CAPITOLO

4

Le equazioni di Maxwell

«Questa velocità è così vicina a quella della luce che sembra di avere forti ragioni per concludere che la luce stessa (compreso il calore radiante e le altre radiazioni, se ve ne sono) sia una perturbazione elettromagnetica in forma di onde, che si propaga attraverso il campo elettromagnetico secondo le leggi dell'elettromagnetismo.» — James Clerk Maxwell, A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field, 1865 (traduzione della redazione)

OBIETTIVI

1. Spiegare perché un campo magnetico variabile genera un campo elettrico con linee chiuse e scrivere la legge di Faraday-Neumann-Lenz come circuitazione del campo elettrico.
2. Calcolare il campo elettrico indotto dentro e fuori un lungo solenoide e riconoscere che dove il campo magnetico varia il campo elettrico non è conservativo.
3. Descrivere il paradosso del condensatore che si carica e risolverlo con la corrente di spostamento; usare la legge di Ampère-Maxwell.
4. Enunciare le quattro equazioni di Maxwell, leggerle in parole e confrontarle con le leggi dei campi statici.
5. Ricavare dalle leggi di circuitazione la velocità delle onde elettromagnetiche, $c = 1/\sqrt{(\mu_0 \varepsilon_0)}$, e spiegare perché la luce è un'onda elettromagnetica.
6. Spiegare perché la separazione fra campo elettrico e campo magnetico dipende dall'osservatore.

INDICE DEL CAPITOLO

4.1 Il campo elettrico indotto 2
4.2 Il campo indotto in un solenoide 5
4.3 La corrente di spostamento 9
4.4 Le equazioni di Maxwell 13
4.5 La previsione delle onde elettromagnetiche 15
4.6 Il campo elettromagnetico e la relatività del campo 21

Fisica 5 · Parte II · Le equazioni di Maxwell e le onde elettromagnetiche · versione 1.0
Capitolo 4: Le equazioni di Maxwell · pagine 129–158 del volume completo · estratto per lo studio

Appoggia lo smartphone sulla base di ricarica senza fili: la batteria comincia a caricarsi, eppure fra la base e il telefono non c'è nessun contatto e, dentro il telefono, nulla si muove. Nella bobina del telefono gli elettroni sono fermi finché qualcosa non li spinge; il campo magnetico, che agisce solo su cariche in moto, non può essere quel qualcosa. Nella Parte I abbiamo descritto il fenomeno con la legge di Faraday-Neumann e con la legge di Lenz. Ora vogliamo capire **chi** spinge le cariche, e la risposta cambia il modo di pensare il campo elettrico: un campo magnetico che varia crea nello spazio un campo elettrico, che c'è anche dove non ci sono fili né cariche.

Lo scorso anno hai riassunto le proprietà dei campi statici in quattro enunciati su flusso e circuitazione (*Fisica 4*, capitolo 16). In questo capitolo li completiamo per i campi che variano nel tempo. Il primo passo è il campo elettrico indotto; il secondo è la scoperta di James Clerk Maxwell: anche un campo elettrico che varia crea un campo magnetico, come se fosse una corrente. Con questi due passi i quattro enunciati diventano le **equazioni di Maxwell**, che contengono tutto l'elettromagnetismo classico e prevedono qualcosa che nessuno aveva cercato: onde di campo elettrico e magnetico che viaggiano alla velocità della luce. Seguiremo il percorso privilegiando le idee: le formule saranno poche e quasi tutte già note, ma lette in modo nuovo.

4.1 Il campo elettrico indotto

4.1.1 Una forza elettromotrice senza forza di Lorentz

Nel capitolo 1 abbiamo incontrato due modi di far nascere una corrente indotta. Nel primo una sbarretta conduttrice scorre su due binari in un campo magnetico uniforme: le cariche della sbarretta si muovono con essa, e la forza di Lorentz $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ le spinge lungo la sbarretta. La forza elettromotrice cinetica vBl si spiega così, senza bisogno di altro. Nel secondo modo il circuito è **fermo** e a cambiare è il campo: una calamita si avvicina a una bobina, oppure, nell'anello di Faraday, la corrente nella prima bobina viene accesa o spenta. Anche qui nella seconda bobina circola una corrente, e il suo valore è dato dalla stessa legge, $\mathcal{E} = -\Delta\Phi/\Delta t$.

Nel secondo caso, però, la forza di Lorentz non può essere la spiegazione. Prima che la corrente parta, gli elettroni di conduzione del filo sono in media fermi, e su una carica ferma il campo magnetico non esercita alcuna forza. L'unica forza che può mettere in moto cariche ferme è una forza elettrica. Dobbiamo concludere che **un campo magnetico che varia nel tempo genera un campo elettrico**: è questo campo che spinge gli elettroni lungo il filo e fa circolare la corrente.

Il campo non è prodotto da cariche: il filo è neutro e la stessa forza elettromotrice compare in un filo di rame, in uno di ferro o in un anello di plastica (dove però, essendo un isolante, le cariche non possono circolare). Il campo c'è anche se il filo non c'è: il filo serve soltanto a rive-

larlo, come la bussola rivela il campo magnetico. Un elettrone libero che si trovi nel vuoto, nella stessa posizione, ne subisce la forza. Questo campo si chiama **campo elettrico indotto**: è il campo elettrico generato da un campo magnetico variabile, indipendentemente dalla presenza di cariche e di conduttori.

4.1.2 Linee di campo chiuse

Il campo elettrico indotto è molto diverso da quello che hai studiato lo scorso anno. Le linee del campo elettrostatico partono dalle cariche positive e terminano su quelle negative (Figura 4.1a); non possono richiudersi su sé stesse, perché la circuitazione del campo elettrostatico è nulla lungo ogni linea chiusa (*Fisica 4*, capitolo 11). Se una linea di campo fosse chiusa, una carica positiva che la percorre tutta riceverebbe dal campo un lavoro positivo in ogni tratto, e il lavoro totale su un giro non potrebbe essere zero.

Per il campo indotto vale proprio l'opposto. La forza elettromotrice indotta in una spira è il lavoro che il campo compie su una carica unitaria che percorre la spira una volta: se questo lavoro è diverso da zero, il campo «gira» attorno alla regione in cui $\boldsymbol{B}$ varia. Le linee del campo elettrico indotto sono **linee di campo chiuse**: non hanno né inizio né fine, e non c'è nessuna carica su cui appoggiarle. Quando la regione in cui varia il campo magnetico ha simmetria cilindrica, come l'interno di un lungo solenoide, le linee sono circonferenze concentriche (Figura 4.1b).

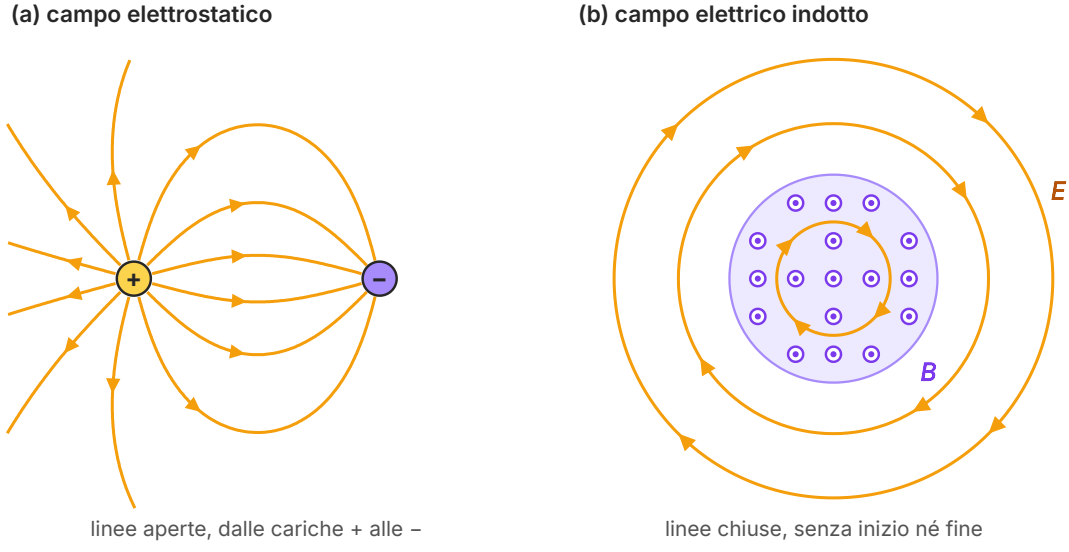

Figura 4.1 Due tipi di campo elettrico. (a) Il campo elettrostatico di due cariche opposte, con linee calcolate: le linee partono dalla carica positiva e terminano su quella negativa, e la circuitazione lungo ogni linea chiusa è nulla. (b) Il campo elettrico indotto attorno a una regione cilindrica (in sezione) in cui il campo magnetico, uscente dal foglio, aumenta: le linee sono circonferenze chiuse, percorse in senso orario per chi guarda con $\boldsymbol{B}$ rivolto verso di sé. Le linee sono presenti anche fuori dalla regione in cui c'è il campo magnetico.

4.1.3 La legge di Faraday-Neumann-Lenz come legge del campo

Scegliamo una linea chiusa orientata ℓ, per esempio il percorso di una spira, e dividiamola in tanti piccoli tratti Δl. Il lavoro del campo su una carica q lungo un tratto è $qE_t\Delta l$, dove E_t è la componente di $\boldsymbol{E}$ tangente alla linea; il lavoro per unità di carica su tutto il giro è la somma $\Sigma E_t\Delta l$, cioè la circuitazione $\Gamma(\boldsymbol{E})$. Ma il lavoro per unità di carica lungo un circuito chiuso è, per definizione, la forza elettromotrice. La legge di Faraday-Neumann, con il segno dato dalla legge di Lenz, si può dunque scrivere come una proprietà del campo elettrico, che chiamiamo **legge di Faraday-Neumann-Lenz**:

$$\Gamma_\ell(\boldsymbol{E}) = -\frac{\Delta\Phi(\boldsymbol{B})}{\Delta t} \quad \text{e, istante per istante,} \quad \Gamma_\ell(\boldsymbol{E}) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{B})}{\mathrm{d}t}$$

Il flusso $\Phi(\boldsymbol{B})$ è calcolato attraverso una superficie aperta qualunque che abbia la linea ℓ come **bordo**, cioè che sia delimitata da ℓ come una bolla di sapone dal suo anello, e la normale alla superficie è orientata con la regola della mano destra: le dita piegate seguono il verso di percorrenza di ℓ, il pollice indica la normale. La seconda forma, con la derivata che stai studiando in matematica, dà il valore istantaneo; la prima dà il valor medio sull'intervallo Δt. Il segno meno è la legge di Lenz: il campo indotto circola nel verso in cui spingerebbe una corrente che si oppone alla **variazione** del flusso. In pratica: se guardi la regione con $\boldsymbol{B}$ rivolto verso di te, un campo magnetico che aumenta genera linee di $\boldsymbol{E}$ percorse in senso orario, un campo che diminuisce linee percorse in senso antiorario.

La legge così scritta non parla più di fili: vale per qualunque linea chiusa, anche tracciata nel vuoto. È questa la forma in cui la legge di Faraday-Neumann-Lenz entra fra le equazioni di Maxwell, e segna un cambiamento importante rispetto al volume dello scorso anno. Là il campo elettrico era conservativo, con circuitazione sempre nulla, e per questo si potevano definire l'energia potenziale e il potenziale. Ora la definizione si allarga: il campo elettrico in un punto è la somma di una parte prodotta dalle cariche, conservativa, e di una parte indotta, con linee chiuse. Dove il campo magnetico varia, il campo elettrico è un **campo elettrico non conservativo**: la sua circuitazione è diversa da zero, il lavoro su una carica dipende dal percorso e non esiste un potenziale che lo descriva. La relazione $\Gamma(\boldsymbol{E}) = 0$ resta vera, ma solo per i campi statici.

ERRORE FREQUENTE

«Il campo elettrico indotto esiste solo dentro il filo della spira.» **No.** Il campo esiste nello spazio attorno alla regione in cui $\boldsymbol{B}$ varia, che ci sia o no un conduttore. La spira lo rende visibile, perché le sue cariche libere possono muoversi e formare una corrente; un anello isolante, nella stessa posizione, è attraversato dallo stesso campo, ma non vi circola corrente.

«Fra due punti di un circuito con una f.e.m. indotta c'è una ben determinata differenza di potenziale.» **Non sempre.** Dove il campo è non conservativo, la «tensione» fra due punti, cioè il lavoro per unità di carica, dipende dal percorso che li collega. Due voltmetri collegati agli stessi due punti, con i cavi disposti da parti opposte della regione in cui $\boldsymbol{B}$ varia, possono dare letture diverse, e hanno ragione entrambi (lo verificherai in uno dei problemi di fine capitolo, con due resistori e due voltmetri).

4.2 Il campo indotto in un solenoide

4.2.1 La simmetria e il percorso circolare

La legge $\Gamma(\boldsymbol{E}) = -\Delta\Phi(\boldsymbol{B})/\Delta t$, come il teorema di Ampère, permette di calcolare il campo quando la simmetria aiuta. Il caso più importante è un lungo solenoide di raggio R, nel quale la corrente cresce in modo che il campo interno, uniforme e diretto lungo l'asse, aumenti con rapidità costante $\Delta B/\Delta t$. Per simmetria, le linee del campo indotto sono circonferenze centrate sull'asse, in piani perpendicolari a esso, e su ciascuna circonferenza l'intensità E è la stessa in ogni punto (Figura 4.2a). Scegliamo allora come linea ℓ una circonferenza di raggio r: il campo è tangente e costante, quindi la circuitazione vale semplicemente $E \cdot 2\pi r$.

Dentro il solenoide ($r < R$) il campo magnetico attraversa tutto il cerchio di raggio r, e il flusso è $\Phi = B \cdot \pi r^2$. Uguagliando i valori assoluti:

$$E \cdot 2\pi r = \pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{r}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t} \qquad (r < R)$$

Fuori dal solenoide ($r > R$) il campo magnetico è praticamente nullo, ma il cerchio di raggio r contiene tutta la sezione del solenoide, e il flusso che lo attraversa è $B \cdot \pi R^2$:

$$E \cdot 2\pi r = \pi R^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{R^2}{2r}\frac{\Delta B}{\Delta t} \qquad (r > R)$$

Il grafico della Figura 4.2b mostra il risultato: dall'asse verso l'esterno il campo cresce in proporzione a r, raggiunge il massimo sulle spire e poi decresce come $1/r$, come il campo magnetico di un filo. Il fatto più sorprendente è il secondo: **fuori dal solenoide c'è un campo elettrico**, in punti in cui il campo magnetico è nullo. Non c'è contraddizione. La legge non lega il campo elettrico in un punto al campo magnetico nello stesso punto: lega la circuitazione lungo una

linea chiusa al flusso attraverso la superficie che la linea racchiude, e quella superficie comprende anche l'interno del solenoide. È per questo che una spira avvolta attorno a un solenoide, o al nucleo di un trasformatore, ha la stessa forza elettromotrice qualunque sia la sua forma e la sua larghezza.

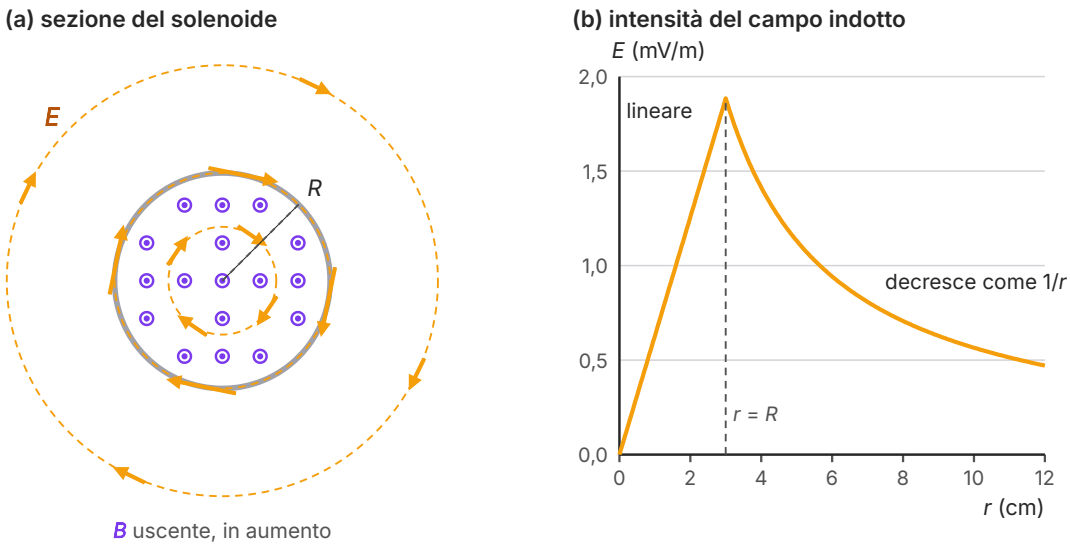

Figura 4.2 Il campo elettrico indotto da un lungo solenoide di raggio R = 3,0 cm il cui campo magnetico cresce con rapidità $\Delta B/\Delta t$ = 0,126 T/s (i valori dell'esempio svolto). (a) Sezione: il campo magnetico è uscente; le frecce, tangenti alle circonferenze tratteggiate di raggio 1,5 cm, 3,0 cm e 6,0 cm, hanno lunghezza proporzionale all'intensità del campo indotto. (b) Intensità del campo indotto in funzione della distanza dall'asse, calcolata con le formule del testo: cresce linearmente fino a $r = R$, dove vale 1,9 mV/m, poi decresce come $1/r$.

ESEMPIO SVOLTO

Il campo indotto dentro e fuori un solenoide

Problema. Un lungo solenoide ha 2000 spire per metro e raggio $R = 3{,}0$ cm. La corrente cresce uniformemente da 0 a 5,0 A in 0,10 s. a) Calcola la rapidità di variazione del campo magnetico interno. b) Calcola l'intensità del campo elettrico indotto a 2,0 cm dall'asse, sulle spire e a 10 cm dall'asse. c) Calcola la forza elettromotrice indotta in un anello di raggio 10 cm coassiale con il solenoide. d) Un elettrone si trova, fermo, a 2,0 cm dall'asse: quanto vale la forza che subisce, e in quale verso?

a) Il campo magnetico. Dentro il solenoide $B = \mu_0 n i$, quindi $\Delta B/\Delta t = \mu_0 n\, \Delta i/\Delta t = 4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A $\times$ 2000 m^{-1} $\times$ (5,0 A/0,10 s) = 0,126 T/s. Alla fine il campo vale 12,6 mT.

b) Il campo elettrico. A 2,0 cm, dentro: $E = (r/2)(\Delta B/\Delta t) = 0{,}010$ m $\times$ 0,126 T/s $= 1{,}3 \times 10^{-3}$ V/m. Sulle spire: $E = 0{,}015$ m $\times$ 0,126 T/s $= 1{,}9 \times 10^{-3}$ V/m. A 10 cm, fuori: $E = R^2/(2r) \times \Delta B/\Delta t = (0{,}030\ \text{m})^2/(0{,}20\ \text{m}) \times 0{,}126$ T/s $= 5{,}7 \times 10^{-4}$ V/m. (Controllo delle unità: m $\times$ T/s = m $\times$ V·s/m^2/s = V/m, perché 1 T = 1 V·s/m^2.)

c) La forza elettromotrice. Il flusso attraverso l'anello è quello della sola sezione del solenoide: $|\varepsilon| = \pi R^2\, \Delta B/\Delta t = \pi \times (0{,}030\ \text{m})^2 \times 0{,}126$ T/s $= 3{,}6 \times 10^{-4}$ V. Lo stesso valore si ottiene dalla circuitazione: $E \cdot 2\pi r = 5{,}65 \times 10^{-4}$ V/m $\times$ 0,628 m $= 3{,}6 \times 10^{-4}$ V. Un anello di raggio 20 cm avrebbe un campo dimezzato e una lunghezza doppia: la stessa f.e.m.

d) La forza sull'elettrone. $F = eE = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C $\times$ $1{,}26 \times 10^{-3}$ V/m $= 2{,}0 \times 10^{-22}$ N. Per la legge di Lenz, guardando il solenoide con $\boldsymbol{B}$ rivolto verso di sé, le linee del campo indotto sono percorse in senso orario, perché il campo magnetico aumenta; l'elettrone, che ha carica negativa, è spinto in verso opposto al campo, cioè in senso antiorario, lungo la tangente alla circonferenza di raggio 2,0 cm.

Controllo. Il campo è più intenso sulle spire che dentro o fuori, come nella Figura 4.2b, e il rapporto fra i valori a 2,0 cm e a 3,0 cm, 1,3/1,9, è circa 2/3, come vuole la proporzionalità a r. I campi indotti in un solenoide da laboratorio sono piccoli, millivolt per metro, perché le variazioni di B sono lente; nei trasformatori e nei fornelli a induzione, dove B oscilla cinquanta volte al secondo o decine di migliaia di volte al secondo, sono molto più intensi.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere i dati: il campo indotto misurato con anelli di raggio diverso

Problema. Un solenoide largo, avvolto su un tubo di plastica, è alimentato da un generatore che fa crescere la corrente a rampa, cioè con rapidità costante. Anelli di filo di raggio r diverso, coassiali con il solenoide, alcuni dentro e alcuni fuori dal tubo, sono collegati a un oscilloscopio, che durante la rampa legge una f.e.m. costante. I risultati sono nella Tabella 4.1. a) Ricava dai dati la rapidità di variazione del campo interno. b) Stima il raggio del solenoide. c) Calcola il campo indotto lungo ciascun anello e descrivi come varia con r.

Tabella 4.1 F.e.m. indotta in anelli coassiali con un solenoide mentre la corrente cresce a rampa (dati tipici; incertezza sulle f.e.m. circa 2%).

r (cm)	ε (mV)	$\varepsilon/(\pi r^2)$ (T/s)	$E = \varepsilon/(2\pi r)$ (mV/m)
2,0	0,63	0,50	5,0
4,0	2,49	0,50	9,9
6,0	5,68	0,50	15,1
8,0	10,1	0,50	20,1
12,0	15,6	0,34	20,7
16,0	15,8	0,20	15,7
20,0	15,7	0,12	12,5

a) I primi quattro anelli. Fino a 8 cm la f.e.m. cresce rapidamente: raddoppiando il raggio diventa circa quattro volte più grande. È ciò che ci si aspetta se l'anello è dentro il solenoide, dove $|\varepsilon| = \pi r^2 \, \Delta B/\Delta t$. La terza colonna lo conferma: il rapporto $\varepsilon/(\pi r^2)$ è costante entro l'incertezza e vale $\Delta B/\Delta t = 0{,}50$ T/s.

b) Gli ultimi tre anelli. Da 12 cm in poi la f.e.m. non cambia più (15,6 mV, 15,8 mV, 15,7 mV, uguali entro il 2%): gli anelli sono fuori dal solenoide e il flusso concatenato è sempre quello della sezione, $\pi R^2 B$. Dalla media, 15,7 mV = $\pi R^2 \times 0{,}50$ T/s, quindi $R = \sqrt{(15{,}7 \times 10^{-3}\ \text{V}/(\pi \times 0{,}50\ \text{T/s}))} = 0{,}10$ m: il raggio del solenoide è circa 10 cm, compreso, come deve essere, fra 8 e 12 cm.

c) Il campo. L'ultima colonna dà l'intensità media del campo lungo ciascun anello. Dentro cresce in proporzione a r (5,0; 9,9; 15,1; 20,1 mV/m: quasi esattamente 2,5 mV/m per ogni centimetro), fuori diminuisce come $1/r$ (da 12 a 20 cm, cioè con il raggio moltiplicato per 5/3, il campo passa da 20,7 a 12,5 mV/m, cioè diventa 3/5 del valore iniziale). È l'andamento della Figura 4.2b.

Controllo. Con $R = 10$ cm e $\Delta B/\Delta t = 0{,}50$ T/s la formula interna dà, sulle spire, $E = 0{,}050$ m $\times$ 0,50 T/s = 25 mV/m, il massimo: un valore maggiore di tutti quelli della tabella, come deve essere, perché nessun anello passa esattamente sulle spire.

COLLEGAMENTI

Il betatrone: elettroni accelerati da un campo indotto

Il campo elettrico indotto ha un'applicazione diretta in un acceleratore di particelle, il **betatrone**. Elettroni iniettati in una camera a vuoto a forma di ciambella, posta fra i poli di un grande elettromagnete, percorrono un'orbita circolare. Mentre la corrente nell'elettromagnete cresce, il flusso magnetico attraverso l'orbita aumenta, e lungo l'orbita nasce un campo elettrico indotto tangente, che accelera gli elettroni a ogni giro. Non ci sono elettrodi né tensioni applicate: a ogni giro l'elettrone guadagna un'energia pari a e volte la f.e.m. indotta lungo l'orbita, di solito qualche decina o centinaia di elettronvolt, ma i giri sono centinaia di migliaia.

Lo stesso campo magnetico che cresce ha anche il compito di tenere gli elettroni sull'orbita, che deve restare di raggio fisso mentre la loro quantità di moto aumenta. Le due funzioni si conciliano con la **condizione del betatrone**: il campo magnetico sull'orbita deve essere, in ogni istante, la metà del campo medio dentro l'orbita, e lo si ottiene sagomando opportunamente i poli dell'elettromagnete. I betatroni sono stati usati per produrre fasci di elettroni e di raggi X per la ricerca e per la radioterapia; oggi in questi usi sono stati in gran parte sostituiti da acceleratori lineari.

4.3 La corrente di spostamento

4.3.1 Un paradosso nel teorema di Ampère

Il teorema di Ampère (*Fisica 4*, capitolo 16) dice che la circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa ℓ è μ_0 volte la corrente concatenata con ℓ: $\Gamma(\boldsymbol{B}) = \mu_0 \Sigma i$. In questo capitolo indichiamo con i la corrente nei conduttori, per non confonderla con l'intensità delle onde che incontrerai nel prossimo capitolo. Ma che cosa significa, esattamente, «concatenata»? La corrente concatenata è quella che attraversa una superficie che ha la linea ℓ come bordo, e di superfici così ce ne sono infinite: un disco piano, una calotta a forma di cupola, un sacchetto. Con le correnti costanti la scelta non conta. La carica si conserva, e in condizioni stazionarie non si accumula da nessuna parte: quanta ne entra in una regione, tanta ne esce, e ogni superficie appoggiata su ℓ è attraversata dalla stessa corrente.

Le cose cambiano con una corrente che varia. Consideriamo un condensatore piano che si sta caricando (Figura 4.3). Nei fili scorre la corrente i, e fra le armature, isolate l'una dall'altra, non passa nessuna carica: la carica si accumula sulle armature. Prendiamo come linea ℓ una circonferenza attorno al filo. La superficie piana S_1 che ha ℓ come bordo è attraversata dal filo, e la corrente concatenata è i. La superficie a sacchetto S_2, appoggiata sulla stessa linea ℓ, passa invece fra le armature senza toccare il filo, e nessuna carica la attraversa: la corrente concatenata è zero. La stessa circuitazione dovrebbe essere, nello stesso istante, sia $\mu_0 i$ sia zero. Il teorema di Ampère, così com'è, non può valere per le correnti variabili.

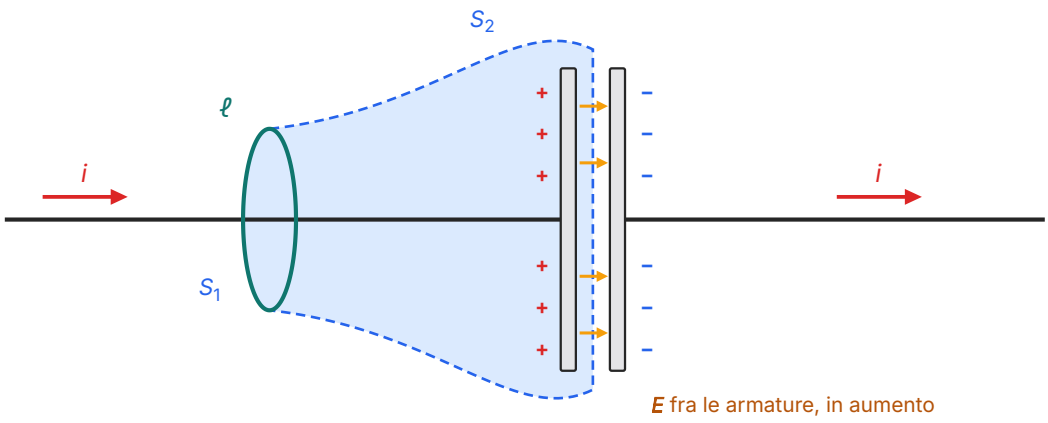

Figura 4.3 Il paradosso del condensatore che si carica. La linea chiusa ℓ circonda il filo; due superfici hanno ℓ come bordo. La superficie piana S_1 è attraversata dal filo, in cui scorre la corrente i; la superficie a sacchetto S_2 passa fra le armature, dove non scorre nessuna carica ma il campo elettrico $\boldsymbol{E}$ sta aumentando.

4.3.2 La soluzione di Maxwell

Fra le armature non scorrono cariche, ma succede qualcosa: il campo elettrico aumenta, perché aumenta la carica sulle armature. Maxwell propose che anche un campo elettrico variabile produca un campo magnetico, come una corrente. Per un condensatore piano di area S con carica q, il campo fra le armature è $E = q/(\varepsilon_0 S)$ (*Fisica 4*, capitolo 12), quindi il flusso del campo elettrico attraverso una superficie che taglia lo spazio fra le armature è

$$\Phi(\boldsymbol{E}) = ES = \frac{q}{\varepsilon_0} \implies \varepsilon_0 \frac{\Delta\Phi(\boldsymbol{E})}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t} = i$$

La grandezza $\varepsilon_0 \Delta\Phi(\boldsymbol{E})/\Delta t$ si misura in ampere ed è esattamente uguale alla corrente nei fili. Maxwell la chiamò **corrente di spostamento**:

$$I_s = \varepsilon_0 \frac{\Delta\Phi(\boldsymbol{E})}{\Delta t} \quad \text{e, istante per istante,} \quad I_s = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{E})}{\mathrm{d}t}$$

Per distinguerla, la corrente ordinaria, fatta di cariche che si muovono in un conduttore, si chiama **corrente di conduzione**. Se nel teorema di Ampère sommiamo le due correnti, il paradosso scompare. Attraverso S_1 passa la corrente di conduzione i e non c'è flusso elettrico che cambi (fuori dal condensatore il campo è trascurabile); attraverso S_2 non passa corrente di conduzione, ma c'è la corrente di spostamento, che vale proprio i. La somma è la stessa per le due superfici. In un certo senso, la corrente di spostamento «continua» la corrente di conduzione là

dove questa si interrompe: la carica che arriva sull'armatura non attraversa lo spazio vuoto, ma il campo elettrico che cresce ne prende il posto.

4.3.3 La legge di Ampère-Maxwell

Con la corrente di spostamento il teorema di Ampère diventa la **legge di Ampère-Maxwell**:

$$\Gamma_\ell(\boldsymbol{B}) = \mu_0(i + I_s) = \mu_0 i + \mu_0\varepsilon_0\frac{\Delta\Phi(\boldsymbol{E})}{\Delta t}$$

dove i è la corrente di conduzione concatenata con ℓ e $\Phi(\boldsymbol{E})$ è il flusso del campo elettrico attraverso la stessa superficie, orientata con la regola della mano destra. Se nessuna corrente attraversa la superficie, rimane il secondo termine: **un campo elettrico che varia genera un campo magnetico**, le cui linee si avvolgono attorno alla direzione in cui $\boldsymbol{E}$ cambia. È il fenomeno simmetrico dell'induzione di Faraday, con una differenza di segno. Nella legge di Faraday-Neumann-Lenz c'è un meno, e il campo elettrico indotto circola in verso opposto a quello indicato dalla mano destra attorno alla variazione di $\boldsymbol{B}$; nella legge di Ampère-Maxwell il segno è più, e il campo magnetico circola nel verso della mano destra attorno alla variazione di $\boldsymbol{E}$ (Figura 4.4).

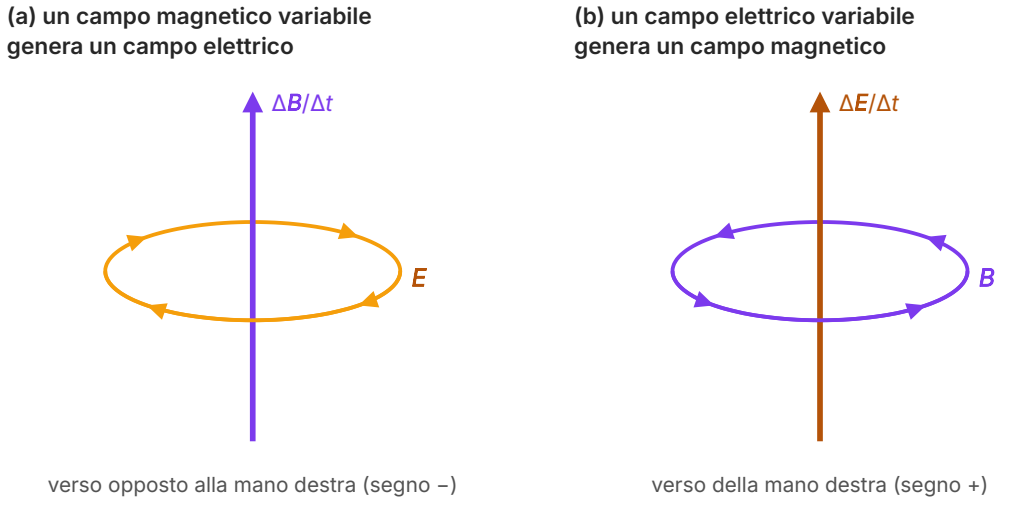

Figura 4.4 La simmetria fra le due leggi di circuitazione, nel vuoto. (a) Un campo magnetico che aumenta verso l'alto genera un campo elettrico con linee chiuse che, viste dall'alto, girano in senso orario: è il verso opposto a quello indicato dalle dita della mano destra con il pollice lungo $\Delta\boldsymbol{B}/\Delta t$. (b) Un campo elettrico che aumenta verso l'alto genera un campo magnetico con linee chiuse che, viste dall'alto, girano in senso antiorario, nel verso della mano destra.

Nel condensatore, le linee del campo magnetico prodotto dalla corrente di spostamento sono circonferenze centrate sull'asse delle armature, come attorno al filo. Fuori dal condensatore, a distanza r dall'asse, il campo è uguale a quello che produrrebbe il filo, $\mu_0 i/(2\pi r)$; dentro, fra ar-

mature circolari di raggio R, la circonferenza di raggio r concatena solo la frazione r^2/R^2 della corrente di spostamento, e il campo cresce linearmente da zero sull'asse fino al bordo. È lo stesso andamento del campo magnetico dentro e fuori un filo spesso percorso da corrente.

ESEMPIO SVOLTO

Il campo magnetico fra le armature

Problema. Un condensatore ad armature circolari di raggio $R = 5{,}0$ cm, nel vuoto, viene caricato; in un certo istante la corrente nei fili vale $i = 0{,}20$ A. a) Calcola in quell'istante la rapidità di variazione del campo elettrico fra le armature. b) Quanto vale la corrente di spostamento? c) Calcola il campo magnetico fra le armature a 2,5 cm dall'asse, sul bordo e a 10 cm dall'asse. d) Confronta il risultato con il campo magnetico terrestre, circa 5×10^{-5} T.

a) Il flusso attraverso l'area delle armature è $\Phi(\boldsymbol{E}) = E\ \pi R^2$, e $\varepsilon_0 \Delta\Phi(\boldsymbol{E})/\Delta t = i$; quindi $\Delta E/\Delta t = i/(\varepsilon_0 \pi R^2) = 0{,}20\ \text{A}/(8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F/m} \times \pi \times (0{,}050\ \text{m})^2) = 2{,}9 \times 10^{12}$ V/(m·s). Il campo cresce di quasi tre milioni di volt al metro ogni microsecondo.

b) La corrente di spostamento totale fra le armature è uguale alla corrente di conduzione nei fili: $I_s = 0{,}20$ A.

c) Per la legge di Ampère-Maxwell su una circonferenza di raggio r centrata sull'asse, parallela alle armature: $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_s (r^2/R^2)$ per $r < R$, quindi $B = \mu_0 i r/(2\pi R^2)$. A 2,5 cm: $B = 2 \times 10^{-7}\ \text{T·m/A} \times 0{,}20\ \text{A} \times 0{,}025\ \text{m}/(0{,}050\ \text{m})^2 = 4{,}0 \times 10^{-7}$ T. Sul bordo: $B = \mu_0 i/(2\pi R) = 2 \times 10^{-7} \times 0{,}20/0{,}050\ \text{T} = 8{,}0 \times 10^{-7}$ T. A 10 cm la circonferenza concatena tutta la corrente di spostamento: $B = 2 \times 10^{-7} \times 0{,}20/0{,}10\ \text{T} = 4{,}0 \times 10^{-7}$ T. Il verso è quello della mano destra con il pollice lungo $\boldsymbol{E}$, che va dall'armatura positiva alla negativa e sta aumentando.

d) Il campo massimo, $8{,}0 \times 10^{-7}$ T, è circa 60 volte più debole del campo terrestre, e dura solo finché il condensatore si carica. Misurarlo è possibile, con sensori sensibili e correnti alternate, ma è una misura delicata: nessuno nell'Ottocento poteva farla. Maxwell introdusse la corrente di spostamento per ragioni teoriche, e la conferma arrivò per un'altra strada, con le onde elettromagnetiche.

ERRORE FREQUENTE

«La corrente di spostamento è una corrente di cariche che salta da un'armatura all'altra.» **No.** Fra le armature di un condensatore ideale non passa nessuna carica: la corrente di spostamento è il prodotto di ε_0 per la rapidità di variazione del flusso del campo elettrico. Si misura in ampere e produce un campo magnetico come una corrente, ma non trasporta carica, non scalda nulla per effetto Joule ed esiste anche nel vuoto più assoluto.

«La corrente di spostamento dipende dal campo elettrico.» **No:** dipende dalla sua **variazione**. Un condensatore carico, con un campo elettrico intenso ma costante fra le armature, ha corrente di spostamento nulla, e attorno a lui non c'è alcun campo magnetico.

4.4 Le equazioni di Maxwell

4.4.1 Quattro leggi per due campi

Siamo pronti a riunire tutto. Le proprietà del campo elettrico e del campo magnetico, nel caso più generale di cariche e correnti qualunque e di campi che variano nel tempo, si riassumono in quattro leggi: due sul flusso attraverso una superficie chiusa e due sulla circuitazione lungo una linea chiusa. Sono le **equazioni di Maxwell**. Le scriviamo nel vuoto, con le cariche e le correnti come sorgenti; nei materiali si aggiungono le costanti costante dielettrica relativa e permeabilità magnetica relativa, ma la struttura non cambia.

1. **Teorema di Gauss per il campo elettrico.** $\Phi_S(\boldsymbol{E}) = Q_{\text{int}}/\varepsilon_0$. Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è proporzionale alla carica che essa racchiude. *In parole:* le cariche sono le sorgenti del campo elettrico; le linee del campo elettrostatico partono dalle cariche positive e finiscono sulle negative.
2. **Teorema di Gauss per il campo magnetico.** $\Phi_S(\boldsymbol{B}) = 0$. Il flusso del campo magnetico attraverso ogni superficie chiusa è nullo. *In parole:* non esistono cariche magnetiche isolate, i monopoli; le linee del campo magnetico sono sempre chiuse.
3. **Legge di Faraday-Neumann-Lenz.** $\Gamma_\ell(\boldsymbol{E}) = -\Delta\Phi(\boldsymbol{B})/\Delta t$, cioè $-\mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{B})/\mathrm{d}t$. *In parole:* un campo magnetico che varia genera un campo elettrico con linee chiuse; se il campo magnetico non varia, il campo elettrico è conservativo.
4. **Legge di Ampère-Maxwell.** $\Gamma_\ell(\boldsymbol{B}) = \mu_0(i + \varepsilon_0\Delta\Phi(\boldsymbol{E})/\Delta t)$, cioè $\mu_0(i + \varepsilon_0\mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{E})/\mathrm{d}t)$. *In parole:* il campo magnetico è generato dalle correnti di conduzione e dai campi elettrici che variano; le sue linee si avvolgono attorno alle une e agli altri.

In tutte e quattro, Φ_S indica il flusso attraverso una superficie chiusa S, mentre nelle leggi di circuitazione ℓ è una linea chiusa orientata, e i flussi $\Phi(\boldsymbol{B})$ e $\Phi(\boldsymbol{E})$ e la corrente i si riferiscono a una superficie qualunque che abbia ℓ come bordo. Per sapere come i campi agiscono sulla materia serve ancora una legge, la forza di Lorentz nella sua forma completa: su una carica q che si muove con velocità $\boldsymbol{v}$ agisce la forza $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$. Con le quattro equazioni e questa forza, l'elettromagnetismo classico è completo: dall'elettrostatica ai motori elettrici, dai trasformatori alla luce.

Il confronto con gli enunciati dello scorso anno, nella Tabella 4.2, mostra quanto poco è cambiato e quanto conta quel poco. Le due leggi sul flusso restano le stesse. Le due leggi sulla circuitazione acquistano ciascuna un termine con la rapidità di variazione del flusso dell'**altro** campo: i due campi, che nella statica erano indipendenti, diventano legati l'uno all'altro. Per questo, quando variano nel tempo, non si può più parlare del campo elettrico e del campo magnetico separatamente.

Tabella 4.2 Le leggi dei campi statici (*Fisica 4*, capitolo 16) e le equazioni di Maxwell. In grassetto le novità di quest'anno.

Legge	Campi statici	Campi che variano nel tempo
Flusso di $\boldsymbol{E}$ (superficie chiusa)	$\Phi(\boldsymbol{E}) = Q_{\text{int}}/\varepsilon_0$	$\Phi(\boldsymbol{E}) = Q_{\text{int}}/\varepsilon_0$ (invariata)
Flusso di $\boldsymbol{B}$ (superficie chiusa)	$\Phi(\boldsymbol{B}) = 0$	$\Phi(\boldsymbol{B}) = 0$ (invariata)
Circuitazione di $\boldsymbol{E}$	$\Gamma(\boldsymbol{E}) = 0$: campo conservativo	$\Gamma(\boldsymbol{E}) = \mathbf{-\Delta\Phi(B)/\Delta t}$: linee chiuse dove $\boldsymbol{B}$ varia
Circuitazione di $\boldsymbol{B}$	$\Gamma(\boldsymbol{B}) = \mu_0 \Sigma i$	$\Gamma(\boldsymbol{B}) = \mu_0 \Sigma i + \mathbf{\mu_0 \varepsilon_0 \Delta\Phi(E)/\Delta t}$

4.4.2 Le equazioni nel vuoto, lontano dalle sorgenti

Consideriamo una regione di spazio vuoto, senza cariche e senza correnti. Le equazioni diventano

$$\Phi_S(\boldsymbol{E}) = 0 \qquad \Phi_S(\boldsymbol{B}) = 0 \qquad \Gamma(\boldsymbol{E}) = -\frac{\Delta\Phi(\boldsymbol{B})}{\Delta t} \qquad \Gamma(\boldsymbol{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\Delta\Phi(\boldsymbol{E})}{\Delta t}$$

e mostrano una simmetria quasi perfetta fra i due campi. Le leggi sul flusso sono identiche; le leggi sulla circuitazione differiscono solo per il segno e per il fattore $\mu_0\varepsilon_0$. In questa regione un campo elettrico può esistere anche senza nessuna carica vicina, purché sia accompagnato da un campo magnetico che varia, e viceversa. È il punto di partenza del prossimo paragrafo.

Le equazioni contengono anche più di quanto sembri. Per esempio, la conservazione della carica, che avevamo usato per costruire la corrente di spostamento, ne è una conseguenza: la legge di Ampère-Maxwell funziona per ogni superficie solo se la carica che entra in una regione è uguale a quella che vi si accumula. E, come vedremo, contengono tutta l'ottica.

Maxwell non scrisse le sue leggi in questa forma. Nel lavoro del 1865 le equazioni erano una ventina, scritte componente per componente, e anche nel *Treatise* del 1873 comparivano con grandezze ausiliarie, come il potenziale vettore, che oggi si introducono solo nei corsi universitari. La forma compatta in quattro leggi fu data qualche anno dopo la morte di Maxwell da Oliver Heaviside, e indipendentemente da Heinrich Hertz, ed è quella che si usa ancora oggi, nella versione con i flussi e le circuitazioni che hai visto o nella forma «locale», con le derivate rispetto allo spazio, che studierai all'università.

COLLEGAMENTI

Che cos'è un campo? Da strumento di calcolo a realtà fisica

Per Newton la gravità era un'**azione a distanza**: agiva istantaneamente, attraverso lo spazio vuoto. Anche le forze fra cariche e fra correnti erano descritte, nella prima metà dell'Ottocento, come azioni a distanza. Faraday, che non usava la matematica, immaginava invece lo spazio attorno a magneti e correnti riempito di «linee di forza», con una loro realtà fisica. Maxwell tradusse quelle linee in equazioni, e le equazioni rivelarono che i campi possono propagarsi da soli, staccandosi dalle sorgenti e portando con sé energia (che un campo contenga energia lo hai visto con la densità di energia del campo magnetico $B^2/(2\mu_0)$, nel capitolo 2; che le onde la trasportino lo vedrai con la loro intensità, nel capitolo 5).

Un'entità che trasporta energia e quantità di moto, e che esiste anche dove non ci sono cariche, non è più soltanto un modo comodo per calcolare forze: è un oggetto fisico, tanto reale quanto la materia. È un cambiamento nel modo di concepire la natura che interessa anche la filosofia: la domanda su che cosa «esiste davvero» nel mondo fisico, e se le leggi descrivano oggetti o soltanto relazioni fra misure, tornerà con la relatività e con la meccanica quantistica.

4.5 La previsione delle onde elettromagnetiche

4.5.1 Una catena che si sostiene da sola

Immagina di far variare una corrente in un filo, per esempio di farla oscillare avanti e indietro. Il campo magnetico attorno al filo varia, e secondo la legge di Faraday-Neumann-Lenz genera un campo elettrico con linee chiuse attorno alla regione in cui varia. Anche questo campo elettrico varia, e secondo la legge di Ampère-Maxwell genera a sua volta un campo magnetico variabile un po' più in là; questo genera un campo elettrico ancora più in là, e così via. Una volta partita, la catena non ha più bisogno delle cariche e delle correnti che l'hanno avviata: i due campi si sostengono a vicenda e si allontanano dalla sorgente. Maxwell chiamò questa perturbazione che si propaga un'onda, e oggi la chiamiamo onda elettromagnetica.

Un'onda di questo tipo non ha bisogno di un mezzo materiale: è fatta di campi, che esistono anche nel vuoto. La domanda decisiva è quanto velocemente si propaga. Maxwell la affrontò con le sue equazioni complete; noi ne seguiamo una versione semplificata, che usa soltanto le due leggi di circuitazione e una situazione molto semplice: un **fronte** piano che separa una regione in cui ci sono i campi da una regione in cui non ci sono ancora.

ESEMPIO SVOLTO

La velocità di un'onda elettromagnetica, passo per passo

Problema. Nello spazio vuoto un fronte piano, perpendicolare all'asse x, avanza con velocità v nel verso positivo dell'asse. Dietro il fronte c'è un campo elettrico uniforme $\boldsymbol{E}$, diretto lungo y, e un campo magnetico uniforme $\boldsymbol{B}$, diretto lungo z; davanti al fronte i campi sono ancora nulli (Figura 4.5). Usando le leggi di circuitazione, trova quanto deve valere v perché la situazione sia compatibile con le equazioni di Maxwell.

Passo 1: Faraday-Neumann-Lenz su un rettangolo nel piano xy. Scegliamo un rettangolo di altezza h (lungo y) che sta a cavallo del fronte, percorso in senso antiorario per chi guarda dal semiasse positivo delle z; con la regola della mano destra, la normale al rettangolo è diretta come $\boldsymbol{B}$. La circuitazione di $\boldsymbol{E}$: sui lati orizzontali $\boldsymbol{E}$ è perpendicolare al percorso e non contribuisce; il lato verticale davanti al fronte è in una regione senza campo; sul lato verticale dietro il fronte il percorso scende, in verso opposto a $\boldsymbol{E}$. Quindi $\Gamma(\boldsymbol{E}) = -Eh$.

Passo 2: il flusso di $\boldsymbol{B}$ che cambia. In un intervallo Δt il fronte avanza di $v\Delta t$, e la parte del rettangolo in cui c'è il campo magnetico cresce dell'area $hv\Delta t$. Il flusso aumenta di $\Delta\Phi(\boldsymbol{B}) = Bhv\Delta t$, e $\Delta\Phi(\boldsymbol{B})/\Delta t = Bhv$.

Passo 3: la prima relazione. La legge di Faraday-Neumann-Lenz dà $-Eh = -Bhv$, cioè

$$E = vB$$

Passo 4: Ampère-Maxwell su un rettangolo nel piano xz. Ora prendiamo un rettangolo di lato h lungo z, anch'esso a cavallo del fronte, con la normale diretta come $\boldsymbol{E}$ (lungo y). Nessuna corrente lo attraversa. Sul lato dietro il fronte il percorso è concorde con $\boldsymbol{B}$, sugli altri lati il contributo è nullo: $\Gamma(\boldsymbol{B}) = Bh$. Il flusso del campo elettrico cresce, come prima, di $Ehv\Delta t$ nel tempo Δt, quindi $\Delta\Phi(\boldsymbol{E})/\Delta t = Ehv$.

Passo 5: la seconda relazione. La legge di Ampère-Maxwell dà $Bh = \mu_0\varepsilon_0 Ehv$, cioè

$$B = \mu_0\varepsilon_0 vE$$

Passo 6: la velocità. Sostituendo la prima relazione nella seconda: $B = \mu_0\varepsilon_0 v \cdot vB$, quindi $\mu_0\varepsilon_0 v^2 = 1$ e

$$v = \frac{1}{\sqrt{(\mu_0\varepsilon_0)}}$$

Controllo. Le unità: ε_0 si misura in $\mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}$ e μ_0 in $\mathrm{T\cdot m/A = N/A^2}$; il prodotto è $\mathrm{C^2/(A^2\cdot m^2) = s^2/m^2}$, e l'inverso della radice è una velocità, in m/s. I segni: con $\boldsymbol{E}$ lungo y e $\boldsymbol{B}$ lungo z il fronte avanza lungo $+x$, nella direzione di $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$. Se avessimo scelto $\boldsymbol{B}$ lungo $-z$, i passi 1–3 avrebbero dato $E = -vB$, impossibile con valori positivi: il fronte non può avanzare in quel verso. La perturbazione si propaga solo se E e B stanno nel rapporto $E/B = v$, sono perpendicolari fra loro e alla direzione di propagazione.

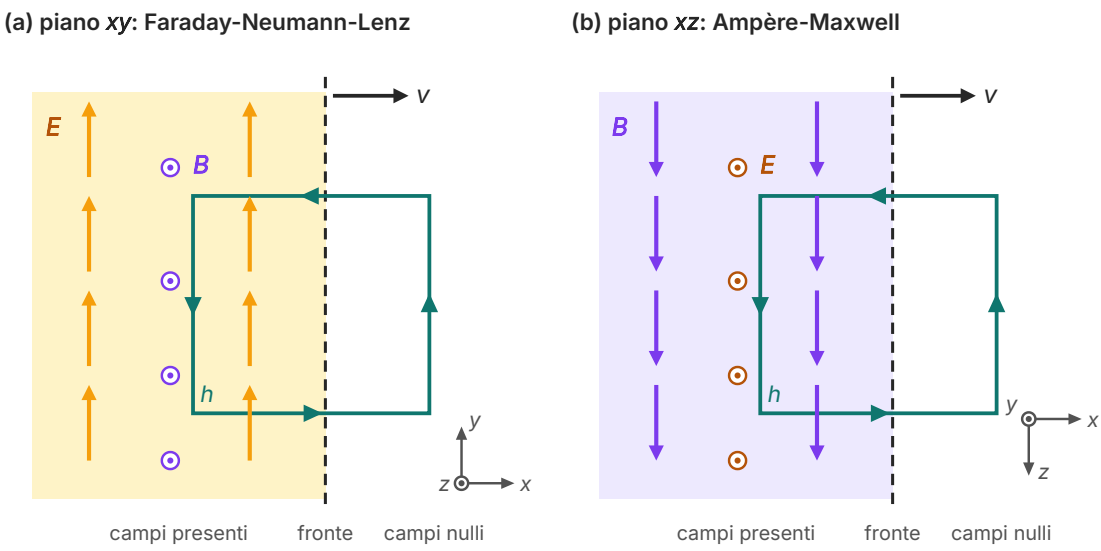

Figura 4.5 Un fronte piano di campo elettromagnetico che avanza con velocità v lungo x: dietro il fronte (zona colorata) i campi sono uniformi, davanti sono nulli. (a) Nel piano xy, con $\boldsymbol{B}$ uscente dal foglio, il rettangolo di altezza h percorso in senso antiorario serve per la legge di Faraday-Neumann-Lenz. (b) Nel piano xz, visto dal semiasse positivo delle y (quindi con $\boldsymbol{E}$ uscente dal foglio e l'asse z verso il basso), il rettangolo serve per la legge di Ampère-Maxwell.

4.5.2 La luce è un'onda elettromagnetica

Le due costanti ε_0 e μ_0 si misurano con esperimenti di elettrostatica e di magnetismo, senza alcun riferimento alla luce: la prima con un condensatore, la seconda con le forze fra correnti o con il campo di un solenoide. Eppure, con i valori della Tabella A.1,

$$v = \frac{1}{\sqrt{(8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N{\cdot}m^2)}) \times 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T{\cdot}m/A}}} = 3{,}00 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}$$

cioè proprio la velocità della luce nel vuoto. Maxwell fece un calcolo equivalente con i dati elettrici e magnetici del suo tempo, provenienti dalle misure di Wilhelm Weber e Rudolf Kohlrausch, e ottenne un valore molto vicino a quelli che Hippolyte Fizeau e Léon Foucault avevano misurato per la luce negli anni precedenti. Nel 1865, in *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, concluse che la coincidenza non poteva essere casuale: la luce stessa è una perturbazione elettromagnetica che si propaga secondo le leggi dell'elettromagnetismo (la citazione è in apertura del capitolo).

Fu una delle grandi **unificazioni** della fisica: due campi di studio che erano sempre stati separati, l'ottica da una parte e l'elettricità e il magnetismo dall'altra, diventarono un'unica teoria. La luce visibile, la polarizzazione che hai studiato lo scorso anno, l'interferenza e la diffrazione

sono fenomeni di campi elettrici e magnetici oscillanti. Le equazioni lasciavano prevedere anche onde di qualunque altra lunghezza d'onda, prodotte da cariche che oscillano a frequenze diverse: nessuno le aveva mai osservate. Le produsse e le rivelò Heinrich Hertz, con gli esperimenti del 1886–1888, che trovarono anche la loro velocità uguale a quella della luce: li studieremo nel capitolo 5, e lo spettro completo delle onde elettromagnetiche nel capitolo 6.

Oggi il legame fra le tre costanti è usato al contrario. Il Sistema Internazionale fissa per definizione il valore di c (dal 1983) e, dal 2019, anche quello della carica elementare; da allora μ_0 è una grandezza misurata, molto vicina a $4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A, e $\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$ ne segue.

APPROFONDIMENTO

Il modello meccanico di Maxwell e le equazioni che gli sopravvissero

Maxwell non arrivò alla corrente di spostamento ragionando sul condensatore, come abbiamo fatto noi. Nei suoi primi lavori sull'elettromagnetismo, alcuni anni prima del 1865, costruì un modello meccanico dello spazio, che pensava riempito da un mezzo, l'etere. Il mezzo era fatto di minuscoli **vortici molecolari** che ruotavano attorno alle linee del campo magnetico; fra un vortice e l'altro c'erano piccole particelle che, come le ruote dentate di un ingranaggio, trasmettevano la rotazione da un vortice al successivo. Il moto ordinato di queste particelle era la corrente elettrica.

In un isolante le particelle non potevano scorrere liberamente, ma un campo elettrico le spostava di poco dalla loro posizione, deformando il mezzo elastico. Quando il campo cambiava, lo spostamento cambiava, e un piccolo spostamento di cariche era anch'esso una corrente: da qui il nome «corrente di spostamento». Calcolando la velocità con cui una perturbazione si propaga in un mezzo elastico di questo tipo, Maxwell trovò un valore vicino alla velocità della luce.

Maxwell stesso non pensava che il modello fosse letterale: lo considerava un'analogia utile a guidare il ragionamento. Nel lavoro del 1865 e nel *Treatise* mise in primo piano le equazioni e relegò i vortici in secondo piano. Fu una scelta lungimirante: l'etere fu abbandonato all'inizio del Novecento, con la relatività (capitolo 7), ma le equazioni rimasero intatte. Hertz scrisse, in sostanza, che la teoria di Maxwell **è** il sistema delle equazioni di Maxwell (parafrasi). Il modello meccanico, potremmo aggiungere, era stato un'impalcatura: utile per costruire l'edificio, e poi da smontare.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: misurare la velocità della luce senza la luce

Materiali. Due lastre quadrate di alluminio di lato (0,300 ± 0,001) m, piane e rigide; distanziatori isolanti di plastica di diversi spessori, da mettere agli angoli; un calibro (risoluzione 0,02 mm); un capacimetro (incertezza dichiarata 1% della lettura + 1 pF) con due cavetti corti. Per μ_0 si usano i risultati dell'esperienza sul solenoide di *Fisica 4*, capitolo 16.

Procedimento. 1) Misura con il calibro lo spessore d dei distanziatori. 2) Appoggia una lastra sul tavolo, metti i distanziatori agli angoli e appoggia sopra la seconda lastra, parallela alla prima: hai costruito un condensatore piano con l'aria come dielettrico ($\varepsilon_r = 1{,}0006$, che si può prendere uguale a 1). 3) Misura la capacità C per sette valori di d fra 1,5 e 6,0 mm, tenendo fermi i cavetti. 4) Riporta C in funzione di $1/d$: se $C = \varepsilon_0 S/d$, i punti stanno su una retta con pendenza $\varepsilon_0 S$. I cavetti e il capacimetro aggiungono una piccola capacità costante, che compare come intercetta. 5) Riprendi la misura di μ_0: dalla Tabella 16.2 di *Fisica 4*, con il solenoide da 1000 spire/m, la pendenza di B in funzione di I era (1,24 ± 0,02) mT/A, quindi μ_0 = pendenza/n = (1,24 ± 0,02) × 10^{-6} T·m/A; aggiungendo lo 0,5% di incertezza su n, $\mu_0 = (1{,}24 \pm 0{,}03) \times 10^{-6}$ T·m/A.

Tabella 4.3 Capacità del condensatore ad aria con lastre di area S = 0,0900 m^2 al variare della distanza fra le lastre (dati tipici).

d (mm)	$1/d$ (m^{-1})	C (pF)
1,50 ± 0,02	667	551 ± 7
2,00 ± 0,02	500	418 ± 5
2,50 ± 0,02	400	336 ± 4
3,00 ± 0,02	333	282 ± 4
4,00 ± 0,02	250	215 ± 3
5,00 ± 0,02	200	175 ± 3
6,00 ± 0,02	167	149 ± 3

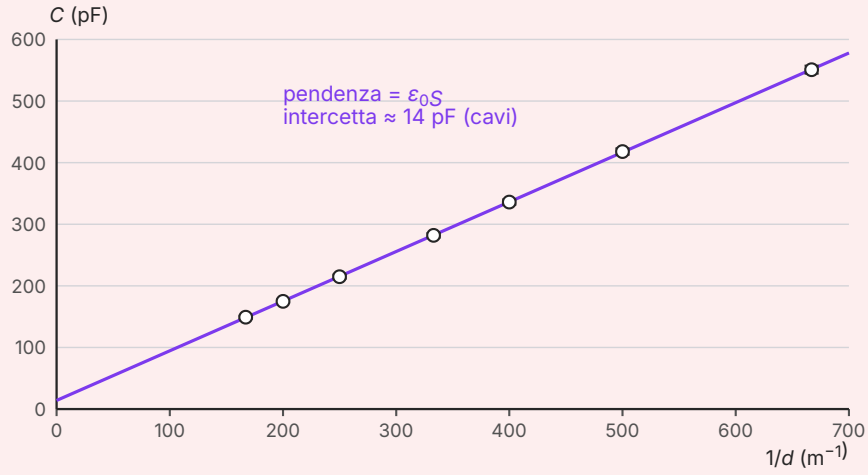

Figura 4.6 Capacità del condensatore ad aria in funzione dell'inverso della distanza fra le lastre (dati della Tabella 4.3; le barre d'incertezza sono più piccole dei punti) e retta dei minimi quadrati. La pendenza è $\varepsilon_0 S$; l'intercetta, circa 14 pF, è la capacità dei cavetti e dello strumento.

Che cosa concludere. I punti della Figura 4.6 stanno su una retta che non passa per l'origine: l'intercetta, (14 ± 1) pF, è la capacità dei cavetti. La pendenza è (8,06 ± 0,08) × 10^{-13} F·m; la sua incertezza, stimata con le rette di massima e minima pendenza, è dominata dall'accuratezza del capacimetro. Quindi ε_0 = pendenza/S = 8,06 × 10^{-13} F·m/0,0900 m^2 = 8,96 × 10^{-12} F/m, con incertezza relativa 1,0% + 0,67% (l'area, il cui lato è noto allo 0,33%) ≈ 1,7%: ε_0 = (8,96 ± 0,15) × 10^{-12} F/m.

Confronto teoria–esperimento. Con le due misure, $c = 1/\sqrt{(\varepsilon_0 \mu_0)} = 1/\sqrt{(8{,}96 \times 10^{-12} \times 1{,}24 \times 10^{-6})}$ m/s = 3,00 × 10^8 m/s. Per la regola delle potenze (*Fisica 1*, capitolo 4) l'incertezza relativa è la metà della somma delle incertezze relative: ½(1,7% + 2,4%) ≈ 2,0%, quindi c = (3,00 ± 0,06) × 10^8 m/s. Il valore esatto, 2,998 × 10^8 m/s, cade ampiamente nell'intervallo: la velocità della luce misurata con un condensatore e un solenoide è compatibile con quella misurata con la luce. Anche ε_0 misurato, (8,96 ± 0,15) × 10^{-12} F/m, è compatibile con il valore della Tabella A.1, 8,85 × 10^{-12} F/m, ma è più alto: ai bordi delle lastre le linee del campo si allargano verso l'esterno, e questo effetto di bordo aumenta un poco la capacità, tanto più quanto più le lastre sono distanti.

Sicurezza. Il capacimetro applica tensioni di pochi volt: non collegare mai le lastre alla rete né ad alimentatori ad alta tensione. Maneggia le lastre di alluminio con attenzione, perché i bordi possono tagliare.

Per la relazione. Riporta la tabella, il grafico con le barre d'incertezza e le rette di massima e minima pendenza, il calcolo di ε_0 e di c con le loro incertezze e i due confronti. Discuti l'effetto di bordo: come cambierebbe la pendenza usando solo i punti con d piccolo? Ricorda che il va-

lore di μ_0 del solenoide era anch'esso un po' basso per l'effetto delle estremità (*Fisica 4*, capitolo 16): spiega in quale verso i due effetti spostano il valore di c.

4.6 Il campo elettromagnetico e la relatività del campo

4.6.1 Lo stesso fenomeno visto da due osservatori

Una carica q è ferma nel laboratorio, che chiamiamo sistema S. Attorno a sé produce un campo elettrico, radiale, e nessun campo magnetico: una carica ferma non è una corrente (Figura 4.7a). Un osservatore che corre lungo il laboratorio, in un sistema S', vede invece la carica muoversi in verso opposto al proprio moto: per lui la carica in moto è una corrente, e attorno alla sua traiettoria misura, oltre al campo elettrico, anche un campo magnetico, con linee circolari attorno alla direzione del moto (Figura 4.7b). Uno strumento che misuri soltanto il campo magnetico in un punto dello spazio dà zero per il primo osservatore e un valore diverso da zero per il secondo.

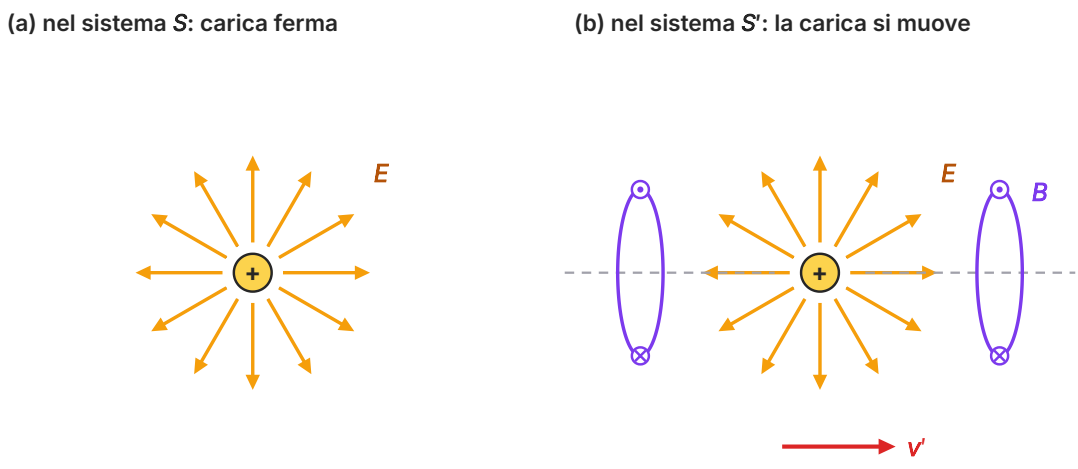

Figura 4.7 La relatività del campo. (a) Nel sistema S la carica positiva è ferma e produce solo un campo elettrico radiale. (b) Nel sistema S', che si muove verso sinistra rispetto a S, la carica si muove verso destra con velocità $\boldsymbol{v}'$: oltre al campo elettrico c'è un campo magnetico, con linee circolari attorno alla retta del moto, tratteggiata (indicate in prospettiva: uscente dal foglio sopra la traiettoria, entrante sotto).

Vale anche il viceversa. Nel laboratorio c'è un campo magnetico uniforme $\boldsymbol{B}$ e nessun campo elettrico; una carica q attraversa la regione con velocità $\boldsymbol{v}$, perpendicolare a $\boldsymbol{B}$, e subisce la forza di Lorentz qvB. Per un osservatore che si muove insieme alla carica, la carica è ferma, e su una carica ferma il campo magnetico non agisce: eppure anche lui vede la carica deviare. Per lui la

forza deve essere elettrica: nel suo sistema c'è un campo elettrico di intensità $E' = vB$, perpendicolare sia a $\boldsymbol{v}$ sia a $\boldsymbol{B}$. (Questa relazione vale per velocità piccole rispetto a quella della luce; le formule esatte richiedono la relatività ristretta.)

La conclusione è che la distinzione fra campo elettrico e campo magnetico **dipende dall'osservatore**: ciò che per uno è un campo puramente elettrico, per un altro è in parte elettrico e in parte magnetico. I due campi sono due aspetti di un'unica entità, il **campo elettromagnetico**, e il modo in cui si separano in una parte elettrica e una parte magnetica cambia con il sistema di riferimento. È questa la **relatività del campo**.

4.6.2 La calamita e la spira: un'asimmetria che fece pensare Einstein

L'esempio più famoso riguarda l'induzione. Una calamita e una spira conduttrice si avvicinano l'una all'altra. Se la calamita si muove e la spira è ferma, nella spira circola una corrente perché il campo magnetico variabile genera un campo elettrico indotto (lo abbiamo visto all'inizio di questo capitolo). Se invece la calamita è ferma e la spira si muove, nello spazio non c'è alcun campo elettrico: la corrente è dovuta alla forza di Lorentz sulle cariche che si muovono con la spira (la f.e.m. cinetica del capitolo 1). Le due spiegazioni sono diversissime, ma la corrente misurata è la stessa: dipende soltanto dal moto **relativo** di calamita e spira.

Albert Einstein apre il suo articolo del 1905 sull'elettrodinamica dei corpi in movimento proprio con questo esempio. Il senso del suo ragionamento è che una teoria che dà due descrizioni diverse di due situazioni fisicamente identiche contiene un'asimmetria che non appartiene ai fenomeni. C'è anche un problema più profondo. Le equazioni di Maxwell prevedono che le onde elettromagnetiche viaggino a velocità $c = 1/\sqrt{(\mu_0 \varepsilon_0)}$, senza dire rispetto a che cosa. Secondo le trasformazioni di Galileo (*Fisica 3*, capitolo 2) una velocità cambia da un sistema di riferimento all'altro: le equazioni di Maxwell possono valere in un solo sistema privilegiato, quello dell'etere, oppure bisogna rinunciare alle trasformazioni di Galileo. La scelta di Einstein fu la seconda, ed è l'argomento della Parte III.

DA RICORDARE

Verso l'esame: le equazioni di Maxwell nella seconda prova

Il contenuto di questo capitolo appartiene al nucleo tematico **Forze e campi** (campo elettromagnetico) ed è la base del nucleo **Onde e particelle**. Nella seconda prova compare soprattutto in tre forme: un quesito che chiede di **enunciare e commentare** una o più equazioni di Maxwell (che cosa dicono sulle sorgenti e sulle linee di campo, che cosa cambia rispetto alla statica); un calcolo di **campo elettrico indotto** o di **corrente di spostamento** con una simmetria semplice (solenoide, condensatore circolare); l'**analisi di un grafico** di $B(t)$ o di $E(t)$ da cui ricavare le pendenze.

Le trappole tipiche: confondere il campo con la sua rapidità di variazione (un campo costante non induce nulla); dimenticare che il campo indotto fuori da un solenoide non è nullo; trattare la corrente di spostamento come un flusso di cariche; sbagliare il verso, che si trova con la legge di Lenz per il campo elettrico e con la mano destra per il campo magnetico. Nell'argomentazione, scrivi sempre su quale linea chiusa e su quale superficie calcoli circuitazione e flusso.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$\Gamma_\ell(\boldsymbol{E}) = -\Delta\Phi(\boldsymbol{B})/\Delta t$ (istantaneamente $-\mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{B})/\mathrm{d}t$) — legge di Faraday-Neumann-Lenz: la circuitazione del campo elettrico lungo una linea chiusa, anche nel vuoto, è l'opposto della rapidità di variazione del flusso magnetico attraverso una superficie che ha la linea come bordo (V = Wb/s).

$E = (r/2)\Delta B/\Delta t$ dentro, $E = [R^2/(2r)]\Delta B/\Delta t$ fuori — campo indotto da un lungo solenoide di raggio R, tangente a circonferenze centrate sull'asse (V/m).

$I_s = \varepsilon_0 \Delta\Phi(\boldsymbol{E})/\Delta t$ — corrente di spostamento (A): non è un moto di cariche; fra le armature di un condensatore è uguale alla corrente di conduzione nei fili.

$\Gamma_\ell(\boldsymbol{B}) = \mu_0(i + \varepsilon_0\Delta\Phi(\boldsymbol{E})/\Delta t)$ — legge di Ampère-Maxwell: il campo magnetico è prodotto dalle correnti e dai campi elettrici variabili.

$\Phi_S(\boldsymbol{E}) = Q_{\text{int}}/\varepsilon_0$, $\Phi_S(\boldsymbol{B}) = 0$ — le leggi di Gauss, che valgono anche per campi variabili.

$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ — forza di Lorentz completa: con le quattro equazioni descrive tutto l'elettromagnetismo classico.

$c = 1/\sqrt{(\mu_0\varepsilon_0)} = 3{,}00 \times 10^8$ m/s — velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto; per un fronte piano $E = cB$, con $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ e direzione di propagazione perpendicolari.

$E' = vB$ — campo elettrico che misura un osservatore in moto con velocità $v \ll c$ perpendicolare a un campo magnetico $\boldsymbol{B}$: la separazione fra campo elettrico e magnetico dipende dal sistema di riferimento.

SINTESI

- In un circuito fermo immerso in un campo magnetico variabile le cariche sono spinte da un campo elettrico indotto: un campo magnetico che varia genera un campo elettrico, anche nel vuoto e in assenza di conduttori.
- Le linee del campo elettrico indotto sono chiuse; la sua circuitazione è $\Gamma(\boldsymbol{E}) = -\Delta\Phi(\boldsymbol{B})/\Delta t$, la forma della legge di Faraday-Neumann-Lenz che entra fra le equazioni di Maxwell.
- Dove il campo magnetico varia, il campo elettrico non è conservativo: il lavoro su una carica dipende dal percorso e la tensione fra due punti non è definita in modo univoco. $\Gamma(\boldsymbol{E}) = 0$ vale solo per i campi statici.
- In un lungo solenoide il campo indotto è tangente a circonferenze centrate sull'asse, cresce come r all'interno e decresce come $1/r$ all'esterno, dove il campo magnetico è nullo ma il campo elettrico no.
- Il teorema di Ampère non vale per le correnti variabili: con un condensatore che si carica, due superfici con lo stesso bordo danno correnti concatenate diverse.
- Maxwell aggiunse la corrente di spostamento $I_s = \varepsilon_0\Delta\Phi(\boldsymbol{E})/\Delta t$, che fra le armature è uguale alla corrente nei fili; non è un flusso di cariche.
- La legge di Ampère-Maxwell, $\Gamma(\boldsymbol{B}) = \mu_0(i + \varepsilon_0\Delta\Phi(\boldsymbol{E})/\Delta t)$, dice che anche un campo elettrico variabile genera un campo magnetico, con il verso della mano destra.
- Le equazioni di Maxwell sono i due teoremi di Gauss, la legge di Faraday-Neumann-Lenz e la legge di Ampère-Maxwell; con la forza di Lorentz descrivono tutto l'elettromagnetismo classico. Nel vuoto senza sorgenti sono quasi simmetriche nei due campi.
- Un campo elettrico e un campo magnetico variabili si sostengono a vicenda e si propagano come onda elettromagnetica, anche nel vuoto, con $E = vB$ e $v = 1/\sqrt{(\mu_0\varepsilon_0)} = 3{,}00 \times 10^8$ m/s.
- La coincidenza con la velocità della luce portò Maxwell (1865) a concludere che la luce è un'onda elettromagnetica: l'ottica divenne parte dell'elettromagnetismo. Hertz confermò la previsione nel 1886–1888.
- La separazione fra campo elettrico e campo magnetico dipende dal sistema di riferimento: sono due aspetti di un'unica entità, il campo elettromagnetico. Questa e altre asimmetrie, insieme al problema della velocità c, portarono alla relatività ristretta.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Una spira è ferma in un campo magnetico che aumenta, e nella spira circola una corrente indotta. Le cariche del filo si mettono in moto perché:
   A. su di esse agisce la forza di Lorentz $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$
   B. il campo magnetico variabile genera un campo elettrico che le spinge
   C. il filo della spira si magnetizza
   D. il campo magnetico compie lavoro su di esse

2. ● Le linee del campo elettrico indotto da un campo magnetico variabile:
   A. partono dalle cariche positive e terminano sulle negative
   B. sono parallele alle linee del campo magnetico
   C. sono chiuse
   D. esistono solo dove il campo magnetico è diverso da zero

3. ● La corrente di spostamento attraverso una superficie è:
   A. proporzionale alla rapidità di variazione del flusso del campo elettrico attraverso la superficie
   B. il moto delle cariche che passano da un'armatura all'altra di un condensatore
   C. la corrente nei fili di un condensatore già carico
   D. proporzionale al flusso del campo magnetico attraverso la superficie

4. ●● Dentro un lungo solenoide in cui il campo magnetico cresce con rapidità costante, il campo elettrico indotto a distanza r dall'asse vale E. A distanza $2r$, ancora all'interno, vale:
   A. $E/2$
   B. E
   C. $4E$
   D. $2E$

5. ● Quale equazione di Maxwell esprime il fatto che non esistono monopoli magnetici?
   A. Il teorema di Gauss per il campo magnetico
   B. Il teorema di Gauss per il campo elettrico
   C. La legge di Faraday-Neumann-Lenz
   D. La legge di Ampère-Maxwell

6. ●● Maxwell calcolò la velocità delle onde elettromagnetiche:
   A. misurando il tempo impiegato dalla luce per percorrere una distanza nota
   B. a partire dalla lunghezza d'onda e dalla frequenza della luce visibile
   C. a partire da costanti misurate con esperimenti di elettricità e di magnetismo
   D. osservando le onde prodotte da un circuito oscillante

7. ●● Una carica è ferma nel laboratorio. Un osservatore che si muove rispetto al laboratorio, nelle vicinanze della carica, misura:
   A. solo un campo magnetico
   B. nessun campo
   C. solo un campo elettrico, diverso da quello misurato nel laboratorio
   D. un campo elettrico e un campo magnetico

8. ●● Nel vuoto, in una regione senza cariche né correnti, le due leggi di circuitazione di Maxwell differiscono:
   A. in nulla: sono identiche
   B. per il segno e per il fattore $\mu_0\varepsilon_0$
   C. solo per il segno
   D. perché il campo magnetico non può esistere senza correnti

Vero o falso

9. ● Il campo elettrico indotto da un campo magnetico variabile è conservativo. V / F

10. ●● Fuori da un lungo solenoide, dove il campo magnetico è praticamente nullo, il campo elettrico indotto da una corrente variabile nel solenoide è nullo. V / F

11. ● Fra le armature di un condensatore che si sta caricando non passano cariche, ma c'è un campo magnetico. V / F

12. ●● Se i campi elettrico e magnetico non variano nel tempo, le equazioni di Maxwell si riducono alle quattro leggi dei campi statici studiate lo scorso anno. V / F

Applicare

13. ● Una spira circolare di raggio 5,0 cm è ferma, perpendicolare a un campo magnetico uniforme che aumenta di 0,40 T ogni secondo. Calcola la circuitazione del campo elettrico indotto lungo la spira e l'intensità del campo elettrico sulla spira.

14. ● In un lungo solenoide di raggio 2,0 cm il campo magnetico diminuisce con rapidità costante di 0,25 T/s. Calcola l'intensità del campo elettrico indotto a 1,0 cm e a 6,0 cm dall'asse.

15. ●● Completa. Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie posta fra le armature di un condensatore aumenta di $2{,}0 \times 10^3$ V·m in 1,0 ms. La corrente di spostamento attraverso la superficie vale _____ e la corrente nei fili del condensatore vale _____ .

16. ● Fra le armature di un condensatore piano di area 0,020 m^2, nel vuoto, il campo elettrico aumenta con rapidità $5{,}0 \times 10^{11}$ V/(m·s). Calcola la corrente di spostamento.

17. ●● In un lungo solenoide con 1500 spire/m e raggio 2,5 cm la corrente cresce uniformemente da 0 a 4,0 A fra 0 e 20 ms, resta costante fino a 50 ms, poi torna a zero uniformemente fra 50 e 60 ms. Calcola il campo elettrico indotto a 1,0 cm dall'asse nei tre intervalli e confronta i versi.

18. ● Verifica che $1/\sqrt{(\mu_0\varepsilon_0)}$ ha le dimensioni di una velocità, partendo dalle unità T·m/A di μ_0 e $C^2/(N\cdot m^2)$ di ε_0, e calcolane il valore con i dati della Tabella A.1.

19. ●● Un carrello si muove a 20 m/s in una regione in cui c'è un campo magnetico uniforme di 0,50 T, perpendicolare alla velocità, e nessun campo elettrico. Calcola il campo elettrico che misura un osservatore sul carrello e la forza che, secondo lui, agisce su un elettrone fermo sul carrello.

20. ●●● Un condensatore con armature circolari di raggio 4,0 cm viene caricato con una corrente di 0,50 A. Calcola il campo magnetico a 2,0 cm dall'asse fra le armature, sul bordo delle armature e a 8,0 cm dall'asse.

Problemi

21. ●●● Un lungo solenoide di raggio 3,0 cm ha 1200 spire/m. Attorno al solenoide, coassiale con esso, c'è un anello di rame di raggio 8,0 cm e resistenza 0,020 Ω. La corrente nel solenoide cresce uniformemente da 0 a 6,0 A in 0,050 s. a) Calcola la rapidità di variazione del campo magnetico nel solenoide. b) Calcola la f.e.m. indotta nell'anello. c) Calcola l'intensità del campo elettrico indotto lungo l'anello. d) Calcola la corrente nell'anello e stabiliscine il verso, trascurando il campo prodotto dall'anello stesso.

22. ●● (Collegato al capitolo 1.) Una sbarretta lunga 20 cm si muove a 3,0 m/s, perpendicolarmente a se stessa e a un campo magnetico uniforme di 0,40 T. a) Calcola la f.e.m. cinetica con la forza di Lorentz, nel sistema del laboratorio. b) Nel sistema di riferimento della sbarretta le cariche sono ferme: quale campo spiega la stessa f.e.m.? Calcolane l'intensità e verifica che dà la stessa f.e.m.

23. ●●● (Collegato a *Fisica 4*, capitolo 14.) Un condensatore ad armature circolari di raggio 10 cm, distanti 1,0 mm nel vuoto, viene caricato attraverso un resistore di 100 Ω da un generatore di 12 V. a) Calcola la capacità e la costante di tempo. b) Calcola la corrente di spostamento fra le armature all'istante iniziale e dopo una costante di tempo. c) Calcola, nei due istanti, il campo magnetico sul bordo delle armature. d) Calcola la rapidità di variazione del campo elettrico all'istante iniziale.

24. ●●● In un betatrone gli elettroni percorrono un'orbita di raggio 0,50 m. Il campo magnetico medio all'interno dell'orbita cresce uniformemente da 0 a 0,80 T in 4,0 ms. a) Calcola la f.e.m. indotta lungo l'orbita e l'energia, in elettronvolt, guadagnata da un elettrone a ogni giro. b) Calcola il campo elettrico indotto lungo l'orbita. c) Gli elettroni si muovono quasi alla velocità della luce (vedrai nel capitolo 9 perché non possono superarla): stima quanti giri servono per guadagnare 20 MeV e quanto tempo impiegano. d) Perché il campo magnetico, da solo, non potrebbe aumentare l'energia degli elettroni?

25. ●●● Un anello è formato da due resistori, $R_1 = 100\ \Omega$ e $R_2 = 300\ \Omega$, collegati da due fili di resistenza trascurabile; l'anello circonda un lungo solenoide in cui varia il campo magnetico, e la f.e.m. indotta lungo l'anello vale 2,0 V. a) Calcola la corrente nell'anello. b) Un voltmetro è collegato ai capi di R_1, con i cavi disposti dalla parte di R_1, senza circondare il solenoide; un secondo voltmetro è collegato agli stessi due punti, con i cavi dalla parte di R_2. Che cosa leggono? c) Spiega perché i due voltmetri, collegati agli stessi due punti, leggono valori diversi, e perché questo non accade nei circuiti in corrente continua.

26. ● Mentre un condensatore si carica, nei fili scorre una corrente di 2,0 A. a) Calcola il campo magnetico a 1,0 cm dall'asse del filo, lontano dal condensatore. b) Calcola la rapidità di variazione del flusso del campo elettrico fra le armature.

27. ●● (Collegato al capitolo 3.) A un condensatore piano con armature di area 0,010 m^2, distanti 1,0 mm nel vuoto, è applicata una tensione alternata di ampiezza 10 V e frequenza 1,0 kHz. a) Calcola la capacità e la reattanza capacitiva. b) Calcola l'ampiezza e il valore efficace della corrente di spostamento fra le armature. c) Qual è la differenza di fase fra la corrente di spostamento e la tensione?

28. ● Un elettrone è fermo a 1,5 cm dall'asse di un lungo solenoide, al suo interno, mentre il campo magnetico aumenta di 2,0 T/s. Calcola il campo elettrico indotto, la forza sull'elettrone e la sua accelerazione iniziale.

Ragionare e argomentare

29. ●●● Trova l'errore. Uno studente scrive: «Fuori da un solenoide ideale il campo magnetico è nullo, quindi in una spira che circonda il solenoide non può essere indotta alcuna f.e.m.: per avere induzione, la spira deve trovarsi dove c'è il campo magnetico». Spiega che cosa c'è di sbagliato, e cita un dispositivo che funziona proprio grazie a questo fatto.

30. ●●● Stima di ordine di grandezza. In un filo di rame (resistività $1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot m$) percorso da corrente alternata a 50 Hz il campo elettrico che spinge gli elettroni è $E = \rho J$, dove J è la densità di corrente. Confronta la corrente di spostamento dentro il filo con la corrente di conduzione: mostra che il loro rapporto è circa $\varepsilon_0 \omega \rho$ e calcolalo. Perché la corrente di spostamento non conta nei circuiti di casa, ma è essenziale per le onde elettromagnetiche?

31. ●●● Progetta un esperimento per mostrare che il campo elettrico indotto da un solenoide esiste anche fuori dal solenoide e decresce come $1/r$. Specifica gli strumenti (il solenoide è alimentato da un generatore di funzioni a bassa tensione), che cosa misuri, come elabori i dati e che grafico ti aspetti.

Verso l'esame di Stato

32. ●●● **Quesito.** Un condensatore ad armature circolari di raggio 12 cm, distanti 2,0 mm nel vuoto, viene collegato attraverso un resistore a un generatore di 9,0 V. La tabella riporta la tensione ai capi del condensatore misurata durante la carica.
t (μs): 0 · 20 · 40 · 60 · 80 · 100
V (V): 0 · 2,97 · 4,96 · 6,29 · 7,18 · 7,78
a) Calcola la capacità del condensatore; usando la tabella, stima la costante di tempo e la resistenza del resistore. b) Calcola la corrente di spostamento media fra le armature negli intervalli 0–20 μs e 80–100 μs. c) Calcola il campo magnetico sul bordo delle armature nel primo intervallo e confrontalo con il campo terrestre (circa 5×10^{-5} T). d) Spiega perché fra le armature c'è un campo magnetico anche se nessuna carica le attraversa, e perché nell'Ottocento era impossibile osservarlo in un esperimento come questo.

33. ●●● **Problema.** (Collegato al capitolo 3.) Un lungo solenoide di raggio 2,0 cm con 2000 spire/m è percorso da una corrente alternata $i = I_0 \text{ sen } \omega t$, con $I_0 = 3{,}0$ A e frequenza 50 Hz. Attorno al solenoide, coassiale, c'è un anello di rame di raggio 10 cm. a) Calcola l'ampiezza del campo magnetico nel solenoide e del flusso magnetico attraverso l'anello. b) Ricordando che la derivata di sen ωt è $\omega \cos \omega t$, scrivi la f.e.m. indotta nell'anello in funzione del tempo; calcolane l'ampiezza ε_{max} e il valore efficace. c) Calcola l'ampiezza del campo elettrico indotto lungo l'anello e, se l'anello ha resistenza 5,0 mΩ, la corrente efficace e la potenza media dissipata (trascura l'autoinduzione dell'anello). d) L'anello viene tagliato in un punto. Spiega che cosa cambia e che cosa no per il campo elettrico, la f.e.m. e la corrente, e che cosa misurerebbe un voltmetro collegato ai due estremi del taglio.

PER APPROFONDIRE

- [MAX] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, vol. II: la parte finale, dove Maxwell espone la teoria elettromagnetica della luce e confronta la velocità prevista con quella misurata.
- [FAR] M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity*: le serie sull'induzione, per vedere come Faraday descriveva il fenomeno con le linee di forza, prima che diventassero un campo.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. II: i capitoli sulle equazioni di Maxwell e sulla relatività dei campi, per una discussione profonda della corrente di spostamento e del campo visto da osservatori in moto.
- [EIN] A. Einstein, L. Infeld, *L'evoluzione della fisica*: le pagine sul campo e sulla teoria di Maxwell, per il passaggio dalle azioni a distanza alla realtà del campo.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: i capitoli sul campo indotto e sulle equazioni di Maxwell, per molti esercizi su solenoidi e condensatori.

Glossario del capitolo

Azione a distanza
Descrizione delle forze fra corpi lontani come agenti direttamente e istantaneamente attraverso lo spazio, senza un campo che le trasmetta; fu abbandonata con la teoria dei campi.

Betatrone
Acceleratore circolare di elettroni in cui l'energia è fornita dal campo elettrico indotto lungo l'orbita da un campo magnetico che cresce.

Bordo (di una superficie)
La linea chiusa che delimita una superficie aperta; nelle leggi di circuitazione il flusso si calcola attraverso una superficie qualunque che ha per bordo la linea su cui si calcola la circuitazione.

Campo elettrico indotto
Campo elettrico generato da un campo magnetico che varia nel tempo; ha linee chiuse ed esiste anche in assenza di cariche e di conduttori.

Campo elettrico non conservativo
Campo elettrico con circuitazione diversa da zero lungo qualche linea chiusa, come quello indotto dove il campo magnetico varia: il lavoro su una carica dipende dal percorso e non esiste un potenziale.

Campo elettromagnetico
L'unica entità fisica di cui il campo elettrico e il campo magnetico sono due aspetti; la sua separazione in parte elettrica e parte magnetica dipende dal sistema di riferimento.

Condizione del betatrone
Perché gli elettroni restino su un'orbita di raggio fisso, il campo magnetico sull'orbita deve essere la metà del campo medio all'interno dell'orbita.

Corrente di conduzione
Corrente dovuta al moto di cariche, per esempio in un conduttore; si distingue dalla corrente di spostamento.

Corrente di spostamento
$I_s = \varepsilon_0 \Delta\Phi(\boldsymbol{E})/\Delta t$: grandezza, misurata in ampere, che produce un campo magnetico come una corrente, senza essere un moto di cariche.

Equazioni di Maxwell
Le quattro leggi che descrivono il campo elettrico e il campo magnetico in ogni situazione: i teoremi di Gauss per i due campi, la legge di Faraday-Neumann-Lenz e la legge di Ampère-Maxwell.

Legge di Ampère-Maxwell
$\Gamma(\boldsymbol{B}) = \mu_0(i + \varepsilon_0 \Delta\Phi(\boldsymbol{E})/\Delta t)$: il campo magnetico è generato dalle correnti di conduzione e dai campi elettrici variabili.

Legge di Faraday-Neumann-Lenz
$\Gamma(\boldsymbol{E}) = -\Delta\Phi(\boldsymbol{B})/\Delta t$: la circuitazione del campo elettrico lungo una linea chiusa è l'opposto della rapidità di variazione del flusso magnetico attraverso una superficie che ha la linea come bordo.

Linee di campo chiuse
Linee di campo che si richiudono su sé stesse, senza inizio né fine: sono quelle del campo magnetico e del campo elettrico indotto, mai quelle del campo elettrostatico.

Relatività del campo
Il fatto che osservatori in moto relativo misurano campi elettrici e magnetici diversi per lo stesso fenomeno, per esempio solo un campo elettrico per uno e anche un campo magnetico per l'altro.

Unificazione
Riunione in una sola teoria di fenomeni prima considerati distinti, come l'ottica e l'elettromagnetismo con la teoria di Maxwell.

Vortici molecolari
Elementi del modello meccanico dell'etere con cui Maxwell, prima della teoria definitiva, rappresentava il campo magnetico come rotazione di piccoli vortici.

Soluzioni

1. B. La spira è ferma, quindi le cariche hanno velocità media nulla e la forza magnetica $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ è zero; le spinge il campo elettrico indotto dal campo magnetico che varia. Il campo magnetico non compie mai lavoro su una carica.

2. C. Il campo indotto non ha cariche come sorgenti e la sua circuitazione è diversa da zero: le linee sono chiuse, e si estendono anche fuori dalla regione in cui c'è il campo magnetico.

3. A. $I_s = \varepsilon_0 \Delta\Phi(\boldsymbol{E})/\Delta t$: non è un moto di cariche, e per un condensatore già carico, con campo costante, è nulla.

4. D. Dentro il solenoide $E = (r/2)\Delta B/\Delta t$ è proporzionale a r: a distanza doppia il campo è doppio.

5. A. $\Phi(\boldsymbol{B}) = 0$ attraverso ogni superficie chiusa: le linee di $\boldsymbol{B}$ sono chiuse e non esistono cariche magnetiche isolate.

6. C. Maxwell usò i valori delle costanti elettriche e magnetiche, misurati in laboratorio con esperimenti di elettricità e magnetismo, e trovò una velocità uguale a quella della luce. Le onde prodotte da circuiti furono osservate solo più tardi, da Hertz.

7. D. Per l'osservatore in moto la carica si muove, cioè è una corrente: misura un campo elettrico e anche un campo magnetico.

8. B. $\Gamma(\boldsymbol{E}) = -\Delta\Phi(\boldsymbol{B})/\Delta t$ e $\Gamma(\boldsymbol{B}) = \mu_0\varepsilon_0\Delta\Phi(\boldsymbol{E})/\Delta t$: le differenze sono il segno e il fattore $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$.

9. F. La sua circuitazione lungo una linea chiusa è $-\Delta\Phi(\boldsymbol{B})/\Delta t$, diversa da zero: il lavoro su una carica che percorre una linea chiusa non è nullo, quindi il campo non è conservativo.

10. F. Un cerchio di raggio $r > R$ concatena il flusso della sezione del solenoide, che varia: $E = R^2/(2r) \cdot \Delta B/\Delta t$, diverso da zero anche dove $B = 0$.

11. V. Il campo elettrico che cresce fra le armature equivale a una corrente di spostamento uguale alla corrente nei fili, e genera un campo magnetico con linee circolari attorno all'asse.

12. V. Con $\Delta\Phi/\Delta t = 0$ la legge di Faraday-Neumann-Lenz diventa $\Gamma(\boldsymbol{E}) = 0$ e la legge di Ampère-Maxwell diventa il teorema di Ampère; le leggi di Gauss sono invariate.

13. $\Gamma(\boldsymbol{E}) = -\Delta\Phi(\boldsymbol{B})/\Delta t$, in valore assoluto $\pi r^2 \Delta B/\Delta t = \pi \times (0{,}050\ \text{m})^2 \times 0{,}40\ \text{T/s} = 3{,}1 \times 10^{-3}$ V. Per simmetria il campo è tangente alla spira e ha la stessa intensità in ogni punto: $E = \Gamma/(2\pi r) = (r/2)\Delta B/\Delta t = 0{,}025\ \text{m} \times 0{,}40\ \text{T/s} = 1{,}0 \times 10^{-2}$ V/m.

14. A 1,0 cm (dentro): $E = (r/2)|\Delta B/\Delta t| = 0{,}0050\ \text{m} \times 0{,}25\ \text{T/s} = 1{,}3 \times 10^{-3}$ V/m. A 6,0 cm (fuori): $E = R^2/(2r) \times |\Delta B/\Delta t| = (0{,}020\ \text{m})^2/(0{,}12\ \text{m}) \times 0{,}25\ \text{T/s} = 8{,}3 \times 10^{-4}$ V/m. Poiché il campo diminuisce, per la legge di Lenz le linee girano in senso antiorario per chi guarda con $\boldsymbol{B}$ rivolto verso di sé.

15. $I_s = \varepsilon_0 \Delta\Phi(\boldsymbol{E})/\Delta t = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F/m} \times 2{,}0 \times 10^3\ \text{V·m}/(1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{s}) = 1{,}8 \times 10^{-5}\ \text{A} = 18\ \mu\text{A}$; la corrente nei fili è uguale, 18 μA (se la superficie comprende tutto il campo fra le armature).

16. $I_s = \varepsilon_0 S\ \Delta E/\Delta t = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F/m} \times 0{,}020\ \text{m}^2 \times 5{,}0 \times 10^{11}\ \text{V/(m·s)} = 8{,}9 \times 10^{-2}$ A.

17. $\Delta B/\Delta t = \mu_0 n \Delta i/\Delta t$. Fra 0 e 20 ms: $4\pi \times 10^{-7} \times 1500 \times (4{,}0\ \text{A}/0{,}020\ \text{s}) = 0{,}38$ T/s, e $E = (r/2)\Delta B/\Delta t = 0{,}0050\ \text{m} \times 0{,}377\ \text{T/s} = 1{,}9 \times 10^{-3}$ V/m. Fra 20 e 50 ms la corrente è costante: $E = 0$. Fra 50 e 60 ms: $\Delta B/\Delta t = -0{,}75$ T/s e $E = 3{,}8 \times 10^{-3}$ V/m, doppio, perché la stessa variazione avviene in metà tempo. Per la legge di Lenz il verso nel terzo intervallo, in cui il campo diminuisce, è opposto a quello del primo, in cui aumenta.

18. $\text{T·m/A} \times \text{C}^2/(\text{N·m}^2)$: con $1\ \text{T} = 1\ \text{N/(A·m)}$ si ottiene $\text{N/A}^2 \times \text{C}^2/(\text{N·m}^2) = \text{C}^2/(\text{A}^2\text{·m}^2) = \text{s}^2/\text{m}^2$, perché $1\ \text{C} = 1\ \text{A·s}$. L'inverso della radice si misura in m/s. Valore: $1/\sqrt{(4\pi \times 10^{-7} \times 8{,}85 \times 10^{-12})}\ \text{m/s} = 3{,}00 \times 10^8$ m/s.

19. Per l'osservatore sul carrello l'elettrone è fermo, e la forza deve essere elettrica: $E' = vB = 20\ \text{m/s} \times$

0,50 T = 10 V/m, perpendicolare alla velocità e al campo magnetico (la velocità è molto minore di c, quindi la relazione approssimata vale). Forza: $F = eE' = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C × 10 V/m = $1{,}6 \times 10^{-18}$ N, la stessa che nel laboratorio si calcola come evB.

20. Principio: legge di Ampère-Maxwell su circonferenze centrate sull'asse; fra le armature la corrente di spostamento è uniformemente distribuita e uguale a 0,50 A. A 2,0 cm: $B = \mu_0 ir/(2\pi R^2) = 2 \times 10^{-7}$ T·m/A × 0,50 A × 0,020 m/(0,040 m)^2 = $1{,}3 \times 10^{-6}$ T. Sul bordo: $B = \mu_0 i/(2\pi R) = 2 \times 10^{-7} \times 0{,}50/0{,}040$ T = $2{,}5 \times 10^{-6}$ T. A 8,0 cm la circonferenza concatena tutta la corrente di spostamento: $B = 2 \times 10^{-7} \times 0{,}50/0{,}080$ T = $1{,}3 \times 10^{-6}$ T (più precisamente $1{,}25 \times 10^{-6}$ T in entrambi i punti).

21. Principi: campo del solenoide e legge di Faraday-Neumann-Lenz in forma di circuitazione. a) $\Delta B/\Delta t = \mu_0 n \Delta i/\Delta t = 4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A × 1200 m^{-1} × (6,0 A/0,050 s) = 0,18 T/s. b) L'anello è fuori dal solenoide: concatena il flusso della sola sezione, $|\varepsilon| = \pi R^2 \Delta B/\Delta t = \pi \times (0{,}030\text{ m})^2 \times 0{,}181$ T/s = $5{,}1 \times 10^{-4}$ V. c) $E = |\varepsilon|/(2\pi r) = 5{,}12 \times 10^{-4}$ V/(2π × 0,080 m) = $1{,}0 \times 10^{-3}$ V/m. d) $i = |\varepsilon|/R = 5{,}12 \times 10^{-4}$ V/0,020 Ω = $2{,}6 \times 10^{-2}$ A. Per la legge di Lenz la corrente indotta si oppone all'aumento del flusso: guardando l'anello con il campo del solenoide rivolto verso di sé, circola in senso orario, e produce dentro l'anello un campo opposto a quello del solenoide.

22. a) Nel laboratorio sulle cariche della sbarretta agisce la forza di Lorentz qvB, lungo la sbarretta; la f.e.m. è il lavoro per unità di carica: $\varepsilon = vBl$ = 3,0 m/s × 0,40 T × 0,20 m = 0,24 V. b) Nel sistema della sbarretta le cariche sono ferme, quindi la forza deve essere elettrica: c'è un campo elettrico $E' = vB$ = 3,0 m/s × 0,40 T = 1,2 V/m diretto lungo la sbarretta (la velocità è molto minore di c). La f.e.m. è $E'l$ = 1,2 V/m × 0,20 m = 0,24 V: la stessa. Le due descrizioni, magnetica in un sistema ed elettrica nell'altro, danno lo stesso risultato misurabile (relatività del campo).

23. Principi: capacità del condensatore piano, carica di un circuito RC (*Fisica 4*, capitolo 14), uguaglianza fra corrente di spostamento e corrente di conduzione, legge di Ampère-Maxwell. a) $C = \varepsilon_0 \pi R^2/d = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m × π × (0,10 m)^2/($1{,}0 \times 10^{-3}$ m) = $2{,}8 \times 10^{-10}$ F; $\tau = RC = 100\ \Omega \times 2{,}78 \times 10^{-10}$ F = $2{,}8 \times 10^{-8}$ s = 28 ns. b) All'istante iniziale il condensatore è scarico e i = 12 V/100 Ω = 0,12 A; dopo una costante di tempo i = 0,12 A × e^{-1} = $4{,}4 \times 10^{-2}$ A. Fra le armature la corrente di spostamento è uguale a quella nei fili: 0,12 A e 0,044 A. c) Sul bordo $B = \mu_0 I_s/(2\pi R)$: $2 \times 10^{-7} \times 0{,}12/0{,}10$ T = $2{,}4 \times 10^{-7}$ T e $2 \times 10^{-7} \times 0{,}0441/0{,}10$ T = $8{,}8 \times 10^{-8}$ T. d) $\Delta E/\Delta t = i/(\varepsilon_0 \pi R^2) = 0{,}12$ A/($8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m × 0,0314 m^2) = $4{,}3 \times 10^{11}$ V/(m·s).

24. Principi: legge di Faraday-Neumann-Lenz in forma di circuitazione; il campo magnetico non compie lavoro. a) Il flusso attraverso l'orbita cresce di $\pi r^2 \Delta B_{\text{medio}} = \pi \times (0{,}50\text{ m})^2 \times 0{,}80$ T = 0,628 Wb in 4,0 ms: $|\varepsilon|$ = 0,628 Wb/($4{,}0 \times 10^{-3}$ s) = $1{,}6 \times 10^2$ V. A ogni giro l'elettrone guadagna $e|\varepsilon|$, cioè $1{,}6 \times 10^2$ eV (157 eV). b) $E = |\varepsilon|/(2\pi r)$ = 157 V/(2π × 0,50 m) = 50 V/m, tangente all'orbita. c) Giri: 20×10^6 eV/157 eV = $1{,}3 \times 10^5$. Un giro, alla velocità della luce, dura 2π × 0,50 m/($3{,}00 \times 10^8$ m/s) = $1{,}05 \times 10^{-8}$ s; il tempo totale è $1{,}3 \times 10^5 \times 1{,}05 \times 10^{-8}$ s ≈ 1,3 ms, meno dei 4,0 ms della rampa. d) La forza magnetica $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ è sempre perpendicolare alla velocità e non compie lavoro: curva la traiettoria ma non cambia l'energia cinetica. L'energia viene dal campo elettrico indotto, cioè dalla variazione del campo magnetico.

25. Principi: legge di Faraday-Neumann-Lenz in forma di circuitazione, campo non conservativo. a) $i = \varepsilon/(R_1 + R_2)$ = 2,0 V/400 Ω = $5{,}0 \times 10^{-3}$ A. b) Ciascun voltmetro misura la circuitazione di $\boldsymbol{E}$ lungo il percorso formato dai propri cavi e dal tratto di anello a cui è collegato in parallelo, che non circonda il solenoide: lungo quel percorso il flusso non varia e vale la legge di Ohm. Il primo legge $iR_1 = 5{,}0 \times 10^{-3}$ A × 100 Ω = 0,50 V, il secondo iR_2 = 1,5 V. c) Gli stessi due punti, due letture: la «tensione» dipende dal percorso, perché il campo elettrico non è conservativo dove il flusso magnetico varia. Il percorso che va da un punto all'altro passando per un voltmetro e torna per l'altro voltmetro circonda il solenoide, e la sua circuitazione non è nulla ma vale la f.e.m.: 0,50 V + 1,5 V = 2,0 V. In corrente continua i campi sono statici, $\Gamma(\boldsymbol{E}) = 0$, e la differenza di potenziale fra due punti è unica.

26. a) Lontano dal condensatore il filo è un lungo filo rettilineo: $B = \mu_0 i/(2\pi r) = 2 \times 10^{-7}$ T·m/A × 2,0 A/0,010 m = $4{,}0 \times 10^{-5}$ T. b) $\varepsilon_0 \Delta\Phi(\boldsymbol{E})/\Delta t = i$, quindi $\Delta\Phi(\boldsymbol{E})/\Delta t$ = 2,0 A/($8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m) = $2{,}3 \times 10^{11}$ V·m/s.

27. Principi: capacità del condensatore piano, reattanza capacitiva (capitolo 3), uguaglianza fra corrente di spostamento e corrente nei fili. a) $C = \varepsilon_0 S/d$ = $8{,}85 \times 10^{-12} \times 0{,}010/(1{,}0 \times 10^{-3})$ F = $8{,}9 \times 10^{-11}$ F; X_C = $1/(\omega C) = 1/(2\pi \times 1000$ Hz × $8{,}85 \times 10^{-11}$ F) = $1{,}8 \times 10^6$ Ω. b) Ampiezza: $I_0 = V_0/X_C$ = 10 V/($1{,}80 \times 10^6$ Ω) = $5{,}6 \times 10^{-6}$ A; valore efficace $I_0/\sqrt{2} = 3{,}9 \times 10^{-6}$ A. La corrente di spostamento fra le armature ha gli stessi valori della corrente nei fili. c) Come la corrente in un condensatore, la corrente di spostamento è in anticipo di 90° sulla tensione: è massima quando la tensione, e quindi il campo, passa per zero, cioè quando il campo varia più rapidamente.

28. $E = (r/2)\Delta B/\Delta t$ = 0,0075 m × 2,0 T/s = $1{,}5 \times 10^{-2}$ V/m; $F = eE$ = $1{,}60 \times 10^{-19}$ C × 0,015 V/m = $2{,}4 \times 10^{-21}$ N; $a = F/m_e$ = $2{,}4 \times 10^{-21}$ N/($9{,}11 \times 10^{-31}$ kg) = $2{,}6 \times 10^9$ m/s^2, tangente alla circonferenza di raggio 1,5 cm e, per un elettrone, in verso opposto al campo indotto.

29. L'errore è pensare che la f.e.m. dipenda dal campo magnetico nei punti della spira. La legge di Faraday-Neumann-Lenz lega la circuitazione del campo elettrico lungo la spira al flusso attraverso una superficie che ha la spira come bordo; quella superficie comprende la sezione del solenoide, dove il campo varia. Quindi la f.e.m. è $\pi R^2 \Delta B/\Delta t$, e il campo elettrico indotto esiste anche fuori dal solenoide. Su questo funziona il trasformatore: le spire del secondario sono avvolte attorno al nucleo, dove sta quasi tutto il flusso, e la f.e.m. per spira non dipende dalla forma della spira. Lo stesso vale per la pinza amperometrica, che misura la corrente in un cavo senza toccarlo.

30. In un conduttore la corrente di conduzione è $i = JS = ES/\rho$, mentre la corrente di spostamento è $\varepsilon_0 S \Delta E/\Delta t$. Con un campo sinusoidale di pulsazione ω l'ampiezza della rapidità di variazione è ωE_0, quindi il rapporto fra le ampiezze è $\varepsilon_0 \omega E_0 S/(E_0 S/\rho) = \varepsilon_0 \omega \rho$. Per il rame a 50 Hz: $8{,}85 \times 10^{-12} \times 2\pi \times 50 \times 1{,}7 \times 10^{-8} \approx 5 \times 10^{-17}$: del tutto trascurabile. Nei circuiti di casa il campo magnetico è prodotto dalle correnti di conduzione. Nel vuoto, invece, non ci sono cariche libere né correnti di conduzione: la corrente di spostamento è l'unica sorgente del campo magnetico, ed è proprio il termine che permette ai campi di sostenersi a vicenda e di propagarsi come onda.

31. Traccia di risposta. Un solenoide lungo (almeno 50 cm, raggio qualche centimetro), alimentato da un generatore di funzioni a bassa tensione con un'onda triangolare: durante ogni rampa la corrente varia con rapidità costante e la f.e.m. indotta è costante (si legge come un'onda quadra sull'oscilloscopio). Si misura con l'oscilloscopio la f.e.m. indotta in anelli di filo, o in bobine di poche spire, coassiali con il solenoide, a metà della sua lunghezza, con raggi da poco più del raggio del solenoide fino a 3–4 volte. Si osserva che la f.e.m. non dipende dal raggio dell'anello (e nemmeno dalla sua forma: si può provare con un anello quadrato), quindi l'intensità media del campo lungo l'anello è $E = \varepsilon/(2\pi r)$: il grafico di E in funzione di $1/r$ dovrebbe essere una retta per l'origine, con pendenza $\varepsilon/(2\pi)$. Si controlla anche che la f.e.m. sia proporzionale alla rapidità di variazione della corrente, cambiando la frequenza dell'onda triangolare. Vanno tenuti i cavi di collegamento attorcigliati, perché non concatenino altro flusso.

32. a) $C = \varepsilon_0 \pi R^2/d$ = $8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m × π × (0,12 m)^2/($2{,}0 \times 10^{-3}$ m) = $2{,}0 \times 10^{-10}$ F. Dopo una costante di tempo la tensione è il 63% di 9,0 V, cioè 5,7 V: dalla tabella questo accade fra 40 e 60 μs, più vicino a 40 μs; interpolando linearmente fra 4,96 V e 6,29 V si ottiene circa 51 μs, quindi $\tau \approx 50$ μs e $R = \tau/C$ = $5{,}0 \times 10^{-5}$ s/($2{,}0 \times 10^{-10}$ F) = $2{,}5 \times 10^5$ Ω. b) La corrente di spostamento è uguale a quella nei fili, $C\Delta V/\Delta t$. Fra 0 e 20 μs: $2{,}0 \times 10^{-10}$ F × 2,97 V/(20×10^{-6} s) = $3{,}0 \times 10^{-5}$ A; fra 80 e 100 μs: $2{,}0 \times 10^{-10}$ F × 0,60 V/(20×10^{-6} s) = $6{,}0 \times 10^{-6}$ A. c) Per la legge di Ampère-Maxwell su una circonferenza di raggio R: $B = \mu_0 I_s/(2\pi R)$ = 2×10^{-7} T·m/A × $2{,}97 \times 10^{-5}$ A/0,12 m = $5{,}0 \times 10^{-11}$ T, circa un milione di volte più debole del campo terrestre. d) Fra le armature il campo elettrico cresce; un campo elettrico variabile genera un campo magnetico come una corrente (legge di Ampère-Maxwell), con linee circolari attorno all'asse; senza questo termine il campo magnetico attorno al filo e quello fra

le armature sarebbero incoerenti, perché la circuitazione dipenderebbe dalla superficie scelta. Un campo di 10^{-10} T, che dura microsecondi ed è sovrapposto a quello terrestre, era molto al di sotto della sensibilità di qualunque strumento dell'Ottocento: per questo la corrente di spostamento fu confermata indirettamente, con le onde elettromagnetiche di Hertz. *Indicatori:* a) Interpretare/elaborare i dati; b) Sviluppare il processo risolutivo; c) Sviluppare il processo risolutivo; d) Argomentare.

33. a) $B_0 = \mu_0 n I_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A × 2000 m^{-1} × 3,0 A = 7,5 × 10^{-3} T. L'anello è fuori dal solenoide e concatena il flusso della sezione: $\Phi_0 = B_0 \pi R^2 = 7{,}54 \times 10^{-3}$ T × π × (0,020 m)^2 = 9,5 × 10^{-6} Wb. b) $\Phi(t) = \Phi_0$ sen ωt, quindi $\varepsilon = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t = -\omega\Phi_0 \cos \omega t$: la f.e.m. è sinusoidale, sfasata di un quarto di periodo rispetto alla corrente (nel capitolo 3 l'ampiezza era indicata con ε_0; qui scriviamo ε_{max} per non confonderla con la costante dielettrica). Con $\omega = 2\pi \times 50$ Hz = 314 rad/s: $\varepsilon_{max} = 314$ s^{-1} × 9,47 × 10^{-6} Wb = 3,0 × 10^{-3} V; valore efficace $\varepsilon_{max}/\sqrt{2} = 2{,}1 \times 10^{-3}$ V. c) $E_{max} = \varepsilon_{max}/(2\pi r) = 2{,}98 \times 10^{-3}$ V/(2π × 0,10 m) = 4,7 × 10^{-3} V/m. Corrente efficace: 2,10 × 10^{-3} V/(5,0 × 10^{-3} Ω) = 0,42 A; potenza media: $\varepsilon_{eff}^2/R = (2{,}10 \times 10^{-3}\ \mathrm{V})^2/(5{,}0 \times 10^{-3}\ \Omega) = 8{,}9 \times 10^{-4}$ W. Per la legge di Lenz la corrente nell'anello si oppone in ogni istante alla variazione del flusso. d) Il campo elettrico indotto non dipende dalla presenza dell'anello, quindi non cambia; non cambia neppure la circuitazione lungo il percorso dell'anello, cioè la f.e.m. Cambia la corrente, che diventa nulla perché il circuito è aperto: le cariche si accumulano ai due estremi del taglio finché il loro campo bilancia, dentro il rame, il campo indotto. Un voltmetro collegato agli estremi, con i cavi che non circondano il solenoide, legge una tensione alternata di valore efficace 2,1 mV, cioè la f.e.m. *Indicatori:* a) Analizzare; b) Sviluppare il processo risolutivo; c) Sviluppare il processo risolutivo e Interpretare/elaborare i dati; d) Argomentare.