CAPITOLO

3

La corrente alternata

La corrente che arriva nelle nostre case cambia verso cento volte al secondo: proprio per questo può viaggiare per centinaia di chilometri.

OBIETTIVI

1. Ricavare la forza elettromotrice di un alternatore dalla forza elettromotrice cinetica dei lati della bobina e dalla legge di Faraday-Neumann.
2. Distinguere valori massimi ed efficaci e calcolare la potenza dissipata in corrente alternata.
3. Descrivere resistori, induttori e condensatori in corrente alternata con reattanze, sfasamenti e fasori.
4. Calcolare impedenza, corrente, sfasamento e potenza media in un circuito RLC serie e riconoscere la risonanza.
5. Spiegare le oscillazioni di un circuito LC con l'analogia dell'oscillatore massa-molla.
6. Usare le relazioni del trasformatore ideale e spiegare perché l'energia elettrica si trasporta ad alta tensione.

INDICE DEL CAPITOLO

3.1 L'alternatore 2
3.2 I valori efficaci 6
3.3 Resistori, induttori e condensatori in corrente alternata 8
3.4 Il circuito RLC serie 12
3.5 Il circuito LC 17
3.6 Il trasformatore e il trasporto dell'energia elettrica 19

Fisica 5 · Parte I · L'induzione elettromagnetica · versione 1.0
Capitolo 3: La corrente alternata · pagine 87–118 del volume completo · estratto per lo studio

Infila la spina di un caricabatterie nella presa e, senza saperlo, ti colleghi a una macchina grande come un continente. All'altro capo dei fili, a decine o centinaia di chilometri, una turbina fa ruotare un magnete enorme dentro un anello di bobine, e la forza elettromotrice indotta in quelle bobine cambia verso cento volte al secondo. Quella che arriva in casa è una **corrente alternata**: una corrente che inverte periodicamente il proprio verso, in modo sinusoidale, alla frequenza di 50 Hz.

Nei due capitoli precedenti hai scoperto la legge di Faraday-Neumann-Lenz e hai visto che una bobina si oppone alle variazioni della propria corrente con l'autoinduzione. Qui usiamo quelle leggi per capire come si produce la corrente alternata, perché la tensione della rete si dichiara «230 V» anche se in certi istanti supera i 300 V, come si comportano resistori, induttori e condensatori quando la corrente oscilla, che cosa succede quando un circuito «entra in risonanza», e perché per trasportare l'energia elettrica lontano conviene alzare la tensione fino a centinaia di migliaia di volt. Alla fine incontreremo il circuito LC, in cui l'energia passa avanti e indietro fra un condensatore e una bobina: è il primo passo verso le antenne e le onde elettromagnetiche della seconda parte.

3.1 L'alternatore

3.1.1 Una bobina che ruota in un campo magnetico

Il modo più semplice per far variare il flusso magnetico attraverso un circuito, e quindi per indurre una forza elettromotrice, è far ruotare una bobina in un campo magnetico uniforme e costante. Considera una bobina rettangolare di N spire, ciascuna di area S, che ruota con velocità angolare costante ω attorno a un asse perpendicolare alle linee del campo $\boldsymbol{B}$ (Figura 3.1a). Chiamiamo θ l'angolo fra la normale $\boldsymbol{n}$ al piano della bobina e il campo; se all'istante $t = 0$ la normale è parallela al campo, l'angolo cresce in modo uniforme, $\theta = \omega t$, e il flusso concatenato con la bobina è

$$\Phi(t) = NBS\cos\theta = NBS\cos\omega t$$

Il flusso oscilla fra $+NBS$ e $-NBS$: è massimo quando il piano della bobina è perpendicolare al campo, nullo quando è parallelo, negativo quando la bobina ha compiuto mezzo giro e le linee di campo la attraversano dall'altra faccia. Una macchina che trasforma in questo modo energia meccanica di rotazione in energia elettrica si chiama **alternatore**.

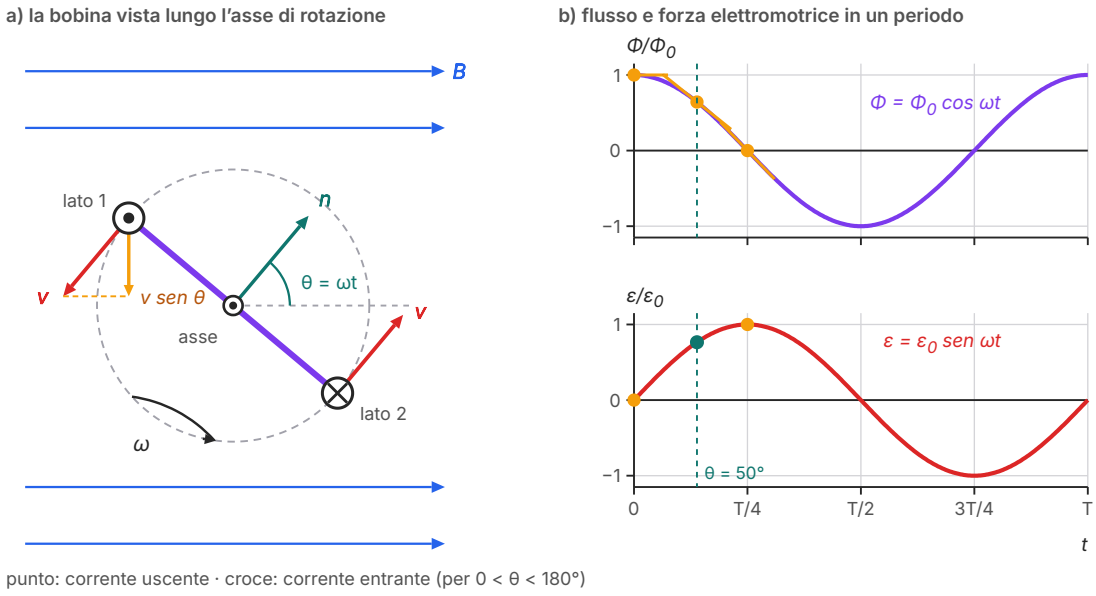

Figura 3.1 L'alternatore. a) La bobina vista lungo l'asse di rotazione (punto al centro), nell'istante in cui la normale $\boldsymbol{n}$ forma l'angolo $\theta = 50°$ con il campo uniforme $\boldsymbol{B}$. I due lati lunghi si muovono con velocità $\boldsymbol{v}$ tangente alla circonferenza; solo la componente v sen θ, perpendicolare al campo, contribuisce alla forza elettromotrice. b) Flusso e forza elettromotrice, calcolati, in un periodo. I segmenti arancioni sono tangenti al grafico di $\Phi(t)$: orizzontale a $t = 0$, dove $\varepsilon = 0$, con la massima pendenza a $t = T/4$, dove $\varepsilon = \varepsilon_0$. La linea verde indica l'istante disegnato in a; $\Phi_0 = NBS$.

3.1.2 La forza elettromotrice dai lati della bobina

Per calcolare la forza elettromotrice conviene guardare le cariche dentro i fili, come hai fatto per la sbarretta che scorre sui binari nel capitolo 1. Siano l la lunghezza dei due lati paralleli all'asse e b la larghezza della spira, così che $S = lb$. I due lati lunghi descrivono una circonferenza di raggio $b/2$ con velocità di modulo

$$v = \omega \frac{b}{2}$$

diretta lungo la tangente alla circonferenza. Sugli elettroni di conduzione di un lato agisce la forza di Lorentz $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$; la sua componente lungo il filo produce la forza elettromotrice cinetica, che vale $v_\perp Bl$, dove $v_\perp$ è la componente della velocità perpendicolare al campo. Nella Figura 3.1a si vede che la velocità dei lati, perpendicolare al piano della bobina, è parallela alla normale $\boldsymbol{n}$: forma quindi con $\boldsymbol{B}$ lo stesso angolo θ, e $v_\perp = v$ sen θ: quando $\theta = 0$ i lati si muovono parallelamente alle linee di campo e la forza di Lorentz è nulla; quando $\theta = 90°$ tagliano le linee perpendicolarmente e la forza è massima. I due lati corti, invece, non contribuiscono: per loro la forza di Lorentz è perpendicolare al filo.

I due lati lunghi si muovono in versi opposti, ma sono percorsi dalla spira in versi opposti: le loro forze elettromotrici si sommano lungo il circuito. Per una spira la forza elettromotrice è quindi $2 \cdot (v \operatorname{sen} \theta)\, Bl = 2 \cdot \omega(b/2)\, Bl \operatorname{sen} \omega t = BS\omega \operatorname{sen} \omega t$, e per N spire in serie

$$\varepsilon(t) = NBS\omega \operatorname{sen} \omega t = \varepsilon_0 \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{con} \qquad \varepsilon_0 = NBS\omega$$

La forza elettromotrice di un alternatore è sinusoidale, con frequenza $f = \omega/(2\pi)$ uguale al numero di giri al secondo e con valore massimo ε_0 proporzionale a N, a B, a S e alla velocità angolare. Far girare la bobina più in fretta ha due effetti insieme: aumenta l'ampiezza e accorcia il periodo.

Lo stesso risultato si ritrova con la legge di Faraday-Neumann, $\varepsilon = -\Delta\Phi/\Delta t$. Nella Figura 3.1b il grafico di $\Phi(t)$ è una cosinusoide; la forza elettromotrice istantanea è l'opposto della pendenza della retta tangente (in simboli $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$, la derivata, che stai studiando in matematica). A $t = 0$ la tangente è orizzontale e $\varepsilon = 0$; a $t = T/4$ il flusso passa per zero con la pendenza più ripida, negativa, e la forza elettromotrice è massima e positiva. È proprio il comportamento di $\varepsilon_0 \operatorname{sen} \omega t$. Il segno lo fissa la legge di Lenz: la corrente indotta circola in modo da opporsi alla variazione del flusso, e la forza che il campo esercita su di essa frena la rotazione. Per questo, quando a un alternatore si collegano utilizzatori che assorbono più corrente, la turbina deve compiere più lavoro: l'energia elettrica non nasce dal nulla, è il lavoro meccanico trasformato.

ESEMPIO SVOLTO

Un alternatore da laboratorio

Problema. Una bobina rettangolare di 250 spire, con lati l = 8,0 cm (paralleli all'asse) e b = 5,0 cm, ruota a 3000 giri al minuto in un campo magnetico uniforme di 0,20 T perpendicolare all'asse. a) Calcola la frequenza e il valore massimo della forza elettromotrice. b) Quanto vale la forza elettromotrice un ottavo di periodo dopo l'istante in cui il flusso è massimo? c) Verifica il risultato di a) a partire dalla velocità dei lati. d) Che cosa cambia se la bobina ruota a 1500 giri al minuto?

Soluzione. a) 3000 giri al minuto sono 50 giri al secondo: f = 50 Hz e $\omega = 2\pi f$ = 314 rad/s. L'area è S = 0,080 m × 0,050 m = 4,0 × 10^{-3} m^2, quindi $\varepsilon_0 = NBS\omega$ = 250 × 0,20 T × 4,0 × 10^{-3} m^2 × 314 rad/s = 63 V (62,8 V).

b) Il flusso è massimo a t = 0; un ottavo di periodo dopo, $\omega t = 2\pi/8 = \pi/4$ e ε = 62,8 V × sen 45° = 44 V.

c) I lati lunghi percorrono una circonferenza di raggio 2,5 cm: $v = \omega b/2$ = 314 rad/s × 0,025 m = 7,85 m/s. Quando tagliano il campo perpendicolarmente ogni lato di ogni spira dà vBl = 7,85 m/s × 0,20 T × 0,080 m = 0,126 V; due lati per 250 spire danno 2 × 250 × 0,126 V = 63 V, come prima.

d) A metà velocità angolare si dimezzano sia la frequenza (25 Hz) sia il valore massimo (31 V): il flusso cambia della stessa quantità in un tempo doppio.

Commento. Per avere 50 Hz la frequenza di rotazione è vincolata; per aumentare la tensione si possono aumentare solo il numero di spire, l'area o il campo. Negli alternatori delle centrali il campo è prodotto da elettromagneti e arriva a valori dell'ordine del tesla.

COLLEGAMENTI

Tutte le strade portano all'alternatore

Centrale idroelettrica, termoelettrica a gas o a carbone, centrale nucleare, geotermica, pala eolica: dietro a sorgenti di energia così diverse c'è quasi sempre lo stesso ultimo anello della catena, un alternatore. Cambia solo che cosa fa girare il rotore: l'acqua che scende da un bacino, il vapore prodotto bruciando un combustibile o con il calore delle reazioni nucleari (capitolo 15) o del sottosuolo, il vento. Il resto della centrale serve a trasformare l'energia della sorgente in energia cinetica di rotazione, e l'alternatore la trasforma in energia elettrica con rendimenti molto alti.

L'eccezione importante è il fotovoltaico. Una cella solare (capitolo 13) produce direttamente una tensione continua, senza parti in movimento; per immettere energia nella rete serve un inverter, un circuito elettronico che trasforma la corrente continua in corrente alternata a 50 Hz, sincronizzata con quella della rete.

3.1.3 Dalle centrali alla presa

Negli alternatori industriali, per comodità costruttiva, il ruolo delle parti è invertito: a ruotare è un elettromagnete, il rotore, mentre le bobine in cui si induce la forza elettromotrice sono fisse nello statore che lo circonda. Per la legge di Faraday-Neumann conta solo che il flusso concatenato con le bobine vari, e il risultato è lo stesso. Con un rotore a una sola coppia di poli, per ottenere 50 Hz servono 3000 giri al minuto, il regime tipico delle turbine a vapore; le turbine idrauliche girano molto più piano e compensano con molte coppie di poli: con otto coppie, per esempio, bastano 375 giri al minuto, perché a ogni giro la bobina vede passare otto volte il ciclo nord-sud.

APPROFONDIMENTO

L'anello di Pacinotti

Le prime macchine capaci di produrre corrente in modo continuativo a partire da un moto di rotazione nacquero pochi decenni dopo le scoperte di Faraday. Fra i loro inventori c'è un italiano, Antonio Pacinotti, che intorno al 1860, a Pisa, costruì una macchina con un'armatura di ferro a forma di anello, avvolta da molte bobine collegate in serie. La macchina poteva funzionare in due modi: fatta ruotare, generava corrente; alimentata con una corrente, girava come un motore. Pacinotti la descrisse in un articolo pubblicato nel 1865 sulla rivista *Il Nuovo Cimento*.

Una bobina che ruota in un campo produce, come hai visto, una forza elettromotrice alternata. La macchina di Pacinotti, come le dinamo che ne derivarono, aveva un commutatore: un collettore a lamelle che, a ogni mezzo giro, scambia i collegamenti delle bobine con il circuito esterno, così che la corrente esca sempre nello stesso verso. Molte bobine sfasate fra loro rendono la corrente quasi costante. L'idea dell'anello fu ripresa e resa industriale da altri costruttori, e per alcuni decenni le dinamo a corrente continua alimentarono le prime reti di illuminazione.

3.2 I valori efficaci

Colleghiamo un alternatore, o la presa di rete, a un resistore di resistenza R. La tensione ai suoi capi è $v(t) = V_0 \operatorname{sen} \omega t$ e, per la legge di Ohm, la corrente è in ogni istante

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = I_0 \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{con} \qquad I_0 = \frac{V_0}{R}$$

Su un periodo la corrente vale in media zero: per mezzo periodo scorre in un verso, per l'altro mezzo nel verso opposto. Eppure il resistore si scalda: l'effetto Joule non dipende dal verso della corrente. La potenza istantanea dissipata è

$$p(t) = Ri^2 = RI_0{}^2 \operatorname{sen}^2 \omega t$$

sempre positiva, e oscilla fra 0 e $RI_0{}^2$ con frequenza doppia di quella della corrente (Figura 3.2). Per sapere quanta energia il resistore riceve in un tempo lungo ci serve il valore medio di $\operatorname{sen}^2 \omega t$. Il grafico lo suggerisce: la curva $\operatorname{sen}^2 \omega t$ oscilla fra 0 e 1 ed è simmetrica rispetto alla retta di ordinata ½, perché le «gobbe» sopra quella retta sono identiche ai «vuoti» sotto, capovolti. C'è anche un argomento senza grafico: $\cos^2 \omega t$ è la stessa curva spostata di un quarto di periodo, quindi su un periodo ha la stessa media di $\operatorname{sen}^2 \omega t$; e poiché $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$ in ogni istante, le due medie, uguali, sommano a 1. Ciascuna vale ½. La potenza media dissipata è quindi

$$P_{\text{media}} = \tfrac{1}{2} RI_0{}^2$$

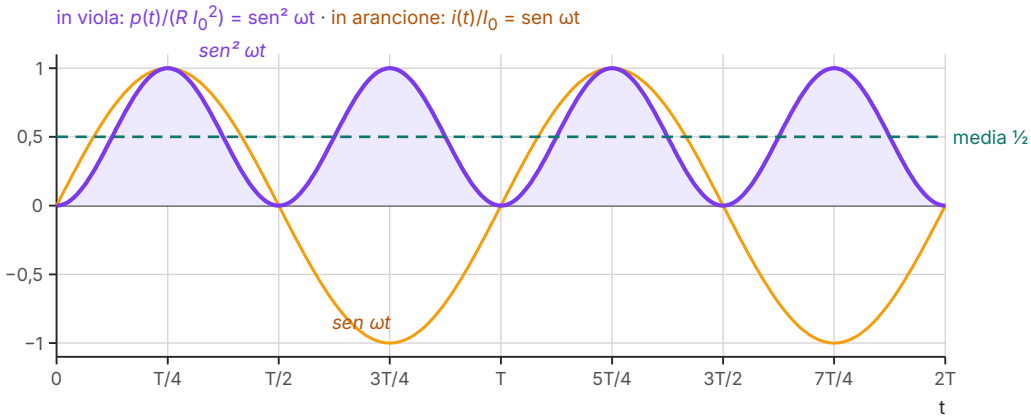

Figura 3.2 Potenza dissipata in un resistore in corrente alternata, in unità di $RI_0{}^2$ (in viola, calcolata). La corrente (in arancione) cambia segno, la potenza no: oscilla fra 0 e 1 con periodo $T/2$. Le parti della curva sopra la retta tratteggiata riempiono esattamente quelle sotto, quindi il valore medio è ½.

Questo suggerisce di confrontare la corrente alternata con una corrente continua. Si chiama **valore efficace** di una corrente alternata il valore della corrente continua che, nello stesso resistore, dissiperebbe la stessa potenza media. Imponendo $RI_{\text{eff}}{}^2 = \tfrac{1}{2} RI_0{}^2$ si trova

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \qquad V_{\text{eff}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \qquad P_{\text{media}} = RI_{\text{eff}}{}^2 = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \frac{V_{\text{eff}}{}^2}{R}$$

Con i valori efficaci le formule della potenza sono identiche a quelle della corrente continua che hai usato lo scorso anno. Per questo tensioni e correnti alternate si dichiarano sempre con il loro valore efficace, e i multimetri, nelle portate in alternata, mostrano valori efficaci. I «230 V» della rete di casa sono un valore efficace: il valore massimo è 230 V × √2 ≈ 325 V, e in un periodo la tensione passa da +325 V a −325 V e ritorna. Attenzione: il fattore √2 vale per le grandez-

ze sinusoidali; per altre forme d'onda il rapporto fra valore massimo e valore efficace è diverso (per un'onda quadra che alterna $+V_0$ e $-V_0$, per esempio, il valore efficace è V_0 stesso).

Un esempio concreto. Su un bollitore elettrico è scritto «230 V, 2000 W». La corrente efficace è $I_{\text{eff}} = P/V_{\text{eff}} = 2000\ \text{W}/230\ \text{V} = 8{,}7\ \text{A}$, il valore massimo è $8{,}7\ \text{A} \times \sqrt{2} = 12{,}3\ \text{A}$ e la resistenza dell'elemento riscaldante, a regime, è $V_{\text{eff}}^2/P = 26{,}5\ \Omega$. La potenza istantanea oscilla fra 0 e 4000 W cento volte al secondo, ma l'acqua, con la sua inerzia termica, «sente» solo la media di 2000 W.

3.3 Resistori, induttori e condensatori in corrente alternata

Che cosa succede se al posto del resistore colleghiamo al generatore un induttore o un condensatore? Per rispondere ci serve un fatto sulle sinusoidi, che puoi vedere sul grafico prima ancora di dimostrarlo in matematica. La pendenza della curva A sen ωt è nulla nei massimi e nei minimi, ed è massima quando la curva passa per lo zero salendo. Lì la pendenza vale ωA: per angoli piccoli sen $\omega t \approx \omega t$, e vicino a $t = 0$ la curva coincide quasi con la retta $A\omega t$. Riportando la pendenza istante per istante si ottiene di nuovo una sinusoide, di ampiezza ωA, che però ha i massimi dove la curva di partenza passa per lo zero salendo: è $A\omega$ cos ωt, la stessa curva anticipata di un quarto di periodo (spostata verso sinistra sul grafico). In breve: **la pendenza di una sinusoide di ampiezza A è una sinusoide di ampiezza ωA, in anticipo di un quarto di periodo**. Nel linguaggio della matematica è la derivata di sen ωt.

3.3.1 Il resistore

Per un resistore la risposta è già scritta: corrente e tensione sono proporzionali in ogni istante, quindi raggiungono insieme i massimi e passano insieme per lo zero. Si dice che sono *in fase* (Figura 3.3a), e le ampiezze sono legate da $V_0 = RI_0$.

3.3.2 L'induttore

Consideriamo ora un induttore ideale, cioè una bobina di induttanza L e resistenza trascurabile. Se in esso circola la corrente $i = I_0$ sen ωt, la bobina produce la forza elettromotrice autoindotta $-L\,\Delta i/\Delta t$; poiché lungo la maglia non c'è resistenza, la tensione del generatore deve bilanciarla istante per istante:

$$v = L\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

La pendenza di I_0 sen ωt è ωI_0 cos ωt, quindi $v = \omega L I_0$ cos ωt. La tensione raggiunge il massimo un quarto di periodo *prima* della corrente: in un induttore **la corrente è in ritardo di 90° rispetto alla tensione** (Figura 3.3b). Non è sorprendente: l'induttore si oppone alle variazioni della corrente, che quindi «arriva in ritardo» rispetto alla tensione che la spinge. Le ampiezze sono legate da $V_0 = \omega L I_0$. La grandezza

$$X_L = \omega L = 2\pi f L$$

si chiama **reattanza induttiva** e ha il ruolo di una resistenza, nel senso che $I_0 = V_0/X_L$; si misura in ohm (H/s = V·s/(A·s) = Ω). A differenza di una resistenza, però, cresce con la frequenza: un induttore lascia passare quasi indisturbata la corrente continua ($X_L = 0$) e ostacola sempre più le correnti che cambiano in fretta. Inoltre, a differenza della resistenza, la reattanza non comporta dissipazione: lo vedremo parlando di potenza.

3.3.3 Il condensatore

Con un condensatore di capacità C il ragionamento si rovescia. La carica sulle armature è $q = Cv$, e la corrente nei fili è la rapidità con cui questa carica cambia, $i = \Delta q/\Delta t = C\,\Delta v/\Delta t$. Se $v = V_0$ sen ωt, la pendenza è ωV_0 cos ωt e quindi $i = \omega C V_0$ cos ωt: questa volta è la corrente a raggiungere il massimo un quarto di periodo prima della tensione. In un condensatore **la corrente è in anticipo di 90° rispetto alla tensione** (Figura 3.3c): la corrente è massima quando il condensatore è scarico e la tensione sta cambiando più in fretta, ed è nulla quando il condensatore è carico al massimo. Le ampiezze sono legate da $I_0 = \omega C V_0$, cioè $V_0 = X_C I_0$ con

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$$

la **reattanza capacitiva**, anch'essa in ohm. Diminuisce al crescere della frequenza: a frequenza molto bassa il condensatore ha tutto il tempo di caricarsi e ferma la corrente, come in corrente continua (lo hai visto nel circuito RC); a frequenza alta si carica e si scarica così poco a ogni semiperiodo che la tensione ai suoi capi resta piccola, e la corrente passa quasi liberamente. La Tabella 3.1 riassume i tre comportamenti.

Tabella 3.1 I tre componenti ideali alimentati dalla tensione $v = V_0$ sen ωt.

Componente	Relazione fra ampiezze	Fase della corrente	Al crescere di f
resistore	$V_0 = RI_0$	in fase con la tensione	R non cambia
induttore	$V_0 = X_L I_0$, $X_L = \omega L$	in ritardo di 90°	X_L cresce
condensatore	$V_0 = X_C I_0$, $X_C = 1/(\omega C)$	in anticipo di 90°	X_C diminuisce

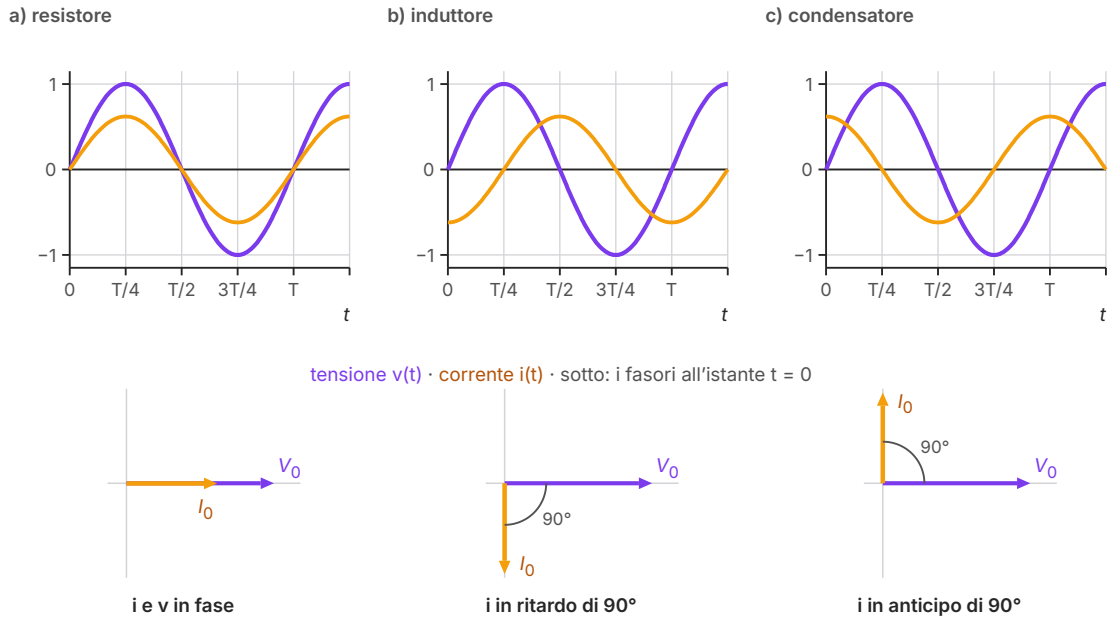

Figura 3.3 Tensione (in viola) e corrente (in arancione) per un resistore, un induttore e un condensatore ideali alimentati dalla stessa tensione sinusoidale; le curve sono calcolate e l'ampiezza della corrente è in unità arbitrarie. Sotto, i fasori corrispondenti all'istante $t = 0$, con la tensione sull'asse orizzontale: il fasore della corrente è allineato con quello della tensione, ruotato di 90° in senso orario (in ritardo) o di 90° in senso antiorario (in anticipo).

3.3.4 I fasori

Quando in un circuito ci sono più componenti, bisogna sommare tensioni sinusoidali con la stessa frequenza ma sfasate fra loro. C'è uno strumento grafico che rende questa somma semplice. Una grandezza sinusoidale $A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$ si rappresenta con un **fasore**: un vettore di lunghezza uguale all'ampiezza A, che ruota in senso antiorario con velocità angolare ω e all'istante t forma l'angolo $\omega t + \varphi$ con l'asse orizzontale. La sua proiezione sull'asse verticale è proprio $A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$: il valore istantaneo della grandezza. È la stessa costruzione con cui, nel volume del terzo anno, hai ottenuto il moto armonico come proiezione di un moto circolare uniforme.

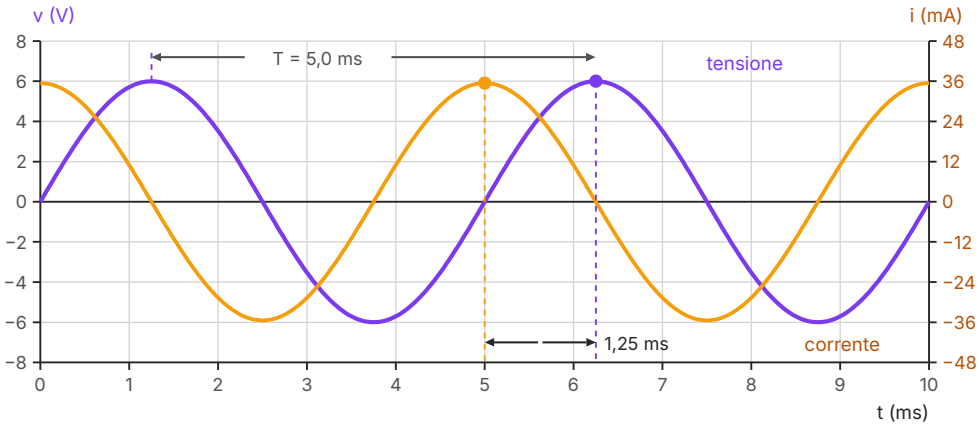

Figura 3.4 L'oscillogramma dell'esempio svolto, calcolato: tensione ai capi del componente (in viola, scala di sinistra) e corrente che lo attraversa (in arancione, scala di destra). Il massimo della corrente precede di 1,25 ms, un quarto di periodo, il massimo successivo della tensione.

Il vantaggio è che i fasori di grandezze con la stessa frequenza ruotano insieme, come un unico disegno rigido: gli angoli fra loro restano costanti, e l'angolo fra due fasori è la **differenza di fase** (o sfasamento) fra le grandezze. Poiché la proiezione di una somma di vettori è la somma delle proiezioni, **sommare due grandezze sinusoidali della stessa frequenza equivale a sommare i loro fasori come vettori**. Nella parte bassa della Figura 3.3 il fasore della corrente è parallelo a quello della tensione nel resistore, ruotato di 90° in senso orario nell'induttore, di 90° in senso antiorario nel condensatore.

ESEMPIO SVOLTO

Che cosa c'è nella scatola? Leggere un oscillogramma

Problema. Un componente ideale, chiuso in una scatola, è collegato a un generatore di tensione sinusoidale. Un oscilloscopio a due canali registra la tensione ai suoi capi e la corrente che lo attraversa (Figura 3.4). Dal grafico ricava la frequenza, l'ampiezza della tensione e della corrente e lo sfasamento. Che componente è? Calcola la sua capacità o la sua induttanza. Quanto varrebbe l'ampiezza della corrente a frequenza doppia?

Soluzione. *Frequenza.* Fra due massimi successivi della tensione (1,25 ms e 6,25 ms) passano T = 5,0 ms, quindi $f = 1/T = 200$ Hz e $\omega = 2\pi f = 1{,}26 \times 10^3$ rad/s.

Ampiezze. Sulla scala di sinistra $V_0 = 6{,}0$ V; sulla scala di destra $I_0 = 35$ mA.

Sfasamento. La corrente raggiunge il massimo a 5,0 ms, la tensione a 6,25 ms: la corrente è in anticipo di 1,25 ms = $T/4$, cioè di 90°. Il componente è un condensatore.

Capacità. La reattanza è $X_C = V_0/I_0 = 6{,}0\ \text{V}/0{,}035\ \text{A} = 1{,}7 \times 10^2\ \Omega$ (171 Ω), quindi $C = 1/(\omega X_C) = 1/(1{,}26 \times 10^3\ \text{rad/s} \times 171\ \Omega) = 4{,}6 \times 10^{-6}$ F = 4,6 μF.

Frequenza doppia. La reattanza capacitiva è inversamente proporzionale alla frequenza: a 400 Hz si dimezza, e con la stessa tensione l'ampiezza della corrente raddoppia, a 70 mA. Se il componente fosse stato un induttore con la stessa reattanza a 200 Hz ($L = X_L/\omega = 0{,}14$ H), a 400 Hz la corrente si sarebbe invece dimezzata.

Commento. Con due grandezze sullo stesso schermo, la prima cosa da leggere è l'ordine dei massimi: chi arriva prima è in anticipo. La lettura dei massimi sul reticolo, con due cifre significative, limita la precisione di C a qualche percento; il valore nominale del condensatore usato era 4,7 μF.

3.4 Il circuito RLC serie

3.4.1 Impedenza e sfasamento

Colleghiamo in serie un resistore, un induttore e un condensatore a un generatore di tensione alternata (Figura 3.5a). È il **circuito RLC serie**, il modello di moltissimi circuiti reali: anche una semplice bobina ha una resistenza, e due fili vicini hanno una capacità. In un collegamento in serie non ci sono diramazioni, quindi in ogni istante la corrente è la stessa nei tre componenti: $i = I_0 \operatorname{sen} \omega t$. Per la legge delle maglie, istante per istante, la tensione del generatore è la somma delle tre tensioni:

$$v = v_R + v_L + v_C$$

Le tre tensioni però non sono in fase. Prendiamo come riferimento il fasore della corrente, orizzontale. Il fasore di v_R è parallelo a esso e ha lunghezza RI_0; quello di v_L è in anticipo di 90°

rispetto alla corrente, quindi verticale verso l'alto, con lunghezza $X_L I_0$; quello di v_C è in ritardo di 90°, verticale verso il basso, con lunghezza $X_C I_0$ (Figura 3.5b). I due fasori verticali hanno versi opposti e si sottraggono; il risultato si compone con quello orizzontale come i cateti di un triangolo rettangolo. Per il teorema di Pitagora l'ampiezza della tensione del generatore è $V_0 = I_0 \sqrt{(R^2 + (X_L - X_C)^2)}$. Si chiama **impedenza** del circuito la grandezza

$$Z = \sqrt{(R^2 + (X_L - X_C)^2)} \qquad I_0 = \frac{V_0}{Z} \qquad I_{\text{eff}} = \frac{V_{\text{eff}}}{Z}$$

che si misura in ohm e generalizza la resistenza: dice quanta corrente passa con una data tensione. Il fasore della tensione forma con quello della corrente un angolo φ, lo sfasamento fra tensione e corrente, che si legge sullo stesso triangolo:

$$\tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \qquad \cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

Se $X_L > X_C$, φ è positivo: la tensione è in anticipo sulla corrente e il circuito si dice *induttivo*. Se $X_L < X_C$, φ è negativo e il circuito è *capacitivo*: la corrente è in anticipo. I casi della sezione precedente si ritrovano come casi particolari: un resistore solo ha $\varphi = 0$, un induttore solo $\varphi = 90°$, un condensatore solo $\varphi = -90°$.

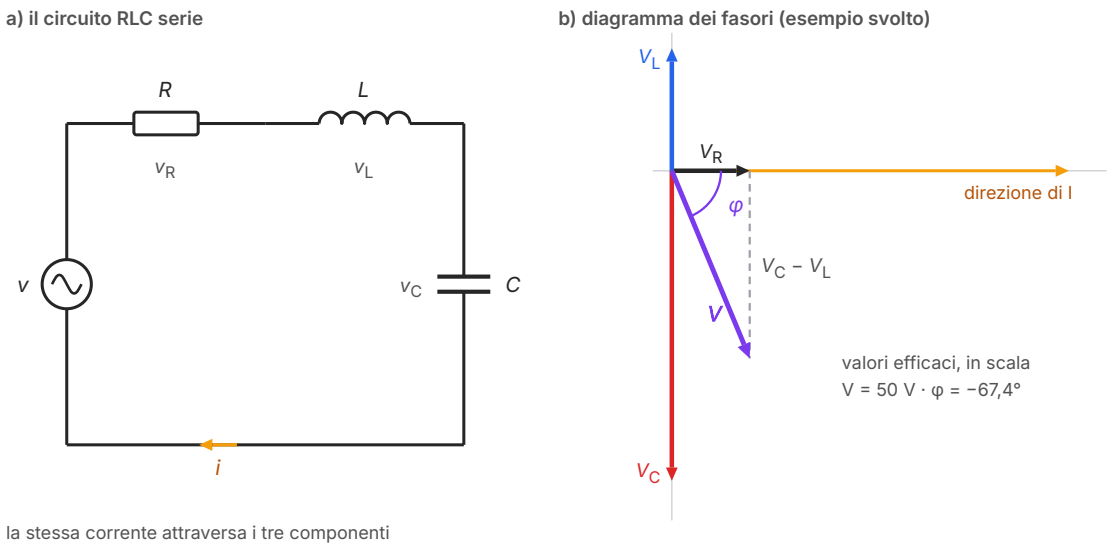

Figura 3.5 a) Un circuito RLC serie alimentato da un generatore di tensione alternata: la stessa corrente *i* attraversa i tre componenti. b) Il diagramma dei fasori, disegnato in scala con i valori efficaci dell'esempio svolto: la tensione sul resistore è parallela alla corrente, quella sull'induttore è in anticipo di 90°, quella sul condensatore in ritardo di 90°. La tensione del generatore *V* è la somma vettoriale dei tre fasori; qui il circuito è capacitivo e φ è negativo.

ESEMPIO SVOLTO

Un circuito RLC alla frequenza di rete

Problema. Un resistore da 40 Ω, un induttore da 0,20 H e un condensatore da 20 μF sono collegati in serie a un generatore di tensione efficace 50 V e frequenza 50 Hz. Calcola le reattanze, l'impedenza, la corrente efficace, lo sfasamento e le tensioni efficaci sui tre componenti, e verifica che le tensioni sono compatibili con quella del generatore.

Soluzione. *Reattanze.* $\omega = 2\pi \times 50\ \text{Hz} = 314\ \text{rad/s}$. $X_L = \omega L = 314\ \text{rad/s} \times 0{,}20\ \text{H} = 62{,}8\ \Omega$; $X_C = 1/(\omega C) = 1/(314\ \text{rad/s} \times 20 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 159\ \Omega$.

Impedenza e corrente. $Z = \sqrt{(40\ \Omega)^2 + (62{,}8\ \Omega - 159{,}2\ \Omega)^2} = \sqrt{(1600 + 9277)}\ \Omega = 104\ \Omega$; $I_{\text{eff}} = 50\ \text{V}/104\ \Omega = 0{,}48\ \text{A}$.

Sfasamento. $\tan\varphi = (62{,}8 - 159{,}2)/40 = -2{,}41$, quindi $\varphi = -67°$: il circuito è capacitivo e la corrente è in anticipo di 67° sulla tensione.

Tensioni. $V_R = RI_{\text{eff}} = 19{,}2\ \text{V}$; $V_L = X_L I_{\text{eff}} = 30{,}1\ \text{V}$; $V_C = X_C I_{\text{eff}} = 76{,}3\ \text{V}$. La somma aritmetica è 126 V, molto più dei 50 V del generatore, e la tensione sul solo condensatore supera quella del generatore. Non c'è contraddizione: le tensioni vanno sommate come fasori. $\sqrt{(19{,}2^2 + (30{,}1 - 76{,}3)^2)}\ \text{V} = \sqrt{(369 + 2134)}\ \text{V} = 50{,}0\ \text{V}$, come deve essere.

Commento. Le tensioni su induttore e condensatore sono in opposizione di fase: in ogni istante una compensa in parte l'altra. Per questo ciascuna può superare la tensione totale.

ERRORE FREQUENTE

«La tensione del generatore è la somma delle tensioni efficaci»

La legge delle maglie vale per i valori *istantanei*: $v = v_R + v_L + v_C$ in ogni istante. I valori efficaci (o massimi) delle tre tensioni, invece, non si sommano come numeri, perché le tensioni non raggiungono il massimo nello stesso istante. Si sommano come i fasori: $V = \sqrt{(V_R{}^2 + (V_L - V_C)^2)}$. Se misuri con un voltmetro le tre tensioni di un circuito RLC e la loro somma non coincide con la tensione del generatore, il circuito non ha nulla che non va.

3.4.2 La risonanza

Teniamo fissa l'ampiezza della tensione del generatore e cambiamo la sua frequenza. A bassa frequenza X_C è grande, a frequenza alta lo è X_L; in entrambi i casi l'impedenza è grande e la corrente piccola. Fra i due estremi c'è una frequenza alla quale le due reattanze sono uguali, $\omega L = 1/(\omega C)$, e si compensano esattamente:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(LC)}} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{(LC)}}$$

È la **frequenza di risonanza** del circuito. Quando il generatore lavora a questa frequenza l'impedenza è minima e uguale alla sola resistenza, $Z = R$; la corrente è massima, $I_{eff} = V_{eff}/R$, ed è in fase con la tensione ($\varphi = 0$). Il fenomeno si chiama **risonanza**. La Figura 3.6 mostra la corrente efficace in funzione della frequenza per i componenti dell'esempio svolto, con due valori della resistenza: è la **curva di risonanza**. Con $L = 0{,}20$ H e $C = 20$ μF si ha $\omega_0 = 1/\sqrt{(4{,}0 \times 10^{-6}\ \text{s}^2)} = 500$ rad/s e $f_0 = 79{,}6$ Hz. Con $R = 40\ \Omega$ il picco vale 50 V/40 Ω = 1,25 A, con $R = 100\ \Omega$ soltanto 0,50 A; e più la resistenza è piccola, più il picco è alto e stretto.

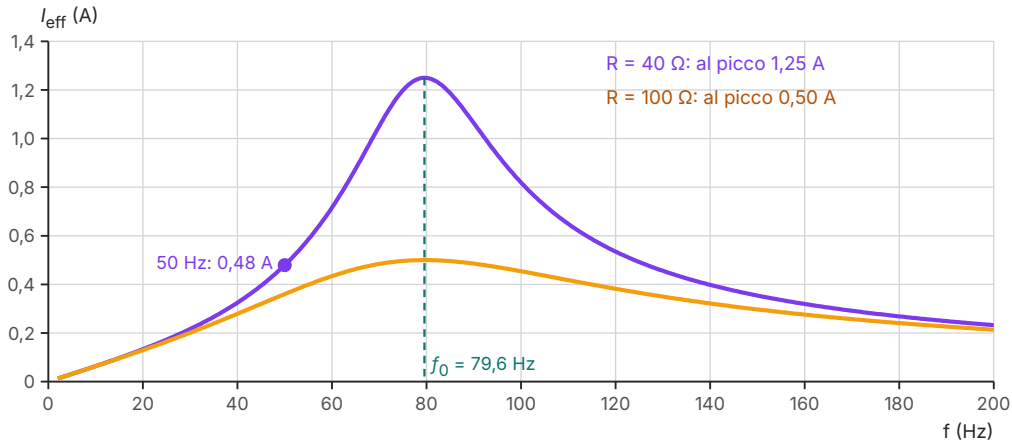

Figura 3.6 Curve di risonanza, calcolate, di un circuito RLC serie con $L = 0{,}20$ H, $C = 20$ μF e tensione efficace del generatore di 50 V, per due valori della resistenza. Il massimo cade per entrambe alla stessa frequenza $f_0 = 79{,}6$ Hz, dove la corrente vale V_{eff}/R; a 50 Hz (punto) si ritrova la corrente dell'esempio svolto.

Alla risonanza succede un'altra cosa notevole. Con $R = 40\ \Omega$ la corrente efficace è 1,25 A e le reattanze valgono $\omega_0 L = 500$ rad/s × 0,20 H = 100 Ω, quindi su induttore e condensatore ci sono tensioni efficaci di 125 V ciascuna, due volte e mezzo quella del generatore. Si annullano a vicenda perché sono in opposizione di fase, ma sono reali: un condensatore scelto per «50 V» si danneggerebbe. In circuiti con resistenza piccola l'effetto è ancora più marcato.

La risonanza elettrica è parente stretta di quella meccanica che hai studiato nel volume del terzo anno: un oscillatore forzato risponde con ampiezza massima quando la frequenza della forza coincide con la sua frequenza propria, e l'attrito decide quanto il picco è alto e stretto. Qui il ruolo dell'attrito lo ha la resistenza. Su questo principio funziona la sintonia di una radio. L'antenna raccoglie contemporaneamente i segnali di moltissime stazioni, ognuna a una frequenza diversa; un circuito risonante collegato all'antenna lascia passare una corrente apprezzabile solo per i segnali vicini alla propria frequenza di risonanza. Ruotare la manopola della sintonia significava, nelle radio tradizionali, cambiare la capacità di un condensatore variabile.

Con una bobina da 250 μH, per coprire le onde medie, fra circa 530 kHz e 1600 kHz, serve un condensatore che vari fra circa 40 pF e 360 pF.

3.4.3 La potenza in corrente alternata

Quanta potenza assorbe, in media, un circuito RLC? In un resistore la potenza istantanea è sempre positiva. In un induttore ideale, invece, per un quarto di periodo la corrente cresce e l'energia $\frac{1}{2}Li^2$ del campo magnetico aumenta; nel quarto successivo la corrente diminuisce e quell'energia torna al generatore. Lo stesso fa il condensatore con l'energia del campo elettrico. In media, induttori e condensatori ideali non assorbono potenza: la scambiano avanti e indietro con il resto del circuito. Tutta la potenza media è dissipata nella resistenza, e vale RI_{eff}^2. In termini della tensione e della corrente del generatore, come mostra l'esempio svolto che segue,

$$P_{\text{media}} = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$$

Il fattore $\cos \varphi$ si chiama **fattore di potenza**. Vale 1 per un carico puramente resistivo e 0 per un induttore o un condensatore ideale. Ha conseguenze pratiche importanti. I motori elettrici sono carichi induttivi, con un fattore di potenza che può essere sensibilmente minore di 1: per ricevere la stessa potenza media assorbono una corrente maggiore, e quella corrente in più scalda inutilmente i cavi e i trasformatori della rete. Per questo negli impianti industriali si collegano in parallelo ai motori dei condensatori, che compensano lo sfasamento: è il rifasamento.

ESEMPIO SVOLTO

Perché la potenza media è $V_{eff}I_{eff}\cos\varphi$

Problema. In un circuito la corrente è $i = I_0 \operatorname{sen} \omega t$ e la tensione del generatore è $v = V_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$. Dimostra che la potenza media erogata dal generatore è $V_{eff}I_{eff}\cos\varphi$, e che per un circuito RLC serie coincide con RI_{eff}^2.

Passo 1: la potenza istantanea. La potenza erogata è il prodotto della tensione per la corrente: $p = vi = V_0 I_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \operatorname{sen} \omega t$.

Passo 2: una formula di trigonometria. Dalle formule di addizione si ricava la formula di Werner $\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$. Con $\alpha = \omega t + \varphi$ e $\beta = \omega t$: $p = \frac{1}{2}V_0 I_0 \cos\varphi - \frac{1}{2}V_0 I_0 \cos(2\omega t + \varphi)$.

Passo 3: la media. Il primo termine è costante. Il secondo è una cosinusoide di frequenza doppia, che su un periodo ha media nulla. Quindi $P_{media} = \frac{1}{2}V_0 I_0 \cos\varphi$.

Passo 4: i valori efficaci. Poiché $\frac{1}{2}V_0 I_0 = (V_0/\sqrt{2})(I_0/\sqrt{2}) = V_{eff}I_{eff}$, si ottiene $P_{media} = V_{eff}I_{eff}\cos\varphi$.

Passo 5: il circuito RLC. Dal triangolo dei fasori $\cos\varphi = R/Z$, e $V_{eff} = ZI_{eff}$. Sostituendo: $P_{media} = ZI_{eff} \cdot I_{eff} \cdot R/Z = RI_{eff}^2$.

Risultato. La potenza media dipende dallo sfasamento; tutta l'energia che il generatore cede in media finisce in calore nella resistenza. Nell'esempio svolto precedente: $50\ \text{V} \times 0{,}479\ \text{A} \times \cos(-67{,}4°) = 9{,}2\ \text{W}$, e $40\ \Omega \times (0{,}479\ \text{A})^2 = 9{,}2\ \text{W}$.

Commento. Il termine che oscilla con frequenza 2ω è l'energia che va e viene fra il generatore e gli elementi reattivi: in certi istanti p è negativa, cioè è il circuito a restituire energia al generatore.

3.5 Il circuito LC

Togliamo dal circuito il generatore e la resistenza. Un condensatore di capacità C, carico con carica Q, viene collegato a un induttore di induttanza L (Figura 3.7a). Il condensatore comincia a scaricarsi, ma la corrente non può salire di colpo: l'induttore si oppone alla sua crescita. Mentre la carica diminuisce, la corrente aumenta, e l'energia del campo elettrico del condensatore si trasforma in energia del campo magnetico dell'induttore. Quando il condensatore è scarico la corrente è massima. A questo punto la corrente non si ferma: l'induttore si oppone anche alla sua diminuzione, e la carica continua a fluire, caricando il condensatore con la polarità opposta. Quando la corrente si annulla, il condensatore ha di nuovo carica Q, rovesciata, e il processo riparte in verso opposto. Un circuito formato da un condensatore e da un induttore si chiama **circuito LC**, e la carica e la corrente vi compiono un'**oscillazione elettrica**.

L'analogia con una massa attaccata a una molla è perfetta, e non solo nella descrizione. Nel circuito, lungo la maglia, la tensione sul condensatore q/C è bilanciata dalla forza elettromotrice autoindotta, e la corrente è la rapidità di variazione della carica:

$$L\frac{\Delta i}{\Delta t} = -\frac{q}{C} \qquad i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Per l'oscillatore armonico del volume del terzo anno valgono la seconda legge della dinamica e la definizione di velocità:

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -kx \qquad v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Le due coppie di equazioni hanno esattamente la stessa forma, con le corrispondenze della Tabella 3.2: la carica fa da posizione, la corrente da velocità, l'induttanza da massa (l'«inerzia» della corrente) e l'inverso della capacità da costante elastica. Equazioni uguali hanno soluzioni uguali. La massa oscilla con $x = A\cos\sqrt{(k/m)}\,t$; quindi la carica oscilla con

$$q(t) = Q\cos\omega_0 t \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(LC)}}$$

la stessa pulsazione che nel circuito RLC dava la risonanza. Non è una coincidenza: il circuito LC ha una frequenza propria di oscillazione, e un generatore che lo forza a quella frequenza ottiene la risposta più ampia, esattamente come con un'altalena spinta al ritmo giusto.

Tabella 3.2 Le corrispondenze fra il circuito LC e l'oscillatore massa-molla.

Oscillatore massa-molla	Circuito LC
posizione x	carica q del condensatore
velocità $v = \Delta x/\Delta t$	corrente $i = \Delta q/\Delta t$
massa m	induttanza L
costante elastica k	inverso della capacità, $1/C$
energia cinetica $\frac{1}{2}mv^2$	energia magnetica $\frac{1}{2}Li^2$
energia elastica $\frac{1}{2}kx^2$	energia elettrica $q^2/(2C)$
$\omega = \sqrt{(k/m)}$	$\omega_0 = 1/\sqrt{(LC)}$
attrito	resistenza

Anche l'energia segue l'analogia. In ogni istante la somma $q^2/(2C) + \frac{1}{2}Li^2$ resta uguale all'energia iniziale $Q^2/(2C)$, come per la massa resta costante la somma di energia cinetica ed elastica: l'energia passa dal campo elettrico al campo magnetico e viceversa, due volte per periodo (Figura 3.7b). Con $C = 10\ \mu F$ caricato a 20 V e $L = 25$ mH: $\omega_0 = 1/\sqrt{(2{,}5\times10^{-7}\ s^2)} = 2{,}0\times10^3$ rad/s, $f_0 = 318$ Hz e $T = 3{,}14$ ms. La carica iniziale è $Q = CV = 200\ \mu C$ e l'energia $\frac{1}{2}CV^2 = 2{,}0$ mJ. Un quarto di periodo dopo, 0,79 ms, il condensatore è scarico e la corrente è massima, $I_0 = \omega_0 Q = 0{,}40$ A: infatti $\frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}\times 0{,}025\ H\times(0{,}40\ A)^2 = 2{,}0$ mJ, tutta l'energia iniziale.

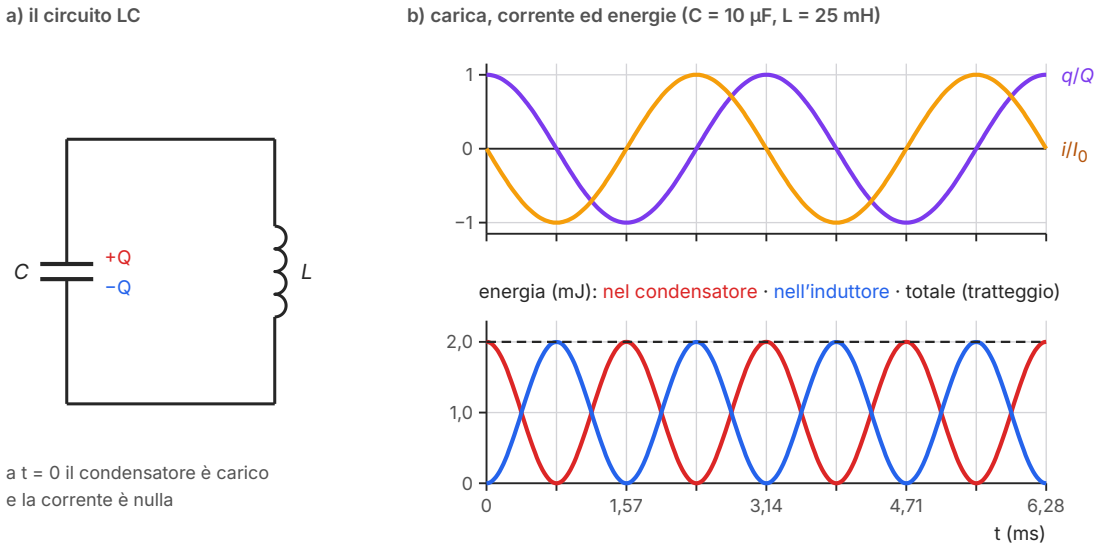

Figura 3.7 a) Un circuito LC: all'istante iniziale il condensatore è carico e la corrente è nulla. b) Carica e corrente, in unità dei loro valori massimi, ed energie del condensatore e dell'induttore, calcolate per C = 10 µF, tensione iniziale 20 V e L = 25 mH (periodo 3,14 ms). La corrente è massima quando il condensatore è scarico; l'energia totale, 2,0 mJ, resta costante.

In un circuito reale c'è sempre una resistenza, che a ogni ciclo dissipa una parte dell'energia: le oscillazioni si smorzano, come quelle di una massa con attrito. Per mantenerle bisogna restituire a ogni ciclo l'energia perduta, con un circuito elettronico che fa da «spinta» al momento giusto. I circuiti oscillanti di questo tipo fissano la frequenza delle trasmittenti radio e scandiscono il tempo in molti apparecchi. Nel capitolo 5 vedremo che cosa succede se si allontanano le armature del condensatore e si «apre» la bobina: i campi elettrico e magnetico, invece di restare chiusi nel circuito, si propagano nello spazio. È l'antenna.

3.6 Il trasformatore e il trasporto dell'energia elettrica

3.6.1 Il trasformatore ideale

Un **trasformatore** è formato da due bobine avvolte sullo stesso nucleo di ferro chiuso ad anello (Figura 3.8a). La bobina collegata al generatore si chiama **primario**, quella collegata all'utilizzatore **secondario**. È un'applicazione diretta della mutua induzione del capitolo 2: la corrente alternata nel primario produce nel nucleo un flusso magnetico alternato, e il nucleo, molto più permeabile dell'aria, lo guida quasi tutto attraverso il secondario.

In un trasformatore ideale tutto il flusso resta nel nucleo, quindi attraverso ogni spira, del primario o del secondario, passa lo stesso flusso Φ, e le resistenze degli avvolgimenti sono tra-

scurabili. Nel secondario, di N_2 spire, si induce la forza elettromotrice $N_2\,\Delta\Phi/\Delta t$ (in modulo). Nel primario, di N_1 spire, la forza elettromotrice autoindotta $N_1\,\Delta\Phi/\Delta t$ bilancia la tensione applicata, come nell'induttore ideale che hai appena studiato. Dividendo membro a membro, la rapidità di variazione del flusso, comune alle due bobine, si semplifica:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Il rapporto N_2/N_1 si chiama **rapporto di trasformazione**. Se il secondario ha più spire del primario il trasformatore è **elevatore**, se ne ha meno è **abbassatore**. La relazione vale sia per i valori istantanei sia per quelli efficaci. Un trasformatore ideale non dissipa energia, quindi la potenza che entra nel primario esce dal secondario: $V_1 I_1 = V_2 I_2$, e le correnti stanno nel rapporto inverso delle tensioni,

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

Il trasformatore, quindi, non crea energia: alza la tensione abbassando la corrente, o viceversa. Per alimentare a 12 V una lampada alogena da 24 W dalla rete a 230 V, con 1150 spire nel primario ne servono $1150 \times 12/230 = 60$ nel secondario; la lampada assorbe 24 W/12 V = 2,0 A, e il primario 24 W/230 V = 0,10 A. Il trasformatore funziona **solo in corrente alternata**: con una corrente continua nel primario il flusso nel nucleo sarebbe costante, e nel secondario non si indurrebbe nulla.

I trasformatori reali hanno perdite di tre tipi: l'effetto Joule negli avvolgimenti; le correnti di Foucault nel nucleo, ridotte costruendolo con lamierini sottili isolati fra loro (capitolo 1); e l'energia spesa a ogni ciclo per magnetizzare il ferro nei due versi, legata all'isteresi che hai incontrato lo scorso anno. Ciò nonostante i grandi trasformatori delle reti elettriche hanno rendimenti superiori al 99%. I caricabatterie moderni usano trasformatori minuscoli: un circuito elettronico porta la corrente a frequenze di decine o centinaia di kilohertz, e a frequenza più alta basta un nucleo molto più piccolo per trasferire la stessa potenza.

COLLEGAMENTI

La «guerra delle correnti» e la corrente continua di oggi

Le prime reti di illuminazione elettrica, alla fine dell'Ottocento, erano in corrente continua, ed erano costrette a stare vicino alle centrali: con le tensioni basse adatte alle lampade, le perdite nei cavi crescevano rapidamente con la distanza. La corrente alternata, grazie al trasformatore, poteva viaggiare ad alta tensione e scendere a bassa tensione solo dove serviva. Fra i sostenitori dei due sistemi, negli Stati Uniti, ci fu una competizione aspra, ricordata come la «guerra delle correnti»: da una parte Edison, che puntava sulla corrente continua, dall'altra Westinghouse e Tesla, con la corrente alternata. Vinse la corrente alternata, e le reti di tutto il mondo lo sono ancora.

Oggi la corrente continua è tornata in un ruolo preciso. L'elettronica di potenza permette di convertire in modo efficiente la corrente alternata in continua ad altissima tensione e viceversa, e per i collegamenti molto lunghi, e soprattutto per i cavi sottomarini, la trasmissione in corrente continua ad alta tensione (HVDC, in inglese) ha perdite minori: un cavo lungo e immerso si comporta anche come un condensatore, che in alternata andrebbe caricato e scaricato cento volte al secondo. Alcuni dei collegamenti fra la Sardegna e la penisola italiana, per esempio, sono in corrente continua. In casa, infine, ricorda quanto hai visto lo scorso anno: la tensione di 230 V efficaci è pericolosa, e l'interruttore differenziale interviene quando una corrente di guasto, anche di soli 30 mA, prende una strada diversa dai conduttori.

3.6.2 Perché si trasporta l'energia ad alta tensione

Una linea elettrica è un lungo conduttore con una resistenza non trascurabile, e ogni ampere che la percorre dissipa potenza RI^2. Per trasferire una data potenza $P = VI$ conviene quindi usare una tensione alta e una corrente bassa: a parità di potenza, se si moltiplica la tensione per 10, la corrente si divide per 10 e le perdite si dividono per 100. Il trasformatore rende possibile proprio questo, ed è la ragione per cui le reti elettriche di tutto il mondo sono in corrente alternata.

ESEMPIO SVOLTO

Le perdite di una linea di trasmissione

Problema. Una centrale deve trasferire una potenza di 50 MW a una città attraverso una linea la cui resistenza complessiva (andata e ritorno) è 4,0 Ω. Confronta le perdite nella linea se la potenza viene trasmessa alla tensione efficace di 20 kV, quella di uscita dell'alternatore, o a 380 kV dopo un trasformatore elevatore. Considera ideali i trasformatori e unitario il fattore di potenza; trascura la caduta di tensione sulla linea.

Soluzione. *A 20 kV.* Dalla relazione $P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$ (cos $\varphi = 1$), la corrente nella linea è $I_{\text{eff}} = 50 \times 10^6$ W/$(20 \times 10^3$ V) = $2{,}5 \times 10^3$ A. La potenza dissipata per effetto Joule è $RI_{\text{eff}}^2 = 4{,}0\ \Omega \times (2{,}5 \times 10^3\ \text{A})^2 = 2{,}5 \times 10^7$ W = 25 MW: metà della potenza si perderebbe scaldando i cavi. In realtà il risultato dice che la linea è inutilizzabile: con una caduta di tensione $RI_{\text{eff}} = 10$ kV, metà di quella di partenza, l'ipotesi di trascurarla non regge.

A 380 kV. Il trasformatore elevatore ha rapporto di trasformazione 380/20 = 19. Poiché conserva la potenza, la corrente nella linea scende di 19 volte: $I_{\text{eff}} = 50 \times 10^6$ W/$(380 \times 10^3$ V) = 132 A. Le perdite sono $4{,}0\ \Omega \times (132\ \text{A})^2 = 6{,}9 \times 10^4$ W = 69 kW, lo 0,14% della potenza trasmessa, e la caduta di tensione, 0,53 kV, è davvero trascurabile.

Confronto. Il rapporto fra le perdite è $(380/20)^2 = 361$: le perdite, a parità di potenza, sono inversamente proporzionali al quadrato della tensione.

Commento. Per la stessa ragione le linee lunghe usano le tensioni più alte. La tensione elevata ha però dei costi: tralicci alti, isolatori lunghi, grandi distanze di sicurezza. Per questo, vicino agli utilizzatori, la tensione viene abbassata in più passi. Le linee reali, inoltre, sono trifase, con tre conduttori; il principio non cambia.

La Figura 3.8b mostra il percorso dell'energia in Italia. Gli alternatori delle centrali producono tensioni tipicamente di 15–20 kV; in una stazione elevatrice vicina alla centrale la tensione sale a 380 kV (o a 220 kV) per le linee di trasmissione a lunga distanza. Avvicinandosi ai luoghi di consumo una serie di trasformatori abbassatori la riduce a 132–150 kV, poi alla media tensione di 15–20 kV che corre nelle strade, infine, nelle cabine di quartiere, alla bassa tensione di 400 V fra le fasi e 230 V fra una fase e il neutro, quella delle prese di casa.

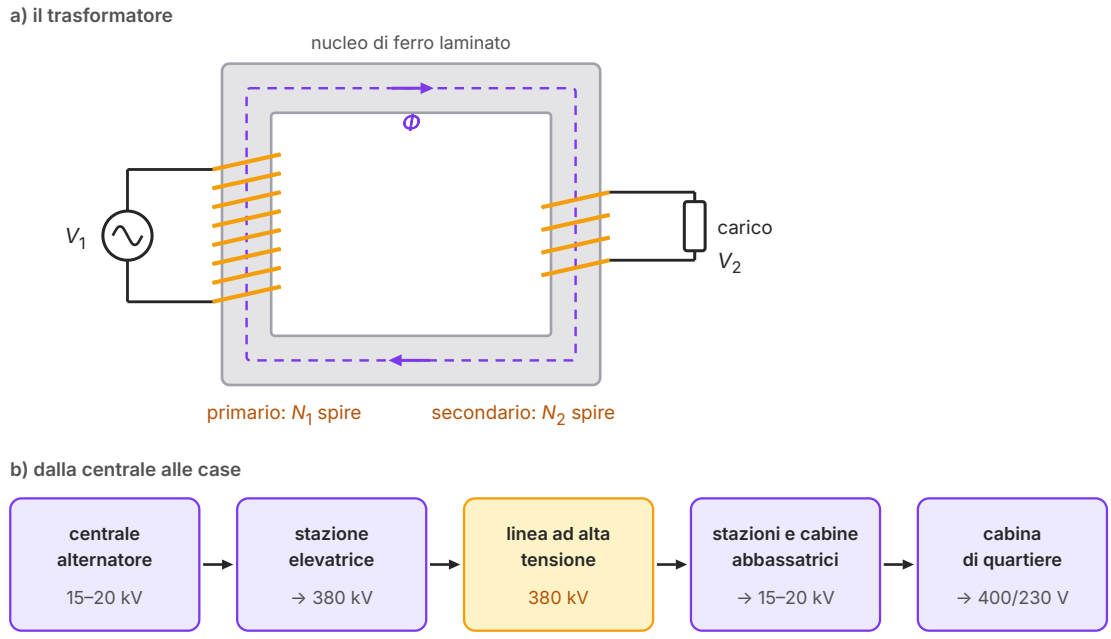

Figura 3.8 a) Schema di un trasformatore: il primario e il secondario sono avvolti sullo stesso nucleo di ferro laminato, che guida il flusso magnetico alternato (linea tratteggiata) attraverso entrambi. Qui il secondario ha metà delle spire del primario, quindi $V_2 = V_1/2$. b) Il percorso dell'energia elettrica dalla centrale alle case, con le tensioni efficaci tipiche della rete italiana.

DA RICORDARE

Verso l'esame: la corrente alternata nella seconda prova

La corrente alternata appartiene al nucleo tematico «Forze e campi» (campo elettromagnetico e induzione) e tocca anche «Energia e materia». Nei problemi compare spesso come seguito naturale dell'induzione: una spira o una bobina che ruota, di cui si chiede la forza elettromotrice in funzione del tempo e il suo valore massimo, oppure un trasformatore e una linea di trasmissione con il bilancio delle perdite. Le trappole tipiche sono tre: confondere valori massimi ed efficaci (dichiara sempre quale stai usando), sommare come numeri tensioni sfasate, sbagliare il verso dello sfasamento (nell'induttore la corrente è in ritardo, nel condensatore in anticipo). Quando i dati sono un grafico o un oscillogramma, leggi per prima cosa periodo, ampiezze e ordine dei massimi. Ricorda infine che il trasformatore conserva la potenza, non la tensione.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: la risonanza di un circuito RLC serie

Materiali. Un generatore di funzioni a bassa tensione (onda sinusoidale, frequenza regolabile, lettura della frequenza con incertezza dell'1%); un resistore da 100 Ω e uno da 22 Ω (tolleranza ±1%); un induttore da 33 mH (±10%), la cui resistenza, misurata con l'ohmmetro, è di 18 Ω; un condensatore da 0,47 µF (±10%); un oscilloscopio a due canali; cavi e basetta. In alternativa all'oscilloscopio, un sistema di acquisizione dati con due sensori di tensione.

Procedimento. 1) Calcola la frequenza di risonanza prevista dai valori nominali, con la sua incertezza. 2) Collega in serie generatore, resistore da 100 Ω, induttore e condensatore. Con il canale 1 dell'oscilloscopio controlla la tensione del generatore e mantienila a 2,00 V di ampiezza a ogni frequenza; con il canale 2 misura l'ampiezza della tensione ai capi del resistore, che divisa per R dà l'ampiezza della corrente. 3) Fai variare la frequenza fra 800 Hz e 1800 Hz, infittendo i punti vicino al massimo. 4) Ripeti con il resistore da 22 Ω. I dati di una prova sono nella Tabella 3.3.

Tabella 3.3 Ampiezza della corrente in un circuito RLC serie (L = 33 mH, C = 0,47 µF nominali) in funzione della frequenza, per due resistori, con tensione del generatore di 2,00 V di ampiezza (dati tipici). Incertezza su I_0: ±2%; su f: ±1%.

f (Hz)	I_0 (mA), R = 100 Ω	I_0 (mA), R = 22 Ω
800	7,0	7,6
1000	11,4	14,7
1100	14,2	22,9
1200	16,3	41,0
1250	16,8	49,1
1300	17,0	46,7
1350	16,3	37,1
1400	15,4	28,8
1500	13,3	19,7
1800	8,7	9,9

Analisi. Riporta in un grafico I_0 in funzione di f per i due resistori. Entrambe le serie hanno un massimo nella stessa zona, ma la curva con 22 Ω è molto più alta e stretta. Con 100 Ω il massimo è così piatto che, entro le incertezze, le letture a 1250 Hz e a 1300 Hz sono indistinguibili; con 22 Ω il massimo cade chiaramente fra 1250 Hz e 1300 Hz. Interpolando i punti vicini al picco si stima f_0 = (1,27 ± 0,03) kHz. Il valore massimo della corrente si confronta con V_0/R_{tot},

dove la resistenza totale comprende quella dell'induttore: 2,00 V/40 Ω = 50 mA con il resistore da 22 Ω (misurati 49,1 mA) e 2,00 V/118 Ω = 16,9 mA con quello da 100 Ω (misurati 17,0 mA).

Confronto teoria–esperimento. I valori nominali prevedono $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{(LC)}) = 1/(2\pi\sqrt{(33 \times 10^{-3}\ \text{H} \times 0{,}47 \times 10^{-6}\ \text{F})}) = 1{,}28$ kHz. L'incertezza relativa di LC è 10% + 10% = 20%, e la radice la dimezza: 10%. Quindi $f_{0,\,\text{prev}} = (1{,}28 \pm 0{,}13)$ kHz. La misura, (1,27 ± 0,03) kHz, cade nell'intervallo previsto: previsione e misura sono compatibili, e la misura è circa quattro volte più precisa della previsione.

Che cosa concludere. La frequenza di risonanza non dipende dalla resistenza, il picco sì: più la resistenza totale è piccola, più è alto e stretto. Anche il valore massimo della corrente conferma il modello: alla risonanza le reattanze si compensano e conta solo la resistenza, compresa quella dell'induttore, che non si può trascurare.

Sicurezza. Usa solo il generatore di funzioni, mai la tensione di rete. Alla risonanza le tensioni ai capi dell'induttore e del condensatore possono superare di molto quella del generatore: con il resistore da 22 Ω, per esempio, la reattanza alla risonanza è $\sqrt{(L/C)} \approx 265\ \Omega$ e la tensione sul condensatore arriva a circa 13 V di picco, più di sei volte quella del generatore. Controllale con l'oscilloscopio prima di aumentare l'ampiezza.

Per la relazione. Riporta la tabella, il grafico delle due curve con le barre di incertezza e il calcolo di f_0 previsto e misurato. Misura la larghezza di ciascun picco fra le due frequenze alle quali la corrente vale $I_{\max}/\sqrt{2}$ e confrontala con il valore teorico $R_{\text{tot}}/(2\pi L)$ (un risultato che si dimostra con un po' di algebra): per 22 Ω la previsione è circa 190 Hz. Usa la misura di f_0 e la capacità nominale per ricavare L, e discuti se è compatibile con il valore dichiarato.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$\varepsilon = NBS\omega \operatorname{sen} \omega t$, $\varepsilon_0 = NBS\omega$ — forza elettromotrice di una bobina di N spire di area S che ruota con velocità angolare costante ω in un campo uniforme B perpendicolare all'asse; il flusso è massimo a $t = 0$.

$I_{eff} = I_0/\sqrt{2}$, $V_{eff} = V_0/\sqrt{2}$ — valori efficaci, solo per grandezze sinusoidali. $P_{media} = RI_{eff}^2 = V_{eff}I_{eff}$ su un resistore. La rete domestica: 230 V efficaci, 325 V di picco, 50 Hz.

$X_L = \omega L$, $X_C = 1/(\omega C)$ — reattanze in ohm: nell'induttore la corrente è in ritardo di 90° sulla tensione, nel condensatore in anticipo di 90°. X_L cresce con la frequenza, X_C diminuisce.

$Z = \sqrt{(R^2 + (X_L - X_C)^2)}$, $I_{eff} = V_{eff}/Z$, $\tan \varphi = (X_L - X_C)/R$ — circuito RLC serie; $\varphi > 0$ circuito induttivo, $\varphi < 0$ capacitivo. Le tensioni sui componenti si sommano come fasori.

$\omega_0 = 1/\sqrt{(LC)}$, $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{(LC)})$ — risonanza: $Z = R$, corrente massima e in fase con la tensione; è anche la pulsazione propria delle oscillazioni del circuito LC, in cui l'energia $q^2/(2C) + \frac{1}{2}Li^2$ si conserva.

$P_{media} = V_{eff}I_{eff} \cos \varphi = RI_{eff}^2$ — potenza media; $\cos \varphi$ è il fattore di potenza. Induttori e condensatori ideali non assorbono potenza media.

$V_2/V_1 = N_2/N_1$, $I_2/I_1 = N_1/N_2$ — trasformatore ideale, solo in corrente alternata: conserva la potenza. Le perdite di una linea, a parità di potenza trasmessa, sono inversamente proporzionali al quadrato della tensione.

SINTESI

- Una bobina che ruota con velocità angolare costante in un campo magnetico uniforme è attraversata da un flusso sinusoidale e diventa sede di una forza elettromotrice alternata $\varepsilon = NBS\omega \operatorname{sen} \omega t$, che si ricava dalla forza elettromotrice cinetica dei suoi lati o, in modo equivalente, dalla pendenza del grafico del flusso.
- L'alternatore trasforma lavoro meccanico in energia elettrica; per la legge di Lenz la corrente erogata frena la rotazione. Quasi tutte le centrali, qualunque sia la loro sorgente, terminano in un alternatore; il fotovoltaico no.
- La potenza dissipata da una corrente alternata in un resistore oscilla fra 0 e RI_0^2 con media $\frac{1}{2}RI_0^2$, perché il valore medio di sen^2 è ½. Il valore efficace è quello della corrente continua equivalente: $I_{\text{eff}} = I_0/\sqrt{2}$. I 230 V di rete sono efficaci.
- In un resistore tensione e corrente sono in fase. In un induttore la corrente è in ritardo di 90° e $V_0 = \omega L I_0$; in un condensatore è in anticipo di 90° e $V_0 = I_0/(\omega C)$. Le reattanze si misurano in ohm e dipendono dalla frequenza in versi opposti.
- Una grandezza sinusoidale si rappresenta con un fasore, un vettore rotante la cui proiezione verticale è il valore istantaneo; grandezze della stessa frequenza si sommano sommando i fasori.
- In un circuito RLC serie la corrente è la stessa nei tre componenti; l'impedenza è $Z = \sqrt{(R^2 + (X_L - X_C)^2)}$ e lo sfasamento $\tan \varphi = (X_L - X_C)/R$. Le tensioni efficaci sui componenti non si sommano come numeri.
- Alla frequenza di risonanza $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{(LC)})$ le reattanze si compensano, l'impedenza è minima e uguale a R, la corrente è massima e in fase con la tensione. Il picco è tanto più alto e stretto quanto più la resistenza è piccola; le tensioni su L e C possono superare quella del generatore. Su questo si basa la sintonia.
- La potenza media è $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$ e viene dissipata tutta nella resistenza; induttori e condensatori scambiano energia con il generatore senza assorbirne in media. Un fattore di potenza basso obbliga a correnti maggiori.
- In un circuito LC l'energia oscilla fra il campo elettrico del condensatore e il campo magnetico dell'induttore con pulsazione $\omega_0 = 1/\sqrt{(LC)}$; le equazioni sono le stesse dell'oscillatore massa-molla, con L al posto della massa e $1/C$ della costante elastica. La resistenza smorza le oscillazioni.
- Il trasformatore ideale, due bobine sullo stesso nucleo di ferro, cambia la tensione nel rapporto delle spire e la corrente nel rapporto inverso, conservando la potenza; funziona solo in corrente alternata. Le perdite reali sono per effetto Joule, correnti di Foucault e isteresi.
- Le perdite in una linea di trasmissione, a parità di potenza, sono inversamente proporzionali al quadrato della tensione: per questo l'energia viaggia a 380 kV e viene abbassata a 230 V solo vicino agli utilizzatori. Per i collegamenti lunghi e sottomarini oggi si usa anche la corrente continua ad alta tensione.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● La velocità angolare di un alternatore raddoppia, a parità di tutto il resto. La forza elettromotrice indotta:
   - **A.** ha valore massimo doppio e frequenza invariata
   - **B.** ha valore massimo invariato e frequenza doppia
   - **C.** ha valore massimo doppio e frequenza doppia
   - **D.** ha valore massimo quadruplo e frequenza doppia

2. ● La tensione di 230 V della rete domestica italiana è:
   - **A.** il valore efficace della tensione
   - **B.** il valore massimo della tensione
   - **C.** il valore medio della tensione su un periodo
   - **D.** la differenza fra valore massimo e valore minimo

3. ● In un circuito che contiene soltanto un induttore ideale alimentato in corrente alternata, la corrente:
   - **A.** è in fase con la tensione
   - **B.** è in anticipo di 90° rispetto alla tensione
   - **C.** è in opposizione di fase con la tensione
   - **D.** è in ritardo di 90° rispetto alla tensione

4. ●● Se la frequenza della tensione applicata a un condensatore raddoppia, la sua reattanza:
   - **A.** raddoppia
   - **B.** si dimezza
   - **C.** non cambia
   - **D.** si riduce a un quarto

5. ●● In un circuito RLC serie alla frequenza di risonanza:
   - **A.** l'impedenza è massima
   - **B.** la corrente è nulla
   - **C.** le tensioni su induttore e condensatore sono nulle
   - **D.** l'impedenza è uguale a R e la corrente è massima

6. ●● Un carico è alimentato con tensione efficace 100 V e assorbe una corrente efficace di 2,0 A, sfasata di 60° rispetto alla tensione. La potenza media assorbita è:
   - **A.** 100 W
   - **B.** 173 W
   - **C.** 200 W
   - **D.** 0 W

7. ● Un trasformatore ideale ha 500 spire nel primario e 50 nel secondario. Il primario è collegato alla rete a 230 V. La tensione efficace sul secondario è:

   A. 2300 V
   B. 0 V
   C. 23 V
   D. 230 V

8. ●● In un circuito LC la capacità viene quadruplicata e l'induttanza resta la stessa. La frequenza delle oscillazioni:

   A. raddoppia
   B. si dimezza
   C. quadruplica
   D. si riduce a un quarto

Vero o falso

9. ● Un trasformatore permette di alzare la tensione di una batteria da 12 V a 230 V. V / F

10. ●● In un circuito RLC serie alla risonanza, la tensione efficace ai capi del condensatore può essere maggiore della tensione efficace del generatore. V / F

11. ● Un induttore ideale percorso da corrente alternata assorbe, in media su un periodo, una potenza nulla. V / F

12. ●● Un'onda quadra che alterna i valori +10 V e −10 V ha valore efficace 10 V/√2 ≈ 7,1 V. V / F

Applicare

13. ● Negli Stati Uniti la tensione domestica ha valore efficace 120 V e frequenza 60 Hz. Calcola il valore massimo della tensione e il periodo.

14. ● Una bobina di 100 spire, ciascuna di area 0,050 m^2, ruota a 50 giri al secondo in un campo magnetico uniforme di 0,10 T perpendicolare all'asse di rotazione. Calcola il valore massimo e il valore efficace della forza elettromotrice indotta.

15. ●● Un induttore ideale da 0,50 H è collegato alla rete (230 V, 50 Hz). Calcola la reattanza e la corrente efficace. A quale frequenza la reattanza varrebbe 1,0 kΩ?

16. ● Completa. A 50 Hz un condensatore da 10 μF ha una reattanza di _____ Ω; a 5,0 kHz la sua reattanza diventa _____ Ω.

17. ●● Calcola la frequenza di risonanza di un circuito RLC serie con L = 2,0 mH e C = 50 nF. Da quali grandezze del circuito non dipende?

18. ●● Leggi le curve di risonanza della Figura 3.6. Qual è la frequenza di risonanza? Quanto valgono le correnti efficaci al picco per le due resistenze, e come si ricavano dai dati senza leggere il grafico? Stima dal grafico a quale frequenza, sotto la risonanza, la corrente con $R = 40\ \Omega$ scende a 0,40 A.

19. ● Il trasformatore di un campanello riduce la tensione di rete da 230 V a 8,0 V. Il primario ha 1500 spire. Quante spire ha il secondario? Se il campanello assorbe 1,0 A, quanto vale la corrente nel primario (trasformatore ideale)?

20. ●● Un motore elettrico alimentato a 230 V assorbe una corrente efficace di 5,0 A con un fattore di potenza 0,80. Calcola la potenza media assorbita e lo sfasamento fra tensione e corrente.

Problemi

21. ●● Un piccolo alternatore produce una forza elettromotrice di valore massimo 12 V e frequenza 50 Hz, e alimenta un resistore da 24 Ω (trascura la resistenza interna). a) Calcola il valore massimo e il valore efficace della corrente. b) Calcola la potenza media e l'energia dissipata in un'ora. c) Se la bobina ha area $4{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$ e ruota in un campo di 0,050 T, quante spire ha?

22. ●●● Un solenoide in aria lungo 25 cm, di raggio 2,0 cm, ha 800 spire e una resistenza di 2,0 Ω. a) Calcola la sua induttanza (capitolo 2). b) Collegato a un generatore di tensione efficace 6,0 V a 50 Hz, quanto valgono reattanza, impedenza, corrente efficace e sfasamento? c) Ripeti a 1,0 kHz. d) A quale frequenza la reattanza diventa uguale alla resistenza? Commenta: il solenoide si comporta più come un resistore o come un induttore alla frequenza di rete?

23. ●●● Un resistore da 1,0 kΩ e un condensatore da 2,2 μF sono collegati in serie a un generatore di tensione efficace 12 V a 50 Hz. a) Calcola reattanza, impedenza, corrente efficace e sfasamento. b) Calcola le tensioni efficaci sul resistore e sul condensatore e verifica che si compongono nella tensione del generatore. c) Confronta la costante di tempo RC del circuito (*Fisica 4*, capitolo 14) con il periodo della tensione. d) Calcola la potenza media.

24. ●●● Un circuito RLC serie ha $R = 20\ \Omega$, $L = 50$ mH e $C = 10$ μF ed è alimentato da un generatore di tensione efficace 10 V a frequenza variabile. a) Calcola la frequenza di risonanza. b) Alla risonanza calcola la corrente efficace, le tensioni efficaci sull'induttore e sul condensatore e la potenza media. c) Al doppio della frequenza di risonanza calcola reattanze, impedenza, corrente e sfasamento; il circuito è induttivo o capacitivo? d) Calcola la potenza media in questo caso e confrontala con quella alla risonanza.

25. ●● La bobina d'antenna di una radio a onde medie ha induttanza 250 μH. a) Quale capacità deve avere il condensatore variabile per sintonizzarsi su una stazione a 1000 kHz? b) Quale intervallo di capacità serve per coprire la banda fra 530 kHz e 1600 kHz? c) Perché, per separare bene due stazioni vicine in frequenza, conviene che la resistenza del circuito sia piccola?

26. ●●● Un parco eolico produce una potenza di 6,0 MW, da trasferire con una linea di resistenza complessiva 3,0 Ω. a) Calcola corrente e perdite nella linea se la tensione efficace è 15 kV. b) Ripeti con 132 kV. c) Qual è il rapporto di trasformazione del trasformatore elevatore, e di quale fattore si riducono le perdite? d) Perché non conviene alzare la tensione indefinitamente? (Fattore di potenza unitario, trasformatori ideali.)

27. ●●● Un condensatore da 4,7 μF, caricato a 9,0 V con una pila, viene staccato e collegato a un induttore da 10 mH di resistenza trascurabile. a) Calcola la frequenza e il periodo delle oscillazioni. b) Calcola la carica massima e l'energia immagazzinata (*Fisica 4*, capitolo 12). c) Calcola la corrente massima con la conservazione dell'energia. d) Dopo quanto tempo dall'inizio il condensatore è scarico per la prima volta?

28. ●●● Un laboratorio artigiano usa macchine che assorbono in tutto una potenza media di 2,3 kW dalla rete a 230 V, con fattore di potenza 0,70. La linea che lo collega al contatore ha una resistenza di 0,20 Ω. a) Calcola la corrente efficace e la potenza dissipata nella linea. b) Ripeti dopo un rifasamento che porta il fattore di potenza a 0,95. c) Spiega perché la potenza media assorbita dalle macchine non cambia.

Ragionare e argomentare

29. ●● Un'amica ti dice: «Se collego il primario di un trasformatore a una batteria, sul secondario c'è una tensione per un attimo e poi più niente». Ha ragione? Spiega perché, e quando esattamente compare la tensione sul secondario.

30. ●● Uno studente misura con un voltmetro le tensioni efficaci sui tre componenti del circuito dell'esempio svolto nella sezione sul circuito RLC e trova 19,2 V, 30,1 V e 76,3 V. Ne conclude: «La somma è 125,6 V, più dei 50 V del generatore: il circuito crea energia, oppure il voltmetro è guasto». Trova l'errore nel ragionamento.

31. ●●● Hai una bobina di cui non conosci l'induttanza, un generatore di tensione alternata a frequenza nota, un voltmetro e un amperometro per correnti alternate e un ohmmetro. Progetta un esperimento per misurare l'induttanza, spiegando quali grandezze misuri, come ricavi L e quale ruolo ha la resistenza della bobina.

Verso l'esame di Stato

32. ●●● **Quesito.** Una bobina di 150 spire, ciascuna di area 0,012 m^2, ruota con velocità angolare costante in un campo magnetico uniforme perpendicolare all'asse di rotazione. Ai suoi capi si misura la forza elettromotrice riportata qui, in funzione del tempo:
t (ms): 0; 2,5; 5,0; 7,5; 10,0; 12,5; 15,0; 17,5; 20,0; 22,5; 25,0
ε (V): 0,0; 20,0; 32,3; 32,3; 20,0; 0,0; −20,0; −32,3; −32,3; −20,0; 0,0
a) Mostra che i dati sono compatibili con una legge $\varepsilon = \varepsilon_0 \operatorname{sen} \omega t$ e ricava periodo, frequenza, velocità angolare e valore massimo ε_0 (a 2 cifre significative). b) Ricava l'intensità del campo magnetico. c) La bobina è collegata a un resistore da 60 Ω: calcola la potenza media dissipata, trascurando la resistenza della bobina. d) Come cambierebbe la tabella se la bobina ruotasse a velocità angolare dimezzata? Argomenta con la legge di Faraday-Neumann.

33. ●●● **Problema.** In una centrale idroelettrica la turbina fa ruotare a 375 giri al minuto il rotore di un alternatore, un elettromagnete con 8 coppie di poli; lo statore eroga una potenza di 30 MW con tensione efficace 15 kV e fattore di potenza unitario. a) Mostra che la frequenza della tensione prodotta è 50 Hz e calcola il valore massimo della tensione. b) Un trasformatore elevatore porta la tensione a 132 kV: calcola il rapporto di trasformazione e le correnti efficaci nel primario e nel secondario. c) La linea di trasmissione ha una resistenza complessiva di 6,0 Ω: calcola la potenza dissipata e la sua percentuale, e confronta con il caso, ipotetico, in cui la potenza venisse trasmessa a 15 kV. d) Di sera i consumi aumentano e la rete chiede all'alternatore più corrente. Spiega con la legge di Lenz perché, per mantenere costante la velocità di rotazione, la turbina deve ricevere più acqua.

PER APPROFONDIRE

- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sulle oscillazioni elettromagnetiche e sulla corrente alternata, con il circuito LC, i fasori, il circuito RLC e il trasformatore trattati con molti esempi numerici.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. II: le lezioni sui circuiti in corrente alternata e sulle impedenze, con l'analogia fra oscillatori meccanici ed elettrici portata fino in fondo.
- [FAR] M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity*: nella prima serie, accanto alla scoperta dell'induzione, la descrizione di un disco di rame che ruota fra i poli di un magnete, il primo generatore di corrente indotta.
- [TAY] J. R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*: la propagazione delle incertezze in un prodotto e in una radice, che serve per stimare l'incertezza della frequenza di risonanza prevista nell'attività di laboratorio.

Glossario del capitolo

Alternatore
Macchina che trasforma l'energia meccanica di rotazione in energia elettrica producendo una forza elettromotrice alternata, per induzione, in bobine che ruotano rispetto a un campo magnetico.

Circuito LC
Circuito formato da un condensatore e da un induttore, in cui l'energia passa periodicamente dal campo elettrico al campo magnetico con pulsazione $\omega_0 = 1/\sqrt{(LC)}$.

Circuito RLC serie
Circuito formato da un resistore, un induttore e un condensatore in serie, percorsi dalla stessa corrente, alimentato da una tensione alternata.

Corrente alternata
Corrente che inverte periodicamente il proprio verso; nella rete elettrica varia in modo sinusoidale con frequenza 50 Hz.

Curva di risonanza
Grafico della corrente in un circuito RLC in funzione della frequenza del generatore; ha un picco tanto più alto e stretto quanto minore è la resistenza.

Differenza di fase
Angolo di cui una grandezza sinusoidale è in anticipo o in ritardo rispetto a un'altra della stessa frequenza; è l'angolo fra i loro fasori. Detta anche sfasamento.

Fasore
Vettore rotante che rappresenta una grandezza sinusoidale: ha lunghezza uguale all'ampiezza, ruota con velocità angolare ω e la sua proiezione verticale è il valore istantaneo.

Fattore di potenza
Il fattore $\cos\varphi$ nella potenza media $P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi$; vale 1 per un carico resistivo e 0 per un induttore o un condensatore ideali.

Frequenza di risonanza
Frequenza alla quale le reattanze induttiva e capacitiva di un circuito sono uguali: $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{(LC)})$. È anche la frequenza propria delle oscillazioni del circuito LC.

Impedenza
Rapporto fra le ampiezze (o i valori efficaci) della tensione e della corrente in un circuito in corrente alternata; per il circuito RLC serie $Z = \sqrt{(R^2 + (X_L - X_C)^2)}$.

Oscillazione elettrica
Variazione periodica della carica e della corrente in un circuito, come quella di un circuito LC; è l'analogo elettrico del moto di un oscillatore armonico.

Rapporto di trasformazione
Rapporto N_2/N_1 fra i numeri di spire del secondario e del primario di un trasformatore; nel trasformatore ideale è uguale a V_2/V_1.

Reattanza capacitiva
Rapporto fra le ampiezze di tensione e corrente in un condensatore: $X_C = 1/(\omega C)$, in ohm; diminuisce al crescere della frequenza.

Reattanza induttiva
Rapporto fra le ampiezze di tensione e corrente in un induttore ideale: $X_L = \omega L$, in ohm; cresce con la frequenza.

Risonanza
Condizione di un circuito RLC alimentato alla sua frequenza di risonanza: l'impedenza è minima e uguale a R, la corrente è massima e in fase con la tensione.

Trasformatore
Dispositivo formato da due bobine, primario e secondario, avvolte su un nucleo di ferro comune, che cambia la tensione alternata nel rapporto dei numeri di spire conservando (idealmente) la potenza.

Valore efficace
Valore della corrente (o tensione) continua che dissiperebbe in un resistore la stessa potenza media di quella alternata; per una sinusoide è il valore massimo diviso per $\sqrt{2}$.

Soluzioni

1. C. $\varepsilon_0 = NBS\omega$ è proporzionale a ω, e la frequenza $f = \omega/(2\pi)$ raddoppia anch'essa.

2. A. Tensioni e correnti alternate si dichiarano con il valore efficace; il valore massimo è 230 V × √2 ≈ 325 V, il valore medio su un periodo è zero.

3. D. Nell'induttore $v = L\,\Delta i/\Delta t$: la tensione è massima quando la corrente cresce più in fretta, un quarto di periodo prima del massimo della corrente.

4. B. $X_C = 1/(2\pi fC)$ è inversamente proporzionale alla frequenza.

5. D. Alla risonanza $X_L = X_C$, quindi $Z = R$ è minima e la corrente V_{eff}/R è massima. Le tensioni su L e C sono uguali e opposte, non nulle.

6. A. $P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi = 100\ \text{V} \times 2{,}0\ \text{A} \times \cos 60° = 100$ W. 200 W sarebbe il prodotto senza il fattore di potenza.

7. C. $V_2 = V_1 N_2/N_1 = 230\ \text{V} \times 50/500 = 23$ V.

8. B. $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{(LC)})$: con C quadruplicata $\sqrt{(LC)}$ raddoppia e la frequenza si dimezza.

9. F. Con la corrente continua di una batteria il flusso nel nucleo è costante e nel secondario non si induce nessuna forza elettromotrice (salvo un impulso nell'istante in cui si chiude o si apre il circuito).

10. V. Alla risonanza $V_C = X_C V/R$, maggiore di V se $X_C > R$; nell'esempio del testo 125 V contro 50 V.

11. V. Corrente e tensione sono sfasate di 90°, $\cos\varphi = 0$: l'energia accumulata nel campo magnetico in un quarto di periodo viene restituita nel successivo.

12. F. Il quadrato dell'onda quadra vale sempre 100 V^2, quindi il valore efficace è 10 V. Il fattore $1/\sqrt{2}$ vale solo per le sinusoidi.

13. $V_0 = \sqrt{2}\,V_{\text{eff}} = 1{,}414 \times 120\ \text{V} = 170$ V. $T = 1/f = 1/60\ \text{Hz} = 0{,}0167\ \text{s} = 16{,}7$ ms.

14. $\omega = 2\pi \times 50\ \text{Hz} = 314$ rad/s; $\varepsilon_0 = NBS\omega = 100 \times 0{,}10\ \text{T} \times 0{,}050\ \text{m}^2 \times 314\ \text{rad/s} = 157\ \text{V} \approx 1{,}6 \times 10^2$ V; $\varepsilon_{\text{eff}} = 157\ \text{V}/\sqrt{2} = 111\ \text{V} \approx 1{,}1 \times 10^2$ V.

15. $X_L = 2\pi fL = 2\pi \times 50\ \text{Hz} \times 0{,}50\ \text{H} = 157\ \Omega$; $I_{\text{eff}} = 230\ \text{V}/157\ \Omega = 1{,}46\ \text{A} \approx 1{,}5$ A. Per $X_L = 1{,}0$ kΩ: $f = X_L/(2\pi L) = 1000\ \Omega/(2\pi \times 0{,}50\ \text{H}) = 318\ \text{Hz} \approx 3{,}2 \times 10^2$ Hz.

16. $X_C = 1/(2\pi \times 50\ \text{Hz} \times 10 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 318\ \Omega \approx 3{,}2 \times 10^2\ \Omega$; a 5,0 kHz, cento volte la frequenza, la reattanza è cento volte più piccola: 3,2 Ω.

17. $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{(LC)}) = 1/(2\pi\sqrt{(2{,}0 \times 10^{-3}\ \text{H} \times 50 \times 10^{-9}\ \text{F})}) = 1/(2\pi \times 1{,}0 \times 10^{-5}\ \text{s}) = 1{,}6 \times 10^4\ \text{Hz} = 16$ kHz. Non dipende dalla resistenza né dalla tensione del generatore.

18. Dal grafico $f_0 \approx 80$ Hz (calcolata: 79,6 Hz). Picchi: 1,25 A con 40 Ω e 0,50 A con 100 Ω; alla risonanza $Z = R$, quindi $I_{\text{eff}} = 50\ \text{V}/40\ \Omega = 1{,}25$ A e $50\ \text{V}/100\ \Omega = 0{,}50$ A. La curva viola vale 0,40 A poco sotto i 50 Hz (a 50 Hz vale 0,48 A): circa 45 Hz (il calcolo dà 45,4 Hz).

19. $N_2 = N_1 V_2/V_1 = 1500 \times 8{,}0/230 = 52$ spire. Per la conservazione della potenza $I_1 = I_2 V_2/V_1 = 1{,}0\ \text{A} \times 8{,}0/230 = 0{,}035\ \text{A} = 35$ mA.

20. $P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi = 230\ \text{V} \times 5{,}0\ \text{A} \times 0{,}80 = 920$ W. $\varphi = \arccos 0{,}80 = 37°$, con la corrente in ritardo perché il motore è un carico induttivo.

21. a) $I_0 = \varepsilon_0/R = 12\ \text{V}/24\ \Omega = 0{,}50$ A; $I_{\text{eff}} = 0{,}50\ \text{A}/\sqrt{2} = 0{,}35$ A. b) $P_{\text{media}} = \tfrac{1}{2} R I_0^{\,2} = \tfrac{1}{2} \times 24\ \Omega \times (0{,}50\ \text{A})^2 = 3{,}0$ W; in un'ora $E = 3{,}0\ \text{W} \times 3600\ \text{s} = 1{,}1 \times 10^4$ J. c) $N = \varepsilon_0/(BS\omega) = 12\ \text{V}/(0{,}050\ \text{T} \times 4{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m}^2 \times 314\ \text{rad/s}) = 191 \approx 1{,}9 \times 10^2$ spire.

22. a) Dal campo del solenoide $B = \mu_0 nI$ si ottiene (capitolo 2) $L = \mu_0 N^2 S/l = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{T·m/A} \times 800^2 \times \pi(0{,}020\ \text{m})^2/0{,}25\ \text{m} = 4{,}0 \times 10^{-3}$ H. b) A 50 Hz: $X_L = 2\pi \times 50\ \text{Hz} \times 4{,}04\ \text{mH} = 1{,}27\ \Omega$; $Z = \sqrt{(2{,}0^2 + 1{,}27^2)}\ \Omega = 2{,}37\ \Omega$; $I_{\text{eff}} = 6{,}0\ \text{V}/2{,}37\ \Omega = 2{,}5$ A; $\tan\varphi = 1{,}27/2{,}0 = 0{,}635$, $\varphi = 32°$ (corrente in ritardo). c) A 1,0 kHz: $X_L = 25{,}4\ \Omega$, $Z = 25{,}5\ \Omega$, $I_{\text{eff}} = 0{,}24$ A, $\varphi \approx 85°$. d) $X_L = R$ per $f = R/(2\pi L) = 2{,}0\ \Omega/(2\pi \times 4{,}04 \times 10^{-3}\ \text{H}) = 79$ Hz. Alla frequenza di rete la resistenza prevale e il solenoide si comporta ancora soprattutto come un resistore; a 1 kHz è quasi un induttore puro. Principio usato:

l'induttanza dipende solo dalla geometria, la reattanza cresce con la frequenza.

23. a) $X_C = 1/(2\pi \times 50\ \text{Hz} \times 2{,}2 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 1{,}45\ \text{k}\Omega$; $Z = \sqrt{(1{,}0^2 + 1{,}45^2)}\ \text{k}\Omega = 1{,}76\ \text{k}\Omega$; $I_{\text{eff}} = 12\ \text{V}/1{,}76\ \text{k}\Omega = 6{,}8$ mA; $\tan\varphi = -1{,}45/1{,}0$, $\varphi = -55°$: la corrente è in anticipo. b) $V_R = 1{,}0\ \text{k}\Omega \times 6{,}82$ mA $= 6{,}8$ V; $V_C = 1{,}45\ \text{k}\Omega \times 6{,}82$ mA $= 9{,}9$ V; $\sqrt{(6{,}8^2 + 9{,}9^2)}$ V $= 12$ V. c) $\tau = RC = 2{,}2$ ms, circa un decimo del periodo di 20 ms: in ogni semiperiodo il condensatore farebbe in tempo a caricarsi quasi del tutto, e infatti la sua tensione è la maggiore delle due. d) $P = RI_{\text{eff}}^2 = 1{,}0 \times 10^3\ \Omega \times (6{,}82 \times 10^{-3}\ \text{A})^2 = 0{,}047\ \text{W} = 47$ mW.

24. a) $\omega_0 = 1/\sqrt{(LC)} = 1/\sqrt{(5{,}0 \times 10^{-7}\ \text{s}^2)} = 1414$ rad/s, $f_0 = 225\ \text{Hz} \approx 2{,}3 \times 10^2$ Hz. b) Alla risonanza $Z = R$: $I_{\text{eff}} = 10\ \text{V}/20\ \Omega = 0{,}50$ A; $X_L = X_C = \omega_0 L = 70{,}7\ \Omega$, quindi $V_L = V_C = 70{,}7\ \Omega \times 0{,}50\ \text{A} = 35$ V, più del triplo della tensione del generatore; $P = RI_{\text{eff}}^2 = 5{,}0$ W. c) A $2f_0 = 450$ Hz: $X_L = 141\ \Omega$ (raddoppia), $X_C = 35{,}4\ \Omega$ (si dimezza); $Z = \sqrt{(20^2 + 106^2)}\ \Omega = 108\ \Omega$; $I_{\text{eff}} = 10\ \text{V}/108\ \Omega = 0{,}093$ A; $\tan\varphi = 106/20 = 5{,}3$, $\varphi = 79°$: il circuito è induttivo, perché sopra la risonanza prevale X_L. d) $P = RI_{\text{eff}}^2 = 20\ \Omega \times (0{,}0926\ \text{A})^2 = 0{,}17$ W, circa 29 volte meno che alla risonanza. Principio usato: la potenza media è dissipata solo nella resistenza.

25. a) $C = 1/((2\pi f)^2 L) = 1/((2\pi \times 1{,}0 \times 10^6\ \text{Hz})^2 \times 250 \times 10^{-6}\ \text{H}) = 1{,}0 \times 10^{-10}\ \text{F} = 0{,}10$ nF (101 pF). b) A 530 kHz serve $C = 361$ pF, a 1600 kHz $C = 39{,}6$ pF: da circa 40 pF a 360 pF. c) Con una resistenza piccola la curva di risonanza è alta e stretta: la corrente è grande solo per frequenze molto vicine a f_0, e una stazione a frequenza poco diversa produce una corrente molto minore. Con una resistenza grande la curva è larga e le stazioni vicine si sovrappongono.

26. a) $I = P/V = 6{,}0 \times 10^6\ \text{W}/15 \times 10^3\ \text{V} = 400$ A; perdite $RI^2 = 3{,}0\ \Omega \times (400\ \text{A})^2 = 4{,}8 \times 10^5\ \text{W} = 0{,}48$ MW, l'8,0% della potenza. b) $I = 6{,}0 \times 10^6\ \text{W}/132 \times 10^3\ \text{V} = 45{,}5$ A; perdite $3{,}0\ \Omega \times (45{,}5\ \text{A})^2 = 6{,}2 \times 10^3\ \text{W} = 6{,}2$ kW, lo 0,10%. c) $N_2/N_1 = 132/15 = 8{,}8$; poiché il trasformatore conserva la potenza la corrente si divide per 8,8 e le perdite per $8{,}8^2 = 77$. d) Tensioni più alte richiedono isolatori più lunghi, tralicci più alti e distanze di sicurezza maggiori, trasformatori più costosi, e aumentano le perdite per scariche nell'aria intorno ai conduttori; oltre un certo punto il risparmio sulle perdite Joule non compensa questi costi.

27. a) $\omega_0 = 1/\sqrt{(LC)} = 1/\sqrt{(10 \times 10^{-3}\ \text{H} \times 4{,}7 \times 10^{-6}\ \text{F})} = 4{,}61 \times 10^3$ rad/s; $f_0 = 734\ \text{Hz} \approx 7{,}3 \times 10^2$ Hz; $T = 1/f_0 = 1{,}36$ ms. b) $Q = CV = 4{,}7 \times 10^{-6}\ \text{F} \times 9{,}0\ \text{V} = 4{,}2 \times 10^{-5}\ \text{C}$; $U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \times 4{,}7 \times 10^{-6}\ \text{F} \times (9{,}0\ \text{V})^2 = 1{,}9 \times 10^{-4}$ J. c) Quando il condensatore è scarico tutta l'energia è nell'induttore (conservazione dell'energia): $\frac{1}{2}LI_0^2 = U$, $I_0 = \sqrt{(2U/L)} = \sqrt{(2 \times 1{,}90 \times 10^{-4}\ \text{J}/0{,}010\ \text{H})} = 0{,}195$ A $\approx 0{,}20$ A (controllo: $\omega_0 Q = 0{,}195$ A). d) Dopo un quarto di periodo: $T/4 = 0{,}34$ ms.

28. a) $I = P/(V \cos\varphi) = 2300\ \text{W}/(230\ \text{V} \times 0{,}70) = 14{,}3$ A; perdite $0{,}20\ \Omega \times (14{,}3\ \text{A})^2 = 41$ W. b) $I = 2300\ \text{W}/(230\ \text{V} \times 0{,}95) = 10{,}5$ A; perdite $0{,}20\ \Omega \times (10{,}5\ \text{A})^2 = 22$ W, quasi la metà. c) I condensatori di rifasamento, in parallelo alle macchine, forniscono la corrente «reattiva» che le macchine scambiano a ogni ciclo; le macchine continuano a ricevere la stessa tensione e ad assorbire la stessa potenza media, ma quella corrente reattiva non percorre più la linea.

29. Ha ragione. Nel secondario si induce una forza elettromotrice solo quando il flusso nel nucleo varia (legge di Faraday-Neumann). Collegando la batteria la corrente nel primario sale da zero al valore finale in un tempo breve, dell'ordine della costante di tempo L/R del primario: in quel tempo il flusso cresce e sul secondario compare un impulso di tensione. Poi la corrente è costante, il flusso anche, e la tensione si annulla. Un impulso di segno opposto compare quando si stacca la batteria. Per questo il trasformatore funziona solo in corrente alternata (o con correnti che cambiano continuamente).

30. L'errore è sommare come numeri valori efficaci di tensioni sfasate. Le tre tensioni non raggiungono il massimo nello stesso istante: quella sull'induttore e quella sul condensatore sono in opposizione di fase, e in ogni istante si compensano in parte. La legge delle maglie vale per i valori istantanei; per i valori efficaci bisogna sommare i fasori: $\sqrt{(19{,}2^2 + (30{,}1 - 76{,}3)^2)}\ \text{V} = 50$ V. Nessuna energia viene creata: la potenza media erogata dal generatore, 9,2 W, è quella dissipata nel resistore.

31. Traccia di risposta. 1) Con l'ohmmetro si misura la resistenza R della bobina (in continua conta solo

quella). 2) Si alimenta la bobina con il generatore alla frequenza f nota e si misurano la tensione e la corrente efficaci; il rapporto è l'impedenza $Z = V_{eff}/I_{eff}$. 3) La bobina è un circuito RL serie: $Z^2 = R^2 + (\omega L)^2$, quindi $L = \sqrt{(Z^2 - R^2)}/(2\pi f)$. 4) Conviene scegliere una frequenza abbastanza alta da rendere X_L molto maggiore di R: se Z e R sono simili, la differenza dei quadrati ha un'incertezza relativa grande. 5) Ripetendo a più frequenze, il grafico di Z^2 in funzione di f^2 è una retta di pendenza $(2\pi L)^2$ e intercetta R^2: un controllo del modello. Se la bobina ha un nucleo di ferro, L può dipendere dalla corrente, e le perdite nel nucleo aumentano la resistenza apparente.

32. a) I valori si ripetono dopo 25,0 ms, cambiano segno dopo 12,5 ms e sono simmetrici rispetto a 6,25 ms, come una sinusoide: $T = 25$ ms, $f = 1/T = 40$ Hz, $\omega = 2\pi f = 2{,}5 \times 10^2$ rad/s (251 rad/s). Il massimo cade a $T/4 = 6{,}25$ ms, fra due misure: da $\varepsilon(5{,}0\text{ ms}) = \varepsilon_0 \operatorname{sen}(2\pi \times 5{,}0/25) = \varepsilon_0 \operatorname{sen} 72° = 32{,}3$ V si ricava $\varepsilon_0 = 32{,}3\text{ V}/0{,}951 = 34$ V; controllo con il dato a 2,5 ms: 34 V × sen 36° = 20,0 V, come misurato. **b)** $\varepsilon_0 = NBS\omega$, quindi $B = \varepsilon_0/(NS\omega) = 34\text{ V}/(150 \times 0{,}012\text{ m}^2 \times 251\text{ rad/s}) = 0{,}075$ T. **c)** $\varepsilon_{eff} = 34\text{ V}/\sqrt{2} = 24$ V; $P = \varepsilon_{eff}^2/R = (24{,}0\text{ V})^2/60\ \Omega = 9{,}6$ W. **d)** Per la legge di Faraday-Neumann la forza elettromotrice è proporzionale alla rapidità di variazione del flusso. A velocità angolare dimezzata il flusso compie le stesse oscillazioni, fra $+NBS$ e $-NBS$, in un tempo doppio: il periodo diventa 50 ms (gli istanti della tabella raddoppiano) e tutti i valori di ε si dimezzano (valore massimo 17 V). *Indicatori:* a) Interpretare/elaborare i dati; b) e c) Sviluppare il processo risolutivo; d) Argomentare.

33. a) A ogni giro del rotore ogni bobina dello statore vede passare 8 coppie di poli, cioè 8 periodi della forza elettromotrice: $f = 8 \times 375$ giri/60 s = 50 Hz. Valore massimo: $V_0 = \sqrt{2} \times 15$ kV = 21 kV. **b)** Rapporto di trasformazione $N_2/N_1 = 132/15 = 8{,}8$. Primario: $I_1 = P/V_1 = 30 \times 10^6\text{ W}/15 \times 10^3\text{ V} = 2{,}0 \times 10^3$ A; secondario (conservazione della potenza nel trasformatore ideale): $I_2 = I_1/8{,}8 = 227\text{ A} \approx 2{,}3 \times 10^2$ A. **c)** $P_{persa} = RI_2^2 = 6{,}0\ \Omega \times (227\text{ A})^2 = 3{,}1 \times 10^5\text{ W} = 0{,}31$ MW, l'1,0% della potenza. A 15 kV la corrente sarebbe 2000 A e le perdite $6{,}0\ \Omega \times (2000\text{ A})^2 = 24$ MW, l'80%: la linea sarebbe inservibile, e anzi la caduta di tensione, 12 kV, renderebbe incoerente il calcolo stesso. Le perdite stanno nel rapporto $8{,}8^2 = 77$. **d)** La corrente erogata dalle bobine dello statore interagisce con il campo del rotore; per la legge di Lenz l'effetto delle correnti indotte si oppone alla causa che le produce, cioè alla rotazione relativa: ne nasce un momento frenante sul rotore, proporzionale alla corrente. Se la corrente aumenta, aumenta il momento frenante; per mantenere costante la velocità angolare (e quindi i 50 Hz) la turbina deve fornire un momento motore maggiore, cioè più lavoro al secondo: più acqua. È la conservazione dell'energia: la potenza elettrica in più viene dalla potenza meccanica in più. *Indicatori:* a) Analizzare; b) e c) Sviluppare il processo risolutivo e Interpretare/elaborare i dati; d) Argomentare.