CAPITOLO

7

Dalla relatività galileiana ai postulati di Einstein

«D'ora in poi lo spazio per sé e il tempo per sé sono destinati a ridursi del tutto a ombre, e soltanto una sorta di unione dei due conserverà un'esistenza autonoma.»
— Hermann Minkowski, Spazio e tempo, 1908 (traduzione della redazione)

OBIETTIVI

1. Spiegare perché le equazioni di Maxwell e le trasformazioni di Galileo non possono valere insieme, e che cosa si intendeva per etere.
2. Descrivere l'interferometro di Michelson, calcolare lo spostamento di frange previsto nell'esperimento di Michelson e Morley e interpretarne il risultato nullo.
3. Enunciare i due postulati della relatività ristretta e dire a quali idee della fisica classica obbligano a rinunciare.
4. Definire la simultaneità con orologi sincronizzati mediante la luce e mostrare, con l'esperimento ideale del treno, che dipende dal sistema di riferimento.
5. Rappresentare eventi e linee d'universo in un diagramma spazio-tempo e leggervi velocità, istanti e segnali luminosi.

INDICE DEL CAPITOLO

7.1 Il problema della luce 2
7.2 L'esperimento di Michelson e Morley 5
7.3 I postulati della relatività ristretta 13
7.4 La relatività della simultaneità 17
7.5 Il diagramma spazio-tempo 21

Fisica 5 · Parte III · La relatività ristretta · versione 1.0
Capitolo 7: Dalla relatività galileiana ai postulati di Einstein · pagine 225–256 del volume completo · estratto per lo studio

Nel 1905 un impiegato dell'Ufficio brevetti di Berna, di ventisei anni, pubblicò un articolo dal titolo poco promettente, *Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento*. Albert Einstein vi sosteneva che due eventi lontani che avvengono «nello stesso istante» per un osservatore non sono, in generale, simultanei per un altro osservatore in moto rispetto al primo, e che non si tratta di un'illusione né di un errore di misura: è il tempo stesso a non essere uguale per tutti. Più tardi raccontò che una delle domande da cui era partito se l'era posta a sedici anni: che cosa vedrebbe chi potesse correre accanto a un raggio di luce, alla sua stessa velocità?

In questo capitolo ricostruiamo il percorso che ha portato a quella conclusione. Partiremo da un conflitto fra due teorie che funzionavano benissimo, la meccanica di Galileo e Newton e l'elettromagnetismo di Maxwell; vedremo come l'esperimento più preciso dell'Ottocento, quello di Michelson e Morley, cercò un «vento» che non c'era; enunceremo i due postulati con cui Einstein risolse il conflitto e ne trarremo la prima, sorprendente conseguenza: la simultaneità di due eventi lontani dipende dall'osservatore. Infine impareremo a disegnare eventi e moti in un diagramma spazio-tempo, lo strumento con cui, nel capitolo 8, ricaveremo la dilatazione dei tempi e la contrazione delle lunghezze.

7.1 Il problema della luce

7.1.1 Ripartiamo da… i sistemi inerziali e le trasformazioni di Galileo

Nel volume del terzo anno (*Fisica 3*, capitolo 2) abbiamo descritto lo stesso moto da due sistemi inerziali, quelli in cui vale il principio d'inerzia. Fissiamo ora una disposizione che useremo in tutta questa parte del libro, la **configurazione standard**: due sistemi di riferimento S e S' hanno gli assi paralleli, S' si muove rispetto a S con velocità costante v nel verso positivo dell'asse x, e le due origini coincidono all'istante $t = t' = 0$. Un fatto che avviene in un punto e in un istante ha coordinate (x, y, z, t) in S e (x', y', z', t') in S', legate dalle trasformazioni di Galileo:

$$x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t$$

Nel terzo anno la velocità del sistema mobile si indicava con V; da qui in poi la chiamiamo v, e indichiamo con u e u' le velocità di un corpo misurate in S e in S'. Per un moto lungo x le trasformazioni danno la regola di composizione delle velocità $u' = u - v$, mentre l'accelerazione è la stessa nei due sistemi. Per questo il secondo principio della dinamica ha la stessa forma in S e in S': è il principio di relatività galileiana, secondo cui le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali e nessun esperimento di meccanica, chiusi nella stiva della nave di Galileo, rivela se la nave è ferma o in moto rettilineo uniforme.

Nelle trasformazioni c'è un'ipotesi che sembra troppo ovvia per essere discussa: $t' = t$. Newton la formulò esplicitamente parlando di un **tempo assoluto**, che scorre in modo uniforme e uguale per tutti, indipendentemente da chi lo misura e da come si muove. Vedremo che è proprio questa ipotesi a dover cadere. Ci servirà spesso anche il rapporto fra la velocità del sistema mobile e quella della luce, che indichiamo con $\beta = v/c$: per un treno a 100 m/s vale $3{,}3 \times 10^{-7}$, per la Terra sulla sua orbita, a 30 km/s, vale $1{,}0 \times 10^{-4}$.

7.1.2 Una velocità senza riferimento

Nel capitolo 4 abbiamo visto che le equazioni di Maxwell prevedono onde elettromagnetiche che si propagano nel vuoto con velocità $c = 1/\sqrt{(\varepsilon_0 \mu_0)} \approx 3{,}00 \times 10^8$ m/s, e nel capitolo 5 che la luce è una di queste onde. Il valore di c si ottiene da due costanti misurate in laboratorio con cariche e correnti; nella formula non c'è traccia di un sistema di riferimento. Per il suono la situazione era chiara: 343 m/s è la velocità rispetto all'aria (*Fisica 4*, capitolo 7), e chi corre incontro all'onda la vede arrivare più veloce. Era naturale pensare lo stesso della luce.

I fisici dell'Ottocento conclusero infatti che anche la luce dovesse propagarsi in un mezzo, l'**etere** (o etere luminifero): una sostanza invisibile, senza peso, che riempiva tutto lo spazio, anche il vuoto fra le stelle, e penetrava nella materia. L'etere era il sistema di riferimento in cui le equazioni di Maxwell valevano esattamente e la luce viaggiava con velocità c in ogni direzione. Se valgono le trasformazioni di Galileo, un osservatore in moto rispetto all'etere con velocità v deve misurare $c - v$ per la luce che procede nel suo stesso verso e $c + v$ per quella che gli viene incontro (Figura 7.1).

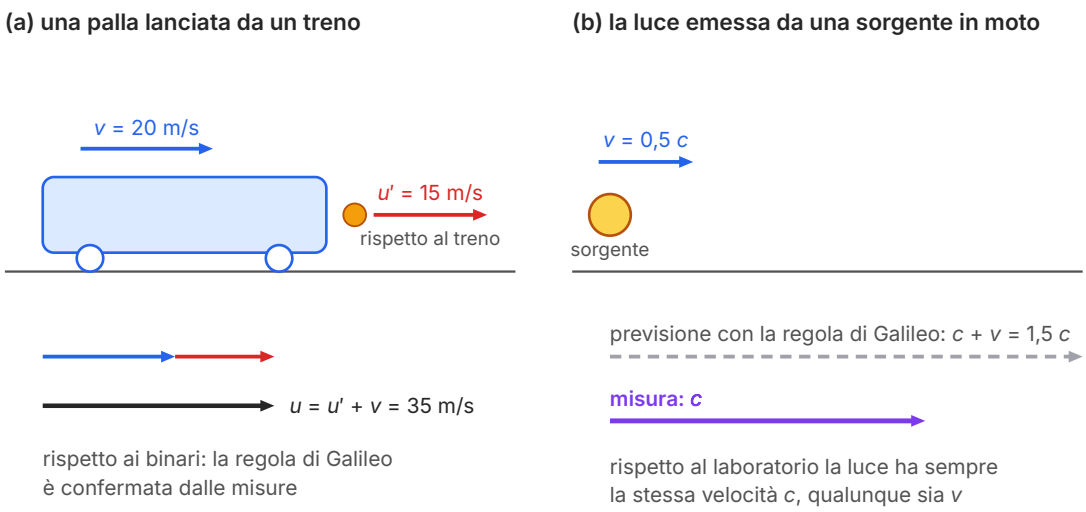

Figura 7.1 Due previsioni della regola di composizione di Galileo. (a) Una palla lanciata con velocità $u' = 15$ m/s rispetto a un treno che viaggia a $v = 20$ m/s ha, rispetto ai binari, la velocità $u = u' + v = 35$ m/s; le misure lo confermano. (b) Con la stessa regola, la luce emessa in avanti da una sorgente che si muove con velocità 0,5 c dovrebbe viaggiare a 1,5 c; le misure danno sempre c. Le frecce in basso sono in scala fra loro: in (b) la freccia violetta, c, è lunga 2/3 di quella grigia, 1,5 c.

La conseguenza era pesante. Le equazioni di Maxwell non avrebbero avuto la stessa forma in tutti i sistemi inerziali: valide nell'etere, sarebbero diventate diverse, e più complicate, in un laboratorio in moto. Allora un esperimento di ottica o di elettromagnetismo, a differenza di uno di meccanica, avrebbe potuto rivelare il moto «assoluto» del laboratorio rispetto all'etere, e il principio di relatività sarebbe valso solo per una parte della fisica. Alla fine dell'Ottocento le strade possibili erano tre: rinunciare al principio di relatività per l'elettromagnetismo; correggere le equazioni di Maxwell; correggere le trasformazioni di Galileo. La terza, che nessuno prendeva sul serio, è quella che Einstein percorse.

7.1.3 Una calamita, una spira e due spiegazioni

C'era anche un secondo indizio, meno vistoso, che riguarda l'induzione. Consideriamo una calamita e una spira che si avvicinano con velocità relativa costante. Se la spira è ferma e la calamita si muove, il campo magnetico nella spira cambia nel tempo e, come abbiamo visto nel capitolo 4, genera un campo elettrico indotto con linee chiuse, che mette in moto le cariche del filo. Se invece è ferma la calamita e si muove la spira, il campo magnetico in ogni punto non cambia e non c'è alcun campo elettrico indotto: sulle cariche del filo in moto agisce la forza di Lorentz $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$, che produce la forza elettromotrice di movimento del capitolo 1.

Le due spiegazioni sono diverse, ma i calcoli danno la stessa forza elettromotrice e la stessa corrente, purché la velocità relativa sia la stessa. L'esperimento «vede» soltanto il moto relativo di calamita e spira; la teoria, invece, lo descriveva in due modi distinti a seconda di chi si muove rispetto all'etere. Come abbiamo osservato nel capitolo 4, la divisione del campo elettromagnetico in una parte elettrica e una magnetica dipende dall'osservatore. Einstein aprì il suo articolo del 1905 proprio con questa asimmetria, che a suo giudizio non apparteneva ai fenomeni ma al modo di descriverli.

7.2 L'esperimento di Michelson e Morley

7.2.1 L'interferometro

Se l'etere esiste, la Terra vi si muove dentro: gira attorno al Sole a circa 30 km/s, e anche se l'etere fosse in quiete rispetto al Sole un laboratorio sulla Terra sarebbe investito da un «vento d'etere» di quella velocità. Il problema è che il vento cambia la velocità della luce di una parte su diecimila ($\beta = 10^{-4}$), e, come vedremo, l'effetto misurabile in un esperimento in cui la luce va e torna è dell'ordine di $\beta^2 = 10^{-8}$. Per rivelarlo occorreva lo strumento più sensibile che la fisica dell'epoca sapesse costruire. Lo inventò Albert A. Michelson.

L'**interferometro di Michelson** (Figura 7.2) divide un fascio di luce in due parti, le manda lungo due percorsi perpendicolari e le fa poi sovrapporre. Il fascio della sorgente incontra una **lamina semiriflettente**, un vetro con un sottile strato metallico inclinato di 45°, che ne trasmette metà e ne riflette metà. Il fascio trasmesso percorre il braccio 1, viene riflesso dallo specchio M_1 e torna alla lamina, che lo riflette verso lo schermo; il fascio riflesso percorre il braccio 2, perpendicolare al primo, torna indietro dallo specchio M_2 e attraversa la lamina verso lo schermo. Una *lamina compensatrice*, uguale alla prima ma senza strato metallico, fa sì che i due fasci attraversino lo stesso spessore di vetro.

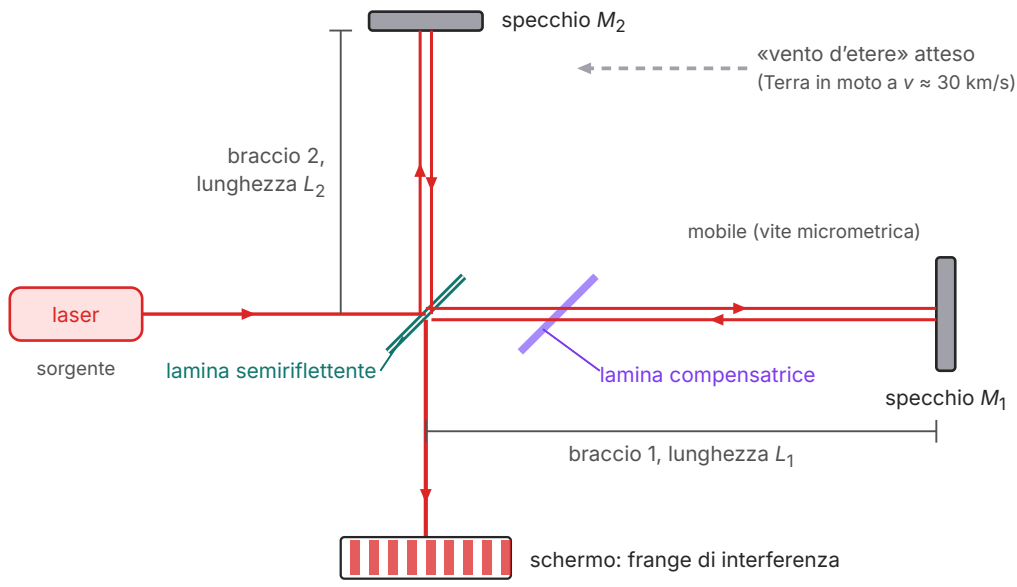

Figura 7.2 Schema dell'interferometro di Michelson, visto dall'alto. La lamina semiriflettente divide il fascio del laser in due parti, che percorrono i bracci perpendicolari 1 e 2, sono riflesse dagli specchi M_1 e M_2 e si ricombinano verso lo schermo, dove interferiscono. I fasci di andata e di ritorno, che in realtà si sovrappongono, sono disegnati leggermente separati. La freccia grigia indica la direzione del «vento d'etere» che ci si aspettava nell'esperimento di Michelson e Morley.

Sullo schermo le due onde interferiscono, come nell'esperimento di Young (*Fisica 4*, capitolo 8): dove arrivano in fase si ha luce, dove arrivano in opposizione di fase si ha buio, e si osserva una serie di frange di interferenza chiare e scure. La posizione delle frange dipende dalla differenza fra i tempi che la luce impiega nei due bracci. Se si sposta lo specchio M_1 di Δd, il percorso della luce nel braccio 1 cambia di $2\Delta d$, perché la luce lo percorre all'andata e al ritorno; ogni volta che $2\Delta d$ aumenta di una lunghezza d'onda, sullo schermo una frangia prende il posto della successiva. Spostando lo specchio di Δd si contano quindi N frange, con

$$2\Delta d = N\lambda$$

Con un po' di pratica si apprezza uno spostamento di un decimo di frangia: con luce di 600 nm significa accorgersi che uno specchio si è mosso di 30 nm, meno di un millesimo dello spessore di un capello. È questa sensibilità che Michelson e Morley sfruttarono.

7.2.2 Che cosa ci si aspettava

Supponiamo che il braccio 1, di lunghezza L, sia parallelo al vento d'etere e il braccio 2, della stessa lunghezza, perpendicolare. Nel sistema del laboratorio, secondo le regole di Galileo, la luce percorre il braccio 1 a velocità $c - v$ all'andata e $c + v$ al ritorno, e il braccio 2 a una velocità diversa da entrambe. I due tempi non sono uguali: lo calcoliamo passo per passo nell'esempio svolto che segue. Il risultato, per β piccolo, è che la luce del braccio parallelo arriva in ritardo di un tempo $\Delta t \approx (L/c)\beta^2$.

Non si può misurare direttamente questo ritardo, perché nessuno sa costruire due bracci uguali con la precisione di una frazione di lunghezza d'onda. Si può però **ruotare** l'apparato di 90°: i due bracci si scambiano i ruoli, il ritardo cambia segno e le frange si spostano. Quello che conta è lo spostamento durante la rotazione, non la posizione delle frange.

ESEMPIO SVOLTO

Lo spostamento delle frange previsto con l'etere

Problema. Un interferometro ha due bracci di lunghezza L; il braccio 1 è parallelo al vento d'etere, di velocità v, il braccio 2 perpendicolare. Ricava, con le regole della fisica classica, la differenza fra i tempi di andata e ritorno nei due bracci e lo spostamento di frange quando l'apparato ruota di 90°. Calcolalo con i dati di Michelson e Morley: $L \approx 11$ m, $v = 30$ km/s, $\lambda \approx 550$ nm.

Passo 1: il braccio parallelo. Nel sistema del laboratorio la luce va verso M_1 controvento, alla velocità $c - v$, e torna con il vento, a $c + v$:

$$t_{\parallel} = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2}$$

Passo 2: il braccio perpendicolare. Per raggiungere M_2 la luce deve puntare un po' controvento, come un nuotatore che attraversa un fiume (*Fisica 3*, capitolo 2): rispetto all'etere ha velocità c, la sua componente lungo il vento compensa v, e quella lungo il braccio vale $\sqrt{(c^2 - v^2)}$, all'andata come al ritorno:

$$t_{\perp} = \frac{2L}{\sqrt{(c^2 - v^2)}} = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)}}$$

Passo 3: la differenza. Per x molto piccolo valgono le approssimazioni $1/(1 - x) \approx 1 + x$ e $1/\sqrt{(1 - x)} \approx 1 + x/2$ (prova con $x = 0{,}01$: $1/0{,}99 = 1{,}0101$ e $1/\sqrt{0{,}99} = 1{,}0050$). Con $x = \beta^2$:

$$\Delta t = t_{\parallel} - t_{\perp} \approx \frac{2L}{c}\left(1 + \beta^2 - 1 - \frac{\beta^2}{2}\right) = \frac{L}{c}\beta^2$$

Passo 4: la rotazione. Ruotando l'apparato di 90° il braccio 1 diventa perpendicolare al vento e il braccio 2 parallelo: la differenza diventa $-(L/c)\beta^2$. Il ritardo di un fascio rispetto all'altro cambia quindi di $2(L/c)\beta^2$, e la differenza di cammino di c volte tanto, cioè di $2L\beta^2$. Ogni lunghezza d'onda di differenza di cammino sposta il sistema di frange di una frangia:

$$\Delta N = \frac{2L\beta^2}{\lambda}$$

Passo 5: i numeri. Con $\beta = (3{,}0 \times 10^4 \text{ m/s})/(3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s}) = 1{,}0 \times 10^{-4}$, $\beta^2 = 1{,}0 \times 10^{-8}$:

$$\Delta N = \frac{2 \times 11 \text{ m} \times 1{,}0 \times 10^{-8}}{550 \times 10^{-9} \text{ m}} = 0{,}40$$

Controllo. Il tempo di andata e ritorno in un braccio è $2L/c = 7{,}3 \times 10^{-8}$ s; il ritardo $\Delta t = (11 \text{ m}/3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s}) \times 10^{-8} = 3{,}7 \times 10^{-16}$ s ne è una parte su duecento milioni. Un orologio non potrebbe mai misurarlo; l'interferenza sì, perché confronta il ritardo con il periodo dell'onda luminosa, $\lambda/c = 1{,}8 \times 10^{-15}$ s: il ritardo ne è circa il 20%, e raddoppiato dalla rotazione dà 0,4 frange.

7.2.3 Il risultato nullo

Albert Michelson ed Edward Morley eseguirono l'esperimento nel 1887, a Cleveland, negli Stati Uniti. Per allungare i bracci fino a circa 11 m senza rendere l'apparato instabile, fecero rimbalzare la luce più volte fra specchi montati su una lastra di pietra quadrata di circa un metro e mezzo di lato; la lastra galleggiava su una vasca di mercurio, così da poterla ruotare lentamente e senza scosse, e le frange si osservavano con un cannocchiale durante la rotazione. Le misure furono ripetute in giorni diversi e in diverse ore del giorno, perché con la rotazione della Terra cambia l'orientazione del laboratorio rispetto alla direzione del moto orbitale.

Lo spostamento previsto, 0,4 frange, sarebbe stato ben visibile. Le frange invece rimasero ferme: gli spostamenti osservati, secondo gli autori, erano minori di un ventesimo di quello atteso (Figura 7.3). Poiché ΔN è proporzionale a v^2, uno spostamento venti volte più piccolo corrisponde a una velocità $\sqrt{20} \approx 4{,}5$ volte più piccola: la Terra si sarebbe mossa rispetto all'etere a meno di 7 km/s, mentre si muove rispetto al Sole a 30 km/s. È il più famoso risultato nullo della storia della fisica. Ripetuto nel Novecento con laser e risonatori ottici sempre più stabili, l'esperimento ha confermato il risultato con una precisione di molti ordini di grandezza superiore.

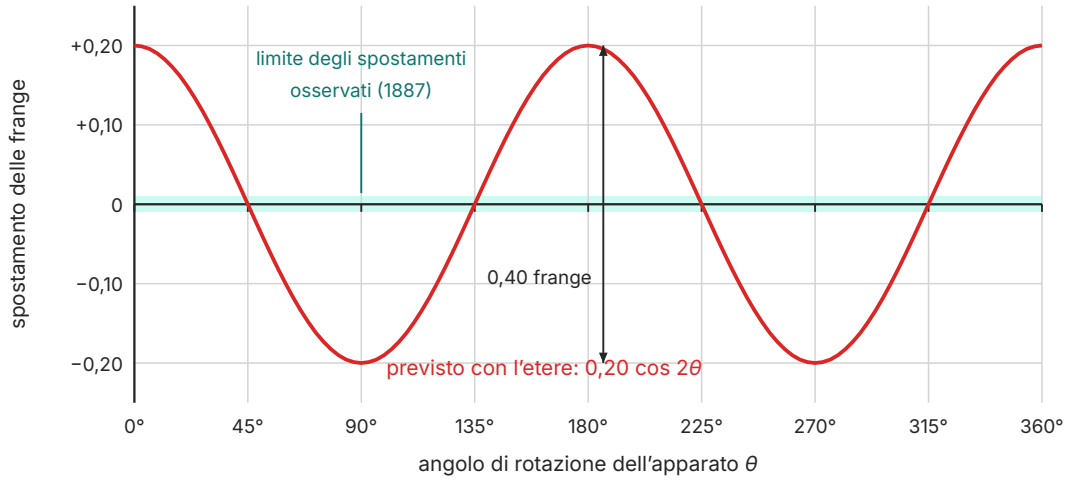

Figura 7.3 Spostamento delle frange in funzione dell'angolo di rotazione dell'apparato, rispetto alla posizione media. La curva rossa è la previsione calcolata con l'ipotesi dell'etere, $\Delta N(\theta) = 0{,}20 \cos 2\theta$ (con $L = 11$ m, $v = 30$ km/s, $\lambda = 550$ nm): fra due orientazioni a 90° lo spostamento è di 0,40 frange. La fascia verde indica la grandezza massima degli spostamenti osservati nel 1887, meno di un ventesimo di quello previsto (schema, non i dati originali).

Prima di rinunciare all'etere si tentarono altre spiegazioni. Forse la Terra trascina con sé l'etere che la circonda, come un treno trascina l'aria vicina, e nel laboratorio non c'è vento. Ma un

etere trascinato non spiega l'aberrazione della luce delle stelle, il piccolo spostamento apparente annuo della loro posizione dovuto al moto della Terra, che si osservava da più di un secolo. Forse la luce si muove a velocità c rispetto alla sorgente che l'ha emessa, come un proiettile: ma allora la luce di una stella doppia, che orbita attorno alla compagna, arriverebbe con velocità diverse nelle diverse fasi dell'orbita, e le immagini delle due stelle risulterebbero confuse, cosa che non si osserva (lo verificherai negli esercizi). La spiegazione più ingegnosa, la contrazione dei corpi in moto, è descritta nell'approfondimento che segue.

APPROFONDIMENTO

La contrazione di Lorentz-FitzGerald

Alla fine dell'Ottocento l'irlandese George FitzGerald e, indipendentemente, l'olandese Hendrik Lorentz proposero un'ipotesi audace, la **contrazione di Lorentz-FitzGerald**: un corpo che si muove attraverso l'etere si accorcia nella direzione del moto di un fattore $\sqrt{(1-\beta^2)}$. Se il braccio parallelo al vento misura $L\sqrt{(1-\beta^2)}$, il suo tempo di andata e ritorno diventa

$$t_{\parallel} = \frac{2L\sqrt{(1-\beta^2)}}{c} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}} = t_{\perp}$$

e il risultato nullo è spiegato esattamente, per qualunque velocità. Per la Terra la contrazione sarebbe di cinque parti su un miliardo: un diametro terrestre si accorcerebbe di circa 6 cm. Nessun regolo potrebbe rivelarla, perché si accorcerebbe anch'esso.

L'ipotesi aveva però un difetto grave: era **ad hoc**, cioè inventata proprio per spiegare quel risultato. Lorentz cercò di giustificarla con le forze elettriche fra le particelle della materia e costruì una teoria completa dell'elettrone nell'etere, in cui comparivano le trasformazioni che oggi portano il suo nome (1904) e un «tempo locale» diverso da punto a punto, che egli considerava un artificio di calcolo. Henri Poincaré, negli stessi anni, discusse a fondo il principio di relatività e il significato della sincronizzazione degli orologi. La matematica era quasi tutta pronta; mancava l'idea di Einstein: che il tempo locale fosse il tempo vero, misurato dagli orologi, e che l'etere fosse semplicemente superfluo. Nel capitolo 8 ritroveremo la contrazione, ma come conseguenza dei postulati della relatività e non come effetto dell'etere.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: l'interferometro di Michelson

Materiali. Un interferometro di Michelson didattico su base metallica, con lo specchio M_1 spostato da una vite micrometrica con leva di riduzione (una divisione del tamburo corrisponde a uno spostamento dello specchio di 1 µm, con incertezza di taratura dell'1% dichiarata dal costruttore); un laser elio-neon di classe 2 (λ nominale 632,8 nm); una lente divergente per allargare il fascio; uno schermo bianco.

Procedimento. 1) Allinea gli specchi finché sullo schermo compaiono anelli concentrici ben contrastati. 2) Scegli come riferimento il centro degli anelli e ruota lentamente il tamburo, sempre nello stesso verso (per non introdurre il gioco della vite), contando le frange che compaiono o spariscono al centro; conviene contare in due, uno che ruota e uno che conta. 3) Registra il numero di frange N per spostamenti Δd di 10, 20, 30, 40 e 50 µm, ripartendo ogni volta da zero (Tabella 7.1). 4) Per ogni misura calcola $\lambda = 2\Delta d/N$.

Tabella 7.1 Numero di frange contate spostando lo specchio dell'interferometro (dati tipici). L'incertezza su N è ±1 frangia; quella su Δd è l'1% di taratura. Nell'ultima colonna l'incertezza su λ è la somma delle incertezze relative.

Δd (µm)	N	$\lambda = 2\Delta d/N$ (nm)	Incertezza su λ (nm)
10,0	32	625	± 26
20,0	63	635	± 16
30,0	95	632	± 13
40,0	127	630	± 11
50,0	158	633	± 10

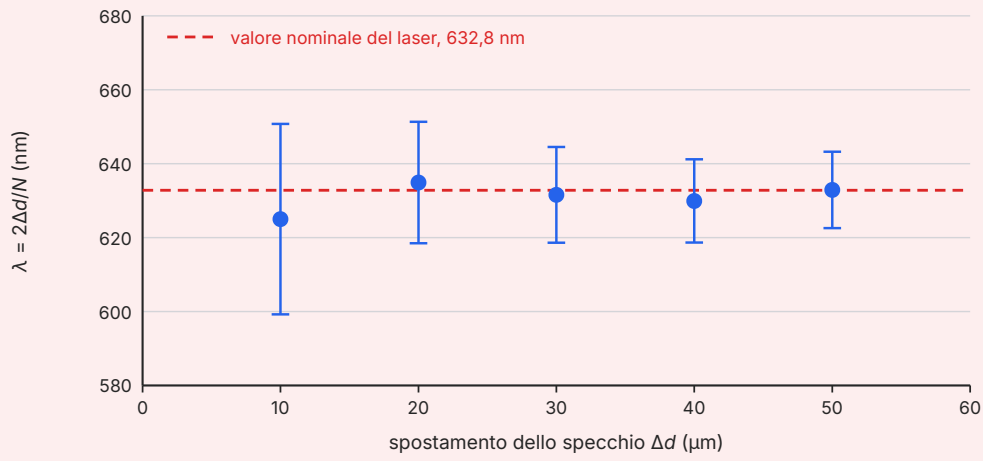

Figura 7.4 La lunghezza d'onda ricavata da ciascuna misura della Tabella 7.1, con la sua incertezza, confrontata con il valore nominale del laser (632,8 nm). L'incertezza diminuisce con lo spostamento perché l'errore di conteggio, ±1 frangia, pesa di meno quando le frange contate sono molte.

Che cosa concludere. Le cinque stime di λ sono compatibili fra loro e con il valore nominale (Figura 7.4). La misura migliore è l'ultima, che conta più frange: $\lambda = (633 \pm 10)$ nm. Mettendo insieme tutte le misure, la pendenza della retta di N in funzione di Δd passante per l'origine è 3,165 frange/μm, da cui $\lambda = 2/(3{,}165\ \mu\text{m}^{-1}) = 632$ nm, con un'incertezza dovuta soprattutto alla taratura della vite (1%) e in parte al conteggio: $\lambda = (632 \pm 8)$ nm.

Confronto teoria–esperimento. La differenza fra misura e valore nominale, meno di 1 nm, è molto minore dell'incertezza, 8 nm: i due valori sono compatibili (*Fisica 1*, capitolo 4). Il risultato dice anche quanto è sensibile lo strumento: se si apprezza un decimo di frangia, si rivela uno spostamento dello specchio di $\lambda/20 \approx 32$ nm, cioè una variazione della differenza di cammino di circa 60 nm su bracci lunghi una decina di centimetri. Michelson e Morley avrebbero dovuto vedere una variazione di $0{,}4 \times 550$ nm ≈ 220 nm su un cammino di 22 m: una parte su cento milioni, alla portata del loro strumento.

Sicurezza. Il laser è di classe 2: non guardare mai nel fascio né nei suoi riflessi sugli specchi, tieni il fascio sotto l'altezza degli occhi, togli anelli e orologi che possono rifletterlo. Non smontare la lamina semiriflettente, che è fragile e ha la superficie trattata.

Per la relazione. Segui lo schema di *Fisica 1*, capitolo 5. Costruisci il grafico di N in funzione di Δd e ricava λ dalla pendenza; spiega perché è meglio contare molte frange piuttosto che poche, perché la vite va ruotata sempre nello stesso verso e perché basta sfiorare il tavolo per far «ballare» le frange. Discuti come Michelson e Morley poterono isolare l'apparato dalle vibrazioni e dalle variazioni di temperatura.

COLLEGAMENTI

Interferometri lunghi chilometri

L'interferometro di Michelson è oggi uno strumento di misura comune, dai controlli di planarità delle superfici ottiche alla misura di piccole dilatazioni. Il suo erede più spettacolare sono i rivelatori di onde gravitazionali: i due interferometri LIGO, negli Stati Uniti, hanno bracci di 4 km, e Virgo, a Cascina, vicino a Pisa, bracci di 3 km. Un'onda gravitazionale che attraversa la Terra allunga un braccio e accorcia l'altro di una quantità piccolissima, che per i segnali osservati è dell'ordine di un millesimo del diametro di un protone. La prima rivelazione, del 2015 e annunciata nel 2016, ha aperto un modo nuovo di osservare l'universo (ne riparleremo nel capitolo 9). Lo schema è lo stesso della Figura 7.2: due bracci perpendicolari, una lamina semiriflettente e un confronto fra tempi di percorrenza della luce.

7.3 I postulati della relatività ristretta

7.3.1 Il punto di vista di Einstein

Einstein capovolse il problema. Invece di chiedersi perché l'etere sfugga a ogni misura, assunse come punto di partenza che non esista alcun esperimento capace di rivelare il moto rettilineo uniforme di un laboratorio: né di meccanica, né di ottica, né di elettromagnetismo. Da due soli postulati costruì la teoria che oggi chiamiamo **relatività ristretta** («ristretta» perché riguarda i sistemi inerziali; la relatività generale, che Einstein completò una decina d'anni dopo, include la gravità e i sistemi accelerati).

Primo postulato. Il **principio di relatività**, nella forma di Einstein: *le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali*. È il principio di Galileo esteso dalla meccanica a tutta la fisica, comprese le equazioni di Maxwell. Non esiste un sistema inerziale privilegiato, e quindi non esiste un etere da cui misurare il moto «assoluto».

Secondo postulato. L'**invarianza della velocità della luce**: *nel vuoto la luce si propaga in ogni sistema inerziale con la stessa velocità c, indipendentemente dal moto della sorgente e da quello dell'osservatore*.

I due postulati sono strettamente legati. Se le equazioni di Maxwell valgono in ogni sistema inerziale, come chiede il primo, in ogni sistema inerziale prevedono onde con velocità $1/\sqrt{(\varepsilon_0\mu_0)}$, con le stesse costanti misurate negli stessi esperimenti: il secondo postulato ne è una conseguenza. Einstein lo enunciò separatamente perché è proprio lì che il conflitto con Galileo diventa esplicito. Nel suo articolo osservò che, con i due postulati, l'introduzione di un etere luminifero diventa superflua: non c'è bisogno di uno spazio in quiete assoluta, né di attribuire una velocità a un punto del vuoto in cui avvengono i fenomeni elettromagnetici.

7.3.2 Le prove della costanza di c

Il secondo postulato è stato controllato direttamente. Il risultato di Michelson e Morley mostra che la velocità della luce non dipende dal moto dell'osservatore, almeno con la precisione di quella misura. L'indipendenza dal moto della sorgente si verifica con sorgenti velocissime. Nel 1964, al CERN di Ginevra, si misurò il tempo di volo dei fotoni prodotti dal decadimento di particelle, i pioni neutri, che viaggiavano a più del 99,9% della velocità della luce. Secondo la regola di Galileo i fotoni emessi in avanti avrebbero dovuto viaggiare a quasi $2c$; la misura diede c, entro circa una parte su diecimila (ne trovi una versione semplificata negli esercizi). Gli astronomi avevano già escluso, con le osservazioni delle stelle doppie, che la luce di una stella risenta della velocità della stella.

7.3.3 A che cosa bisogna rinunciare

A prima vista i due postulati sono contraddittori. Immaginiamo che, nell'istante in cui le origini O e O' dei due sistemi coincidono, un lampo di luce parta da quel punto. Dopo un certo tempo, in S la luce ha raggiunto una sfera centrata in O, perché si propaga con velocità c in tutte le direzioni. Ma anche in S' si propaga con velocità c in tutte le direzioni, quindi per S' il fronte è una sfera centrata in O', che intanto si è spostato. Come può lo stesso fronte d'onda essere una sfera attorno a due centri diversi?

Se il tempo è lo stesso per tutti, non può. La contraddizione scompare solo se gli osservatori dei due sistemi non sono d'accordo su «quali punti la luce ha raggiunto **nello stesso istante**». Per salvare entrambi i postulati bisogna dunque rinunciare al tempo assoluto e alle trasformazioni di Galileo, che lo contengono nella relazione $t' = t$, e con esse alla regola di composizione $u' = u - v$, che per la luce darebbe $c - v$. Nel capitolo 8 le sostituiremo con le trasformazioni di Lorentz, che per v molto minore di c si riducono a quelle di Galileo: la meccanica classica non è sbagliata, è un'approssimazione eccellente per i moti lenti. La Tabella 7.2 riassume che cosa cambia.

Tabella 7.2 Il quadro di Galileo e Newton e quello della relatività ristretta a confronto.

	Galileo e Newton	Relatività ristretta (Einstein, 1905)
Principio di relatività	vale per le leggi della meccanica	vale per tutte le leggi della fisica
Velocità della luce	dipende dall'osservatore: $c \pm v$	la stessa, c, in ogni sistema inerziale
Etere	sistema privilegiato, in quiete assoluta	superfluo: nessun sistema è privilegiato
Tempo	assoluto: $t' = t$	dipende dal sistema di riferimento
Simultaneità di eventi lontani	uguale per tutti	dipende dal sistema di riferimento
Trasformazioni fra sistemi inerziali	di Galileo	di Lorentz (capitolo 8); per $v \ll c$ si riducono a quelle di Galileo

ERRORE FREQUENTE

«Secondo la relatività tutto è relativo.» **No.** La teoria parte da due affermazioni su ciò che è **uguale per tutti**: le leggi della fisica e la velocità della luce. Ciò che risulta relativo sono alcune misure, come la simultaneità di eventi lontani e, lo vedremo, gli intervalli di tempo e le lunghezze; ma le relazioni fra le misure di due osservatori sono fissate con esattezza dalle leggi della teoria, e su molte grandezze tutti gli osservatori sono d'accordo.

«Relativo vuol dire soggettivo: dipende da come l'osservatore percepisce.» **No.** Un osservatore, in relatività, è un sistema di riferimento con i suoi regoli e i suoi orologi, e le sue misure non dipendono dalla vista o dalle impressioni di qualcuno. Due persone ferme nello stesso sistema ottengono gli stessi risultati.

APPROFONDIMENTO

L'articolo del 1905

L'articolo *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* («Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento») uscì nel 1905 sulla rivista tedesca *Annalen der Physik*, nello stesso anno in cui Einstein pubblicò il lavoro sui quanti di luce (capitolo 11) e la breve nota in cui compare l'equivalenza fra massa ed energia (capitolo 9). Si apre, come abbiamo detto, con l'esempio della calamita e del conduttore: la teoria di Maxwell, così come era interpretata, dava due spiegazioni diverse di un fenomeno che dipende solo dal moto relativo. Einstein vi accosta i tentativi falliti di rivelare il moto della Terra rispetto al mezzo in cui si propaga la luce, senza citare esplicitamente l'esperimento di Michelson e Morley, ed enuncia i due postulati.

La prima parte dell'articolo, detta «cinematica», non contiene elettromagnetismo: comincia definendo con cura che cosa significhi che due eventi lontani sono simultanei, con una procedura di sincronizzazione degli orologi mediante segnali luminosi, e ne ricava la relatività della simultaneità, le trasformazioni fra due sistemi inerziali, la contrazione delle lunghezze e il rallentamento degli orologi in moto. Solo nella seconda parte applica i risultati alle equazioni di Maxwell. L'articolo non ha bibliografia; nelle righe finali Einstein ringrazia l'amico e collega Michele Besso. È una lettura accessibile, in traduzione, anche a uno studente del quinto anno.

COLLEGAMENTI

Filosofia: il tempo assoluto di Newton

Nei *Principia* (1687) Newton scrive: «Il tempo assoluto, vero e matematico, in sé e per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, scorre uniformemente, e con altro nome è chiamato durata» (traduzione della redazione). Per Kant spazio e tempo sono forme a priori della sensibilità, condizioni di ogni esperienza possibile; per molti filosofi e scienziati dell'Ottocento il tempo uniforme e unico di Newton era una verità evidente. Ernst Mach, nella sua storia critica della meccanica, aveva invece sostenuto che un tempo assoluto, indipendente da ogni cambiamento osservabile, è un concetto metafisico privo di valore scientifico. Einstein riconobbe più volte di dovere molto alla lettura di Hume e di Mach.

La relatività ristretta non elimina il tempo, ma lo rende **operativo**: il tempo di un evento è ciò che segna un orologio posto nel luogo dell'evento e sincronizzato con una procedura precisa. È un esempio, discusso a lungo dalla filosofia della scienza del Novecento, di come un concetto che sembrava evidente possa essere rivisto dall'esperienza.

7.4 La relatività della simultaneità

7.4.1 Eventi e osservatori

Per ragionare con precisione servono due definizioni. Un **evento** è qualcosa che accade in un punto dello spazio e in un istante: lo scoccare di un fulmine, l'emissione di un lampo, l'arrivo di una particella su un rivelatore. È individuato da quattro numeri, le tre coordinate spaziali e il tempo, che però dipendono dal sistema di riferimento. «Un flash» non è un evento; «lo scatto di un flash in piazza del Duomo a Milano, alle 21:14 del 3 marzo» lo è.

Un **osservatore**, in relatività, non è una persona che guarda: è un sistema di riferimento inerziale dotato di regoli e di un reticolo di orologi, fermi in quel sistema, posti in ogni punto e sincronizzati fra loro. Il tempo di un evento è quello che segna l'orologio che si trova **nel luogo dell'evento**, non l'istante in cui la luce dell'evento arriva agli occhi di qualcuno. Due eventi sono **simultanei** per un osservatore se gli orologi del suo sistema che si trovano nei luoghi dei due eventi segnano lo stesso tempo. Tutto dipende, allora, da come si sincronizzano gli orologi.

7.4.2 Sincronizzare gli orologi con la luce

Due orologi vicini si sincronizzano confrontandoli; due orologi lontani no, perché ogni segnale impiega tempo a viaggiare. Si potrebbe portare un orologio da un punto all'altro, ma non sappiamo ancora se un orologio in moto continui a segnare il tempo come uno fermo (nel capitolo 8 scopriremo che non è così). Einstein propose di usare l'unico segnale la cui velocità è, per il secondo postulato, nota e uguale in tutte le direzioni: la luce.

La **sincronizzazione di Einstein** funziona così. Dall'orologio in A parte un lampo all'istante t_A; il lampo è riflesso da uno specchio posto accanto all'orologio in B e torna in A all'istante t_A'. Poiché la luce impiega lo stesso tempo all'andata e al ritorno, l'orologio in B è sincronizzato con quello in A se, al momento della riflessione, segna

$$t_B = t_A + \frac{t_A' - t_A}{2}$$

Se si conosce già la distanza d fra i due orologi, basta impostare l'orologio in B, all'arrivo del lampo partito da A all'istante t_A, sul valore $t_A + d/c$: per due orologi a 3,0 km di distanza la correzione è 10 µs. Un modo equivalente è far partire un lampo dal punto medio fra A e B e azzerare i due orologi nell'istante in cui lo ricevono. Con questa procedura ogni osservatore costruisce il suo reticolo di orologi sincronizzati, e quindi la sua definizione di «nello stesso istante». La domanda è se due osservatori in moto relativo ottengono la stessa definizione.

7.4.3 Il treno e i fulmini

Per rispondere, Einstein immaginò un esperimento ideale che descrisse nel suo libro divulgativo sulla relatività. Un treno molto lungo viaggia su un binario rettilineo con velocità v; per rendere visibili gli effetti, supponiamo $v = 0{,}5\,c$. Due fulmini colpiscono le estremità del treno, A' in coda e B' in testa, proprio mentre passano davanti ai punti A e B della banchina, distanti 600 m, e lasciano un segno sia sul treno sia sulla banchina (Figura 7.5). L'osservatore O, a terra (sistema S), sta nel punto medio fra A e B; l'osservatrice O', sul treno (sistema S'), sta nel punto medio fra A' e B'.

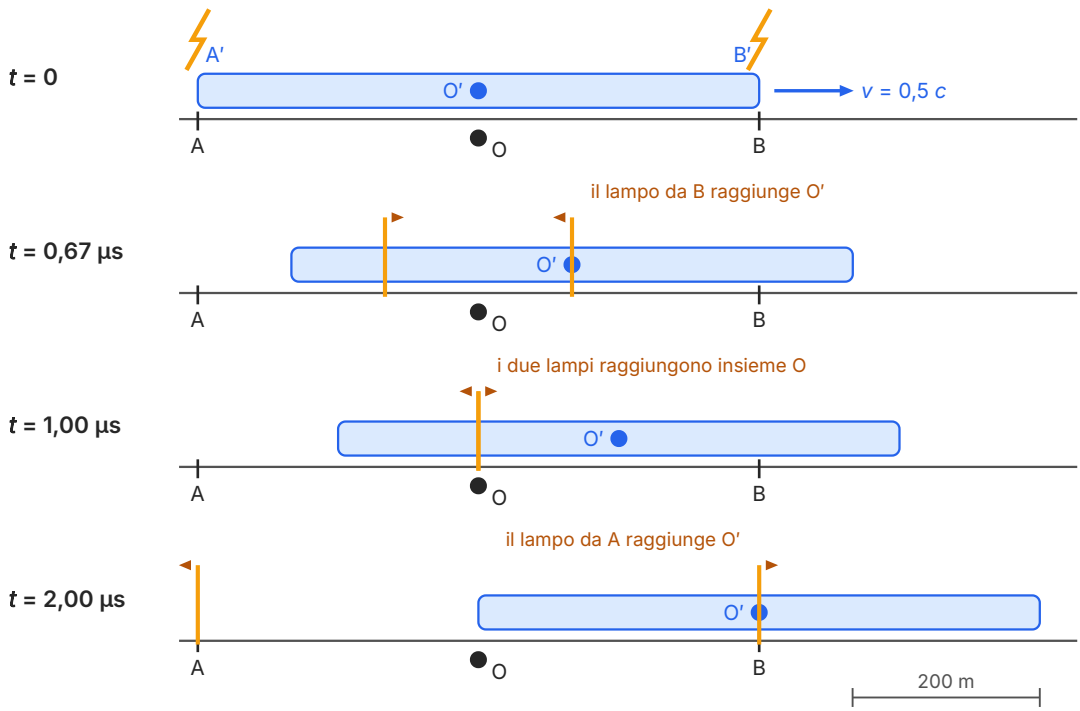

Figura 7.5 L'esperimento ideale del treno e dei fulmini, descritto nel sistema S della banchina e disegnato in scala in quattro istanti. Il treno, lungo 600 m in S, viaggia a 0,5 c. All'istante $t = 0$ due fulmini colpiscono le estremità A' e B' del treno, mentre si trovano davanti ai punti A e B della banchina; le linee arancioni sono i fronti dei due lampi, che si propagano verso il centro a velocità c. O', che va incontro al lampo partito da B, lo riceve a $t = 0{,}67$ µs; O riceve i due lampi insieme a $t = 1{,}00$ µs; O' riceve il lampo partito da A solo a $t = 2{,}00$ µs.

Supponiamo che i fulmini siano simultanei per O: gli orologi di S in A e in B segnano entrambi $t = 0$. In effetti O, che è a metà strada e fermo, riceve i due lampi nello stesso istante, $t = (300\text{ m})/c = 1{,}00$ µs, e la sua conclusione è coerente. Ma intanto O' si sposta verso B: va incontro alla luce

che viene da B e si allontana da quella che viene da A. Riceve il lampo di B prima di quello di A. Questo è un fatto su cui tutti devono concordare, perché riguarda ciò che accade in un solo punto, la posizione di O': un rivelatore che O' tiene in mano registra prima un lampo e poi l'altro.

Ora ragioniamo nel sistema del treno. Per O' il treno è fermo, e lei si trova a uguale distanza dai due segni lasciati dai fulmini sulle estremità A' e B'. Per il secondo postulato, la luce dei due lampi ha viaggiato verso di lei con la stessa velocità c, non con $c + v$ o $c - v$; ha percorso distanze uguali; eppure è arrivata in istanti diversi. L'unica conclusione possibile è che i due lampi siano partiti in istanti diversi: **per O' il fulmine in testa al treno, B', è caduto prima di quello in coda, A'.** Gli orologi di S', sincronizzati con la procedura di Einstein, segnano nei due eventi tempi diversi.

Questa è la **relatività della simultaneità**: due eventi che avvengono in luoghi diversi, simultanei in un sistema di riferimento inerziale, non sono simultanei in un altro sistema che si muova rispetto al primo lungo la direzione che congiunge gli eventi. Nessuno dei due osservatori sbaglia, e non esiste un sistema che dica la simultaneità «vera»: per il primo postulato S e S' sono del tutto equivalenti. Se i fulmini fossero stati simultanei per O', sarebbe stato O a giudicarli non simultanei.

ESEMPIO SVOLTO

Quanto tempo separa i due lampi per chi è sul treno

Problema. Con i dati della Figura 7.5 ($AB = 600$ m in S, $v = 0{,}5\,c$, fulmini simultanei in S all'istante $t = 0$, O' in $x = 0$ a $t = 0$), calcola nel sistema S gli istanti e le posizioni in cui O' riceve i due lampi. Ripeti il calcolo per un treno vero, lungo 300 m, che viaggia a 100 m/s.

Passo 1: le equazioni dei moti in *S*. Prendiamo l'origine in O, con A in $x = -300$ m e B in $x = +300$ m. In S, dove la luce viaggia a c in entrambi i versi: O' si trova in $x = vt$; il fronte del lampo di B in $x = 300\text{ m} - ct$; il fronte del lampo di A in $x = -300\text{ m} + ct$.

Passo 2: l'incontro con il lampo di *B*. Dalla condizione $vt = 300\text{ m} - ct$:

$$t_B = \frac{300\text{ m}}{c + v} = \frac{300\text{ m}}{1{,}5 \times 3{,}00 \times 10^8\text{ m/s}} = 6{,}7 \times 10^{-7}\text{ s} = 0{,}67\ \mu\text{s} \quad x = vt_B = 100\text{ m}$$

Passo 3: l'incontro con il lampo di *A*. Dalla condizione $vt = -300\text{ m} + ct$:

$$t_A = \frac{300\text{ m}}{c - v} = \frac{300\text{ m}}{0{,}5 \times 3{,}00 \times 10^8\text{ m/s}} = 2{,}00 \times 10^{-6}\text{ s} = 2{,}00\ \mu\text{s} \quad x = vt_A = 300\text{ m}$$

Si noti che in S, dove la luce va a c, la luce raggiunge O' alle velocità «relative» $c + v$ e $c - v$: questo è un calcolo fatto tutto in S, con distanze e tempi di S, e non contraddice il secondo postulato, che riguarda la velocità della luce misurata da un osservatore con i suoi regoli e orologi.

Passo 4: il treno vero. Con metà lunghezza $L/2 = 150$ m e $v = 100$ m/s, la differenza fra i due istanti di arrivo è

$$t_A - t_B = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{c - v} - \frac{1}{c + v}\right) = \frac{Lv}{c^2 - v^2} \approx \frac{Lv}{c^2} = \frac{300\text{ m} \times 100\text{ m/s}}{9{,}00 \times 10^{16}\text{ m}^2/\text{s}^2} = 3{,}3 \times 10^{-13}\text{ s}$$

Controllo e commento. Nel primo caso $t_A/t_B = (c + v)/(c - v) = 3$, come risulta dai numeri. Nel secondo caso la differenza è un terzo di picosecondo: è per questo che nella vita quotidiana la simultaneità sembra assoluta. Il calcolo dice in quale ordine i lampi arrivano a O'; da questo, con il ragionamento del testo, segue che per O' il fulmine in B' è caduto prima. Di quanto prima, misurato dagli orologi del treno, lo calcoleremo nel capitolo 8 con le trasformazioni di Lorentz.

ERRORE FREQUENTE

«O' vede prima il lampo di B solo perché gli va incontro: è un ritardo del segnale, e se ne tenesse conto scoprirebbe che i fulmini erano simultanei.» **No.** O' ne tiene conto: sa di trovarsi a metà del treno e sa, per il secondo postulato, che la luce viaggia a c in entrambi i versi nel suo sistema. Proprio correggendo per i tempi di percorrenza, che per lei sono uguali, conclude che i fulmini **non** erano simultanei. La relatività della simultaneità non è un effetto della velocità finita dei segnali, che si corregge facilmente in ogni teoria, ma una proprietà del tempo.

«Allora nessuna coppia di eventi è simultanea per tutti.» **No.** Due eventi che avvengono nello stesso punto e nello stesso istante (due palline che si urtano, un fulmine che colpisce A' mentre è davanti ad A) sono simultanei per ogni osservatore. La simultaneità diventa relativa solo per eventi separati nello spazio lungo la direzione del moto relativo.

7.4.4 Simultaneità e causalità

Se l'ordine temporale di due eventi può dipendere dall'osservatore, si potrebbe temere di vedere un effetto prima della sua causa. Non succede. I due fulmini cadono in punti distanti 600 m nello stesso istante di S: nessun segnale, nemmeno la luce, può andare dall'uno all'altro, e nessuno dei due può essere causa dell'altro. Vedremo nel capitolo 8 che l'ordine di due eventi può cambiare da un osservatore all'altro **solo** in casi come questo, cioè quando la luce non fa in tempo a collegarli; se invece un segnale che viaggia a velocità non maggiore di c può andare dal primo evento al secondo, tutti gli osservatori inerziali li vedono nello stesso ordine. La relatività rinuncia al tempo assoluto, ma conserva l'ordine fra cause ed effetti.

7.5 Il diagramma spazio-tempo

7.5.1 Eventi come punti, moti come linee

Nel 1908 il matematico Hermann Minkowski, che era stato professore di Einstein a Zurigo, mostrò che la teoria diventa più chiara se si rappresentano spazio e tempo in un unico grafico. Nel **diagramma spazio-tempo** (o **diagramma di Minkowski**) l'asse orizzontale porta la coordinata x e l'asse verticale il prodotto ct, cioè la distanza che la luce percorre nel tempo t; così entrambi gli assi si misurano in metri. Su un asse ct graduato in metri, 300 m corrispondono a 1,00 μs e 1 m a 3,3 ns. Lo spazio e il tempo insieme, considerati come un'unica entità a quattro dimensioni (di cui il diagramma mostra solo x e t), formano lo **spazio-tempo**.

Ogni evento è un punto del diagramma. La storia di un corpo, cioè l'insieme degli eventi «il corpo si trova in x all'istante t», è una linea, la sua **linea d'universo** (Figura 7.6). Un corpo fermo in S ha una linea d'universo verticale: il tempo passa, la posizione non cambia. Un corpo in moto rettilineo uniforme con velocità v ha una linea d'universo rettilinea, inclinata rispetto all'asse ct di un angolo α tale che

$$\tan\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta(ct)} = \frac{v}{c} = \beta$$

Un corpo che accelera ha una linea d'universo curva. La luce ha $\beta = 1$: le sue linee d'universo, le **linee di luce**, formano angoli di 45° con gli assi, ed è per avere questa proprietà semplice che sull'asse verticale si riporta ct anziché t. Le linee d'universo di tutti i corpi materiali sono più vicine alla verticale di quelle della luce, perché tutti i corpi che conosciamo si muovono più lentamente della luce; nel capitolo 9 vedremo che nessun corpo dotato di massa può raggiungere c.

Nel diagramma di S gli eventi simultanei in S stanno su una stessa retta orizzontale, e quelli che avvengono nello stesso luogo di S su una stessa retta verticale. L'asse x è l'insieme degli eventi che accadono all'istante $t = 0$, l'asse ct è la linea d'universo dell'origine O.

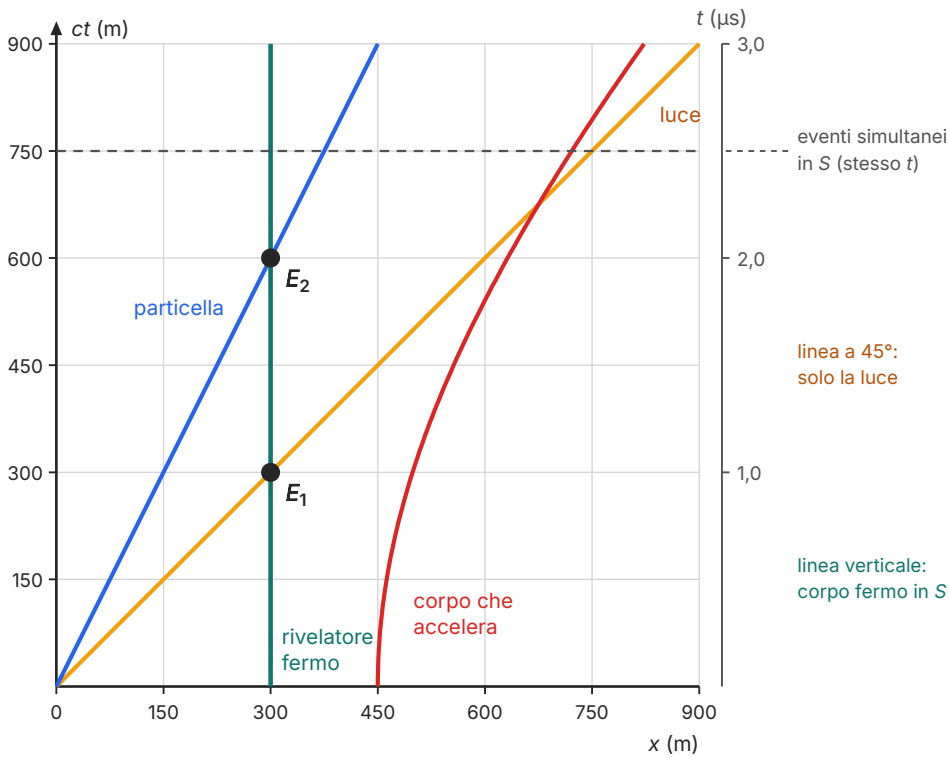

Figura 7.6 Un diagramma spazio-tempo nel sistema S, con x e ct in metri (a destra la scala dei tempi: 300 m di ct corrispondono a 1,00 μs). Linee d'universo: un rivelatore fermo in x = 300 m (verticale), un lampo di luce emesso dall'origine (a 45°), una particella che parte dall'origine con velocità costante, un corpo che parte da fermo da x = 450 m e accelera (curva). E_1 ed E_2 sono gli eventi in cui la luce e la particella raggiungono il rivelatore. La retta tratteggiata unisce eventi simultanei in S.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere un diagramma spazio-tempo

Problema. Nella Figura 7.6 leggi: a) la velocità della particella; b) gli istanti degli eventi E_1 ed E_2 e il tempo che li separa; c) dove si trova la particella quando la luce raggiunge il rivelatore; d) se il corpo che accelera ha superato la velocità della luce nel tratto disegnato.

a) La linea d'universo della particella passa per l'origine e per il punto (x = 450 m, ct = 900 m). La sua pendenza rispetto all'asse ct è $\beta = \Delta x/\Delta(ct)$ = 450 m/900 m = 0,50, quindi $v = 0{,}50 \times 3{,}00 \times 10^8$ m/s = $1{,}5 \times 10^8$ m/s.

b) E_1 ha coordinate (300 m, 300 m): avviene all'istante $t_1 = (300\text{ m})/c$ = 1,00 μs, come si legge sulla scala di destra. E_2 ha coordinate (300 m, 600 m): t_2 = 2,00 μs. Gli eventi avvengono nello stesso punto di S, quindi il tempo che li separa, 1,00 μs, è quello misurato da un solo orologio, quello del rivelatore.

c) All'istante di E_1, ct = 300 m: sulla retta orizzontale ct = 300 m la linea della particella si trova in $x = \beta \cdot ct = 0{,}50 \times 300\text{ m} = 150\text{ m}$, a metà strada fra l'origine e il rivelatore.

d) La pendenza della curva aumenta (il corpo accelera), ma in ogni punto disegnato la tangente resta più vicina alla verticale di una linea a 45°: per esempio fra ct = 600 m e ct = 900 m la curva avanza di circa 190 m in x, meno dei 300 m che percorre la luce. Il corpo non ha superato c.

Controllo. Un buon modo per verificare una lettura è ripetere il conto con le formule: la particella raggiunge x = 300 m all'istante $t = x/v = 300\text{ m}/(1{,}5 \times 10^8\text{ m/s}) = 2{,}0$ μs, come si legge in E_2.

7.5.2 Il treno nel diagramma

La Figura 7.7 ridisegna l'esperimento del treno nel diagramma spazio-tempo di S. Gli eventi A e B, i due fulmini, stanno sull'asse x, perché sono simultanei in S. La linea d'universo di O è l'asse ct; quella di O' è una retta inclinata con $\tan\alpha$ = 0,5, e accanto a essa le linee d'universo delle estremità del treno. Dai due eventi partono le linee di luce a 45°. Gli incontri sono gli eventi R_1 (il lampo di B raggiunge O', in x = 100 m, ct = 200 m), R_2 (i due lampi raggiungono O, in ct = 300 m) e R_3 (il lampo di A raggiunge O', in x = 300 m, ct = 600 m). Il diagramma rende evidente ciò che abbiamo calcolato: O' incontra la luce di B molto prima di quella di A.

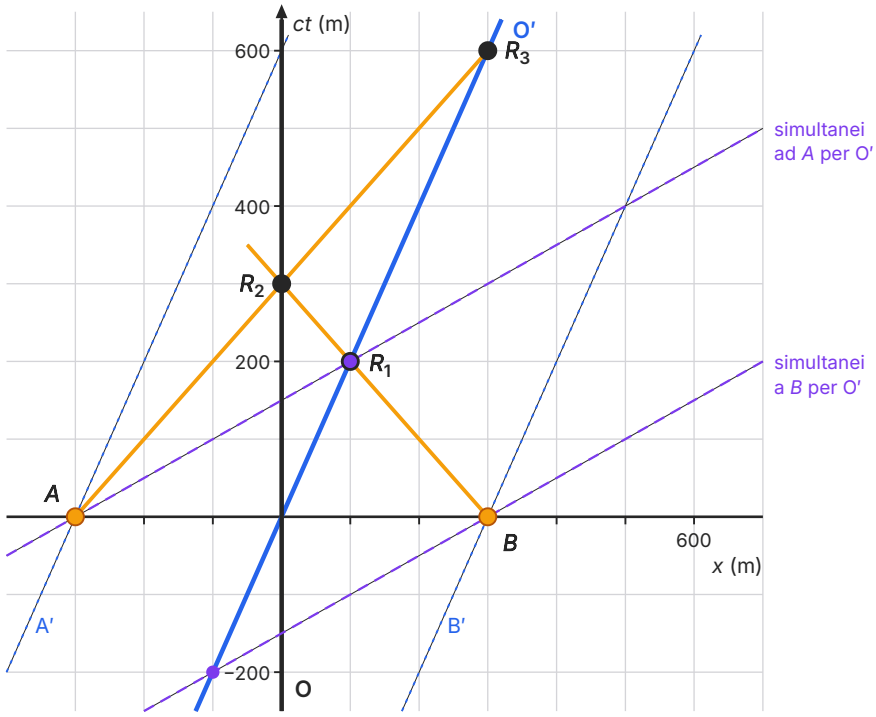

Figura 7.7 L'esperimento del treno nel diagramma spazio-tempo del sistema S (x e ct in metri, $v = 0{,}5\,c$). In nero la linea d'universo di O, in blu quella di O' e, tratteggiate, quelle delle estremità A' e B' del treno. Le linee arancioni sono i lampi partiti dagli eventi A ($x = -300$ m) e B ($x = +300$ m), simultanei in S. Le rette viola tratteggiate, parallele all'asse x' di O', uniscono gli eventi che O' giudica simultanei ad A e a B: incontrano la linea d'universo di O' in punti diversi (pallini viola; quello superiore coincide con R_1), e per O' l'evento B avviene prima dell'evento A.

7.5.3 Le linee di simultaneità di un osservatore in moto

Quali eventi giudica simultanei O'? Lo si può stabilire nel diagramma con un metodo simile al radar, che è la sincronizzazione di Einstein vista da un solo osservatore. Per sapere quando è avvenuto un evento lontano E, O' invia verso di esso un lampo all'istante t_1' del suo orologio e riceve l'eco riflessa da E all'istante t_2'. Poiché nel suo sistema la luce impiega lo stesso tempo all'andata e al ritorno, O' attribuisce a E l'istante $(t_1' + t_2')/2$, cioè lo giudica simultaneo all'evento della sua linea d'universo che sta a metà fra l'invio e la ricezione, e gli attribuisce la distanza $c(t_2' - t_1')/2$.

Applicando la costruzione con le linee di luce a 45°, si trova che gli eventi giudicati simultanei da O' non stanno su rette orizzontali, ma su rette inclinate verso l'alto, che formano con

l'asse x lo stesso angolo α che la linea d'universo di O' forma con l'asse ct: le due rette sono simmetriche rispetto alla linea di luce. La retta di questo tipo che passa per l'origine è l'asse x' di S'. Le rette viola della Figura 7.7 sono di questo tipo: quella che passa per B incontra la linea d'universo di O' **prima** di quella che passa per A. Ritroviamo, con un disegno, la relatività della simultaneità: per O' il fulmine in B' cade prima. Più O' è veloce, più le sue linee di simultaneità si inclinano verso la linea di luce. Nel capitolo 8 le trasformazioni di Lorentz daranno a questa costruzione i suoi numeri.

DA RICORDARE

Verso l'esame: i fondamenti della relatività

Questi argomenti appartengono al nucleo tematico *Spazio, tempo e moto* dei quadri di riferimento della seconda prova, che comprende la cinematica classica e relativistica. Di solito non compaiono da soli, ma come prima parte di un quesito o di un problema: ti si chiede di spiegare perché le trasformazioni di Galileo non vanno d'accordo con l'invarianza di c, di discutere il significato dell'esperimento di Michelson e Morley, o di stabilire con un ragionamento l'ordine di due eventi per due osservatori.

Le trappole tipiche: confondere l'istante di un evento con quello in cui se ne riceve la luce; usare $c \pm v$ come velocità della luce misurata da un osservatore; dimenticare che la simultaneità è relativa solo per eventi separati lungo la direzione del moto; affermare che l'esperimento di Michelson e Morley «ha misurato la velocità della luce». Nei calcoli dichiara sempre in quale sistema stai lavorando.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$x' = x - vt$, $t' = t$, $u' = u - v$ — trasformazioni di Galileo e composizione delle velocità, in configurazione standard; contengono l'ipotesi del tempo assoluto e valgono, come approssimazione, solo per $v \ll c$.

$\beta = v/c$ — velocità di un sistema o di un corpo in unità della velocità della luce (numero puro); $c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s.

$2\Delta d = N\lambda$ — interferometro di Michelson: spostando uno specchio di Δd passano N frange.

$\Delta N = 2L\beta^2/\lambda$ — spostamento di frange previsto dall'ipotesi dell'etere ruotando di 90° un interferometro con bracci di lunghezza L (approssimazione per $\beta \ll 1$); l'esperimento del 1887 non lo osservò.

Postulati: le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali; la luce nel vuoto ha la stessa velocità c in tutti i sistemi inerziali, qualunque sia il moto della sorgente.

$t_B = t_A + d/c$ — sincronizzazione di Einstein di un orologio in B, a distanza d, con un lampo partito da A; con il metodo radar, un evento ha istante $(t_1 + t_2)/2$ e distanza $c(t_2 - t_1)/2$.

$\tan \alpha = \beta$ — inclinazione della linea d'universo di un corpo rispetto all'asse ct nel diagramma spazio-tempo; la luce ha linee a 45°; 300 m di ct corrispondono a 1,00 μs.

SINTESI

- Le trasformazioni di Galileo, con il tempo assoluto $t' = t$, rendono le leggi della meccanica uguali in tutti i sistemi inerziali, ma darebbero alla luce velocità $c \pm v$ in un sistema in moto.
- Le equazioni di Maxwell prevedono per la luce la velocità $c = 1/\sqrt{(\varepsilon_0 \mu_0)}$ senza indicare rispetto a che cosa; nell'Ottocento si pensava che fosse la velocità rispetto all'etere.
- L'induzione fra una calamita e una spira dipende solo dal loro moto relativo, ma la fisica classica la spiegava in due modi diversi a seconda di chi si muove.
- L'interferometro di Michelson confronta i tempi di percorrenza della luce in due bracci perpendicolari; spostando uno specchio di Δd passano $N = 2\Delta d/\lambda$ frange.
- L'esperimento di Michelson e Morley (1887) cercò lo spostamento di 0,4 frange previsto dal moto della Terra nell'etere e non lo trovò: il risultato fu nullo entro un ventesimo del valore atteso.
- La contrazione di Lorentz-FitzGerald spiegava il risultato nullo, ma era un'ipotesi costruita apposta per spiegarlo.
- Einstein (1905) pose a fondamento della relatività ristretta due postulati: il principio di relatività per tutte le leggi della fisica e l'invarianza della velocità della luce; l'etere diventa superfluo.
- Per conservare entrambi i postulati bisogna rinunciare al tempo assoluto e alle trasformazioni di Galileo, che restano un'ottima approssimazione per $v \ll c$.
- Il tempo di un evento è quello dell'orologio posto nel suo luogo; orologi lontani si sincronizzano con segnali di luce (sincronizzazione di Einstein).
- Due eventi lontani simultanei in un sistema non lo sono in un sistema in moto lungo la loro congiungente (relatività della simultaneità); l'ordine di eventi che un segnale può collegare non cambia.
- Nel diagramma spazio-tempo gli eventi sono punti, la storia di un corpo è la sua linea d'universo, inclinata di un angolo con tan $\alpha = \beta$ rispetto all'asse ct; la luce ha linee a 45°.
- Gli eventi simultanei per un osservatore in moto stanno su rette inclinate, simmetriche alla sua linea d'universo rispetto alla linea di luce.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Un'auto viaggia a 30 m/s lungo una strada rettilinea; un treno, su un binario parallelo, viaggia nello stesso verso a 20 m/s. Secondo la composizione delle velocità di Galileo, la velocità dell'auto rispetto al treno è:
   A. 50 m/s
   B. 10 m/s nel verso del moto
   C. 10 m/s in verso opposto al moto
   D. 30 m/s, perché la velocità non dipende dal sistema

2. ● L'esperimento di Michelson e Morley aveva lo scopo di:
   A. misurare con grande precisione la velocità della luce
   B. verificare il secondo postulato di Einstein
   C. misurare la lunghezza d'onda della luce gialla
   D. rivelare il moto della Terra rispetto all'etere

3. ● Il secondo postulato della relatività ristretta afferma che:
   A. la luce nel vuoto ha la stessa velocità in tutti i sistemi inerziali, qualunque sia il moto della sorgente
   B. la luce si propaga con velocità c rispetto all'etere
   C. nessun corpo può avere velocità maggiore di c
   D. le leggi della meccanica sono uguali in tutti i sistemi inerziali

4. ●● Due eventi avvengono in punti diversi dell'asse x e sono simultanei nel sistema S. Per un osservatore S' in moto rispetto a S lungo l'asse x, i due eventi:
   A. sono simultanei, perché la simultaneità è assoluta
   B. sono simultanei solo se $v < c/2$
   C. non sono simultanei
   D. sono simultanei se l'osservatore tiene conto del ritardo dei segnali

5. ● In un diagramma spazio-tempo con x e ct nella stessa unità, la linea d'universo di un lampo di luce è:
   A. una retta verticale
   B. una retta inclinata di 45° sugli assi
   C. una retta orizzontale
   D. una curva che si avvicina alla verticale

6. ●● In un diagramma spazio-tempo del sistema S, una linea d'universo verticale rappresenta:
   A. un corpo che si muove alla velocità della luce
   B. un insieme di eventi simultanei in S
   C. un corpo in moto uniforme lungo x
   D. un corpo fermo in S

7. ●● Nell'ipotesi dell'etere, se la velocità della Terra rispetto all'etere fosse doppia, lo spostamento di frange atteso nell'esperimento di Michelson e Morley sarebbe:
   A. quattro volte maggiore
   B. due volte maggiore
   C. uguale, perché dipende solo dalla lunghezza dei bracci
   D. la metà

8. ● Quale delle seguenti descrizioni è un evento, nel senso della relatività?
   A. un treno lungo 300 m
   B. la distanza fra Roma e Milano
   C. l'arrivo di un muone su un rivelatore alle 10:15:03 di oggi
   D. la velocità della luce nel vuoto

Vero o falso

9. ● La velocità della luce emessa da una sorgente che si avvicina all'osservatore è maggiore di c. V / F

10. ●● Secondo il principio di relatività di Einstein, nessun esperimento di ottica eseguito in un laboratorio chiuso può stabilire se il laboratorio è fermo o in moto rettilineo uniforme. V / F

11. ●● Due eventi che avvengono nello stesso punto e nello stesso istante per un osservatore inerziale sono simultanei per qualunque altro osservatore inerziale. V / F

12. ●● Il risultato nullo di Michelson e Morley si spiega senza difficoltà supponendo che la Terra trascini completamente con sé l'etere circostante. V / F

Applicare

13. ● Su un treno che viaggia a 40 m/s un passeggero lancia una palla in avanti a 15 m/s rispetto al treno. a) Calcola la velocità della palla rispetto ai binari. b) Con la stessa regola, quale velocità avrebbe rispetto ai binari la luce del faro anteriore del treno? Di quale frazione differirebbe da c?

14. ● Calcola $\beta = v/c$ per: a) la Terra sulla sua orbita (30 km/s); b) un aereo di linea (250 m/s); c) un elettrone a $1{,}5 \times 10^8$ m/s.

15. ●● Un interferometro di Michelson da laboratorio ha bracci lunghi 1,2 m e usa un laser con $\lambda = 633$ nm. Quale spostamento di frange prevederebbe l'ipotesi dell'etere ruotandolo di 90°, con un vento d'etere di 30 km/s? Sarebbe facile osservarlo?

16. ● Spostando lo specchio mobile di un interferometro di Michelson di 15,8 μm si contano 50 frange. Calcola la lunghezza d'onda della luce.

17. ●● Quante frange si contano spostando di 0,10 mm lo specchio mobile di un interferometro illuminato da un laser verde con $\lambda = 532$ nm?

18. ● Due orologi A e B, fermi in un laboratorio, distano 1,5 km. All'istante $t_A = 0$ parte da A un lampo diretto a B, dove viene riflesso. a) Quale tempo deve segnare l'orologio B quando riceve il lampo, perché sia sincronizzato con A? b) Quale tempo segna l'orologio A quando riceve il lampo riflesso?

19. ●● Nella Figura 7.6 leggi le coordinate dell'evento in cui la linea d'universo della particella incontra la retta tratteggiata degli eventi simultanei, e calcola a quale istante, in microsecondi, corrisponde. A quale distanza dal rivelatore si trova la particella in quell'istante?

20. ● Completa. Nel diagramma spazio-tempo di S, la linea d'universo di un corpo fermo in S è _____ ; quella della luce forma con gli assi un angolo di _____ ; gli eventi simultanei in S stanno su una retta _____ . Un tratto di 600 m lungo l'asse ct corrisponde a _____ μs.

Problemi

21. ●● Un treno ideale lungo 900 m nel sistema S della banchina viaggia a 0,80 c. Due fulmini colpiscono le sue estremità, simultaneamente in S, all'istante $t = 0$, quando l'osservatrice O', al centro del treno, passa davanti all'osservatore O, fermo a metà strada fra i due segni sulla banchina. a) Calcola in S gli istanti in cui O' riceve i due lampi e le posizioni in cui si trova. b) In quale istante O riceve i lampi? c) Quale fulmine è caduto prima per O'? Motiva la risposta.

22. ●● Un treno ad alta velocità lungo 200 m viaggia a 300 km/h. Due lampi partono simultaneamente, nel sistema della banchina, dalle sue due estremità, quando il centro del treno passa davanti a un osservatore fermo. a) Calcola, nel sistema della banchina, la differenza fra gli istanti in cui i due lampi raggiungono un passeggero seduto al centro del treno. b) Spiega perché nella vita quotidiana nessuno si accorge della relatività della simultaneità.

23. ●●● Ripercorri l'esperimento di Michelson e Morley con i dati originali: bracci efficaci di 11 m, luce di 550 nm, velocità della Terra rispetto all'etere supposta di 30 km/s. a) Calcola il ritardo $\Delta t \approx (L/c)\beta^2$ fra i due fasci. b) Esprimi la corrispondente differenza di cammino in metri e in lunghezze d'onda. c) Calcola lo spostamento di frange previsto ruotando l'apparato di 90°. d) Gli spostamenti osservati erano minori di 0,02 frange: quale limite superiore se ne ricava per la velocità della Terra rispetto all'etere?

24. ●●● (Con il capitolo 1.) Una sbarretta conduttrice lunga $l = 0{,}20$ m scorre a velocità costante $v = 2{,}0$ m/s su due binari collegati da un resistore di 0,50 Ω, in un campo magnetico uniforme $B = 0{,}50$ T perpendicolare al piano dei binari; sbarretta, velocità e campo sono perpendicolari fra loro. a) Nel sistema dei binari, calcola la forza elettromotrice indotta e la corrente, spiegando quale forza agisce sulle cariche della sbarretta. b) Nel sistema della sbarretta le sue cariche sono ferme, quindi la forza magnetica su di esse è nulla. Quale campo, e di quale intensità, deve esistere in quel sistema perché la corrente sia la stessa? c) Che cosa ha a che fare questo con il principio di relatività?

25. ●●● (Con *Fisica 4*, capitolo 8.) In un braccio di un interferometro di Michelson illuminato da un laser con $\lambda = 633$ nm si pone una cella di vetro lunga 3,0 cm, attraversata due volte dalla luce. La cella viene prima svuotata d'aria e poi riempita lentamente, e durante il riempimento si contano 27 frange. a) Spiega perché le frange si spostano, ricordando che in un mezzo di indice n la lunghezza d'onda è λ/n. b) Mostra che il numero di frange è $N = 2L(n - 1)/\lambda$. c) Calcola l'indice di rifrazione dell'aria.

26. ●● Un'osservatrice, ferma in un sistema inerziale, vuole sapere quando e dove è avvenuto un evento lontano E lungo una retta. Invia un impulso di luce all'istante 2,0 μs del suo orologio e riceve l'eco riflessa nel luogo di E all'istante 8,0 μs. a) A quale istante e a quale distanza attribuisce l'evento? b) Quale tempo dovrebbe segnare, al momento della riflessione, un orologio posto in E per essere sincronizzato con il suo? c) Disegna la costruzione in un diagramma spazio-tempo.

27. ●●● (Con *Fisica 3*, capitolo 2.) Una stella doppia dista 1000 anni luce dalla Terra (1 anno luce = $9{,}46 \times 10^{15}$ m). Una delle due stelle percorre un'orbita con velocità di 100 km/s e periodo di 4,0 giorni; in certi tratti dell'orbita si avvicina alla Terra, in altri se ne allontana. Supponi, come nella fisica di Galileo, che la luce viaggi a $c + v$ rispetto alla Terra quando la stella si avvicina e a $c - v$ quando si allontana. a) Mostra che la differenza fra i tempi di arrivo della luce emessa nei due casi è circa $2dv/c^2$. b) Calcolala in giorni. c) Confrontala con il periodo dell'orbita e spiega che cosa si osserverebbe. d) Che cosa se ne conclude, sapendo che le orbite delle stelle doppie appaiono regolari?

28. ●●● Nel sistema S avvengono tre eventi: P in $x = 0$ all'istante $t = 0$; Q in $x = 1500$ m all'istante $t = 4{,}0$ μs; R in $x = 900$ m all'istante $t = 4{,}0$ μs. a) Rappresenta i tre eventi in un diagramma spazio-tempo con x e ct in metri e traccia la linea di luce che parte da P verso destra. b) Un segnale partito da P può raggiungere Q? E R? Quale velocità minima dovrebbe avere in ciascun caso? c) Quale dei due eventi Q e R potrebbe essere causato da P? d) Per quale coppia di eventi, (P, Q) o (P, R), è possibile che un altro osservatore inerziale li veda in ordine inverso?

Ragionare e argomentare

29. ●● Il nome «teoria della relatività» può far pensare che, secondo Einstein, «tutto è relativo». Spiega perché questa lettura è sbagliata, indicando che cosa la teoria considera uguale per tutti gli osservatori inerziali e che cosa invece dipende dall'osservatore.

30. ●●● Trova l'errore. «L'osservatrice O' al centro del treno vede prima il lampo partito dalla testa solo perché va incontro alla sua luce. Se tiene conto del tempo che la luce impiega ad arrivare, scopre che i fulmini erano simultanei anche per lei: la relatività della simultaneità è soltanto un effetto della velocità finita della luce.» Correggi il ragionamento.

31. ●●● Michelson e Morley ruotavano l'apparato durante le misure, e in seguito l'esperimento fu ripetuto in stagioni diverse. a) Perché non bastava misurare la posizione delle frange con l'apparato fermo? b) Perché un risultato nullo ottenuto in un solo giorno non sarebbe bastato a escludere l'etere, mentre uno ottenuto anche sei mesi dopo è molto più convincente? (Pensa alla velocità della Terra rispetto al Sole in due punti opposti dell'orbita.)

Verso l'esame di Stato

32. ●●● **Quesito.** Due fari F_1 e F_2, fermi ai lati di una pista rettilinea, distano 1,20 km e si accendono simultaneamente nel sistema S della pista, all'istante $t = 0$. In quell'istante un veicolo ideale, che viaggia a 0,60 c da F_1 verso F_2, passa con la sua osservatrice O' nel punto medio fra i due fari. a) Calcola, nel sistema S, gli istanti in cui O' riceve la luce dei due fari e le posizioni in cui si trova, prendendo l'origine nel punto medio. b) Rappresenta la situazione in un diagramma spazio-tempo con x e ct in metri, indicando le linee d'universo dei fari, di O' e della luce. c) Per O', quale faro si è acceso prima? Argomenta usando i postulati della relatività. d) All'istante $t = 3{,}0$ μs (in S) il faro F_1 si guasta. Può essere stato il lampo di F_2 a causare il guasto? Motiva la risposta.

33. ●●● **Problema.** In un esperimento eseguito al CERN nel 1964 si studiarono i fotoni prodotti dal decadimento di pioni neutri molto veloci. Considera una versione semplificata: i pioni viaggiano a 0,99975 c, e si misura il tempo che i fotoni emessi in avanti impiegano a percorrere una base di 30,0 m fra due rivelatori, con una risoluzione di 1 ns. a) Con i valori di ε_0 e μ_0 della Tabella A.1, calcola la velocità delle onde elettromagnetiche prevista dalle equazioni di Maxwell (capitolo 4). b) Secondo la composizione delle velocità di Galileo, quale velocità avrebbero rispetto al laboratorio i fotoni emessi in avanti? E quelli emessi all'indietro? c) Calcola il tempo di volo sulla base di 30,0 m nell'ipotesi di Galileo e in quella di Einstein; la risoluzione dell'apparato basta a distinguerle? d) La misura diede c. Spiega quale dei due postulati di Einstein viene così controllato e perché questo esperimento e quello di Michelson e Morley si completano a vicenda.

PER APPROFONDIRE

- [EINR] A. Einstein, *Relatività: esposizione divulgativa*: i primi capitoli, dove l'autore presenta l'esperimento del treno e dei fulmini, la definizione della simultaneità e il conflitto fra la composizione delle velocità e la propagazione della luce.
- [EIN] A. Einstein, L. Infeld, *L'evoluzione della fisica*: la parte dedicata al campo e alla relatività, per la storia dell'etere e dei tentativi di rivelarlo raccontata senza formule.
- [TWH] E. F. Taylor, J. A. Wheeler, *Spacetime Physics*: i capitoli iniziali sugli eventi, sul reticolo di regoli e orologi sincronizzati e sui diagrammi spazio-tempo; un testo in inglese, ricco di esercizi ragionati.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. II: il paragrafo sulla relatività dei campi elettrico e magnetico, che riprende l'esempio del filo e della carica in moto visti da due osservatori.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sulla relatività, per altri esercizi sui postulati e sulla simultaneità.

Glossario del capitolo

Configurazione standard
Disposizione di due sistemi inerziali S e S' con assi paralleli, in cui S' si muove con velocità v lungo l'asse x positivo e le origini coincidono a $t = t' = 0$.

Contrazione di Lorentz-FitzGerald
Ipotesi secondo cui un corpo in moto nell'etere si accorcia nella direzione del moto del fattore $\sqrt{(1 - \beta^2)}$, proposta per spiegare il risultato di Michelson e Morley.

Diagramma spazio-tempo
Grafico (introdotto da Minkowski nel 1908) con la posizione x in ascissa e ct in ordinata, nella stessa unità; è detto anche diagramma di Minkowski. Ogni evento è un punto.

Esperimento di Michelson e Morley
Esperimento del 1887 che cercò, con un interferometro ruotabile, lo spostamento di frange dovuto al moto della Terra nell'etere, senza trovarlo.

Etere
Mezzo ipotetico, ritenuto nell'Ottocento il supporto delle onde elettromagnetiche e il sistema in cui la luce ha velocità c; la relatività ristretta lo rende superfluo.

Evento
Ciò che accade in un punto dello spazio e in un istante; è individuato da tre coordinate spaziali e da un tempo, che dipendono dal sistema di riferimento.

Interferometro di Michelson
Strumento che divide un fascio di luce in due parti, le invia lungo due bracci perpendicolari e le ricombina, rivelando con le frange di interferenza differenze di cammino molto minori della lunghezza d'onda.

Invarianza della velocità della luce
Secondo postulato della relatività ristretta: nel vuoto la luce ha la stessa velocità c in ogni sistema inerziale, indipendentemente dal moto della sorgente e dell'osservatore.

Lamina semiriflettente
Lastra di vetro con un sottile strato metallico che trasmette metà della luce incidente e ne riflette metà.

Linea d'universo
L'insieme degli eventi che costituiscono la storia di un corpo nel diagramma spazio-tempo; per un moto uniforme è una retta inclinata di un angolo con $\tan \alpha = \beta$ rispetto all'asse ct.

Linea di luce
Linea d'universo di un segnale luminoso nel vuoto; nel diagramma spazio-tempo forma angoli di 45° con gli assi.

Osservatore
In relatività, un sistema di riferimento inerziale dotato di regoli e di orologi sincronizzati in ogni punto; il tempo di un evento è quello dell'orologio posto nel suo luogo.

Principio di relatività
Nella forma di Einstein: le leggi della fisica, non solo quelle della meccanica, hanno la stessa forma in tutti i sistemi inerziali.

Relatività della simultaneità
Due eventi in luoghi diversi, simultanei per un osservatore, non lo sono per un altro osservatore in moto lungo la loro congiungente.

Relatività ristretta
Teoria di Einstein (1905) che descrive spazio e tempo per gli osservatori inerziali a partire dal principio di relatività e dall'invarianza della velocità della luce.

Simultaneità
Due eventi sono simultanei per un osservatore se gli orologi sincronizzati del suo sistema, posti nei luoghi dei due eventi, segnano lo stesso tempo.

Sincronizzazione di Einstein
Procedura per sincronizzare orologi lontani con segnali di luce: un orologio in B è sincronizzato con uno in A se, quando riflette un lampo partito da A, segna l'istante medio fra partenza e ritorno del lampo in A.

Spazio-tempo
L'insieme di spazio e tempo considerati come un'unica entità a quattro dimensioni, i cui punti sono gli eventi.

Tempo assoluto
Il tempo della meccanica di Newton, uguale per tutti gli osservatori indipendentemente dal loro moto ($t' = t$); la relatività ristretta vi rinuncia.

Soluzioni

1. B. $u' = u - v = 30$ m/s $- 20$ m/s $= 10$ m/s, nel verso del moto: dal treno si vede l'auto avanzare a 10 m/s.

2. D. Si voleva rivelare il «vento d'etere» dovuto al moto orbitale della Terra; la velocità della luce era nota e non era lo scopo dell'esperimento.

3. A. È l'invarianza della velocità della luce; C è una conseguenza della teoria (capitolo 9), D è il principio di relatività di Galileo.

4. C. Per la relatività della simultaneità, eventi separati lungo la direzione del moto e simultanei in S non lo sono in S', per qualunque v diversa da zero; tenere conto del ritardo dei segnali non cambia la conclusione.

5. B. La luce percorre in ogni intervallo una distanza $\Delta x = c\Delta t = \Delta(ct)$: la sua linea d'universo forma angoli di 45° con gli assi.

6. D. La posizione x non cambia mentre ct cresce: il corpo è fermo in S. Gli eventi simultanei stanno su una retta orizzontale.

7. A. $\Delta N = 2L\beta^2/\lambda$ è proporzionale a v^2: raddoppiando v lo spostamento quadruplica.

8. C. Un evento è individuato da un luogo e un istante; le altre risposte descrivono oggetti, distanze o grandezze, non eventi.

9. F. Per il secondo postulato la luce ha velocità c qualunque sia il moto della sorgente; lo confermano le stelle doppie e i fotoni dei pioni veloci.

10. V. Il principio di relatività di Einstein vale per tutte le leggi della fisica, comprese quelle dell'ottica: il moto rettilineo uniforme non si rivela con alcun esperimento interno.

11. V. Eventi che coincidono nello spazio e nel tempo sono lo stesso «incontro», su cui tutti gli osservatori concordano; la simultaneità è relativa solo per eventi separati.

12. F. Un etere completamente trascinato dalla Terra non spiega l'aberrazione della luce delle stelle; l'ipotesi fu abbandonata.

13. a) $u = u' + v = 15$ m/s $+ 40$ m/s $= 55$ m/s. b) Con la regola di Galileo, $c + 40$ m/s; la differenza relativa sarebbe $(40 \text{ m/s})/(3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s}) = 1{,}3 \times 10^{-7}$, cioè poco più di una parte su dieci milioni. In realtà la luce ha velocità c (secondo postulato).

14. a) $\beta = (3{,}0 \times 10^4 \text{ m/s})/(3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s}) = 1{,}0 \times 10^{-4}$. b) $\beta = 250/(3{,}00 \times 10^8) = 8{,}3 \times 10^{-7}$. c) $\beta = (1{,}5 \times 10^8)/(3{,}00 \times 10^8) = 0{,}50$.

15. $\Delta N = 2L\beta^2/\lambda = 2 \times 1{,}2 \text{ m} \times (1{,}0 \times 10^{-4})^2/(633 \times 10^{-9}$ m) $= 0{,}038$ frange. È meno di un ventesimo di frangia, al limite di ciò che si apprezza a occhio: per questo Michelson e Morley allungarono i bracci a 11 m con riflessioni multiple.

16. $\lambda = 2\Delta d/N = 2 \times 15{,}8 \times 10^{-6}$ m$/50 = 6{,}32 \times 10^{-7}$ m $=$ 632 nm (la luce di un laser elio-neon).

17. $N = 2\Delta d/\lambda = 2 \times 1{,}0 \times 10^{-4}$ m$/(532 \times 10^{-9}$ m$) = 376$ frange (circa $3{,}8 \times 10^2$).

18. a) La luce impiega $d/c = 1{,}5 \times 10^3$ m$/(3{,}00 \times 10^8$ m/s$) = 5{,}0 \times 10^{-6}$ s: B deve segnare $t_B = 5{,}0$ µs. b) Il lampo torna in A dopo altri 5,0 µs: A segna 10,0 µs. Controllo con la sincronizzazione di Einstein: $t_B = 0 + (10{,}0 \text{ µs} - 0)/2 = 5{,}0$ µs.

19. La retta tratteggiata è $ct = 750$ m; la particella ($\beta = 0{,}50$) la incontra in $x = 0{,}50 \times 750$ m $= 375$ m. L'istante è $t = 750 \text{ m}/(3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s}) = 2{,}5 \times 10^{-6}$ s $=$ 2,5 µs. La particella ha già superato il rivelatore (in $x = 300$ m) e si trova a 75 m da esso, dalla parte opposta all'origine.

20. verticale (parallela all'asse ct); 45°; orizzontale (parallela all'asse x); 2,00 $(600 \text{ m}/(3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s}) = 2{,}00 \times 10^{-6}$ s).

21. Principi usati: in S la luce viaggia a c in entrambi i versi; O' si muove di moto uniforme; poi il secondo postulato nel sistema del treno. Origine in O, estre-

mità in ±450 m. a) Lampo dalla testa (x = +450 m): vt = 450 m − ct, t = 450 m/(1,80 × 3,00 × 10^8 m/s) = 8,3 × 10^{-7} s = 0,83 μs, in x = 0,80 c × 0,833 μs = 200 m. Lampo dalla coda: t = 450 m/(0,20 × 3,00 × 10^8 m/s) = 7,5 × 10^{-6} s = 7,5 μs, in x = 0,80 c × 7,5 μs = 1,8 × 10^3 m. b) O è fermo a 450 m da entrambi: t = 450 m/c = 1,50 μs per entrambi i lampi. c) Per O' è caduto prima il fulmine in testa: nel suo sistema è ferma al centro del treno, la luce viaggia a c in entrambi i versi (secondo postulato) e percorre distanze uguali, quindi il lampo che arriva prima è partito prima.

22. a) v = 300 km/h = 83,3 m/s. Nel sistema della banchina la differenza è $Lv/(c^2 - v^2) \approx Lv/c^2$ = 200 m × 83,3 m/s/(9,00 × 10^{16} m^2/s^2) = 1,9 × 10^{-13} s (il lampo dalla testa arriva prima). b) L'effetto è proporzionale a Lv/c^2: per lunghezze e velocità quotidiane è di frazioni di picosecondo, molto al di sotto di qualunque percezione e della maggior parte degli strumenti.

23. Principi usati: la composizione delle velocità di Galileo e l'ipotesi dell'etere; l'interferenza (una frangia per ogni lunghezza d'onda di differenza di cammino); la proporzionalità di ΔN a v^2. β = 1,0 × 10^{-4}, β^2 = 1,0 × 10^{-8}. a) Δt = (11 m/3,00 × 10^8 m/s) × 1,0 × 10^{-8} = 3,7 × 10^{-16} s. b) Differenza di cammino $c\Delta t = L\beta^2$ = 1,1 × 10^{-7} m = (1,1 × 10^{-7} m)/(550 × 10^{-9} m) = 0,20 lunghezze d'onda. c) La rotazione di 90° inverte la differenza: ΔN = 2 × 0,20 = 0,40 frange. d) $\Delta N \propto v^2$, quindi v_{max} = 30 km/s × √(0,02/0,40) = 30 km/s × 0,22 ≈ 7 km/s: la Terra si muoverebbe rispetto all'etere a meno di un quarto della sua velocità orbitale.

24. Principi usati: la forza di Lorentz sulle cariche in moto e la forza elettromotrice di movimento (capitolo 1); la prima legge di Ohm; il principio di relatività. a) Nel sistema dei binari le cariche della sbarretta si muovono con essa e subiscono la forza di Lorentz $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$, diretta lungo la sbarretta: $\varepsilon = vBl$ = 2,0 m/s × 0,50 T × 0,20 m = 0,20 V; $i = \varepsilon/R$ = 0,20 V/0,50 Ω = 0,40 A. (Per la legge di Lenz la corrente ha il verso che fa agire sulla sbarretta una forza opposta al moto.) b) Nel sistema della sbarretta le cariche sono ferme e la forza magnetica è nulla; per avere la stessa forza su di esse deve esistere un campo elettrico $E = vB$ = 2,0 m/s × 0,50 T = 1,0 V/m, diretto lungo la sbarretta, che dà la stessa forza elettromotrice El = 1,0 V/m × 0,20 m = 0,20 V. c) La corrente, che si misura con un amperometro, deve essere la stessa per i due osservatori, che sono equivalenti per il principio di relatività; ciò che cambia da un sistema all'altro è la divisione del campo in parte elettrica e parte magnetica. (A queste velocità le correzioni relativistiche sono trascurabili.)

25. Principi usati: interferenza in un interferometro di Michelson (una frangia per ogni lunghezza d'onda di differenza di cammino); lunghezza d'onda in un mezzo λ/n (*Fisica 4*, capitolo 8). a) Riempiendo la cella aumenta il numero di lunghezze d'onda contenute nel cammino della luce, perché nell'aria la lunghezza d'onda è λ/n, più corta che nel vuoto: il cammino «ottico» del braccio si allunga e le frange scorrono. b) Nella cella, percorsa due volte, ci sono $2L/\lambda$ lunghezze d'onda nel vuoto e $2Ln/\lambda$ nell'aria; la differenza, $2L(n - 1)/\lambda$, è il numero di frange che passano. c) $n - 1 = N\lambda/(2L)$ = 27 × 633 × 10^{-9} m/(2 × 0,030 m) = 2,8 × 10^{-4}, quindi n = 1,000 28.

26. a) Istante (2,0 μs + 8,0 μs)/2 = 5,0 μs; distanza c(8,0 μs − 2,0 μs)/2 = 3,00 × 10^8 m/s × 3,0 × 10^{-6} s = 9,0 × 10^2 m. b) Un orologio in E sincronizzato con il suo deve segnare 5,0 μs al momento della riflessione (sincronizzazione di Einstein). c) Nel diagramma, con x e ct in metri: la linea d'universo dell'osservatrice è l'asse ct; dal punto ct = 600 m parte una linea di luce a 45° che raggiunge E in (900 m, 1500 m); da E torna una linea a 45° che incontra l'asse in ct = 2400 m. E sta sulla retta orizzontale per il punto medio, ct = 1500 m.

27. Principi usati: l'ipotesi galileiana (da escludere) che la velocità della luce si componga con quella della sorgente; moto uniforme. a) I tempi di percorrenza sono $d/(c - v)$ e $d/(c + v)$; la differenza è $d \cdot 2v/(c^2 - v^2) \approx 2dv/c^2$, perché $v \ll c$. b) d = 1000 × 9,46 × 10^{15} m = 9,46 × 10^{18} m; $2dv/c^2$ = 2 × 9,46 × 10^{18} m × 1,0 × 10^5 m/s/(9,00 × 10^{16} m^2/s^2) = 2,1 × 10^7 s ≈ 2,4 × 10^2 giorni. c) È circa 60 volte il periodo: la luce emessa in fasi diverse dell'orbita arriverebbe mescolata, e la stella potrebbe apparire in più posizioni contemporaneamente o compiere moti apparenti irregolari. d) Le orbite osservate sono regolari: la velocità della

luce non dipende da quella della sorgente, come afferma il secondo postulato.

28. Principi usati: nel diagramma spazio-tempo la luce ha linee a 45°; un evento può causarne un altro solo se un segnale con velocità non maggiore di c li collega. a) $P = (0, 0)$, $Q = (1500\text{ m}, 1200\text{ m})$, $R = (900\text{ m}, 1200\text{ m})$, perché $ct = 3{,}00 \times 10^8\text{ m/s} \times 4{,}0 \times 10^{-6}\text{ s} = 1200\text{ m}$; la linea di luce da P passa per (1200 m, 1200 m). b) In 4,0 μs la luce percorre 1200 m: non raggiunge Q (servirebbe $v = 1500\text{ m}/4{,}0\ \mu\text{s} = 3{,}8 \times 10^8\text{ m/s} > c$), raggiunge R con un segnale di velocità $900\text{ m}/4{,}0\ \mu\text{s} = 2{,}3 \times 10^8\text{ m/s} < c$. c) Solo R: Q sta a destra della linea di luce di P. d) La coppia (P, Q): l'ordine può cambiare solo per eventi che nessun segnale può collegare (lo dimostreremo nel capitolo 8); per (P, R) tutti gli osservatori vedono P prima di R.

29. Traccia di risposta. Uguali per tutti gli osservatori inerziali: le leggi della fisica (primo postulato), la velocità della luce nel vuoto (secondo postulato), e, ad esempio, l'ordine degli eventi che possono essere in rapporto di causa ed effetto e la coincidenza di due eventi nello stesso luogo e istante. Dipendono dall'osservatore: la simultaneità di eventi lontani, e, come vedremo, gli intervalli di tempo e le lunghezze; ma il legame fra le misure di due osservatori è fissato esattamente dalla teoria. Una teoria «di ciò che non cambia» sarebbe un nome altrettanto adatto.

30. L'errore è pensare che O' non tenga conto dei tempi di percorrenza. Nel suo sistema il treno è fermo, lei è a metà fra i segni lasciati dai fulmini in A' e B', e la luce viaggia a c in entrambi i versi (secondo postulato): i due tempi di percorrenza sono uguali. Correggendo per tempi uguali, lampi che arrivano in istanti diversi sono partiti in istanti diversi: i fulmini non sono simultanei per lei. Se la luce si componesse con la velocità del treno, come in Galileo, la correzione darebbe la simultaneità; è proprio l'invarianza di c a rendere la simultaneità relativa, non la sua finitezza.

31. Traccia di risposta. a) Lo spostamento atteso dipende dalla differenza fra i tempi nei due bracci, ma i bracci non possono essere uguali al decimo di lunghezza d'onda, e la posizione delle frange con l'apparato fermo non dice nulla sul vento. Ruotando di 90° i bracci si scambiano i ruoli: lo spostamento durante la rotazione, $2L\beta^2/\lambda$, dipende solo dal vento d'etere. b) In un giorno particolare la velocità della Terra rispetto all'etere potrebbe essere quasi nulla, se l'etere si muovesse per caso con la Terra in quel momento. Sei mesi dopo la velocità della Terra rispetto al Sole ha verso opposto (30 km/s nell'altro verso): la sua velocità rispetto a qualunque etere cambia di 60 km/s e in almeno una delle due stagioni deve essere di almeno 30 km/s. Un risultato nullo in entrambe le stagioni esclude anche questa coincidenza.

32. a) Origine nel punto medio, F_1 in −600 m, F_2 in +600 m, $v = 0{,}60\ c = 1{,}80 \times 10^8$ m/s. Luce di F_2: $vt = 600\text{ m} - ct \Longrightarrow t = 600\text{ m}/(1{,}60 \times 3{,}00 \times 10^8\text{ m/s}) = 1{,}25 \times 10^{-6}$ s = 1,25 μs, in $x = vt = 225$ m. Luce di F_1: $vt = -600\text{ m} + ct \Longrightarrow t = 600\text{ m}/(0{,}40 \times 3{,}00 \times 10^8\text{ m/s}) = 5{,}00\ \mu\text{s}$, in $x = 900$ m (O' ha già superato F_2). b) Fari: rette verticali in $x = \pm 600$ m. O': retta per l'origine con $\tan\alpha = 0{,}60$, cioè per (600 m, 1000 m). Luce: da (600 m, 0) verso sinistra a 45°, incontra O' in (225 m, 375 m); da (−600 m, 0) verso destra, incontra O' in (900 m, 1500 m). c) Per O' si è acceso prima F_2. Nel suo sistema la luce viaggia a c in entrambi i versi (secondo postulato) e le due accensioni sono avvenute in punti simmetrici rispetto a lei (l'evento «O' passa nel punto medio» è il punto medio dei due eventi per ogni osservatore inerziale, come il centro del treno nell'esempio dei fulmini); la luce di F_2 arriva prima, quindi è partita prima. d) La luce di F_2 raggiunge F_1 all'istante $1200\text{ m}/c = 4{,}0\ \mu\text{s}$; a 3,0 μs ha percorso solo 900 m. Nessun segnale partito dall'accensione di F_2 poteva arrivare in tempo: non può essere la causa del guasto. *Indicatori*: a) Sviluppare il processo risolutivo; b) Interpretare, rappresentare, elaborare i dati; c) Argomentare; d) Analizzare.

33. a) $c = 1/\sqrt{(\varepsilon_0\mu_0)} = 1/\sqrt{(8{,}85 \times 10^{-12}\text{ F/m} \times 4\pi \times 10^{-7}\text{ T·m/A})} = 3{,}00 \times 10^8$ m/s. b) Galileo: in avanti $c + 0{,}99975\ c = 1{,}99975\ c \approx 6{,}00 \times 10^8$ m/s; all'indietro $c - 0{,}99975\ c = 0{,}00025\ c = 7{,}5 \times 10^4$ m/s. c) Galileo: $t = 30{,}0\text{ m}/(6{,}00 \times 10^8\text{ m/s}) = 50{,}0$ ns; Einstein: $t = 30{,}0\text{ m}/(3{,}00 \times 10^8\text{ m/s}) = 100$ ns. La differenza, 50 ns, è cinquanta volte la risoluzione: le due ipotesi si distinguono senza ambiguità. d) Si controlla il secon-

do postulato nella parte che riguarda la **sorgente**: la velocità della luce non dipende dal moto di chi la emette, nemmeno quando la sorgente va quasi a *c*; è esclusa l'idea che la luce si comporti come un proiettile. L'esperimento di Michelson e Morley, con sorgente e strumento fermi l'uno rispetto all'altro, controlla invece che la velocità non dipende dal moto del laboratorio rispetto a un ipotetico etere, cioè dell'**osservatore**. Insieme sostengono l'intero postulato. *Indicatori*: a) Sviluppare il processo risolutivo; b) Analizzare; c) Interpretare, rappresentare, elaborare i dati; d) Argomentare.