CAPITOLO

8

Spazio e tempo relativistici

Ogni orologio misura fedelmente il proprio tempo. La sorpresa è che due orologi onesti, dopo due viaggi diversi, non sono più d'accordo.

OBIETTIVI

1. Ricavare la dilatazione dei tempi con l'orologio a luce e riconoscere in ogni problema il tempo proprio.
2. Spiegare con la dilatazione dei tempi e con la contrazione delle lunghezze l'arrivo al suolo dei muoni cosmici, e valutare quando basta il limite non relativistico.
3. Applicare le trasformazioni di Lorentz e ricavarne dilatazione, contrazione e relatività della simultaneità.
4. Comporre le velocità con la formula relativistica.
5. Calcolare l'intervallo invariante, classificare le coppie di eventi e leggere un diagramma di Minkowski con il cono di luce e gli assi di un riferimento in moto.
6. Risolvere il paradosso dei gemelli con i diagrammi spazio-tempo e con l'effetto Doppler relativistico.

INDICE DEL CAPITOLO

8.1 La dilatazione dei tempi 2
8.2 La contrazione delle lunghezze 9
8.3 Le trasformazioni di Lorentz 12
8.4 La composizione delle velocità 14
8.5 L'intervallo invariante e il cono di luce 16
8.6 Il paradosso dei gemelli 20

Fisica 5 · Parte III · La relatività ristretta · versione 1.0
Capitolo 8: Spazio e tempo relativistici · pagine 257–286 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo precedente abbiamo accettato i due postulati di Einstein e abbiamo visto cadere la prima certezza della fisica classica: due eventi lontani simultanei per un osservatore non lo sono per un altro, che si muove rispetto al primo. In questo capitolo seguiamo le conseguenze fino in fondo. Se la luce ha la stessa velocità per tutti, allora la durata di un fenomeno e la lunghezza di un oggetto dipendono dal riferimento in cui le misuriamo. Un orologio in moto scandisce il tempo più lentamente di uno fermo; un regolo in moto è più corto di uno fermo.

Sono affermazioni che sembrano contraddire l'esperienza, e infatti nell'esperienza quotidiana gli effetti sono minuscoli: per il solo effetto della velocità, un pilota di linea, dopo una vita di voli, ha «guadagnato» rispetto a chi è rimasto a terra meno di un millesimo di secondo. Ma alla velocità delle particelle dei raggi cosmici gli effetti diventano enormi, e senza di essi non si spiegherebbe perché misuriamo al livello del mare particelle che dovrebbero essersi disintegrate dopo poche centinaia di metri. Alla fine del capitolo tutti questi risultati si ritrovano in quattro formule, le trasformazioni di Lorentz, e in una grandezza che invece non cambia da un osservatore all'altro: l'intervallo spazio-temporale fra due eventi.

Come nel capitolo 7, indichiamo con S e S′ due sistemi di riferimento inerziali in configurazione standard: S′ si muove rispetto a S con velocità v lungo il verso positivo dell'asse x, con gli assi paralleli e le origini che coincidono all'istante $t = t' = 0$. Scriviamo $\beta = v/c$.

8.1 La dilatazione dei tempi

8.1.1 L'orologio a luce

Per confrontare il ritmo del tempo in due riferimenti ci serve un orologio il cui funzionamento sia descritto **soltanto** dal secondo postulato. Il più semplice è l'**orologio a luce**: due specchi paralleli a distanza d, fra i quali un impulso di luce rimbalza avanti e indietro. Ogni andata e ritorno è un «tic». Nel riferimento S′ in cui l'orologio è fermo (Figura 8.1a) la luce percorre $2d$ alla velocità c, e la durata di un tic è

$$\Delta t_0 = \frac{2d}{c}$$

Ora guardiamo lo stesso orologio dal riferimento S, rispetto al quale l'orologio si muove con velocità v in direzione perpendicolare al suo braccio (Figura 8.1b). Mentre la luce sale, lo specchio superiore si sposta in avanti: per colpirlo, l'impulso deve seguire una linea obliqua, e il percorso di andata e ritorno è una «V» più lunga di $2d$. Per il secondo postulato la luce percorre anche questo cammino alla velocità c, non a una velocità maggiore: quindi in S il tic dura di più. Chiamiamo Δt la sua durata misurata in S. In metà tic la luce percorre l'ipotenusa $c\Delta t/2$ di un triangolo rettangolo i cui cateti sono la distanza d fra gli specchi (che non cambia, perché è perpen-

dicolare al moto; lo giustificheremo nel prossimo paragrafo) e lo spostamento $v\Delta t/2$ dell'orologio. Per il teorema di Pitagora:

$$(c\Delta t/2)^2 = d^2 + (v\Delta t/2)^2$$

Risolviamo rispetto a Δt: $(\Delta t)^2(c^2 - v^2) = 4d^2$, cioè $\Delta t = (2d/c) / \sqrt{(1 - v^2/c^2)}$. Il primo fattore è proprio Δt_0, quindi

$$\Delta t = \gamma\, \Delta t_0 \quad \text{con } \gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}}$$

Il numero γ si chiama **fattore di Lorentz**: vale 1 per $v = 0$ e cresce senza limite quando v si avvicina a c. Poiché γ è sempre maggiore di 1 per un orologio in moto, un tic dell'orologio in moto dura di più, misurato in S, di quanto duri nel riferimento dell'orologio: è la **dilatazione dei tempi**. Visto da S, l'orologio in moto «va piano».

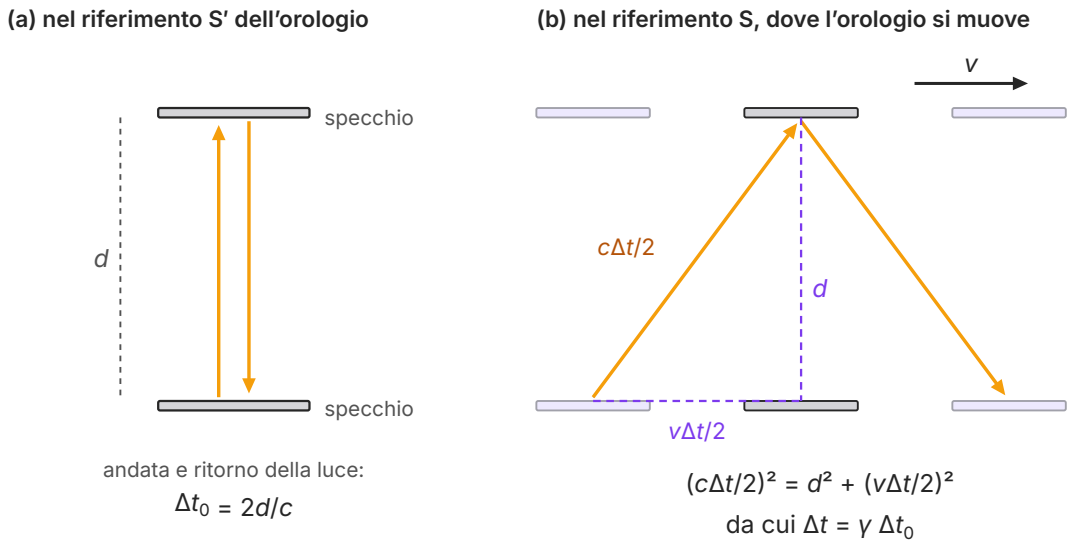


Figura 8.1 L'orologio a luce. (a) Nel riferimento S′ in cui è fermo, la luce va e torna lungo il braccio di lunghezza d in un tempo $\Delta t_0 = 2d/c$. (b) Nel riferimento S l'orologio si muove verso destra con velocità v: la luce percorre i due lati obliqui di un triangolo, alla stessa velocità c, e il tic dura $\Delta t = \gamma\Delta t_0$. Il triangolo tratteggiato è quello del teorema di Pitagora usato nel testo.

Perché il risultato vale per qualunque orologio, e non solo per questo dispositivo un po' artificiale? Immagina di fissare accanto all'orologio a luce un orologio da polso, tarato in modo da segnare un secondo ogni milione di tic quando tutto è fermo. Se nel riferimento S′ in moto i due orologi andassero a ritmi diversi, un passeggero di S′ potrebbe accorgersi di essere in moto confrontandoli, senza guardare fuori: il principio di relatività lo vieta. Quindi tutti gli orologi di S′,

meccanici, atomici o biologici, rallentano insieme. Non è un difetto degli strumenti: è il tempo di S′, misurato da S, che scorre più lentamente.

8.1.2 Il tempo proprio

Nella formula compaiono due durate dello stesso fenomeno, e conviene capire bene che cosa le distingue. Il tic dell'orologio comincia con un evento (la luce parte dallo specchio inferiore) e finisce con un altro (la luce torna allo specchio inferiore). In S′ i due eventi avvengono **nello stesso punto**, e un solo orologio, presente a entrambi, ne misura la durata. In S i due eventi avvengono in punti diversi, distanti $v\Delta t$: per misurarne la durata servono due orologi, uno in ciascun punto, sincronizzati fra loro con le regole del capitolo 7.

Si chiama **tempo proprio** Δt_0 fra due eventi la durata misurata nel riferimento in cui i due eventi avvengono nello stesso punto, cioè da un unico orologio presente a entrambi. In ogni altro riferimento inerziale la durata è maggiore, $\gamma\Delta t_0$. Il tempo proprio è quindi il **più breve** fra quelli misurati dai diversi osservatori inerziali.

La dilatazione è **simmetrica**. Per un passeggero di S′ è S a muoversi, con velocità v verso sinistra, e gli orologi di S vanno piano. Non c'è contraddizione, perché i due osservatori non confrontano la stessa coppia di durate: ciascuno confronta **un** orologio dell'altro con **due** orologi propri, sincronizzati secondo il proprio criterio di simultaneità, che non è quello dell'altro. Lo verificheremo con le trasformazioni di Lorentz.

> **ERRORE FREQUENTE**
>
> «Nella formula $\Delta t = \gamma\Delta t_0$, Δt_0 è il tempo di chi sta fermo.» **No:** nessuno sta fermo in assoluto. Δt_0 è il tempo misurato nel riferimento in cui i due eventi avvengono **nello stesso posto**. Per un muone che nasce in alta atmosfera e si disintegra più in basso, il tempo proprio è quello del muone, e non quello del laboratorio a terra; per i due passaggi di un'astronave davanti alla stessa stazione spaziale, invece, il tempo proprio è quello della stazione. Prima di scrivere la formula chiediti: in quale riferimento i due eventi coincidono nello spazio?
>
> Un controllo rapido: $\gamma \geq 1$, quindi il tempo proprio è sempre il **minore** dei due. Se il calcolo ti dà un tempo proprio più lungo, hai scambiato i ruoli.

8.1.3 Quanto vale γ, e quando si può trascurare

La Tabella 8.1 e la Figura 8.2 mostrano γ in funzione di β. Fino a metà della velocità della luce l'effetto è modesto ($\gamma = 1{,}15$ per $\beta = 0{,}5$); poi la curva si impenna: $\gamma = 2$ per $\beta \approx 0{,}87$, $\gamma \approx 7$ per $\beta = 0{,}99$, $\gamma \approx 22$ per $\beta = 0{,}999$. Per $v = c$ la formula perde significato: nessun orologio, e come vedremo nel capitolo 9 nessun corpo dotato di massa, può raggiungere la velocità della luce.

Tabella 8.1 Il fattore di Lorentz γ per alcuni valori di $\beta = v/c$, con l'approssimazione $1 + \beta^2/2$ valida per velocità piccole.

β	$\gamma = 1/\sqrt{(1-\beta^2)}$	$1 + \beta^2/2$	1 s di tempo proprio dura, in S…
0,1	1,005	1,005	1,005 s
0,3	1,048	1,045	1,048 s
0,5	1,155	1,125	1,155 s
0,6	1,250	1,180	1,250 s
0,8	1,667	1,320	1,667 s
0,9	2,294	1,405	2,294 s
0,99	7,089	1,490	7,089 s
0,999	22,37	1,499	22,37 s

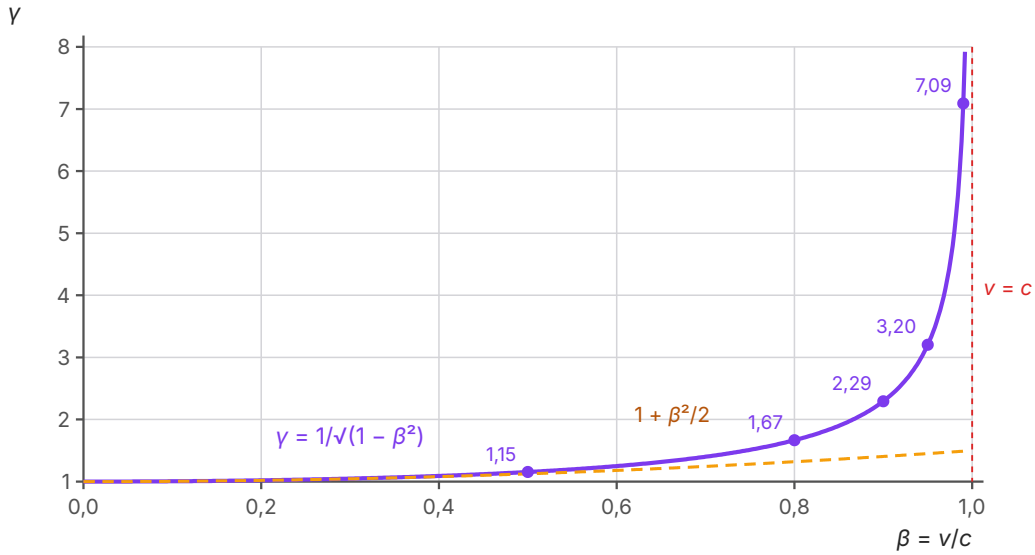


Figura 8.2 Il fattore di Lorentz γ in funzione di $\beta = v/c$ (curva viola, calcolata), con alcuni valori segnati. La curva tratteggiata è l'approssimazione $1 + \beta^2/2$, che coincide con γ finché β è piccolo e se ne allontana sopra $\beta \approx 0{,}3$. La retta verticale rossa $v = c$ è un asintoto.

A velocità ordinarie β è così piccolo che la calcolatrice dà $\gamma = 1$ esattamente: per un aereo a 250 m/s, $\beta \approx 8 \times 10^{-7}$, e $1 - \beta^2$ differisce da 1 solo alla tredicesima cifra. Per stimare di quanto γ supera 1 si usa un'approssimazione che puoi verificare con qualche prova numerica: per $\beta \ll 1$,

$$\gamma \approx 1 + \frac{\beta^2}{2} \quad \text{cioè} \quad \gamma - 1 \approx \frac{\beta^2}{2}$$

Con $\beta = 0{,}1$ l'approssimazione dà 1,005 0 contro il valore esatto 1,005 04; con $\beta = 0{,}3$ l'errore è già dello 0,3% (Tabella 8.1). Nel **limite non relativistico** $\beta \ll 1$ la differenza fra il tempo misurato in S e il tempo proprio è quindi

$$\Delta t - \Delta t_0 \approx \frac{\beta^2}{2}\,\Delta t_0$$

ed è proporzionale al quadrato della velocità. Questa è la ragione per cui la fisica di Galileo e di Newton funziona benissimo nella vita quotidiana: non è sbagliata, è il caso limite di una teoria più generale.

ESEMPIO SVOLTO

Un volo intercontinentale e un satellite GPS

Problema. a) Un aereo vola per 10 ore a 250 m/s rispetto al suolo. Di quanto resta indietro un orologio di bordo rispetto agli orologi a terra, considerando solo l'effetto della velocità? b) Un satellite del sistema GPS si muove su un'orbita circolare con velocità 3,87 km/s. Di quanto resta indietro in un giorno il suo orologio per lo stesso effetto?

Risoluzione. a) Il tempo proprio è quello dell'orologio di bordo, l'unico presente sia alla partenza sia all'arrivo dell'aereo. $\beta = 250/(3{,}00 \times 10^8) = 8{,}33 \times 10^{-7}$, $\beta^2/2 = 3{,}47 \times 10^{-13}$. Il volo dura 10 h = $3{,}6 \times 10^4$ s, quindi $\Delta t - \Delta t_0 \approx 3{,}47 \times 10^{-13} \times 3{,}6 \times 10^4$ s $\approx 1{,}3 \times 10^{-8}$ s = 13 ns.

b) $\beta = 3{,}87 \times 10^3/(3{,}00 \times 10^8) = 1{,}29 \times 10^{-5}$, $\beta^2/2 = 8{,}32 \times 10^{-11}$. In un giorno, $8{,}64 \times 10^4$ s, il ritardo è $8{,}32 \times 10^{-11} \times 8{,}64 \times 10^4$ s $\approx 7{,}2 \times 10^{-6}$ s = 7,2 µs.

Commento. Tredici miliardesimi di secondo in un volo intercontinentale: un orologio da polso non li vede, un orologio atomico sì. I 7 µs al giorno del satellite sembrano altrettanto trascurabili, ma il GPS misura distanze cronometrando segnali di luce, e in 7 µs la luce percorre più di 2 km.

COLLEGAMENTI

Il navigatore del telefono e la relatività

Il ricevitore GPS di un telefono calcola la propria posizione misurando il ritardo con cui gli arrivano i segnali di almeno quattro satelliti, ciascuno dei quali trasmette l'istante di emissione letto sul proprio orologio atomico. Un errore di un microsecondo sull'orologio di un satellite corrisponde a un errore di circa 300 m sulla distanza.

Gli orologi dei satelliti sono soggetti a due effetti. Il primo è la dilatazione dei tempi della relatività ristretta, che li fa restare indietro di circa 7 µs al giorno rispetto agli orologi a terra, come nell'esempio svolto. Il secondo è un effetto della **relatività generale**, la teoria della gravitazione di Einstein, che non studiamo: un orologio più lontano dalla Terra, dove la gravità è più debole, va più veloce. Per i satelliti GPS questo secondo effetto prevale, e il risultato netto è che i loro orologi guadagnano circa 38 µs al giorno. Per questo i loro oscillatori vengono regolati già prima del lancio a una frequenza leggermente più bassa del valore nominale. Senza correzione, l'errore sulla posizione crescerebbe di oltre dieci chilometri al giorno.

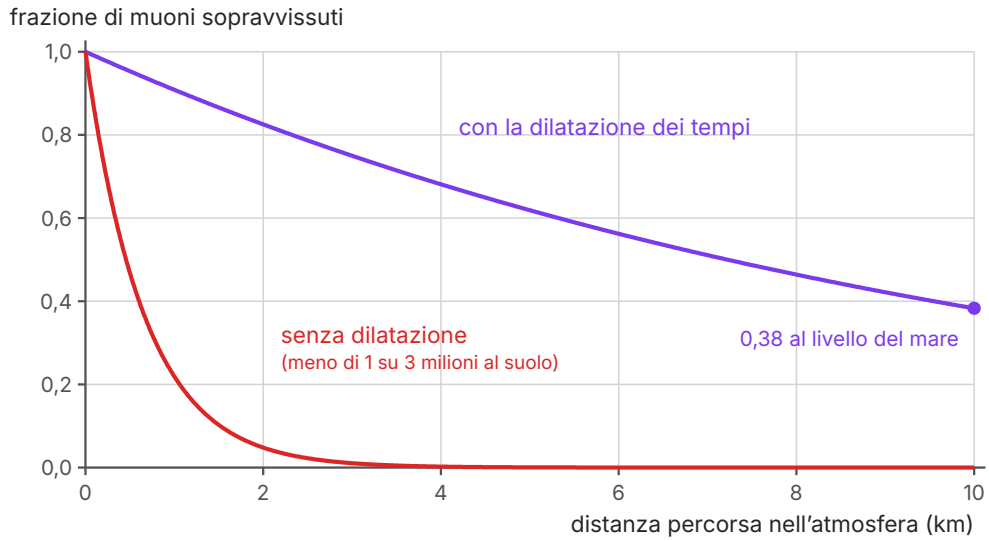
8.1.4 I muoni: orologi naturali in volo

Gli esperimenti più convincenti sulla dilatazione dei tempi non usano orologi costruiti dall'uomo, ma particelle instabili. Quando i protoni dei raggi cosmici urtano i nuclei dell'alta atmosfera, a 10–15 km di quota, producono particelle che a loro volta decadono in muoni: particelle con la carica dell'elettrone, negativa o positiva, e una massa circa 207 volte maggiore. Un muone è instabile: in media, misurata nel riferimento in cui è fermo, vive 2,2 µs, poi decade: un muone negativo, per esempio, si trasforma in un elettrone e in due neutrini. La sopravvivenza segue una legge esponenziale, come la scarica di un condensatore (Fisica 4, capitolo 14): su N_0 muoni, dopo un tempo proprio t ne restano

$$N = N_0\, e^{-t/\tau} \qquad \tau = 2{,}2\ \mu s \text{ (vita media a riposo)}$$

(nel capitolo 14 vedrai che questa è la legge di ogni decadimento radioattivo). I muoni dei raggi cosmici sono velocissimi: molti hanno β superiore a 0,99. Ma anche viaggiando alla velocità della luce, in 2,2 µs un muone percorrerebbe soltanto $3{,}00 \times 10^8$ m/s $\times$ $2{,}2 \times 10^{-6}$ s = 660 m. Dovrebbero quindi arrivare al suolo pochissimi muoni, e invece un rivelatore al livello del mare ne conta circa uno al minuto per centimetro quadrato di superficie orizzontale: sono la componente carica più abbondante dei raggi cosmici che raggiungono il suolo.

La spiegazione è la dilatazione dei tempi. La vita media di 2,2 µs è un tempo proprio, misurato dall'«orologio interno» del muone. Nel riferimento della Terra, rispetto al quale il muone si muove con fattore γ, la sua vita media è $\gamma\tau$. Per un muone con $\beta = 0{,}998$, $\gamma \approx 15{,}8$, e la vita media misurata a terra diventa circa 35 µs: abbastanza per attraversare l'atmosfera. La Figura 8.3 confronta le due previsioni.



muoni con β = 0,998 (γ ≈ 15,8) prodotti a 10 km di quota; vita media a riposo 2,2 μs

Figura 8.3 Frazione di muoni ancora presenti in funzione della distanza percorsa scendendo verticalmente nell'atmosfera, per muoni prodotti a 10 km di quota con $\beta = 0{,}998$, calcolata con la legge esponenziale. Curva rossa: previsione senza dilatazione dei tempi (vita media 2,2 μs anche nel riferimento della Terra). Curva viola: previsione con la vita media dilatata $\gamma\tau \approx 35$ μs. Si trascura il rallentamento dei muoni nell'aria.

Il primo confronto quantitativo fu fatto da Bruno Rossi e David B. Hall nel 1941: misurando il flusso dei muoni (allora chiamati «mesotroni») a quote diverse sulle Montagne Rocciose del Colorado, mostrarono che i muoni più veloci sopravvivono più a lungo, in accordo con la dilatazione dei tempi. Nel 1963 David H. Frisch e James H. Smith ripeterono la misura in modo più diretto: contarono i muoni di una ristretta fascia di velocità sulla cima del Mount Washington, nel New Hampshire, e poi al livello del mare, circa 1900 m più in basso. Senza dilatazione ne sarebbe dovuto arrivare in basso soltanto qualche percento; ne arrivavano circa tre su quattro. Il loro esperimento è il modello dell'attività di laboratorio di questo capitolo.

Nel 1971 Joseph Hafele e Richard Keating portarono quattro orologi atomici al cesio in due giri del mondo su voli di linea, uno verso est e uno verso ovest, e li confrontarono con gli orologi di riferimento rimasti a terra. Le differenze misurate, da alcune decine a qualche centinaio di nanosecondi, combinavano l'effetto della velocità e quello della gravità, e risultarono in accordo con le previsioni della relatività entro le incertezze.

ESEMPIO SVOLTO

Un muone attraversa l'atmosfera

Problema. Un muone è prodotto a 10,0 km di quota e scende verticalmente con $\beta = 0{,}998$. La vita media del muone a riposo è $\tau = 2{,}2$ μs. a) Quanto dura il viaggio fino al livello del mare nel riferimento della Terra? b) Quanto dura per il muone? c) Quale frazione di un gruppo di muoni come questo arriva al suolo? Confronta con la previsione senza dilatazione.

Risoluzione. a) Nel riferimento della Terra il muone percorre $h = 1{,}00 \times 10^4$ m alla velocità $0{,}998 \times 3{,}00 \times 10^8$ m/s $= 2{,}99 \times 10^8$ m/s: $\Delta t = 1{,}00 \times 10^4/(2{,}99 \times 10^8)$ s $= 3{,}34 \times 10^{-5}$ s $= 33{,}4$ μs. Questa durata è misurata da due orologi della Terra, uno a 10 km di quota e uno al suolo: **non** è un tempo proprio.

b) I due eventi «nascita del muone» e «arrivo al suolo» avvengono nello stesso punto nel riferimento del muone: il tempo proprio è il suo. $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}998^2)} = 15{,}8$, quindi $\Delta t_0 = \Delta t/\gamma = 33{,}4$ μs$/15{,}8 = 2{,}11$ μs. Per il muone il viaggio dura meno della sua vita media.

c) Nella legge di sopravvivenza va il tempo proprio: $N/N_0 = e^{-2{,}11/2{,}2} = e^{-0{,}96} = 0{,}38$. Arriva al suolo circa il 38% dei muoni. Senza dilatazione si userebbe il tempo terrestre: $N/N_0 = e^{-33{,}4/2{,}2} = e^{-15{,}2} \approx 2{,}5 \times 10^{-7}$, cioè meno di uno su tre milioni.

Commento. Le due previsioni differiscono di un fattore di oltre un milione: l'esperimento non lascia dubbi. Il calcolo equivalente nel riferimento della Terra usa la vita media dilatata $\gamma\tau = 35$ μs al posto di τ, e dà lo stesso 38%: $33{,}4/34{,}8 = 0{,}96$.

8.2 La contrazione delle lunghezze

8.2.1 Il punto di vista del muone

Torniamo al muone dell'esempio svolto, ma mettiamoci nel suo riferimento. Per il muone è la Terra a corrergli incontro con $\beta = 0{,}998$, e il suo orologio interno funziona normalmente: vive in media 2,2 μs e in questo tempo, per lui, il suolo si avvicina di $0{,}998 \times 3{,}00 \times 10^8$ m/s $\times\, 2{,}2 \times 10^{-6}$ s ≈ 660 m. Come fa allora ad arrivare al suolo? I due osservatori devono essere d'accordo sul fatto: il muone raggiunge il rivelatore oppure no, e non può raggiungerlo per uno e non per l'altro.

L'unica possibilità è che, per il muone, lo spessore di atmosfera da attraversare sia minore di 10 km. Ragioniamo in generale. Nel riferimento della Terra lo strato d'aria ha spessore L_0 e il muone lo attraversa in un tempo $\Delta t = L_0/v$. Nel riferimento del muone lo strato gli scorre davanti con la stessa velocità v (la velocità relativa è la stessa per i due osservatori), in un tempo che è il tempo proprio $\Delta t_0 = \Delta t/\gamma$. Lo spessore misurato dal muone è quindi

$$L = v\,\Delta t_0 = v\frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{L_0}{\gamma}$$

Per il muone dell'esempio, L = 10,0 km/15,8 = 632 m, e 2,11 μs × 2,99 × 10^8 m/s = 632 m: il conto torna. Il tempo dilatato nel riferimento della Terra e la lunghezza contratta nel riferimento del muone sono due descrizioni dello stesso fatto.

8.2.2 Lunghezza propria e contrazione

Si chiama **lunghezza propria** L_0 di un oggetto la sua lunghezza misurata nel riferimento in cui l'oggetto è fermo. In un riferimento rispetto al quale l'oggetto si muove con velocità v parallela alla lunghezza, la lunghezza misurata è minore:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{(1 - \beta^2)}$$

È la **contrazione delle lunghezze**. Come la dilatazione dei tempi è simmetrica: per un passeggero di un treno velocissimo sono i binari, e le stazioni, a essere accorciati. E come la dilatazione, nasce dalla relatività della simultaneità. Misurare la lunghezza di un oggetto in moto significa segnare **nello stesso istante** le posizioni delle sue due estremità; ma «nello stesso istante» per un osservatore non è «nello stesso istante» per l'altro, e chi è solidale con l'oggetto pensa che le due marcature siano state fatte in istanti diversi, con l'oggetto che nel frattempo si è spostato.

8.2.3 Solo nella direzione del moto

Le dimensioni **perpendicolari** al moto non cambiano: lo abbiamo usato per l'orologio a luce. Un esperimento ideale lo dimostra. Due tubi identici, di uguale diametro quando sono fermi, si vengono incontro lungo il loro asse comune. Se le dimensioni trasversali di un corpo in moto si riducessero, il tubo A vedrebbe B più stretto e B gli passerebbe dentro; ma per B sarebbe A a essere più stretto, e A passerebbe dentro B. I due racconti descrivono fatti diversi e incompatibili, perché un graffio lasciato all'interno di un tubo o all'esterno dell'altro resta lì per tutti. Per il principio di relatività nessuno dei due tubi è privilegiato, e l'unica soluzione coerente è che i diametri restino uguali. La contrazione avviene solo nella direzione della velocità relativa: un cubo in moto lungo uno spigolo, misurato da S, diventa un parallelepipedo con una faccia quadrata e lo spigolo parallelo al moto accorciato del fattore γ.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: i muoni a due quote

Una misura di muoni cosmici richiede un rivelatore (scintillatori con fotomoltiplicatori, o i telescopi delle scuole che partecipano a progetti di ricerca) e due siti a quota diversa. Qui analizziamo **dati tipici**, costruiti nello spirito dell'esperimento di Frisch e Smith del 1963 e calcolati con le formule del capitolo: la stessa analisi si applica ai dati reali, se la tua scuola ha accesso a un rivelatore.

Materiali. Un rivelatore di muoni a due piani di scintillatore in coincidenza, con sopra un blocco assorbitore che seleziona i muoni in una stretta fascia di energia e quindi di velocità; un contatore; un altimetro o una mappa per la differenza di quota.

Procedimento. 1) In un rifugio di montagna, conta per un'ora i muoni della fascia di velocità scelta che si fermano nel rivelatore. 2) Ripeti la misura per un'ora al livello del mare, 1900 m più in basso, con lo stesso rivelatore e la stessa selezione. 3) Ripeti con un assorbitore diverso, che seleziona muoni più lenti. Come incertezza di un conteggio N si usa $\sqrt{N}$, perché i conteggi di eventi casuali indipendenti fluttuano di circa questa quantità.

Tabella 8.2 Conteggi orari di muoni a due quote separate da Δh = 1900 m (dati tipici). Le previsioni usano τ = 2,2 μs e trascurano il rallentamento dei muoni nell'aria.

fascia di velocità	N in quota	N al mare	rapporto misurato	previsto senza dilatazione	previsto con dilatazione
β = 0,995 ± 0,001	520 ± 23	386 ± 20	0,74 ± 0,07	0,055	0,75 ± 0,02
β = 0,980 ± 0,002	498 ± 22	281 ± 17	0,56 ± 0,06	0,053	0,56 ± 0,02

Confronto teoria–esperimento. Per la prima riga: nel riferimento della Terra il volo dura Δt = 1900 m/(0,995 × 3,00 × 10^8 m/s) = 6,37 μs. Senza dilatazione la frazione sopravvissuta sarebbe $e^{-6{,}37/2{,}2}$ = 0,055. Con la dilatazione, γ = 10,0 e il tempo proprio è 0,637 μs: $e^{-0{,}637/2{,}2}$ = 0,75; facendo variare β fra 0,994 e 0,996, γ va da 9,1 a 11,2 e la previsione da 0,73 a 0,77, da cui 0,75 ± 0,02. Il rapporto misurato è 386/520 = 0,74, con incertezza relativa pari alla somma delle incertezze relative dei conteggi, 23/520 + 20/386 ≈ 0,096, cioè ± 0,07. La differenza fra misura e previsione relativistica, 0,01, è molto minore della somma delle incertezze, 0,09: i valori sono **compatibili**. La differenza con la previsione classica, 0,69, è circa dieci volte la somma delle incertezze: **incompatibili**. Lo stesso vale per la seconda riga (γ = 5,0, previsione da 0,54 a 0,57 per β fra 0,978 e 0,982).

Che cosa concludere. I dati escludono che i muoni in moto vivano 2,2 μs nel riferimento della Terra, e sono in accordo con la vita media dilatata $\gamma\tau$. La seconda riga mostra anche che muoni

più lenti, con γ minore, sopravvivono di meno: l'effetto cresce con la velocità come prevede la teoria.

Sicurezza. I muoni cosmici sono una radiazione naturale sempre presente e non richiedono precauzioni; l'alta tensione dei fotomoltiplicatori è chiusa nel rivelatore e la gestisce solo l'insegnante.

Per la relazione. Riporta i conteggi con la loro incertezza; ricava le tre previsioni mostrando i calcoli; discuti le cause di errore sistematico (i muoni rallentano attraversando 1900 m d'aria, perdendo energia: Frisch e Smith ne tennero conto; la selezione in velocità non è perfetta; il flusso dei raggi cosmici varia leggermente nel tempo). Spiega infine lo stesso risultato dal punto di vista del muone, con la contrazione delle lunghezze.

In Italia il progetto **EEE (Extreme Energy Events)** del Centro Fermi, in collaborazione con l'INFN, ha installato in molte scuole superiori telescopi per raggi cosmici costruiti da studenti e insegnanti: chi vi partecipa analizza dati veri raccolti da una rete nazionale di rivelatori.

8.3 Le trasformazioni di Lorentz

8.3.1 Le quattro equazioni

Nel capitolo 7 abbiamo visto che le trasformazioni di Galileo, $x' = x - vt$ e $t' = t$, sono incompatibili con il secondo postulato, perché portano alla somma delle velocità e quindi a una luce più veloce di c per qualche osservatore. Cerchiamo le formule che, dato un evento di coordinate (x, y, z, t) in S, danno le sue coordinate in S′ rispettando entrambi i postulati. La risposta, trovata da Lorentz nel 1904 e reinterpretata da Einstein nel 1905, sono le **trasformazioni di Lorentz**:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

Le dimensioni perpendicolari al moto non cambiano, come abbiamo già visto. Le altre due equazioni mescolano spazio e tempo: la coordinata x' dipende dal tempo t, come in Galileo, ma ora anche il tempo t' dipende dalla posizione x. È questo termine, vx/c^2, a contenere la relatività della simultaneità.

Le trasformazioni inverse, che danno le coordinate in S a partire da quelle in S′, si ottengono senza calcoli: per S′ è S a muoversi con velocità $-v$, e il principio di relatività impone le stesse formule con v cambiata di segno:

$$x = \gamma(x' + vt') \quad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

Le trasformazioni valgono per le coordinate di un evento, e quindi anche per le differenze fra le coordinate di due eventi: $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$, $\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)$. In questa forma, che è quella che useremo più spesso, l'origine degli assi non conta.

8.3.2 Perché proprio queste formule

Non ricaviamo le trasformazioni passo per passo, ma verifichiamo che rispettano il secondo postulato. All'istante $t = t' = 0$, quando le due origini coincidono, una lampada nell'origine emette un lampo. In S il fronte d'onda è una sfera di raggio ct centrata nell'origine di S: i suoi punti soddisfano $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$. Per il secondo postulato, anche in S′ il fronte deve essere una sfera di raggio ct' centrata nell'origine di S′. Controlliamolo calcolando $x'^2 - (ct')^2$:

$$x'^2 - c^2t'^2 = \gamma^2[(x - vt)^2 - (ct - vx/c)^2] = \gamma^2[x^2(1 - \beta^2) - c^2t^2(1 - \beta^2)] = x^2 - c^2t^2$$

Nello sviluppo dei quadrati i doppi prodotti, $-2xvt$ e $-2ct \cdot vx/c$, sono uguali e si cancellano; nell'ultimo passaggio si usa $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$. Poiché inoltre $y' = y$ e $z' = z$, si ha $x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$: se un punto sta sul fronte d'onda in S (secondo membro nullo), sta sul fronte d'onda anche in S′. Le trasformazioni di Galileo non superano questa prova: con $x' = x - vt$ e $t' = t$ il fronte in S′ sarebbe una sfera centrata nel punto $x' = -vt$, non nell'origine di S′. Il fattore γ è proprio quello che serve: con un fattore diverso il risultato non tornerebbe.

Ci servirà fra poco un'osservazione: il calcolo vale per **qualunque** evento, non solo per quelli sul fronte d'onda. La combinazione $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ ha lo stesso valore in S e in S′.

8.3.3 Il limite delle basse velocità

Se $v \ll c$, allora $\gamma \approx 1$ e $x' \approx x - vt$: è la trasformazione di Galileo. Per il tempo, il termine vx/c^2 è trascurabile rispetto a t quando le distanze in gioco, divise per c, sono piccole rispetto ai tempi, e v/c è piccolo: per un treno a 100 m/s e due eventi a 1 km di distanza vale 10^{-12} s. Si ritrova $t' = t$, il tempo assoluto di Newton. Le trasformazioni di Lorentz contengono quelle di Galileo come caso limite.

ESEMPIO SVOLTO

Dalle trasformazioni di Lorentz ai tre effetti, passo per passo

Problema. Ricava dalle trasformazioni di Lorentz: a) la dilatazione dei tempi; b) la contrazione delle lunghezze; c) la relatività della simultaneità.

a) Dilatazione. Un orologio è fermo nell'origine di S′ e segna due tic, cioè due eventi con $\Delta x' = 0$ e $\Delta t' = \Delta t_0$ (tempo proprio, perché i due eventi avvengono nello stesso punto di S′). Con la trasformazione inversa del tempo: $\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2) = \gamma\Delta t_0$. È la formula ricavata con l'orologio a luce.

b) Contrazione. Un regolo è fermo in S′, disteso lungo l'asse x', con lunghezza propria $L_0 = \Delta x'$. In S il regolo si muove; la sua lunghezza L è la distanza fra le posizioni delle due estremità segnate **nello stesso istante di S**: $\Delta t = 0$, $\Delta x = L$. La trasformazione diretta dello spazio dà $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \gamma L$, cioè $L_0 = \gamma L$ e $L = L_0/\gamma$. Attenzione alla scelta: si deve imporre $\Delta t = 0$, perché le due marcature sono simultanee per chi misura, cioè in S. In S′ non lo sono: $\Delta t' = \gamma(0 - vL/c^2) \neq 0$.

c) Simultaneità. Due eventi sono simultanei in S ($\Delta t = 0$) e distano Δx lungo l'asse x. In S′: $\Delta t' = \gamma(0 - v\Delta x/c^2) = -\gamma v\Delta x/c^2$. Se $\Delta x \neq 0$, $\Delta t' \neq 0$: i due eventi non sono simultanei in S′, e per S′ avviene prima quello con la x maggiore, cioè quello «davanti» nel verso del moto di S′. Se invece $\Delta x = 0$ (eventi nello stesso punto), $\Delta t' = 0$: la simultaneità di due eventi nello stesso luogo è assoluta.

Commento. I tre effetti, presentati come conseguenze separate dei postulati, sono tre letture delle stesse quattro equazioni. Per non sbagliare, in ogni problema scrivi esplicitamente quali differenze sono note e in quale riferimento: «$\Delta x' = 0$ perché…», «$\Delta t = 0$ perché…».

8.4 La composizione delle velocità

8.4.1 La formula relativistica

Un'astronave S′ si allontana dalla Terra S con velocità v e lancia in avanti una sonda, che rispetto all'astronave ha velocità u'. Per Galileo la velocità della sonda rispetto alla Terra è $u = u' + v$: con $v = 0{,}6c$ e $u' = 0{,}6c$ darebbe $1{,}2c$. Le trasformazioni di Lorentz danno un'altra risposta.

Consideriamo due eventi lungo il moto della sonda, separati da Δx, Δt in S e da $\Delta x'$, $\Delta t'$ in S′; le velocità sono $u = \Delta x/\Delta t$ e $u' = \Delta x'/\Delta t'$. Dividendo membro a membro le trasformazioni delle differenze e poi numeratore e denominatore per Δt:

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - v\Delta t)}{\gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)} = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}$$

Con le trasformazioni inverse si ottiene la formula che risponde alla domanda della sonda:

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}$$

È la **composizione relativistica delle velocità**. Per la sonda, $u = 1{,}2c/(1 + 0{,}36) = 0{,}88c$: meno di c. Il denominatore è sempre maggiore di 1 quando le due velocità hanno lo stesso verso, e riduce il risultato rispetto alla somma di Galileo; per velocità piccole rispetto a c il prodotto $u'v/c^2$ è trascurabile e si ritrova $u = u' + v$.

8.4.2 Nessuno supera la luce

Se la sonda è un impulso di luce, $u' = c$, e la formula dà $u = (c + v)/(1 + v/c) = c(c + v)/(c + v) = c$, qualunque sia v: la velocità della luce è la stessa in tutti i riferimenti, come vuole il secondo postulato. E se u' e v sono entrambe minori di c, anche u è minore di c (lo verifichi in un esercizio): componendo velocità inferiori a quella della luce non la si raggiunge mai. La Tabella 8.3 confronta le due regole.

Tabella 8.3 Velocità u rispetto a S di un corpo che ha velocità u' rispetto a S′, quando S′ si muove con velocità v rispetto a S (stesso verso), secondo Galileo e secondo la relatività. Le velocità sono in unità di c.

v/c	u'/c	Galileo: $u' + v$	relatività
10^{-6}	10^{-6}	2×10^{-6}	2×10^{-6}
0,10	0,10	0,20	0,198
0,50	0,50	1,00	0,800
0,60	0,60	1,20	0,882
0,90	0,90	1,80	0,994
0,50	1	1,50	1

ESEMPIO SVOLTO

Due astronavi che si vengono incontro

Problema. Rispetto a una stazione spaziale, l'astronave A si muove verso destra con velocità $0{,}80c$ e l'astronave B verso sinistra con velocità $0{,}60c$. Qual è la velocità di B misurata dall'equipaggio di A?

Risoluzione. Scegliamo S = stazione, S′ = astronave A, quindi $v = +0{,}80c$. La velocità di B in S è $u = -0{,}60c$ (verso sinistra). Cerchiamo u': $u' = (u - v)/(1 - uv/c^2) = (-0{,}60 - 0{,}80)c/(1 - (-0{,}60)(0{,}80)) = -1{,}40c/1{,}48 = -0{,}946c$.

Commento. Per A, l'astronave B si avvicina con velocità $0{,}946c$ verso sinistra, non con $1{,}40c$. Attenzione invece a una grandezza diversa: la **velocità di avvicinamento** misurata dalla stazione, cioè la rapidità con cui diminuisce la distanza fra A e B nel riferimento della stazione, è davvero $1{,}40c$. Non è la velocità di un corpo in un riferimento, e non viola nulla: nessun segnale e nessun oggetto viaggia a $1{,}40c$.

8.5 L'intervallo invariante e il cono di luce

8.5.1 Una grandezza su cui tutti sono d'accordo

Abbiamo perso il tempo assoluto e la lunghezza assoluta: due osservatori in moto relativo misurano durate e distanze diverse fra gli stessi due eventi. Ma studiando le trasformazioni di Lorentz abbiamo scoperto una combinazione che non cambia. Per due eventi separati da Δt e Δx (con $\Delta y = \Delta z = 0$, per semplicità) si chiama **intervallo invariante** la grandezza

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

che ha lo stesso valore in tutti i riferimenti inerziali: $(c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$. Una grandezza con questa proprietà si dice **invariante relativistico**. È l'analogo della distanza fra due punti nel piano, che non cambia ruotando gli assi anche se cambiano le coordinate dei punti; con la differenza importante del segno meno, che separa il tempo dallo spazio.

Controlliamo con dei numeri. In S due eventi sono separati da $\Delta x = 600$ m e $\Delta t = 3{,}0$ μs, quindi $c\Delta t = 900$ m e $(\Delta s)^2 = 900^2 - 600^2 = 4{,}5 \times 10^5$ m^2. In S', che si muove con $\beta = 0{,}60$ ($\gamma = 1{,}25$): $\Delta x' = 1{,}25(600 - 0{,}60 \times 900)$ m $= 75$ m e $c\Delta t' = 1{,}25(900 - 0{,}60 \times 600)$ m $= 675$ m; $(\Delta s)^2 = 675^2 - 75^2 = 4{,}5 \times 10^5$ m^2. Durata e distanza sono cambiate entrambe; l'intervallo no.

Se i due eventi avvengono nello stesso punto di un riferimento, in quel riferimento $\Delta x = 0$ e $(\Delta s)^2 = (c\Delta t_0)^2$: l'intervallo, diviso per c, è il **tempo proprio** fra i due eventi. Per questo tutti gli osservatori sono d'accordo sul tempo proprio: lo calcolano dalle proprie misure come $\sqrt{(\Delta t)^2 - (\Delta x/c)^2}$, e ottengono lo stesso numero.

8.5.2 Tre tipi di intervallo

Il segno di $(\Delta s)^2$, che non dipende dal riferimento, divide le coppie di eventi in tre classi.

- $(\Delta s)^2 > 0$: **intervallo di tipo tempo**. La distanza è minore di quella che la luce percorre nel tempo Δt: un corpo più lento della luce può essere presente a entrambi gli eventi, e nel suo riferimento i due eventi avvengono nello stesso punto. L'ordine temporale è lo stesso per tutti gli osservatori, e il primo evento può essere la causa del secondo.
- $(\Delta s)^2 = 0$: **intervallo di tipo luce**. I due eventi possono essere collegati da un segnale di luce, e da nient'altro.
- $(\Delta s)^2 < 0$: **intervallo di tipo spazio**. Nemmeno la luce fa in tempo ad andare da un evento all'altro. Esiste un riferimento in cui i due eventi sono simultanei, ed esistono riferimenti in cui l'ordine è invertito; nessuno dei due può influenzare l'altro.

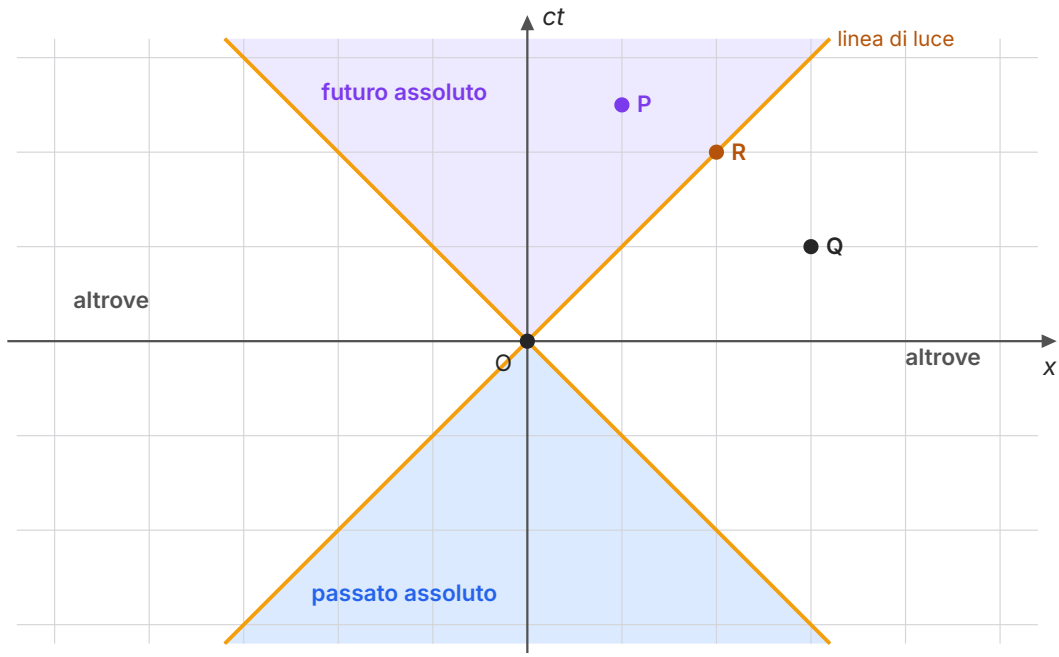
L'ultima osservazione salva la causalità. Nel capitolo 7 abbiamo visto che la simultaneità è relativa; ora sappiamo che l'ordine temporale si può invertire **soltanto** per eventi separati da un intervallo di tipo spazio, che nessuna causa può collegare. Una partita di calcio non può finire,

per qualche osservatore, prima del calcio d'inizio: i due eventi sono nello stesso stadio, a novanta minuti di distanza, e l'intervallo è di tipo tempo.

8.5.3 Il cono di luce

Nel diagramma spazio-tempo (capitolo 7), con ct in verticale e x in orizzontale nella stessa unità, i raggi di luce che passano per un evento O sono le due rette a 45°. Se si aggiungesse una seconda dimensione spaziale, le due rette diventerebbero un doppio cono con il vertice in O: per questo l'insieme degli eventi collegati a O da un segnale di luce si chiama **cono di luce** di O (Figura 8.4).

All'interno della metà superiore del cono si trovano gli eventi separati da O da un intervallo di tipo tempo e successivi a O per tutti gli osservatori: è il **futuro assoluto** di O, l'insieme degli eventi che O può influenzare. Simmetricamente, la metà inferiore è il **passato assoluto**, gli eventi che possono aver influenzato O. Fuori dal cono c'è l'**altrove**: eventi separati da O da un intervallo di tipo spazio, che per alcuni osservatori sono precedenti a O, per altri successivi, per altri ancora simultanei. La linea d'universo di qualunque corpo dotato di massa che passa per O resta sempre dentro il cono, perché la sua inclinazione rispetto all'asse ct è minore di 45°.



P: intervallo di tipo tempo · R: di tipo luce · Q: di tipo spazio (rispetto all'evento O)

unità: 1 quadretto = 1 anno luce in orizzontale, 1 anno in verticale

Figura 8.4 Il cono di luce di un evento O nel diagramma spazio-tempo di S. Le rette arancioni a 45° sono le linee di luce. Rispetto a O, l'evento P (1 anno luce, 2,5 anni) è nel futuro assoluto, separato da un intervallo di tipo tempo; R (2 anni luce, 2 anni) è sul cono, intervallo di tipo luce; Q (3 anni luce, 1 anno) è nell'altrove, intervallo di tipo spazio.

8.5.4 Gli assi di S′ nel diagramma di Minkowski

Nel capitolo 7 abbiamo disegnato le linee d'universo nel diagramma spazio-tempo di S. Le trasformazioni di Lorentz permettono di disegnare nello stesso diagramma anche gli assi di S′ (Figura 8.5). L'asse ct' è l'insieme degli eventi con $x' = 0$, cioè $x = vt$: è la linea d'universo dell'origine di S′, una retta per O inclinata verso la linea di luce, con $x = \beta \cdot ct$. L'asse x' è l'insieme degli eventi con $t' = 0$, cioè $ct = \beta x$: una retta inclinata anch'essa verso la linea di luce, simmetrica dell'asse ct' rispetto a quella. Gli assi di S′ si chiudono come una forbice attorno alla linea di luce, tanto più quanto più β si avvicina a 1.

Le rette parallele all'asse x' sono le linee di simultaneità di S′: eventi che per S′ avvengono nello stesso istante. Si vede subito che non sono orizzontali, cioè non coincidono con le linee di simultaneità di S. Per leggere le coordinate di un evento in S′ si tracciano dall'evento le parallele agli assi di S′, come si fa con un sistema di coordinate obliquo.

Resta un problema: le unità sugli assi di S′ non hanno la stessa lunghezza grafica di quelle di S. Lo risolve l'invariante. Gli eventi con $(ct)^2 - x^2 = 1$ stanno su un ramo di iperbole (lo hai studia-

to in matematica: è un'iperbole equilatera con asintoti le linee di luce); poiché l'intervallo è invariante, per tutti quegli eventi vale anche $(ct')^2 - x'^2 = 1$, e quello che sta sull'asse ct' ($x' = 0$) ha $ct' = 1$. Le **iperboli di taratura** $(ct)^2 - x^2 = 1, 4, 9\ldots$ segnano quindi le unità 1, 2, 3... sull'asse ct', e le iperboli $x^2 - (ct)^2 = 1, 4, 9\ldots$ le unità sull'asse x'. Le tacche di S′ risultano più distanziate di quelle di S, di un fattore $\sqrt{((1+\beta^2)/(1-\beta^2))}$: il diagramma non è un piano euclideo, e le lunghezze disegnate non si confrontano con il righello.

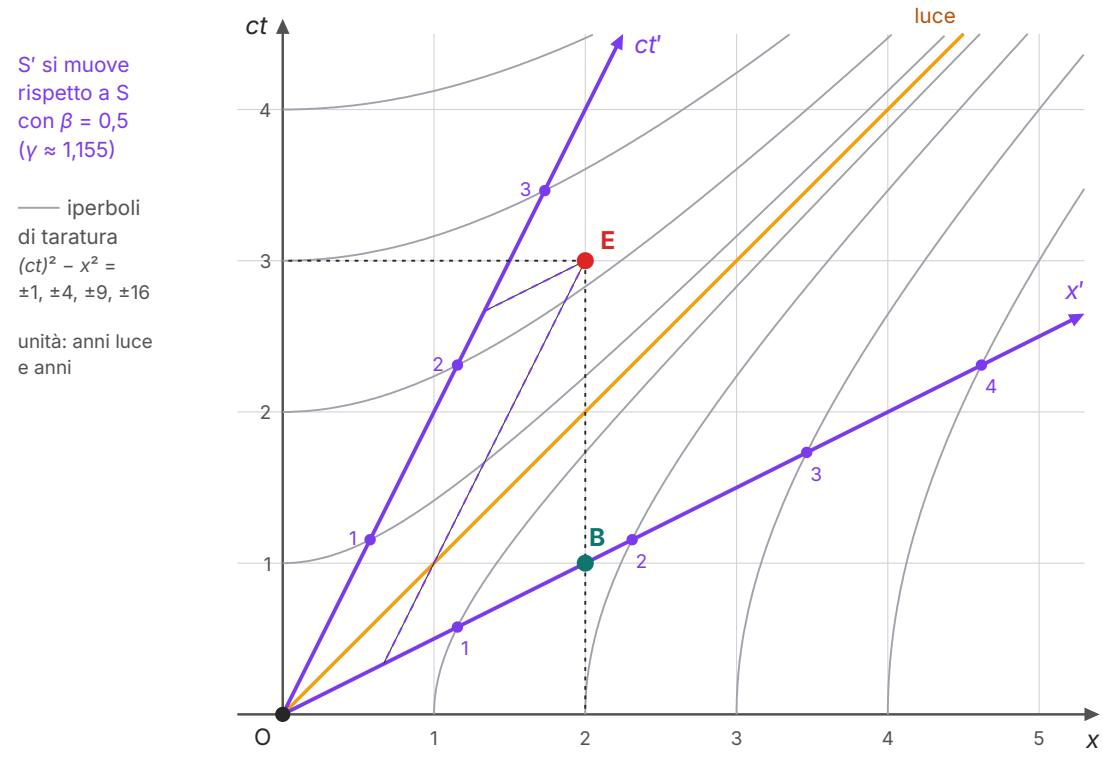


Figura 8.5 Diagramma di Minkowski del riferimento S (griglia grigia, unità: anni luce e anni) con gli assi ct' e x' di un riferimento S′ che si muove con $\beta = 0{,}5$. Le iperboli di taratura (grigie) tagliano gli assi di S′ nelle tacche 1, 2, 3, 4 (punti viola). L'evento E ha coordinate ($x = 2$, $ct = 3$) in S; le parallele agli assi di S′ (tratteggio viola) ne danno le coordinate in S′. L'evento B sta sull'asse x': per S′ è simultaneo con O, per S no.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere un diagramma di Minkowski

Problema. Nella Figura 8.5 l'evento E ha coordinate $x = 2$ anni luce, $ct = 3$ anni in S; l'evento B ha $x = 2$ anni luce, $ct = 1$ anno. a) Stima dal grafico le coordinate di E in S′. b) Calcolale con le trasformazioni di Lorentz e verifica l'invarianza dell'intervallo. c) Di' come sono ordinati nel tempo O e B in S e in S′, e se B può essere un effetto di O.

Risoluzione. a) La parallela all'asse x' passante per E taglia l'asse ct' poco oltre la tacca 2, a circa un terzo dell'intervallo fra 2 e 3: $ct' \approx 2{,}3$. La parallela all'asse ct' taglia l'asse x' prima della tacca 1, a poco più di metà: $x' \approx 0{,}6$.

b) Con $\beta = 0{,}5$, $\gamma = 1/\sqrt{0{,}75} = 1{,}155$. $x' = \gamma(x - \beta \cdot ct) = 1{,}155 \times (2 - 1{,}5) = 0{,}58$ anni luce; $ct' = \gamma(ct - \beta x) = 1{,}155 \times (3 - 1) = 2{,}31$ anni. Intervallo: in S, $3^2 - 2^2 = 5$; in S′, $2{,}31^2 - 0{,}58^2 = 5{,}33 - 0{,}33 = 5{,}00$. La lettura grafica era buona.

c) In S, B è successivo a O ($ct = 1$ anno). In S′, $ct' = 1{,}155 \times (1 - 0{,}5 \times 2) = 0$: B è simultaneo con O, come si vede dal grafico, perché B sta sull'asse x'. L'intervallo fra O e B è $1^2 - 2^2 = -3 < 0$, di tipo spazio: B è nell'altrove di O, e in un riferimento con $\beta > 0{,}5$ risulterebbe addirittura precedente a O. B non può essere un effetto di O, né la sua causa.

Commento. Nel diagramma la regola pratica è: le coordinate in S′ si leggono con parallele agli assi di S′, e le unità di S′ si prendono dalle iperboli, non dal righello.

8.6 Il paradosso dei gemelli

8.6.1 Il racconto e l'obiezione

Anna e Bruno sono gemelli. Bruno parte con un'astronave verso una stella distante 4,0 anni luce, viaggiando con $\beta = 0{,}80$, e appena arrivato inverte la rotta e torna con la stessa velocità; Anna resta sulla Terra. Per Anna il viaggio dura $2 \times 4{,}0/0{,}80 = 10$ anni. L'orologio di Bruno, presente sia alla partenza sia all'arrivo di ciascun tratto, misura il tempo proprio: con $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}64)} = 5/3$, ogni tratto dura per lui 5,0 anni/(5/3) = 3,0 anni, e in tutto 6,0 anni. Al ritorno Bruno è più giovane di Anna di quattro anni.

L'obiezione, che dà il nome al **paradosso dei gemelli**, è questa: la dilatazione dei tempi è simmetrica, e per Bruno è Anna che si allontana e poi ritorna. Non dovrebbe allora essere Anna la più giovane? I due risultati non possono essere veri entrambi, perché al ritorno i gemelli sono di nuovo nello stesso posto e confrontano le età senza ambiguità.

8.6.2 Perché non è un paradosso

La situazione non è simmetrica. Anna resta per tutto il tempo in un unico riferimento inerziale. Bruno no: per tornare deve invertire la rotta, cioè passare dal riferimento inerziale dell'andata

a quello, diverso, del ritorno, e in quel momento sente l'accelerazione (il caffè si rovescia, gli strumenti di bordo la misurano). La formula della dilatazione si può applicare dal punto di vista di Anna per tutto il viaggio, non da quello di Bruno.

Che cosa succede, per Bruno, nell'inversione? Lo mostra la Figura 8.6. Durante l'andata, le linee di simultaneità di Bruno sono inclinate verso l'alto (come l'asse x' della Figura 8.5): quando Bruno arriva alla stella, l'evento sulla Terra «simultaneo» per lui è l'istante in cui Anna ha 1,8 anni di viaggio. Durante il ritorno le linee di simultaneità sono inclinate nell'altro verso, e il primo evento terrestre simultaneo per Bruno è quello in cui Anna ha 8,2 anni di viaggio. Nel cambio di riferimento, la «data attuale» sulla Terra per Bruno salta in avanti di 6,4 anni. Anna invecchia lentamente per Bruno in entrambi i tratti (1,8 anni durante i 3 anni di andata, altri 1,8 durante il ritorno), ma il salto compensa con abbondanza: 1,8 + 6,4 + 1,8 = 10 anni.

Il risultato si legge anche con l'intervallo invariante. Il tempo proprio lungo una linea d'universo è la somma degli intervalli dei suoi tratti divisi per c. La linea retta di Anna, fra la partenza e il ritorno, ha un tempo proprio di 10 anni; la linea spezzata di Bruno fra gli stessi due eventi ha 3 + 3 = 6 anni. Nel diagramma spazio-tempo la linea retta fra due eventi è quella con il tempo proprio **massimo**: il contrario di quanto accade per le distanze nel piano, ancora per via del segno meno.

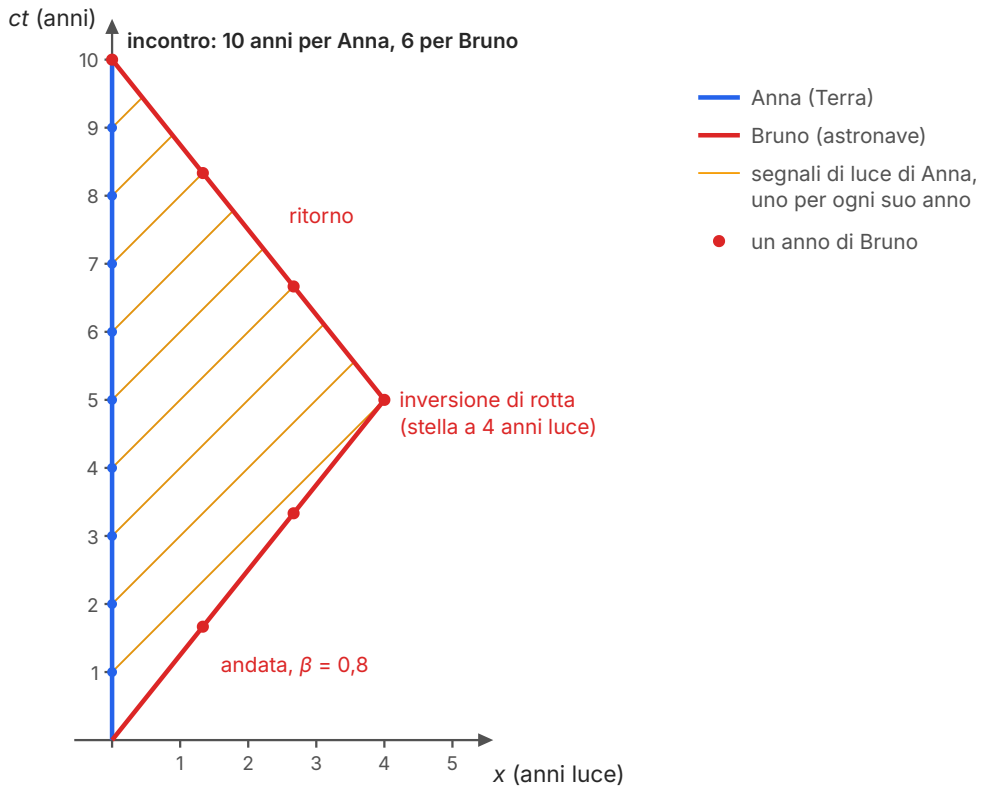


Figura 8.6 Il viaggio di Bruno (rosso) verso una stella a 4,0 anni luce e ritorno, con $\beta = 0{,}80$, nel diagramma spazio-tempo della Terra; Anna (blu) resta ferma in $x = 0$. I punti segnano i compleanni: 9 di Anna prima dell'incontro (il decimo coincide con l'incontro), 6 di Bruno. Le rette arancioni sono i segnali di luce che Anna invia a ogni suo compleanno: Bruno ne riceve uno durante l'andata (proprio all'inversione) e nove durante il ritorno.

APPROFONDIMENTO

I gemelli si scambiano segnali: l'effetto Doppler relativistico

Supponiamo che ogni gemello, a ogni proprio compleanno, invii all'altro un segnale di luce. Quanti ne riceve ciascuno, e quando? La Figura 8.6 risponde senza calcoli per i segnali di Anna. Per i calcoli serve l'**effetto Doppler relativistico**: se una sorgente emette con frequenza f nel proprio riferimento e si **avvicina** all'osservatore con velocità v, l'osservatore riceve la frequenza

$$f' = f\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

e se la sorgente si allontana basta cambiare il segno di β. La formula, che non dimostriamo, contiene due effetti: quello di Doppler già noto per il suono (Fisica 4), perché i fronti successivi partono da punti sempre più vicini, e la dilatazione del tempo della sorgente. Per $\beta = 0{,}80$ il fattore è $\sqrt{(1{,}8/0{,}2)} = 3$ in avvicinamento e 1/3 in allontanamento.

Segnali di Anna. Bruno è in allontanamento per 3 anni del suo tempo: riceve i segnali con frequenza 1/3 all'anno, cioè 1 segnale. Nel ritorno, 3 anni con frequenza 3 all'anno: 9 segnali. Totale 10: Anna ha 10 anni di viaggio in più. **Segnali di Bruno.** Anna riceve con frequenza 1/3 finché le arriva luce emessa durante l'andata, cioè fino a 5 + 4 = 9 anni (la luce dell'inversione impiega 4 anni a tornare): 3 segnali. Nell'ultimo anno riceve con frequenza 3: altri 3 segnali. Totale 6, e tutti e due contano gli stessi compleanni di Bruno. L'asimmetria è evidente: Bruno vede cambiare la frequenza a metà del suo viaggio, Anna solo dopo 9 dei suoi 10 anni.

La formula di Doppler relativistica ha usi molto concreti: con lo spostamento della frequenza l'astronomia misura le velocità di allontanamento delle galassie (capitolo 16).

DA RICORDARE

Verso l'esame: cinematica relativistica

Il quadro di riferimento della seconda prova colloca questi argomenti nel nucleo **Spazio, tempo e moto** («cinematica classica e relativistica») e chiede di saper applicare le trasformazioni di Lorentz e di usare dilatazione dei tempi e contrazione delle lunghezze, riconoscendo quando basta il limite non relativistico.

Gli errori tipici sono sempre gli stessi: scambiare tempo proprio e tempo dilatato (il tempo proprio è il più breve), applicare la contrazione a dimensioni perpendicolari al moto, sommare velocità alla Galileo, dimenticare che per la contrazione si impone $\Delta t = 0$ nel riferimento di chi misura. In ogni risposta dichiara il riferimento in cui misuri ogni grandezza e quale grandezza è propria. Quando un problema dà due eventi in un riferimento, calcola subito l'intervallo invariante: dice se c'è un riferimento in cui gli eventi coincidono nello spazio, o uno in cui sono simultanei, e serve come controllo finale dei conti.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}}$, $\beta = v/c$ — fattore di Lorentz, adimensionale, ≥ 1; $\gamma \approx 1 + \beta^2/2$ per $\beta \ll 1$ (limite non relativistico).

$\Delta t = \gamma \Delta t_0$ — dilatazione dei tempi: Δt_0 è il tempo proprio, misurato da un solo orologio presente a entrambi gli eventi; in ogni altro riferimento inerziale la durata è maggiore. Vale per ogni fenomeno fisico, ed è simmetrica fra osservatori inerziali.

$L = L_0/\gamma$ — contrazione delle lunghezze: L_0 è la lunghezza propria, nel riferimento in cui l'oggetto è fermo; solo nella direzione del moto.

$x' = \gamma(x - vt)$, $t' = \gamma(t - vx/c^2)$, $y' = y$, $z' = z$ — trasformazioni di Lorentz (S′ in moto con velocità v lungo $+x$); inverse con $-v$; per $v \ll c$ diventano quelle di Galileo.

$u = (u' + v)/(1 + u'v/c^2)$ — composizione delle velocità (moti lungo x); se $u' = c$ allora $u = c$; nessuna composizione di velocità minori di c dà c.

$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ — intervallo invariante (m^2), uguale in tutti i riferimenti inerziali; > 0 tipo tempo (ordine temporale assoluto, possibile relazione causale), $= 0$ tipo luce, < 0 tipo spazio (nessuna relazione causale). Per un intervallo di tipo tempo, $\Delta s/c$ è il tempo proprio.

$f' = f\sqrt{((1+\beta)/(1-\beta))}$ — effetto Doppler relativistico per una sorgente in avvicinamento ($-\beta$ in allontanamento).

SINTESI

- Dai postulati di Einstein segue che un orologio in moto, misurato da un riferimento inerziale, va più lentamente: $\Delta t = \gamma \Delta t_0$, con $\gamma = 1/\sqrt{(1 - \beta^2)}$. L'orologio a luce lo mostra con il teorema di Pitagora; il principio di relatività lo estende a ogni orologio.
- Il tempo proprio fra due eventi è quello misurato nel riferimento in cui i due eventi avvengono nello stesso punto, da un unico orologio; è il più breve fra i tempi misurati dai diversi osservatori inerziali.
- La dilatazione è simmetrica: ogni osservatore inerziale trova lenti gli orologi dell'altro, senza contraddizione, perché i due usano criteri di simultaneità diversi.
- Per $\beta \ll 1$, $\gamma - 1 \approx \beta^2/2$: a velocità ordinarie gli effetti sono minuscoli (nanosecondi per un volo aereo, microsecondi al giorno per un satellite GPS), ma misurabili con orologi atomici e indispensabili per la navigazione satellitare.
- I muoni dei raggi cosmici, con vita media propria di 2,2 μs, raggiungono il suolo perché nel riferimento della Terra la loro vita media è γ volte più lunga; gli esperimenti di Rossi e Hall (1941) e di Frisch e Smith (1963) lo hanno confermato.
- Nel riferimento del muone la stessa osservazione si spiega con la contrazione delle lunghezze: $L = L_0/\gamma$, dove L_0 è la lunghezza propria. La contrazione avviene solo nella direzione del moto.
- Le trasformazioni di Lorentz legano le coordinate di un evento in due riferimenti inerziali; rispettano l'invarianza della velocità della luce, si riducono a quelle di Galileo per $v \ll c$ e contengono dilatazione dei tempi, contrazione delle lunghezze e relatività della simultaneità.
- Le velocità si compongono con la formula $u = (u' + v)/(1 + u'v/c^2)$: componendo velocità minori di c non si raggiunge c, e la luce ha velocità c in ogni riferimento.
- L'intervallo $(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ è invariante. Il suo segno classifica le coppie di eventi in tipo tempo, tipo luce e tipo spazio; solo per le ultime l'ordine temporale dipende dal riferimento, e nessuna relazione causale è possibile.
- Il cono di luce di un evento separa il suo futuro assoluto, il suo passato assoluto e l'altrove. Nel diagramma di Minkowski gli assi di un riferimento in moto sono inclinati verso la linea di luce e tarati dalle iperboli $(ct)^2 - x^2 =$ costante.
- Il paradosso dei gemelli non è un paradosso: il gemello che viaggia cambia riferimento inerziale, e la sua linea d'universo spezzata ha un tempo proprio minore di quella retta del gemello rimasto a casa.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Il tempo proprio fra due eventi è misurato:
   A. dall'osservatore che si muove più lentamente
   B. nel riferimento in cui i due eventi avvengono nello stesso punto
   C. da due orologi sincronizzati posti nei luoghi dei due eventi
   D. in qualunque riferimento in cui i due eventi sono simultanei

2. ● Per $\beta = 0{,}60$ il fattore di Lorentz vale:
   A. 0,80
   B. 1,67
   C. 1,25
   D. 1,60

3. ● Un regolo di lunghezza propria L_0 si muove lungo la propria lunghezza con $\beta = 0{,}80$. La sua lunghezza misurata nel riferimento del laboratorio è:
   A. 0,60 L_0
   B. 0,80 L_0
   C. 1,67 L_0
   D. L_0, perché la lunghezza propria non cambia

4. ● Un cubo di spigolo 1 m (misurato a riposo) si muove con velocità $0{,}8c$ parallela a uno spigolo. Nel riferimento del laboratorio è:
   A. un cubo di spigolo 0,6 m
   B. un cubo di spigolo 1 m, perché la contrazione è solo apparente
   C. un parallelepipedo con due spigoli di 0,6 m e uno di 1 m
   D. un parallelepipedo con due spigoli di 1 m e uno di 0,6 m

5. ●● Due astronavi si avvicinano alla Terra da versi opposti, ciascuna con velocità $0{,}60c$ rispetto alla Terra. La velocità di una misurata dall'altra è:
   A. $1{,}20c$
   B. $0{,}60c$
   C. $0{,}88c$
   D. c

6. ●● Per due eventi $(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 > 0$. Allora:
   A. esiste un riferimento in cui i due eventi avvengono nello stesso punto, e l'ordine temporale è lo stesso per tutti
   B. esiste un riferimento in cui i due eventi sono simultanei
   C. i due eventi possono essere collegati soltanto da un segnale di luce
   D. l'ordine temporale dei due eventi dipende dal riferimento

7. ●● Nel diagramma di Minkowski di S, l'asse ct' di un riferimento S′ in moto con velocità v lungo $+x$ è:
   A. l'asse ct stesso, perché il tempo non dipende dal moto
   B. una retta orizzontale
   C. una retta perpendicolare alla linea di luce
   D. una retta per l'origine inclinata verso la linea di luce, di equazione $x = vt$

8. ●● Nel paradosso dei gemelli il gemello viaggiatore risulta più giovane perché:
   A. la velocità dell'astronave lo invecchia biologicamente meno
   B. non resta in un unico riferimento inerziale: per tornare deve cambiare riferimento
   C. la dilatazione dei tempi vale solo per chi si muove rispetto alla Terra
   D. il tempo proprio è sempre quello del gemello rimasto a casa

Vero o falso

9. ● La dilatazione dei tempi riguarda gli orologi a luce, ma non i fenomeni biologici come l'invecchiamento. V / F

10. ● Se un osservatore A trova che l'orologio di B, in moto rispetto a lui, va piano, allora anche B trova che l'orologio di A va piano. V / F

11. ● Due eventi che avvengono nello stesso punto e nello stesso istante in un riferimento inerziale sono simultanei in tutti i riferimenti inerziali. V / F

12. ●● Un'astronave che si allontana dalla Terra con velocità $0{,}9c$ accende un faro rivolto in avanti: per un osservatore sulla Terra la luce del faro ha velocità $1{,}9c$. V / F

Applicare

13. ● Calcola γ per $v = 0{,}95c$. Quanto dura, nel riferimento del laboratorio, un fenomeno che dura 1,0 s nel riferimento in cui avviene in un punto fisso?

14. ● Un'astronave viaggia con $\beta = 0{,}80$ rispetto alla Terra. A bordo un film dura 60 minuti. Quanto dura la proiezione misurata con gli orologi della Terra?

15. ● Un'asta lunga 2,0 m a riposo si muove lungo la propria lunghezza con $\beta = 0{,}60$. Qual è la sua lunghezza nel riferimento in cui si muove?

16. ●● Per quale valore di β il fattore di Lorentz vale 2? Esprimi la velocità in km/s.

17. ●● Nel riferimento S un evento ha coordinate $x = 600$ m, $t = 3{,}0$ μs. Calcola le sue coordinate nel riferimento S′ che si muove con $\beta = 0{,}60$ (origini coincidenti a $t = t' = 0$) e verifica che $(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2$.

18. ●● Un'astronave che si allontana dalla Terra con velocità $0{,}50c$ lancia in avanti una sonda con velocità $0{,}50c$ rispetto all'astronave. Calcola la velocità della sonda rispetto alla Terra e confrontala con la previsione di Galileo.

19. ●● Un treno viaggia per 3,0 ore a 300 km/h. Usando l'approssimazione $\gamma - 1 \approx \beta^2/2$, calcola di quanto l'orologio di un passeggero resta indietro rispetto agli orologi delle stazioni.

20. ● Rispetto all'evento O della Figura 8.4 (origine), considera gli eventi A ($x = 1$ anno luce, $ct = 3$ anni), B ($x = 4$ anni luce, $ct = 2$ anni) e C ($x = -3$ anni luce, $ct = 3$ anni). Per ciascuno, calcola $(\Delta s)^2$, di' in quale regione del cono di luce di O si trova e se può essere un effetto di O. Completa: l'evento B si trova nell'_____ di O.

Problemi

21. ●● I pioni carichi hanno vita media a riposo $2{,}6 \times 10^{-8}$ s. In un fascio prodotto da un acceleratore i pioni hanno $\beta = 0{,}95$. a) Qual è la loro vita media nel riferimento del laboratorio? b) Quale distanza percorrono in media prima di decadere? c) Che cosa si prevederebbe senza dilatazione dei tempi?

22. ●●● Un muone è prodotto a 12,0 km di quota e scende verticalmente con $\beta = 0{,}995$ (vita media a riposo 2,2 μs). a) Calcola la durata del viaggio fino al suolo nel riferimento della Terra e nel riferimento del muone. b) Calcola la frazione di muoni che arriva al suolo con e senza dilatazione dei tempi. c) Quanto è spesso lo strato d'atmosfera nel riferimento del muone? d) Verifica che, nel riferimento del muone, la durata del viaggio è lo spessore del punto c) diviso per la velocità.

23. ●● Proxima Centauri dista dalla Terra 4,24 anni luce. Un'astronave ci va con $\beta = 0{,}90$ costante (trascura accelerazione e frenata). a) Quanto dura il viaggio per gli orologi della Terra? b) Quanto per l'equipaggio? c) Qual è la distanza Terra–stella nel riferimento dell'astronave?

24. ●●● (Con il capitolo 7.) Un treno di lunghezza propria 300 m viaggia con $\beta = 0{,}60$. Nel riferimento dei binari due fulmini colpiscono simultaneamente la testa e la coda del treno. a) Quanto è lungo il treno nel riferimento dei binari, e quanto distano quindi i punti colpiti? b) Con le trasformazioni di Lorentz calcola l'intervallo di tempo fra i due fulmini nel riferimento del treno, e di' quale estremità viene colpita prima. c) Verifica che lo stesso risultato si ottiene con la formula $\Delta t' = vL_0/c^2$, e spiega perché.

25. ●●● (Con Fisica 3, la gravitazione.) Un satellite GPS percorre un'orbita circolare di raggio $2{,}66 \times 10^7$ m attorno alla Terra ($GM_T = 3{,}99 \times 10^{14}$ m^3/s^2). a) Calcola la sua velocità orbitale. b) Calcola di quanto il suo orologio resta indietro in un giorno, considerando solo la dilatazione dei tempi della relatività ristretta. c) Quale errore sulla distanza, $c\Delta t$, produrrebbe questo ritardo se non fosse corretto?

26. ●● In un collisore due protoni si muovono in versi opposti, ciascuno con velocità $0{,}99c$ rispetto al laboratorio. Calcola la velocità di un protone nel riferimento dell'altro, in unità di c e con cinque cifre decimali. Di quanto differisce da c?

27. ●●● Anna resta sulla Terra mentre il gemello Bruno va a una stella distante 6,0 anni luce e torna, con $\beta = 0{,}60$ all'andata e al ritorno. a) Quanto dura il viaggio per Anna e per Bruno? b) Calcola il fattore Doppler $\sqrt{((1+\beta)/(1-\beta))}$. c) Anna invia un segnale di luce a ogni suo compleanno: quanti ne riceve Bruno all'andata e quanti al ritorno? Verifica che il totale è coerente con il punto a).

28. ●●● (Con il capitolo 5.) Un orologio a luce di bordo ha gli specchi a 1,5 m di distanza. a) Quanto dura un tic nel riferimento dell'astronave? b) Quanto dura nel riferimento della Terra, se l'astronave ha $\beta = 0{,}80$ con il braccio perpendicolare al moto? c) Quale cammino percorre la luce in mezzo tic, nel riferimento della Terra? Spiega perché la luce non arriva prima allo specchio.

Ragionare e argomentare

29. ●● Trova l'errore. Uno studente risolve così il problema del muone dell'esempio svolto «Un muone attraversa l'atmosfera»: «Il muone è in moto, quindi il suo tempo è dilatato: $\Delta t_{\text{muone}} = \gamma \times 33{,}4\ \mu\text{s} = 528\ \mu\text{s}$. In questo tempo sopravvive la frazione $e^{-528/2{,}2}$, praticamente zero». Spiega dove sbaglia e correggi il ragionamento.

30. ●●● Stima di Fermi. A che velocità dovresti viaggiare per tutta la vita (circa 80 anni), rispetto alla Terra, perché il tuo orologio restasse indietro di 1 s rispetto a quelli terrestri? Confronta il risultato con la velocità di un satellite in orbita bassa (circa 8 km/s).

31. ●●● Lisa sostiene: «La relatività è contraddittoria: se ognuno dei due osservatori trova lenti gli orologi dell'altro, allora ciascuno dei due orologi va piano rispetto all'altro, il che è assurdo». Spiega perché le due affermazioni non si contraddicono, e perché la contraddizione si avrebbe solo se i due orologi potessero essere confrontati due volte nello stesso luogo senza che nessuno cambi riferimento.

Verso l'esame di Stato

32. ●●● **Quesito.** In un rivelatore di particelle una particella instabile nasce nel punto A e decade nel punto B. Nel riferimento del laboratorio B si trova a 7,2 m da A, lungo l'asse x, e il decadimento avviene 30 ns dopo la nascita. a) Calcola l'intervallo invariante fra i due eventi e stabilisci di che tipo è. b) Calcola la velocità della particella in unità di c. c) Calcola la vita della particella nel suo riferimento, in due modi: con la dilatazione dei tempi e con l'intervallo invariante. d) Calcola le coordinate del decadimento in un riferimento S′ in moto con $\beta = 0{,}60$ lungo $+x$ (nascita nell'origine di entrambi), verifica l'invarianza dell'intervallo e argomenta in quale riferimento la durata fra i due eventi è la più breve.

33. ●●● **Problema.** Un'astronave di lunghezza propria 120 m passa davanti a una stazione spaziale con velocità $0{,}80c$. Alle due estremità dell'astronave ci sono due lampade. a) Quanto è lunga l'astronave per la stazione? Quanto tempo impiega, secondo gli orologi della stazione e secondo quelli di bordo, a sfilare davanti alla stazione (dal passaggio della prua a quello della poppa)? Quale dei due tempi è proprio? b) Un lampo di luce parte dalla poppa e raggiunge la prua: quanto impiega nel riferimento dell'astronave? Quanto nel riferimento della stazione? Calcolalo in due modi: con le trasformazioni di Lorentz e con il moto relativo di luce e prua visto dalla stazione. c) Le due lampade si accendono simultaneamente per l'equipaggio. (Con il capitolo 7.) Sono simultanee anche per la stazione? Se no, quale si accende prima e con quale anticipo? d) Argomenta perché, nei punti a)–c), tempi e lunghezze cambiano da un riferimento all'altro, mentre la velocità del lampo di luce no.

PER APPROFONDIRE

- [TWH] E. F. Taylor, J. A. Wheeler, *Spacetime Physics*: il testo che ha fatto dell'intervallo invariante e del diagramma spazio-tempo il punto di partenza dello studio della relatività; i capitoli sul paradosso dei gemelli e sul decadimento dei muoni.
- [EINR] A. Einstein, *Relatività: esposizione divulgativa*: la prima parte, sulle conseguenze dei postulati per regoli e orologi in moto, e l'appendice in cui l'autore ricava in modo elementare le trasformazioni di Lorentz.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. II: i capitoli sulla notazione relativistica e sulle trasformazioni di Lorentz, dove l'intervallo invariante diventa lo strumento per scrivere le leggi dell'elettromagnetismo nella stessa forma in tutti i riferimenti.
- [EIN] A. Einstein, L. Infeld, *L'evoluzione della fisica*: le pagine sulla relatività del tempo e sul continuo spazio-temporale, senza formule.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sulla relatività, per altri esercizi sulle trasformazioni di Lorentz e sulla composizione delle velocità.

Glossario del capitolo

Altrove
Regione del diagramma spazio-tempo esterna al cono di luce di un evento: gli eventi separati da esso da un intervallo di tipo spazio, che non possono esserne né causa né effetto.

Composizione relativistica delle velocità
La regola $u = (u' + v)/(1 + u'v/c^2)$ che dà la velocità di un corpo in S a partire da quella in S′; componendo velocità minori di c non si supera mai c.

Cono di luce
Insieme degli eventi collegati a un evento dato da segnali di luce; nel diagramma spazio-tempo è formato dalle rette a 45° per l'evento e separa futuro assoluto, passato assoluto e altrove.

Contrazione delle lunghezze
Effetto per cui un oggetto in moto, misurato in un riferimento rispetto al quale si muove, è più corto di un fattore γ nella direzione del moto: $L = L_0/\gamma$; le dimensioni perpendicolari non cambiano.

Dilatazione dei tempi
Effetto per cui la durata di un fenomeno, misurata in un riferimento rispetto al quale il fenomeno si sposta, è γ volte il tempo proprio: $\Delta t = \gamma \Delta t_0$.

Effetto Doppler relativistico
Variazione della frequenza della luce dovuta al moto relativo di sorgente e osservatore: $f' = f\sqrt{((1 + \beta)/(1 - \beta))}$ in avvicinamento.

Fattore di Lorentz
Il numero $\gamma = 1/\sqrt{(1 - \beta^2)}$, con $\beta = v/c$; vale 1 per $v = 0$ e tende all'infinito per $v \to c$.

Intervallo di tipo luce
Intervallo con $(\Delta s)^2 = 0$: i due eventi possono essere collegati soltanto da un segnale di luce.

Intervallo di tipo spazio
Intervallo con $(\Delta s)^2 < 0$: nessun segnale può collegare i due eventi, e il loro ordine temporale dipende dal riferimento.

Intervallo di tipo tempo
Intervallo con $(\Delta s)^2 > 0$: i due eventi possono essere collegati da un corpo più lento della luce e hanno un ordine temporale assoluto.

Intervallo invariante
La grandezza $(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ fra due eventi, uguale in tutti i riferimenti inerziali.

Invariante relativistico
Grandezza che ha lo stesso valore in tutti i riferimenti inerziali, come l'intervallo fra due eventi o la velocità della luce.

Iperbole di taratura
Iperbole $(ct)^2 - x^2 =$ costante nel diagramma di Minkowski: per l'invarianza dell'intervallo segna le unità sugli assi di ogni riferimento inerziale.

Limite non relativistico
Il caso $v \ll c$, in cui $\gamma - 1 \approx \beta^2/2$ e le leggi relativistiche si riducono a quelle di Galileo e Newton.

Lunghezza propria
Lunghezza di un oggetto misurata nel riferimento in cui l'oggetto è fermo.

Orologio a luce
Orologio ideale in cui un impulso di luce rimbalza fra due specchi paralleli; ogni andata e ritorno è un tic. Il suo funzionamento dipende solo dall'invarianza della velocità della luce.

Paradosso dei gemelli
Il problema apparente del gemello che viaggia e torna più giovane; si risolve osservando che solo il viaggiatore cambia riferimento inerziale.

Tempo proprio
Durata fra due eventi misurata nel riferimento in cui i due eventi avvengono nello stesso punto, da un solo orologio presente a entrambi; è la più breve fra le durate misurate dagli osservatori inerziali.

Trasformazioni di Lorentz
Le formule $x' = \gamma(x - vt)$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = \gamma(t - vx/c^2)$ che legano le coordinate di un evento in due riferimenti inerziali in configurazione standard, nel rispetto dei postulati di Einstein.

Soluzioni

1. B. Il tempo proprio è quello misurato da un unico orologio presente a entrambi gli eventi, cioè nel riferimento in cui gli eventi avvengono nello stesso punto (C descrive la misura di un tempo **non** proprio).

2. C. $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}36)} = 1/0{,}80 = 1{,}25$. (0,80 è $\sqrt{(1 - \beta^2)}$, cioè $1/\gamma$.)

3. A. $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}64)} = 1/0{,}60 = 1{,}67$; $L = L_0/\gamma = 0{,}60\ L_0$.

4. D. Si contrae solo lo spigolo parallelo al moto: 1 m/γ = 1 m × 0,60 = 0,60 m; i due spigoli perpendicolari restano di 1 m. La contrazione è reale, non apparente: è il risultato di misure.

5. C. Nel riferimento di una astronave (S′, $v = 0{,}60c$) l'altra, che in S ha $u = -0{,}60c$, ha $u' = (-0{,}60 - 0{,}60)c/(1 + 0{,}36) = -0{,}88c$.

6. A. Intervallo di tipo tempo: un corpo più lento della luce può assistere a entrambi gli eventi (nel suo riferimento avvengono nello stesso punto), e l'ordine temporale è assoluto. B e D valgono per l'intervallo di tipo spazio, C per quello di tipo luce.

7. D. L'asse ct' è l'insieme degli eventi con $x' = 0$, cioè la linea d'universo dell'origine di S′: $x = vt$, una retta inclinata verso la linea a 45°.

8. B. La situazione non è simmetrica: il gemello viaggiatore inverte la rotta, cambiando riferimento inerziale, e la sua linea d'universo spezzata ha un tempo proprio minore di quella retta del gemello a casa.

9. F. Per il principio di relatività tutti gli orologi di un riferimento, compresi i processi biologici, rallentano allo stesso modo; altrimenti si potrebbe rivelare il moto confrontandoli.

10. V. La dilatazione è simmetrica fra osservatori inerziali: ciascuno confronta un orologio dell'altro con due propri, sincronizzati con un criterio di simultaneità diverso.

11. V. Con $\Delta x = 0$ e $\Delta t = 0$, le trasformazioni di Lorentz danno $\Delta x' = 0$ e $\Delta t' = 0$: la coincidenza di due eventi è assoluta.

12. F. Per il secondo postulato la luce ha velocità c in ogni riferimento; la formula di composizione dà $(c + 0{,}9c)/(1 + 0{,}9) = c$.

13. $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}95^2)} = 1/\sqrt{0{,}0975} = 3{,}2$. Il fenomeno dura 1,0 s nel riferimento in cui avviene in un punto fisso, che quindi è il tempo proprio: nel laboratorio dura $\gamma \times 1{,}0$ s = 3,2 s.

14. Il tempo proprio è quello di bordo (il proiettore è fermo sull'astronave): $\Delta t_0 = 60$ min. $\gamma = 1/0{,}60 = 1{,}67$. Sulla Terra: $\Delta t = 1{,}67 \times 60$ min $= 1{,}0 \times 10^2$ min, cioè 1 ora e 40 minuti.

15. $L = L_0/\gamma = 2{,}0$ m × $\sqrt{(1 - 0{,}36)} = 2{,}0$ m × 0,80 = 1,6 m. La lunghezza propria (2,0 m) è nel riferimento dell'asta.

16. $1/\sqrt{(1 - \beta^2)} = 2 \rightarrow 1 - \beta^2 = 1/4 \rightarrow \beta = \sqrt{3}/2 = 0{,}866$. $v = 0{,}866 \times 3{,}00 \times 10^5$ km/s $= 2{,}60 \times 10^5$ km/s.

17. $\gamma = 1{,}25$, $vt = 0{,}60 \times 3{,}00 \times 10^8$ m/s × $3{,}0 \times 10^{-6}$ s = 540 m. $x' = 1{,}25 \times (600 - 540)$ m = 75 m. $vx/c^2 = 0{,}60 \times 600$ m/$(3{,}00 \times 10^8$ m/s) $= 1{,}2 \times 10^{-6}$ s; $t' = 1{,}25 \times (3{,}0 - 1{,}2)$ μs = 2,25 μs ≈ 2,3 μs. Verifica: $ct = 900$ m, $900^2 - 600^2 = 4{,}5 \times 10^5$ m^2; $ct' = 675$ m, $675^2 - 75^2 = 4{,}5 \times 10^5$ m^2.

18. $u = (0{,}50 + 0{,}50)c/(1 + 0{,}25) = 0{,}80c = 2{,}4 \times 10^8$ m/s rispetto alla Terra. Galileo darebbe $1{,}00c$, cioè la velocità della luce: la previsione classica sbaglia del 25%.

19. $v = 300/3{,}6$ m/s = 83,3 m/s, $\beta = 2{,}78 \times 10^{-7}$, $\beta^2/2 = 3{,}86 \times 10^{-14}$. Il tempo proprio è quello del passeggero; $\Delta t = 3{,}0$ h $= 1{,}08 \times 10^4$ s; ritardo ≈ $3{,}86 \times 10^{-14} \times 1{,}08 \times 10^4$ s $= 4{,}2 \times 10^{-10}$ s, cioè 0,42 ns.

20. A: $3^2 - 1^2 = 8$ (anni luce)$^2 > 0$, tipo tempo, nel futuro assoluto ($ct > 0$): può essere un effetto di O. B: $2^2 - 4^2 = -12 < 0$, tipo spazio, nell'**altrove**: non può essere un effetto di O. C: $3^2 - 3^2 = 0$, tipo luce, sul cono

futuro: può essere raggiunto da un segnale di luce partito da O.

21. Principi: dilatazione dei tempi (il tempo proprio è quello del pione). a) $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}9025)} = 3{,}20$; $\tau_{lab} = 3{,}20 \times 2{,}6 \times 10^{-8}$ s $= 8{,}3 \times 10^{-8}$ s. b) $d = v\tau_{lab} = 0{,}95 \times 3{,}00 \times 10^8$ m/s $\times\ 8{,}33 \times 10^{-8}$ s $= 24$ m. c) Senza dilatazione: $0{,}95 \times 3{,}00 \times 10^8 \times 2{,}6 \times 10^{-8}$ m $= 7{,}4$ m. Le misure con fasci di pioni confermano il valore relativistico.

22. Principi: dilatazione dei tempi nel riferimento della Terra, contrazione nel riferimento del muone. a) Terra: $\Delta t = 1{,}20 \times 10^4$ m/$(0{,}995 \times 3{,}00 \times 10^8$ m/s$) = 4{,}02 \times 10^{-5}$ s $= 40{,}2$ μs (due orologi della Terra, non è un tempo proprio). $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}995^2)} = 10{,}0$; muone: $\Delta t_0 = 40{,}2$ μs$/10{,}0 = 4{,}02$ μs (tempo proprio, un solo orologio). b) Con dilatazione: $e^{-4{,}02/2{,}2} = e^{-1{,}83} = 0{,}16$; senza: $e^{-40{,}2/2{,}2} = e^{-18{,}3} \approx 1{,}2 \times 10^{-8}$. c) Lo spessore proprio, 12,0 km, è nel riferimento della Terra; per il muone $L = 12{,}0$ km$/10{,}0 = 1{,}20$ km. d) $1{,}20 \times 10^3$ m/$(2{,}985 \times 10^8$ m/s$) = 4{,}02 \times 10^{-6}$ s: coincide con il tempo proprio del punto a).

23. a) Terra: $\Delta t = 4{,}24$ anni luce$/0{,}90c = 4{,}71$ anni. b) $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}81)} = 2{,}29$; tempo proprio dell'equipaggio (un solo orologio a bordo presente a partenza e arrivo): $4{,}71/2{,}29 = 2{,}05$ anni. c) La distanza propria 4,24 anni luce è nel riferimento della Terra e della stella; per l'astronave $4{,}24/2{,}29 = 1{,}85$ anni luce. Controllo: 1,85 anni luce$/0{,}90c = 2{,}05$ anni.

24. Principi: contrazione delle lunghezze e trasformazioni di Lorentz (relatività della simultaneità). a) $\gamma = 1{,}25$; nei binari il treno è lungo 300 m$/1{,}25 = 240$ m, e i fulmini colpiscono due punti distanti $\Delta x = 240$ m (simultaneamente, quindi è una misura di lunghezza). b) $\Delta t = 0$: $\Delta t' = \gamma(0 - v\Delta x/c^2) = -1{,}25 \times 0{,}60 \times 240$ m$/(3{,}00 \times 10^8$ m/s$) = -6{,}0 \times 10^{-7}$ s. Con $\Delta x = x_{testa} - x_{coda}$, il segno meno significa che in S′ la testa è colpita 0,60 μs prima della coda. c) $vL_0/c^2 = 0{,}60 \times 300$ m$/(3{,}00 \times 10^8$ m/s$) = 6{,}0 \times 10^{-7}$ s: coincide perché $\gamma\Delta x = \gamma(L_0/\gamma) = L_0$, la distanza fra i punti colpiti misurata nel treno.

25. Principi: gravitazione (Fisica 3: forza centripeta = forza di gravità) e dilatazione dei tempi nel limite non relativistico. a) $v = \sqrt{(GM/r)} = \sqrt{(3{,}99 \times 10^{14}/2{,}66 \times 10^7)}$ m/s $= 3{,}87 \times 10^3$ m/s. b) $\beta = 1{,}29 \times 10^{-5}$, $\beta^2/2 = 8{,}32 \times 10^{-11}$; in 86 400 s il ritardo è $7{,}2 \times 10^{-6}$ s $= 7{,}2$ μs. c) $3{,}00 \times 10^8$ m/s $\times\ 7{,}2 \times 10^{-6}$ s $\approx 2{,}2 \times 10^3$ m, cioè circa 2 km al giorno (l'effetto gravitazionale, di segno opposto e più grande, va aggiunto: vedi il box Collegamenti).

26. Riferimento S′ = un protone ($v = 0{,}99c$); l'altro ha $u = -0{,}99c$ in S. $u' = (-0{,}99 - 0{,}99)c/(1 + 0{,}99^2) = -1{,}98c/1{,}9801 = -0{,}99995c$, cioè 0,999 95$c$ in modulo. Differisce da c di circa $5 \times 10^{-5}\ c \approx 15$ km/s.

27. Principi: dilatazione dei tempi (il tempo proprio di ogni tratto è quello di Bruno) ed effetto Doppler relativistico. a) Anna: $2 \times 6{,}0/0{,}60 = 20$ anni. $\gamma = 1{,}25$: Bruno $20/1{,}25 = 16$ anni (8 all'andata, 8 al ritorno). b) $\sqrt{(1{,}6/0{,}4)} = 2{,}0$ (avvicinamento); 1/2 in allontanamento. c) Andata: 8 anni di Bruno con frequenza 1/2 all'anno → 4 segnali; ritorno: 8 anni con frequenza 2 → 16 segnali. Totale 20, pari agli anni di Anna: Bruno al ritorno trova la sorella invecchiata di 20 anni, lui di 16.

28. a) $\Delta t_0 = 2d/c = 3{,}0$ m$/(3{,}00 \times 10^8$ m/s$) = 1{,}0 \times 10^{-8}$ s $= 10$ ns (tempo proprio, l'orologio è fermo a bordo). b) $\gamma = 1{,}67$: $\Delta t = 16{,}7$ ns ≈ 17 ns. c) In mezzo tic la luce percorre $c\Delta t/2 = 3{,}00 \times 10^8$ m/s $\times\ 8{,}33 \times 10^{-9}$ s $= 2{,}5$ m (ipotenusa di un triangolo con cateti 1,5 m e $v\Delta t/2 = 2{,}0$ m: $1{,}5^2 + 2{,}0^2 = 2{,}5^2$). La luce non va più veloce lungo la diagonale: per il secondo postulato ha velocità c anche in S (come le onde elettromagnetiche del capitolo 5, che si propagano con velocità c qualunque sia il moto della sorgente), quindi impiega di più.

29. Lo studente ha scambiato i ruoli. 33,4 μs è il tempo del viaggio nel riferimento della Terra, misurato da due orologi in luoghi diversi: non è un tempo proprio. Il tempo proprio è quello del muone, nel cui riferimento nascita e arrivo avvengono nello stesso punto, ed è il **minore**: $\Delta t_0 = 33{,}4$ μs$/\gamma = 2{,}11$ μs. Nella legge di decadimento, con la vita media propria 2,2 μs, va il tempo proprio: $e^{-2{,}11/2{,}2} = 0{,}38$. Controllo: il tempo proprio non può mai risultare maggiore del tempo misurato in un altro riferimento.

30. 80 anni $\approx 80 \times 3{,}16 \times 10^7$ s $= 2{,}5 \times 10^9$ s. Serve $\beta^2/2 \times 2{,}5 \times 10^9$ s $= 1$ s, quindi $\beta^2 = 8 \times 10^{-10}$, $\beta \approx 2{,}8 \times 10^{-5}$, $v \approx 8{,}4 \times 10^3$ m/s, circa 8 km/s: proprio la velocità di

un satellite in orbita bassa. Un astronauta che passasse la vita in orbita guadagnerebbe circa un secondo (considerando solo la relatività ristretta; l'effetto gravitazionale in orbita bassa è più piccolo e di segno opposto).

31. Traccia di risposta. Ognuno confronta un solo orologio dell'altro, che gli passa davanti, con **due** orologi propri posti in luoghi diversi, e sincronizzati secondo la propria simultaneità. Poiché la simultaneità è relativa, A ritiene che gli orologi di B siano sincronizzati male, e viceversa: i due confronti riguardano coppie di orologi diverse e non sono la stessa misura. Non nascono contraddizioni perché due orologi in moto relativo uniforme si incontrano una volta sola. Per confrontarli due volte nello stesso luogo uno dei due deve invertire il moto, cioè cambiare riferimento: è il caso dei gemelli, in cui il risultato non è più simmetrico e la teoria dice senza ambiguità quale orologio segna meno tempo.

32. a) $c\Delta t = 3{,}00 \times 10^8$ m/s $\times\ 30 \times 10^{-9}$ s $= 9{,}0$ m; $(\Delta s)^2 = 9{,}0^2 - 7{,}2^2 = 81 - 51{,}84 = 29{,}16$ m^2, $\Delta s = 5{,}4$ m. Positivo: intervallo di tipo tempo, come deve essere per due eventi collegati da una particella più lenta della luce. **b)** $u = 7{,}2$ m/30 ns $= 2{,}4 \times 10^8$ m/s $= 0{,}80c$. **c)** $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}64)} = 1{,}67$; il tempo proprio (riferimento della particella, in cui nascita e decadimento avvengono nello stesso punto) è 30 ns/1,67 = 18 ns. Con l'invariante: $\Delta t_0 = \Delta s/c = 5{,}4$ m/$(3{,}00 \times 10^8$ m/s) = 18 ns, lo stesso risultato. **d)** $\gamma = 1{,}25$. $ct' = 1{,}25 \times (9{,}0 - 0{,}60 \times 7{,}2)$ m $= 1{,}25 \times 4{,}68$ m $= 5{,}85$ m, cioè $t' = 19{,}5$ ns; $x' = 1{,}25 \times (7{,}2 - 0{,}60 \times 9{,}0)$ m $= 1{,}25 \times 1{,}8$ m $= 2{,}25$ m. Verifica: $5{,}85^2 - 2{,}25^2 = 34{,}22 - 5{,}06 = 29{,}16$ m^2. La durata è 30 ns nel laboratorio, 19,5 ns in S′, 18 ns nel riferimento della particella: la più breve è quella propria, perché $(c\Delta t)^2 = (\Delta s)^2 + (\Delta x)^2$ è minima dove $\Delta x = 0$. *Indicatori: a) Analizzare; b), c) Sviluppare il processo risolutivo; d) Interpretare/elaborare i dati e Argomentare.*

33. a) $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}64)} = 5/3$. Per la stazione l'astronave è lunga 120 m/(5/3) = 72 m (contrazione: la lunghezza propria è a bordo). Orologio della stazione: 72 m/$(0{,}80 \times 3{,}00 \times 10^8$ m/s) $= 3{,}0 \times 10^{-7}$ s $= 0{,}30$ μs. Per l'equipaggio è la stazione a percorrere l'astronave, lunga 120 m: 120 m/$(2{,}4 \times 10^8$ m/s) $= 0{,}50$ μs. Il tempo proprio è quello della stazione, perché i due eventi (passaggio della prua, passaggio della poppa) avvengono entrambi davanti alla stazione, misurati da un solo orologio; controllo: 0,50 μs $= \gamma \times 0{,}30$ μs. **b)** A bordo: $\Delta t' = 120$ m/$c = 0{,}40$ μs, con $\Delta x' = 120$ m. Lorentz (inversa): $\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2) = (5/3)(0{,}40 + 0{,}80 \times 120/(3{,}00 \times 10^8) \times 10^6)$ μs $= (5/3)(0{,}40 + 0{,}32)$ μs $= 1{,}2$ μs. Dalla stazione: la luce insegue la prua, che parte 72 m avanti e si allontana a 0,80c; la distanza si riduce alla rapidità $c - 0{,}80c = 0{,}60 \times 10^8$ m/s, quindi $\Delta t = 72$ m/$(0{,}60 \times 10^8$ m/s) $= 1{,}2$ μs. I due metodi concordano. **c)** Per l'equipaggio $\Delta t' = 0$, con $\Delta x' = 120$ m fra prua e poppa. Per la stazione: $\Delta t = \gamma(0 + v\Delta x'/c^2) = (5/3) \times 0{,}80 \times 120$ m/$(3{,}00 \times 10^8$ m/s) $= 5{,}3 \times 10^{-7}$ s. Con $\Delta x' = x'_{\text{prua}} - x'_{\text{poppa}} > 0$, $\Delta t > 0$: per la stazione la lampada di prua si accende 0,53 μs **dopo** quella di poppa, cioè si accende prima la poppa. Non sono simultanee: la simultaneità di eventi lontani è relativa. **d)** Traccia: per il secondo postulato la velocità della luce è c in ogni riferimento; poiché lo spazio percorso dalla luce e il tempo impiegato devono dare lo stesso rapporto c per tutti, durate e distanze devono cambiare insieme, come prescrivono le trasformazioni di Lorentz, che conservano l'intervallo. Nel punto b) la luce percorre 120 m in 0,40 μs a bordo e 360 m in 1,2 μs per la stazione: in entrambi i casi $3{,}00 \times 10^8$ m/s. *Indicatori: a) Analizzare; b) Sviluppare il processo risolutivo; c) Interpretare/elaborare i dati; d) Argomentare.*