella della massa.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sulla relatività, con esercizi su particelle accelerate, decadimenti e acceleratori.

Glossario del capitolo

Annichilazione
Processo in cui una particella e la sua antiparticella scompaiono, trasformando le loro energie in altre particelle, per esempio due fotoni.

Creazione di coppie
Processo in cui un fotone di energia almeno 1,022 MeV, vicino a un nucleo, si trasforma in un elettrone e un positrone.

Energia a riposo
L'energia $E_0 = mc^2$ che un corpo possiede quando è fermo, per il solo fatto di avere massa.

Energia cinetica relativistica
La differenza fra energia totale ed energia a riposo, $K = (\gamma - 1)mc^2$; per basse velocità vale circa $\frac{1}{2}mv^2$.

Energia relativistica
L'energia totale di un corpo, $E = \gamma mc^2$: somma dell'energia a riposo e dell'energia cinetica.

Equivalenza fra massa ed energia
Il principio per cui un sistema fermo che acquista o cede l'energia ΔE cambia la propria massa di $\Delta E/c^2$.

Massa invariante
La massa di un corpo misurata nel sistema in cui è fermo; è la stessa per tutti gli osservatori ed è la m di tutte le formule relativistiche.

Massa relativistica
Il prodotto γm, chiamato «massa» in testi del passato; è un concetto superato, che porta a errori come $\boldsymbol{F} = \gamma m\boldsymbol{a}$.

MeV/c
Unità di quantità di moto: una particella ha $p = 1$ MeV/c se $pc = 1$ MeV; 1 MeV/$c = 5{,}33 \times 10^{-22}$ kg·m/s.

MeV/c²
Unità di massa usata in fisica delle particelle: la massa la cui energia a riposo è 1 MeV, pari a $1{,}78 \times 10^{-30}$ kg.

Particella di massa nulla
Particella con $m = 0$, per cui $E = pc$; si muove sempre alla velocità della luce, in ogni sistema di riferimento.

Principio di equivalenza
Principio della relatività generale: localmente gli effetti di un campo gravitazionale uniforme non si distinguono da quelli di un'accelerazione del sistema di riferimento.

Quantità di moto relativistica
La grandezza $\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v}$, che si conserva nei sistemi isolati in tutti i sistemi inerziali; per $v \ll c$ coincide con $m\boldsymbol{v}$.

Relazione fra energia e quantità di moto
$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$: lega energia, quantità di moto e massa senza la velocità; $E^2 - (pc)^2$ è invariante.

Sincrotrone
Acceleratore circolare in cui le particelle percorrono un'orbita di raggio fisso, mentre il campo magnetico e la frequenza della tensione acceleratrice crescono con l'energia.

Tempo di volo
Il tempo impiegato da una particella a percorrere una distanza nota; dal suo valore si ricava la velocità.

Soluzioni

1. B. $p = \gamma mv$: si riduce a mv solo per $v \ll c$.

2. D. $K = E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2$; né $\frac{1}{2}mv^2$ (limite classico) né $\frac{1}{2}\gamma mv^2$.

3. A. Con $m = 0$, $E = pc$ e $\beta = pc/E = 1$ in ogni sistema di riferimento.

4. C. $p = Ft$ cresce senza limite, ma $v = pc^2/E < c$ sempre; il tempo mc/F è quello della previsione classica.

5. C. $1\ \text{MeV}/c^2 = 1{,}60 \times 10^{-13}\ \text{J}/(3{,}00 \times 10^8\ \text{m/s})^2 = 1{,}78 \times 10^{-30}$ kg.

6. A. Il blocco riceve energia ΔE e la sua massa cresce di $\Delta E/c^2$; per 1 kg di ferro (calore specifico ≈ 450 J/(kg·K)) $\Delta E \approx 8 \times 10^4$ J e $\Delta m \approx 9 \times 10^{-13}$ kg.

7. D. $T = 2\pi\gamma m/(|q|B)$ cresce con γ, cioè con l'energia.

8. B. La quantità di moto totale è nulla prima e dopo: servono due fotoni opposti, con la stessa energia 0,511 MeV ciascuno (energia totale $2mc^2$ = 1,022 MeV).

9. F. La massa (invariante) è la stessa per tutti gli osservatori; cresce l'energia γmc^2, non la massa.

10. V. $E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2$ e la massa è invariante.

11. F. A $0{,}80c$ $\gamma = 5/3$: $K = (\gamma - 1)mc^2 = 0{,}667mc^2$, mentre $\frac{1}{2}\gamma mv^2 = \frac{1}{2} \times 5/3 \times 0{,}64mc^2 = 0{,}533mc^2$.

12. F. Nel vuoto un fotone ha $E^2 - (pc)^2 = 0$, la coppia almeno $(2mc^2)^2$: energia e quantità di moto non si possono conservare insieme. Serve un nucleo vicino che assorba quantità di moto.

13. $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}60^2)} = 1/0{,}80 = 1{,}25$. $p = \gamma mv = 1{,}25 \times 1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg} \times 1{,}80 \times 10^8\ \text{m/s} = 3{,}8 \times 10^{-19}$ kg·m/s. $K = (\gamma - 1)mc^2 = 0{,}25 \times 938{,}3\ \text{MeV} = 235\ \text{MeV}$.

14. $m = (938{,}3 \times 10^6 \times 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J})/(3{,}00 \times 10^8\ \text{m/s})^2 = 1{,}668 \times 10^{-27}\ \text{kg} \approx 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg.

15. $\gamma = 1 + K/(mc^2) = 1 + 2{,}0/0{,}511 = 4{,}9$; $\beta = \sqrt{(1 - 1/\gamma^2)} = \sqrt{(1 - 1/4{,}91^2)} = 0{,}98$, cioè $v = 0{,}98c$.

16. $mc^2 = \sqrt{(E^2 - (pc)^2)} = \sqrt{(5{,}0^2 - 4{,}8^2)}\ \text{GeV} = \sqrt{1{,}96}\ \text{GeV} = 1{,}4\ \text{GeV}$, quindi $m = 1{,}4\ \text{GeV}/c^2$. $\beta = pc/E = 4{,}8/5{,}0 = 0{,}96$: $v = 0{,}96c = 2{,}9 \times 10^8$ m/s.

17. $E = mc^2 = 1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{kg} \times (3{,}00 \times 10^8\ \text{m/s})^2 = 9{,}0 \times 10^{13}\ \text{J} = 9{,}0 \times 10^{13}/(3{,}6 \times 10^6)\ \text{kWh} = 2{,}5 \times 10^7$ kWh. Diviso per $4{,}184 \times 10^9$ J: circa $2{,}2 \times 10^4$ tonnellate di tritolo, cioè ventimila tonnellate.

18. $\Delta E = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times 2{,}0 \times 10^3\ \text{N/m} \times (0{,}050\ \text{m})^2 = 2{,}5$ J; $\Delta m = \Delta E/c^2 = 2{,}5\ \text{J}/(9{,}0 \times 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2) = 2{,}8 \times 10^{-17}$ kg.

19. a) A circa 256 kV (dove la curva tratteggiata incontra la retta $v = c$); infatti $\frac{1}{2}mc^2 = e\Delta V$ dà $\Delta V = 0{,}511\ \text{MV}/2 = 256$ kV. b) Dal grafico circa $0{,}75c$. Calcolo: $\gamma = 1 + 0{,}256/0{,}511 = 1{,}50$, $\beta = \sqrt{(1 - 1/1{,}50^2)} = 0{,}745$.

20. Per carica e: $r = p/(eB) = pc/(ecB) = 10 \times 10^6\ \text{V}/(3{,}00 \times 10^8\ \text{m/s} \times 0{,}50\ \text{T}) = 0{,}067\ \text{m} = 6{,}7$ cm. (Con la formula pratica: $r = 0{,}010/(0{,}3 \times 0{,}50)\ \text{m} = 0{,}067$ m.)

21. a) $K = e\Delta V = 50\ \text{keV} = 5{,}0 \times 10^4 \times 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J} = 8{,}0 \times 10^{-15}$ J. b) $\gamma = 1 + 0{,}050/0{,}511 = 1{,}098$; $\beta = \sqrt{(1 - 1/1{,}098^2)} = 0{,}413$, $v = 1{,}24 \times 10^8$ m/s. c) Classica: $\beta = \sqrt{(2 \times 0{,}050/0{,}511)} = 0{,}442$, $v = 1{,}33 \times 10^8$ m/s, maggiore del 7% circa. A 50 kV l'errore della formula classica non è più trascurabile.

22. a) $\Delta m/\Delta t = L/c^2 = 1{,}0 \times 10^{28}\ \text{W}/(9{,}0 \times 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2) = 1{,}1 \times 10^{11}$ kg/s. b) $1{,}1 \times 10^{11}\ \text{kg/s} \times 3{,}156 \times 10^7\ \text{s} = 3{,}5 \times 10^{18}$ kg. c) In 10^9 anni: $3{,}5 \times 10^{27}$ kg, cioè $3{,}5 \times 10^{27}/(4{,}0 \times 10^{30}) = 8{,}8 \times 10^{-4}$, meno di un millesimo della massa.

23. a) Per la conservazione della quantità di moto, la quantità di moto totale dopo il decadimento è nulla come prima: i due pioni hanno quantità di moto uguali e opposte. Avendo la stessa massa e quantità di moto di uguale modulo, per $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ hanno la stessa energia. b) Per la conservazione dell'energia, $2E = 497{,}6$ MeV: $E = 248{,}8$ MeV; $K = E - mc^2 = 248{,}8 - 139{,}6 = 109{,}2$ MeV. c) $pc = \sqrt{(248{,}8^2 - 139{,}6^2)}\ \text{MeV} = 205{,}9$ MeV, cioè $p = 206\ \text{MeV}/c$ ($1{,}10 \times 10^{-19}$ kg·m/s); per la relazione $\beta = pc/E = 205{,}9/248{,}8 = 0{,}828$. La massa del K^0 non è la somma delle

masse dei pioni (279,2 MeV/c^2): la differenza, 218,4 MeV, è l'energia cinetica totale dei prodotti.

24. a) La forza è costante, $F = eE = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C × 5,0 × 10^6 V/m = $8{,}0 \times 10^{-13}$ N; per la seconda legge nella forma $F = \Delta p/\Delta t$, $p = Ft$. A 0,80c, $\gamma = 5/3$ e $p = \gamma mv = (5/3) \times 0{,}80\, mc = 1{,}333\, mc$. Con $mc/F = 1{,}67 \times 10^{-27} \times 3{,}00 \times 10^8/(8{,}0 \times 10^{-13})$ s = $6{,}26 \times 10^{-7}$ s, $t = 1{,}333 \times 6{,}26 \times 10^{-7}$ s = $8{,}4 \times 10^{-7}$ s. b) Classica: $t = mv/F = 0{,}80 \times 6{,}26 \times 10^{-7}$ s = $5{,}0 \times 10^{-7}$ s. c) Per il teorema dell'energia cinetica, che vale anche in relatività, $Fd = K = (\gamma - 1)mc^2 = 0{,}667 \times 938{,}3$ MeV = 626 MeV; $d = K/(eE) = 626 \times 10^6$ V/($5{,}0 \times 10^6$ V/m) = $1{,}3 \times 10^2$ m. d) Classica: $K = \frac{1}{2}mv^2 = 0{,}32 \times 938{,}3$ MeV = 300 MeV, $d = 60$ m. Per raggiungere la stessa velocità servono più tempo, più spazio e più del doppio dell'energia: a velocità relativistiche l'energia fornita aumenta soprattutto γ.

25. a) $f = eB/(2\pi m) = 1{,}60 \times 10^{-19} \times 1{,}50/(2\pi \times 1{,}67 \times 10^{-27})$ Hz = $2{,}29 \times 10^7$ Hz = 22,9 MHz. b) $\gamma = 1 + 20/938{,}3 = 1{,}0213$; poiché il periodo relativistico è γ volte quello classico, $f = 22{,}9$ MHz/1,0213 = 22,4 MHz. c) La frequenza vera è minore del 2,1%. La tensione acceleratrice del ciclotrone ha frequenza fissa, uguale a quella classica: le particelle, girando più lentamente, arrivano alla fessura sempre più in ritardo e a un certo punto vengono rallentate invece che accelerate. d) $pc = \sqrt{(K^2 + 2Kmc^2)} = \sqrt{(20^2 + 2 \times 20 \times 938{,}3)}$ MeV = 194,8 MeV; $r = pc/(ecB) = 194{,}8 \times 10^6$ V/($3{,}00 \times 10^8$ m/s × 1,50 T) = 0,433 m.

26. a) $E_{tot} = 2 \times 45{,}6$ GeV = 91,2 GeV; poiché le quantità di moto sono uguali e opposte, $p_{tot} = 0$. b) Per l'invariante, $(Mc^2)^2 = {E_{tot}}^2 - (p_{tot}c)^2 = (91{,}2\ \text{GeV})^2$: M = 91,2 GeV/c^2, proprio la massa dello Z. c) Bersaglio fermo: $E_{tot} = E + mc^2$, $p_{tot}c = pc$ con $(pc)^2 = E^2 - (mc^2)^2$; allora $(Mc^2)^2 = (E + mc^2)^2 - E^2 + (mc^2)^2 = 2Emc^2 + 2(mc^2)^2$. ✓ Per $Mc^2 = 91{,}2$ GeV: $E \approx (91{,}2\ \text{GeV})^2/(2 \times 0{,}000511\ \text{GeV}) = 8{,}1 \times 10^6$ GeV, cioè circa 8000 TeV. Con il bersaglio fermo quasi tutta l'energia resta energia cinetica del sistema, che deve conservare la quantità di moto; nell'urto frontale fra fasci opposti tutta l'energia è disponibile per creare massa. Per questo i grandi acceleratori sono collisionatori.

27. a) $\Delta m = 2{,}224$ MeV/c^2 = 2,224/931,5 u = $2{,}388 \times 10^{-3}$ u = $2{,}224 \times 10^6 \times 1{,}60 \times 10^{-19}/(3{,}00 \times 10^8)^2$ kg = $3{,}95 \times 10^{-30}$ kg. b) $\Delta m/m = 2{,}224/(938{,}3 + 939{,}6) = 1{,}18 \times 10^{-3}$. c) Idrogeno: 13,6 eV/(938,8 MeV) = $1{,}45 \times 10^{-8}$: il legame nucleare è circa centomila volte più «pesante», in proporzione, di quello atomico.

28. a) $pc = \sqrt{(K^2 + 2Kmc^2)} = \sqrt{(1{,}0^2 + 2 \times 1{,}0 \times 0{,}511)}$ MeV = 1,42 MeV; $B = p/(er) = 1{,}42 \times 10^6$ V/($3{,}00 \times 10^8$ m/s × 0,10 m) = 0,047 T. b) pc classica = $\sqrt{(2Kmc^2)}$ = 1,01 MeV: B = 0,034 T. c) Il primo: con 0,034 T il raggio vero sarebbe 1,42/1,01 volte maggiore, circa 14 cm, e gli elettroni non arriverebbero al rivelatore.

29. $\Delta E = 15$ Wh = 15 × 3600 J = $5{,}4 \times 10^4$ J; $\Delta m = \Delta E/c^2 = 5{,}4 \times 10^4/(9{,}0 \times 10^{16})$ kg = 6×10^{-13} kg, cioè 6×10^{-7} mg. Una bilancia che apprezza 10^{-1} mg è più di centomila volte troppo poco sensibile: l'aumento non è misurabile.

30. L'errore è usare la formula classica $\frac{1}{2}mv^2$, che non vale quando K è paragonabile a mc^2 (qui $K \approx 2mc^2$); e poi «correggere» il risultato impossibile arrotondandolo a c. Correttamente: $\gamma = 1 + 1{,}0/0{,}511 = 2{,}96$, $\beta = \sqrt{(1 - 1/2{,}96^2)} = 0{,}94$: $v = 0{,}94c = 2{,}8 \times 10^8$ m/s, minore di c.

31. *Traccia di risposta.* Con l'energia: $K = (\gamma - 1)mc^2$ e $\gamma \to \infty$ quando $v \to c$; servirebbe un'energia infinita, mentre qualsiasi sorgente ne fornisce una quantità finita. Con la quantità di moto: per la seconda legge $p = Ft$ cresce linearmente con il tempo, ma $v = p/(m\sqrt{(1 + (p/(mc))^2)}) < c$ per ogni p finito; per qualunque forza e qualunque tempo la velocità resta minore di c. Le due argomentazioni coincidono, perché $v = pc^2/E$ e $E > pc$ se $m > 0$. Per la luce $m = 0$: $E = pc$ e la velocità è sempre c; i fotoni non vengono accelerati fino a c, nascono già a quella velocità.

32. a) $p = eBr$: $1{,}60 \times 10^{-19} \times 0{,}0500 \times 0{,}0583 = 4{,}66 \times 10^{-22}$ kg·m/s (pc = 0,874 MeV); $7{,}58 \times 10^{-22}$ kg·m/s (1,42 MeV); $1{,}31 \times 10^{-21}$ kg·m/s (2,46 MeV). $v = d/t$: $2{,}59 \times 10^8$ m/s (0,862c); $2{,}82 \times 10^8$ m/s (0,942c); $2{,}94 \times 10^8$ m/s (0,979c). b) Secondo la fisica classica $p/v = m$ dovrebbe essere costante e uguale a $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg. Si trova invece $1{,}80 \times 10^{-30}$ kg, $2{,}68 \times 10^{-30}$ kg, $4{,}47 \times 10^{-30}$ kg: il rapporto cresce rapidamente con la velocità ed è sempre maggiore della massa dell'elettrone. c) Con $p = \gamma mv$, $m = p/(\gamma v) = (p/v)\sqrt{(1 - \beta^2)}$: $1{,}80 \times 10^{-30} \times \sqrt{(1 - 0{,}862^2)} = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg; $2{,}68 \times 10^{-30} \times \sqrt{(1 - 0{,}942^2)} = 9{,}0 \times 10^{-31}$ kg; $4{,}47 \times 10^{-30} \times \sqrt{(1 - 0{,}979^2)}$ =

$9{,}1 \times 10^{-31}$ kg; $2{,}68 \times 10^{-30} \times \sqrt{(1 - 0{,}942^2)} = 9{,}0 \times 10^{-31}$ kg; $4{,}47 \times 10^{-30} \times \sqrt{(1 - 0{,}979^2)} = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg. Le tre stime coincidono fra loro e con il valore accettato entro circa l'1%, l'incertezza attesa con dati a tre cifre: i dati sono compatibili con la quantità di moto relativistica, con massa invariante. d) $K = \sqrt{((pc)^2 + (mc^2)^2)} - mc^2 = \sqrt{(2{,}46^2 + 0{,}511^2)} - 0{,}511 = 2{,}00$ MeV. Classicamente, con $v < c$, il raggio non potrebbe superare $mc/(eB) = 9{,}11 \times 10^{-31} \times 3{,}00 \times 10^8/(1{,}60 \times 10^{-19} \times 0{,}0500)$ m = 3,4 cm: un raggio di 16,4 cm richiede una quantità di moto quasi cinque volte maggiore di mc, possibile solo perché $p = \gamma mv$ cresce senza limite. *Indicatori*: a) Interpretare/elaborare i dati; b) Analizzare; c) Sviluppare il processo risolutivo; d) Argomentare.

33. a) Per carica e, $p = eBr$, cioè $pc = cBr$ in eV/e: $pc = 3{,}00 \times 10^8 \times 1{,}00 \times 1{,}00$ eV $= 3{,}00 \times 10^8$ eV = 300 MeV, $p = 300$ MeV/c. $E = \sqrt{(300^2 + 105{,}7^2)}$ MeV = 318 MeV; $K = 318 - 105{,}7 = 212$ MeV. b) $\gamma = E/(mc^2) = 318{,}1/105{,}7 = 3{,}01$; $\beta = pc/E = 300/318{,}1 = 0{,}943$. c) Nel laboratorio, per la dilatazione dei tempi, la vita media è $\gamma\tau = 3{,}01 \times 2{,}2$ μs = 6,6 μs (tempo dilatato, misurato nel laboratorio; 2,2 μs è il tempo proprio, misurato nel sistema del muone). Distanza media: $\gamma\beta c\tau = 3{,}01 \times 0{,}943 \times 3{,}00 \times 10^8$ m/s $\times\ 2{,}2 \times 10^{-6}$ s $= 1{,}9 \times 10^3$ m. Senza dilatazione: $\beta c\tau = 6{,}2 \times 10^2$ m. Frazione che sopravvive dopo 1,0 km: $e^{-1000/1873} = 0{,}59$ con la dilatazione, $e^{-1000/622} = 0{,}20$ senza. d) Maggiore: il periodo vero è $2\pi\gamma m/(eB)$, $\gamma = 3{,}01$ volte quello classico. Calcolo diretto: $T = 2\pi r/v = 2\pi \times 1{,}00$ m/$(0{,}943 \times 3{,}00 \times 10^8$ m/s) $= 2{,}2 \times 10^{-8}$ s. *Indicatori*: a) Sviluppare il processo risolutivo; b) Sviluppare il processo risolutivo; c) Interpretare/elaborare i dati e Argomentare; d) Argomentare.