CAPITOLO

2

Autoinduzione, mutua induzione ed energia magnetica

Una corrente non si lascia avviare né fermare di colpo: ha un'inerzia, e l'energia che le dai resta nel campo che la circonda.

OBIETTIVI

1. Riconoscere la mutua induzione e calcolare il coefficiente di mutua induzione di due solenoidi coassiali e la f.e.m. indotta da una corrente variabile.
2. Spiegare l'autoinduzione con la legge di Lenz e ricavare l'induttanza di un solenoide.
3. Descrivere la chiusura e l'apertura di un circuito RL con un calcolo a piccoli passi, usare le leggi esponenziali e la costante di tempo L/R.
4. Ricavare l'energia immagazzinata in un induttore e la densità di energia del campo magnetico, e confrontarla con quella del campo elettrico.
5. Misurare la costante di tempo di un circuito RL e ricavarne l'induttanza, tenendo conto di tutte le resistenze.
6. Interpretare dispositivi come la ricarica senza fili, la bobina di accensione e i magneti superconduttori.

INDICE DEL CAPITOLO

2.1 La mutua induzione 2
2.2 L'autoinduzione 7
2.3 Il circuito RL 10
2.4 L'energia del campo magnetico 18
2.5 Induttanze al lavoro 23

Fisica 5 · Parte I · L'induzione elettromagnetica · versione 1.0
Capitolo 2: Autoinduzione, mutua induzione ed energia magnetica · pagine 55–86 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo precedente hai visto che basta far variare il flusso del campo magnetico attraverso un circuito per farvi nascere una forza elettromotrice. Finora la variazione arrivava «da fuori»: una calamita che si avvicina, una sbarra che scorre, una spira che ruota. Ma la sorgente più vicina del campo magnetico che attraversa un circuito è spesso la corrente stessa che lo percorre, oppure quella di un circuito accanto. Se quella corrente cambia, cambia anche il flusso, e l'induzione entra in gioco senza che nulla si muova.

In questo capitolo studiamo le due forme di questo fenomeno. Nella **mutua induzione** una corrente variabile in una bobina induce una f.e.m. in una bobina vicina: è il principio della ricarica senza fili dei telefoni e, nel prossimo capitolo, del trasformatore. Nell'**autoinduzione** un circuito reagisce alle variazioni della propria corrente: per questo la corrente non può comparire o sparire di colpo, e un interruttore che apre un circuito con una bobina fa scintille. Misureremo l'effetto con una nuova grandezza, l'induttanza, e scopriremo che per avviare una corrente in una bobina bisogna spendere energia, che resta immagazzinata nel campo magnetico. Ne ricaveremo la densità di energia del campo magnetico, la compagna di quella del campo elettrico che hai studiato lo scorso anno: insieme ci diranno, nella seconda parte del volume, quanta energia trasporta un'onda elettromagnetica.

Una nota sulla notazione, già fissata nel capitolo 1: in questa parte del volume la lettera L indica l'induttanza, quindi la lunghezza di un filo o di un solenoide si scrive l (minuscola). Le lettere minuscole i ed ε indicano valori istantanei, che cambiano nel tempo; I indica una corrente costante, per esempio il valore finale.

2.1 La mutua induzione

2.1.1 Due circuiti che si influenzano

Riprendiamo l'esperimento dell'anello di Faraday (capitolo 1): due avvolgimenti separati, isolati l'uno dall'altro, il primo collegato a un generatore con un tasto, il secondo a un galvanometro. La Figura 2.1a ne mostra una versione senza anello di ferro: due bobine affacciate sullo stesso asse. Quando nella bobina 1 passa una corrente i_1, una parte delle linee del suo campo magnetico attraversa anche le spire della bobina 2. Se i_1 è costante, il flusso attraverso la bobina 2 è costante e il galvanometro resta a zero; se i_1 cambia, cambia il flusso e nella bobina 2 compare una f.e.m. indotta. Il galvanometro devia quando si chiude il tasto, torna a zero mentre la corrente resta costante, e devia nel verso opposto quando si apre il tasto.

Questo fenomeno, una f.e.m. indotta in un circuito dalla variazione della corrente in un altro circuito, si chiama **mutua induzione**. Non c'è nessun contatto elettrico fra i due circuiti: l'energia passa dall'uno all'altro attraverso il campo magnetico.

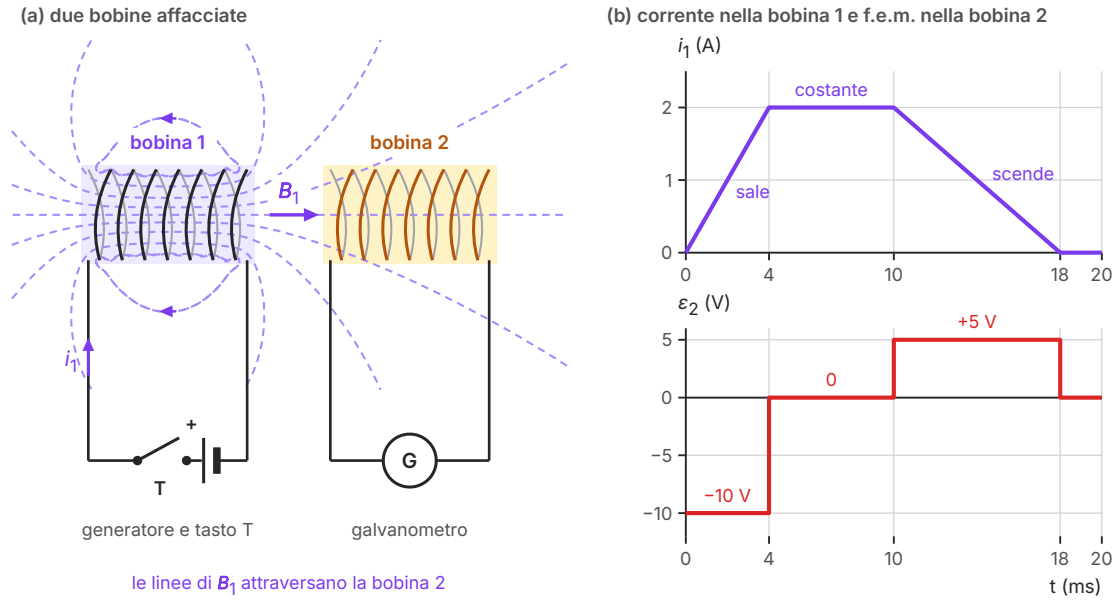


Figura 2.1 La mutua induzione. (a) Due bobine coassiali: le linee del campo prodotto dalla corrente i_1 della bobina 1 (tratteggiate, calcolate con la legge di Biot-Savart nel piano che contiene l'asse) attraversano in parte anche la bobina 2, collegata a un galvanometro. (b) Una corrente i_1 che sale, resta costante e poi scende (sopra) e la f.e.m. $\varepsilon_2 = -M\,\Delta i_1/\Delta t$ indotta nella bobina 2, calcolata per $M = 20$ mH (sotto); il verso positivo nella bobina 2 è scelto concorde con quello della bobina 1.

2.1.2 Il coefficiente di mutua induzione

Per descrivere la mutua induzione con un numero ci serve la grandezza che conta, cioè il flusso attraverso la bobina 2. Indichiamo con Φ_2 il flusso del campo prodotto dalla bobina 1 attraverso **una** spira della bobina 2. Se la bobina 2 ha N_2 spire, nella legge di Faraday-Neumann compare il prodotto $N_2\Phi_2$, il flusso concatenato con la bobina (capitolo 1). Il campo magnetico della bobina 1 è proporzionale alla corrente che lo produce (lo hai visto lo scorso anno per il filo, la spira e il solenoide), e quindi anche il flusso concatenato con la bobina 2 è proporzionale a i_1:

$$N_2\Phi_2 = Mi_1$$

La costante di proporzionalità M si chiama **coefficiente di mutua induzione** (o mutua induttanza) delle due bobine. Dipende dalla forma delle bobine, dal numero di spire, dalla loro posizione reciproca e dal materiale che le circonda, ma **non** dalla corrente: se le bobine restano ferme, M è una costante. Per la legge di Faraday-Neumann, se i_1 varia di Δi_1 in un intervallo Δt, nella bobina 2 si induce la f.e.m.

$$\varepsilon_2 = -N_2\frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} = -M\frac{\Delta i_1}{\Delta t}$$

Il segno meno è quello della legge di Lenz: la corrente indotta nella bobina 2 produce un campo che si oppone alla variazione del flusso. Se i_1 cresce, la corrente indotta circola nel verso opposto a i_1; se i_1 diminuisce, circola nello stesso verso. Come nel capitolo 1, il valore istantaneo della f.e.m. si ottiene facendo tendere Δt a zero: è la pendenza della retta tangente al grafico di i_1 in funzione del tempo, cioè la derivata $\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t$ che stai studiando in matematica, moltiplicata per $-M$.

L'unità di misura di M è il weber diviso ampere, che prende il nome di **henry** (simbolo H), in onore di Joseph Henry:

$$1\ \mathrm{H} = 1\ \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}} = 1\ \frac{\mathrm{V{\cdot}s}}{\mathrm{A}} = 1\ \Omega{\cdot}\mathrm{s}$$

Due bobine hanno una mutua induttanza di 1 H se una corrente che nella prima varia di 1 A al secondo induce nella seconda una f.e.m. di 1 V. Un henry è molto: le bobine dei laboratori scolastici hanno mutue induttanze dal microhenry (μH) a qualche decina di millihenry (mH), e valori più grandi solo con un nucleo di ferro comune.

C'è un fatto notevole, che si dimostra in generale e che noi enunciamo soltanto: il coefficiente è lo stesso nei due versi. Se si fa passare la corrente nella bobina 2 e si misura la f.e.m. nella bobina 1, si trova lo stesso M: $M_{12} = M_{21}$. Non è affatto ovvio, perché le due bobine possono essere diversissime (una lunga e fitta, l'altra corta e larga); per questo si parla del coefficiente di mutua induzione *delle due bobine*, senza specificare quale delle due sia il primario.

2.1.3 Due solenoidi coassiali

In un caso semplice M si calcola. Avvolgiamo una bobina corta di N_2 spire, di area S_2, al centro di un solenoide lungo l_1 con N_1 spire, oppure infiliamola dentro il solenoide, coassiale con esso. Lontano dalle estremità il campo del solenoide è uniforme e vale $B_1 = \mu_0(N_1/l_1)i_1$ (*Fisica 4*, capitolo 16); è parallelo all'asse e attraversa perpendicolarmente ogni spira della bobina interna. Il flusso concatenato con la bobina 2 è quindi

$$N_2\Phi_2 = N_2B_1S_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{l_1} i_1 \qquad \Rightarrow \qquad M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{l_1}$$

Il risultato è plausibile: M cresce con il numero di spire di entrambe le bobine e con l'area attraversata dal campo. Se la bobina interna ha un'area più piccola di quella del solenoide, conta la sua area: le linee che passano fuori dalle sue spire non contribuiscono al suo flusso. Se invece la bobina corta è avvolta *attorno* al solenoide, con spire più larghe, conta l'area del solenoide, perché fuori dal solenoide il campo è trascurabile.

ESEMPIO SVOLTO

La f.e.m. indotta in una bobina interna

Problema. Un solenoide lungo $l_1 = 50{,}0$ cm ha $N_1 = 1000$ spire. Al suo centro, coassiale, c'è una bobina di $N_2 = 200$ spire di raggio 1,50 cm, collegata a un circuito di resistenza totale 5,0 Ω. La corrente nel solenoide cresce uniformemente da 0 a 3,0 A in 15 ms. Calcola: a) il coefficiente di mutua induzione; b) la f.e.m. e la corrente indotte nella bobina; c) la carica che attraversa il circuito della bobina; d) il verso della corrente indotta.

Soluzione. a) L'area delle spire interne è $S_2 = \pi(0{,}0150\ \text{m})^2 = 7{,}07 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$. Allora

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{l_1} = \frac{4\pi \times 10^{-7}\ \text{T·m/A} \times 1000 \times 200 \times 7{,}07 \times 10^{-4}\ \text{m}^2}{0{,}500\ \text{m}} = 3{,}55 \times 10^{-4}\ \text{H} = 0{,}355\ \text{mH}$$

b) La corrente varia con rapidità costante, $\Delta i_1/\Delta t = 3{,}0\ \text{A}/0{,}015\ \text{s} = 200\ \text{A/s}$, quindi la f.e.m. è costante durante la crescita: $|\varepsilon_2| = M\,\Delta i_1/\Delta t = 3{,}55 \times 10^{-4}\ \text{H} \times 200\ \text{A/s} = 7{,}1 \times 10^{-2}\ \text{V} = 71\ \text{mV}$. La corrente indotta è $i_2 = |\varepsilon_2|/R = 0{,}071\ \text{V}/5{,}0\ \Omega = 1{,}4 \times 10^{-2}\ \text{A} = 14\ \text{mA}$, e scorre solo per i 15 ms in cui i_1 cresce.

c) La carica è $i_2 \Delta t = 14{,}2\ \text{mA} \times 15\ \text{ms} = 2{,}1 \times 10^{-4}\ \text{C}$. Si ottiene anche con la relazione del capitolo 1, $Q = N_2 \Delta\Phi_2/R = M\,\Delta i_1/R = 3{,}55 \times 10^{-4}\ \text{H} \times 3{,}0\ \text{A}/5{,}0\ \Omega = 2{,}1 \times 10^{-4}\ \text{C}$: la carica non dipende da quanto rapidamente la corrente sale, ma solo da quanto cambia.

d) Per la legge di Lenz la corrente indotta si oppone all'aumento del flusso: nella bobina interna circola in verso opposto alla corrente del solenoide, e il suo campo, all'interno, è opposto a quello del solenoide.

Controllo. Unità: $(\text{T·m/A}) \times \text{m}^2/\text{m} = \text{T·m}^2/\text{A} = \text{Wb/A} = \text{H}$. Ordine di grandezza: decine di millivolt con una variazione di qualche ampere in qualche centesimo di secondo, in accordo con le misure che si fanno in laboratorio con bobine di questo tipo.

ESEMPIO SVOLTO

Dal grafico della corrente al grafico della f.e.m.

Problema. Due bobine hanno un coefficiente di mutua induzione $M = 20$ mH. La corrente nella bobina 1 varia come nel grafico in alto della Figura 2.1b. Traccia il grafico della f.e.m. indotta nella bobina 2 e spiega come si legge.

Passo 1: dividere il grafico in tratti. Il grafico di i_1 è formato da segmenti; su ciascuno la pendenza $\Delta i_1/\Delta t$ è costante, e quindi anche la f.e.m. Non serve conoscere il valore della corrente, ma solo come cambia: la f.e.m. è legata alla **pendenza** del grafico, non alla sua altezza.

Passo 2: le pendenze. Fra 0 e 4 ms la corrente sale da 0 a 2,0 A: pendenza 2,0 A/0,004 s = 500 A/s. Fra 4 e 10 ms è costante: pendenza zero. Fra 10 e 18 ms scende da 2,0 A a 0: pendenza −2,0 A/0,008 s = −250 A/s. Dopo 18 ms è di nuovo costante.

Passo 3: la f.e.m. $\varepsilon_2 = -M \times$ pendenza: −0,020 H × 500 A/s = −10 V nel primo tratto; 0 nel secondo; −0,020 H × (−250 A/s) = +5,0 V nel terzo; 0 nel quarto. Il grafico è quello in basso della figura: una serie di «gradini».

Passo 4: la lettura. Nel tratto centrale la corrente nella bobina 1 è massima, eppure la f.e.m. è nulla: il flusso non cambia. La f.e.m. è più intensa quando la corrente sale, perché sale più in fretta di quanto poi scenda; i segni opposti dicono che la corrente indotta si oppone prima all'aumento e poi alla diminuzione del flusso (legge di Lenz). **Controllo:** l'area sotto il grafico di ε_2 è −10 V × 4 ms + 5,0 V × 8 ms = −40 mV·s + 40 mV·s = 0. Deve essere così, perché la corrente i_1 torna al valore iniziale e con lei il flusso: la somma di $\varepsilon_2 \Delta t$ è $-M$ per la variazione totale di i_1, che è zero.

COLLEGAMENTI

Ricaricare senza fili e leggere un biglietto senza toccarlo

Lo spazzolino elettrico si ricarica appoggiandolo sulla sua base, e molti telefoni su una basetta piatta, senza alcun contatto metallico. Nella base c'è una bobina piatta percorsa da una corrente che cambia continuamente verso, con frequenze dell'ordine del centinaio di kilohertz nei caricatori per telefoni; nel telefono c'è una seconda bobina piatta. È mutua induzione: la f.e.m. indotta nella bobina del telefono, raddrizzata da un circuito elettronico, ricarica la batteria. Per questo il telefono va centrato sulla base: il coefficiente M dipende dalla posizione reciproca delle bobine e diminuisce rapidamente quando si allontanano o si spostano di lato, e con lui la f.e.m. e la potenza trasferita.

Lo stesso principio alimenta le etichette RFID (*Radio-Frequency IDentification*) e le carte contactless: le tessere per i mezzi pubblici, gli skipass, le carte di pagamento, le etichette dei libri delle biblioteche. Molte funzionano a 13,56 MHz, la frequenza usata anche dalla tecnologia NFC dei telefoni. L'etichetta non ha batteria: contiene una bobina di poche spire e un microchip. Avvicinata al lettore, che produce un campo magnetico rapidamente variabile, riceve per mutua induzione l'energia necessaria a far funzionare il chip e a rispondere con il proprio codice. Per questo bisogna avvicinare la carta a pochi centimetri: a distanze maggiori il campo del lettore, e quindi la f.e.m. indotta, diventa troppo debole.

2.2 L'autoinduzione

2.2.1 Un circuito che induce su se stesso

Nella Figura 2.1a le linee del campo prodotto dalla bobina 1 attraversano anche, anzi soprattutto, le spire della bobina 1 stessa. Se la corrente i nella bobina cambia, cambia il flusso concatenato con la bobina, e per la legge di Faraday-Neumann nella bobina deve comparire una f.e.m. indotta, anche in assenza di qualunque altro circuito. Questo fenomeno, una f.e.m. indotta in un circuito dalla variazione della sua stessa corrente, si chiama **autoinduzione**. Lo descrisse per primo Joseph Henry nel 1832, come hai letto nel capitolo 1.

Il ragionamento è lo stesso della mutua induzione. Il campo prodotto dalla bobina è proporzionale alla sua corrente, quindi anche il flusso concatenato con la bobina, $N\Phi$, è proporzionale a i:

$$N\Phi = Li$$

La costante L si chiama **induttanza** (o coefficiente di autoinduzione) del circuito, e si misura in henry come M. Dipende solo dalla geometria del circuito e dal materiale che lo circonda, non dalla corrente. La legge di Faraday-Neumann dà allora la **forza elettromotrice autoindotta**:

$$\varepsilon_L = -L\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

Ogni circuito ha un'induttanza, anche un semplice filo dritto, ma di solito è piccolissima. Un componente costruito apposta per avere un'induttanza rilevante, di solito una bobina con molte spire, si chiama **induttore**; negli schemi elettrici si disegna con una fila di semicerchi, che ricordano le spire (Figura 2.2b). La resistenza del filo dell'induttore, quando non è trascurabile, si rappresenta come un resistore separato in serie.

Il segno meno, ancora una volta, è la legge di Lenz, e qui ha una conseguenza molto concreta. Se la corrente cresce, la f.e.m. autoindotta si oppone alla crescita: agisce in verso opposto alla corrente, come un generatore collegato «al contrario». Se la corrente diminuisce, la f.e.m. autoindotta si oppone alla diminuzione: agisce nel verso della corrente e tende a mantenerla. Un induttore non si oppone alla corrente, ma alle sue **variazioni**. Con una corrente costante, per quanto intensa, $\Delta i = 0$ e la f.e.m. autoindotta è nulla: a regime, in corrente continua, un induttore ideale si comporta come un semplice filo.

2.2.2 L'induttanza di un solenoide

Per un solenoide lungo l, con N spire di area S (Figura 2.2a), l'induttanza si calcola subito. All'interno il campo è uniforme e vale $B = \mu_0(N/l)i$; il flusso attraverso una spira è BS, e il flusso concatenato con tutte le N spire è

$$N\Phi = N\mu_0\frac{N}{l}iS = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}i \qquad \Rightarrow \qquad L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$$

L'induttanza cresce con il **quadrato** del numero di spire: raddoppiando le spire sulla stessa lunghezza, raddoppia il campo prodotto da una data corrente e raddoppia anche il numero di spire attraversate da quel campo. Un esempio: un solenoide di 1000 spire di raggio 2,0 cm, lungo 50 cm, ha $L = 4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A $\times\, 1000^2 \times \pi(0{,}020\text{ m})^2/0{,}50\text{ m} = 3{,}2 \times 10^{-3}$ H = 3,2 mH. Se in esso la corrente diminuisce di 2,0 A in 1,0 ms, la f.e.m. autoindotta vale $3{,}2 \times 10^{-3}$ H $\times$ 2,0 A/0,0010 s = 6,3 V, nel verso della corrente.

Come per il campo $B = \mu_0 iN/l$, la formula vale bene per un solenoide molto più lungo del suo diametro; per una bobina corta e larga l'induttanza vera è minore, perché vicino alle estremità il campo è più debole. Se il solenoide è avvolto su un nucleo di ferro, il campo all'interno è moltiplicato per la permeabilità magnetica relativa μ_r del materiale (*Fisica 4*, capitolo 16), e lo è anche l'induttanza: $L = \mu_r\mu_0 N^2 S/l$. Con valori di μ_r di centinaia o migliaia si passa dai millihenry agli henry. Bisogna però ricordare che per un materiale ferromagnetico μ_r non è una costante: dipende dal campo, e con correnti intense, vicino alla saturazione del ferro, l'induttanza diminuisce.

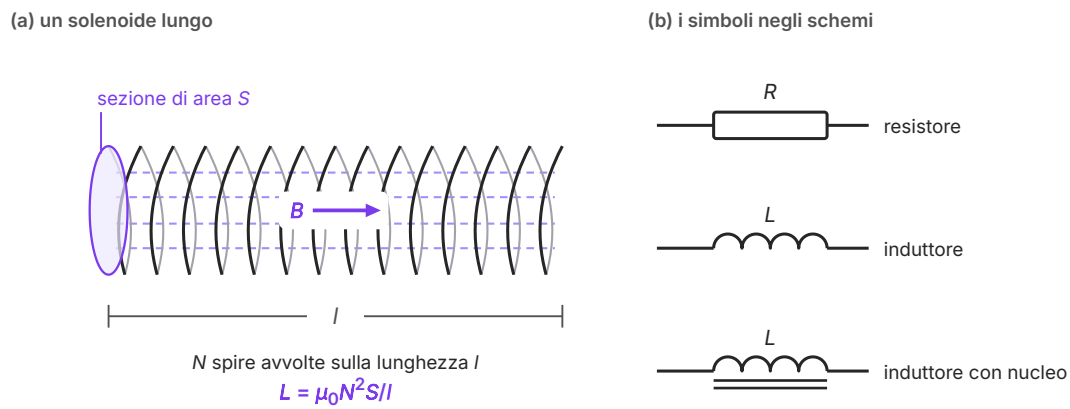


Figura 2.2 (a) Un solenoide di N spire, lungo l, con sezione di area S: il campo interno, quasi uniforme, attraversa tutte le spire, e il flusso concatenato è NBS. Da qui si ricava l'induttanza $L = \mu_0 N^2 S/l$. (b) I simboli usati negli schemi di questo volume per il resistore, per l'induttore e per l'induttore con nucleo di ferro.

ERRORE FREQUENTE

Che cosa si oppone a che cosa

«Un induttore si oppone al passaggio della corrente, come un resistore.» **No.** L'induttore si oppone alle *variazioni* della corrente: rallenta la sua crescita e rallenta la sua diminuzione, ma una corrente costante lo attraversa senza alcuna f.e.m. autoindotta. Se una bobina in corrente continua si scalda e «limita» la corrente, è per la resistenza del suo filo, non per l'induttanza.

«Nella formula $L = \mu_0 N^2 S/L$ la L al denominatore è la lunghezza.» **No:** la lunghezza è l, minuscola, e la L maiuscola è l'induttanza. Con lettere uguali la formula diventerebbe un'assurdità dimensionale. Allo stesso modo, nell'induttanza conta il **quadrato** del numero di spire, non il numero di spire: con 3 volte le spire, sulla stessa lunghezza, l'induttanza è 9 volte più grande.

2.2.3 Perché gli interruttori fanno scintille

L'autoinduzione spiega un fenomeno che chiunque abbia staccato una spina sotto carico ha visto: una piccola scintilla fra i contatti. Quando si apre un circuito che contiene un induttore, la corrente dovrebbe passare da un valore I a zero in un tempo brevissimo, il tempo in cui i contatti si separano. Una variazione $\Delta i = -I$ in un tempo Δt molto breve induce una f.e.m. $LI/\Delta t$ molto grande, nel verso della corrente, che tende a mantenerla. Per esempio una bobina con L = 1,2 H percorsa da 0,50 A, se la corrente si annullasse in 1,0 ms, darebbe una f.e.m. media di 600 V, cinquanta volte la tensione del generatore da 12 V che la alimentava. Questa tensione si somma a quella del generatore ai capi dei contatti appena separati: l'aria fra i contatti, distanti

una frazione di millimetro, si ionizza, e la corrente continua per un breve istante attraverso la scintilla. È l'**extracorrente di apertura**.

Le scintille consumano i contatti degli interruttori e dei relè, e la sovratensione può danneggiare i componenti elettronici che comandano una bobina. Per questo, in parallelo alle bobine dei relè e dei motorini, si collega spesso un **diodo di ricircolo**, un componente che lascia passare la corrente in un solo verso, orientato in modo da non condurre durante il funzionamento normale: all'apertura offre alla corrente una strada chiusa attraverso la bobina, e la corrente si spegne gradualmente invece di fare scintille. Vedremo fra poco con che legge. Alla chiusura succede il contrario: la f.e.m. autoindotta frena la crescita della corrente, che raggiunge il suo valore finale con un certo ritardo.

2.3 Il circuito RL

2.3.1 La chiusura del circuito

Studiamo il circuito della Figura 2.3a: un generatore ideale di f.e.m. ε, un resistore R e un induttore ideale L in serie, con un deviatore. Un circuito con un resistore e un induttore si chiama **circuito RL**; la resistenza R comprende quella del filo dell'induttore. Portiamo il deviatore nella posizione 1 all'istante $t = 0$. Lungo il circuito agiscono due f.e.m., quella del generatore e quella autoindotta, e la loro somma è uguale alla caduta di tensione Ri sul resistore (legge delle maglie, *Fisica 4*, capitolo 14):

$$\varepsilon - L\frac{\Delta i}{\Delta t} = Ri \qquad \text{cioè} \qquad \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{\varepsilon - Ri}{L}$$

L'equazione dice quanto rapidamente cresce la corrente in ogni istante, e basta leggerla per capire che cosa succede. All'istante iniziale $i = 0$: la corrente non può saltare di colpo a un valore finito, perché la f.e.m. autoindotta sarebbe infinita. Tutta la f.e.m. del generatore è allora «assorbita» dall'induttore e la corrente comincia a crescere con rapidità ε/L. Man mano che la corrente cresce, la caduta Ri aumenta e la rapidità di crescita diminuisce. Dopo molto tempo la corrente smette di cambiare: $\Delta i/\Delta t = 0$, e quindi $i = \varepsilon/R = I$, il valore che si avrebbe senza induttore. Fra l'inizio e la fine c'è un **transitorio**, un intervallo in cui la corrente si adatta alla nuova situazione, che ricorda molto la carica del condensatore nel circuito RC.

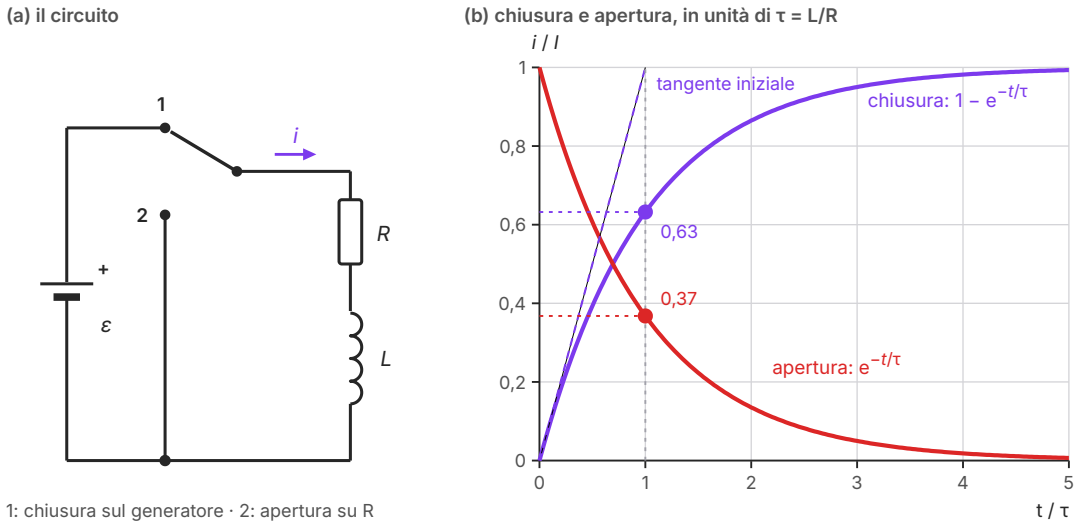


Figura 2.3 (a) Circuito RL con un deviatore: nella posizione 1 il generatore fa crescere la corrente nel resistore e nell'induttore; nella posizione 2 il generatore è escluso e la corrente si spegne attraverso il resistore. R comprende la resistenza del filo dell'induttore. (b) La corrente in funzione del tempo, calcolata, in unità della corrente finale $I = \varepsilon/R$ (chiusura, in viola) e della corrente iniziale (apertura, in rosso). La tangente iniziale alla curva di chiusura raggiunge il valore finale all'istante τ.

2.3.2 Un calcolo passo per passo

Come per il circuito RC (*Fisica 4*, capitolo 14), si può seguire la corrente a piccoli passi. In un intervallo Δt abbastanza breve la rapidità di crescita cambia poco; si calcola allora $\Delta i = (\varepsilon - Ri)\Delta t/L$ con la corrente attuale, la si aggiunge alla corrente, si ricalcola la rapidità con la nuova corrente, e così via. È il **metodo di Eulero**, che probabilmente userai anche in matematica per le equazioni differenziali. Conviene misurare la corrente in frazioni del valore finale $I = \varepsilon/R$ e il tempo in multipli della grandezza

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Con queste unità la regola del passo diventa la stessa per qualunque circuito: $\Delta(i/I) = (1 - i/I) \cdot \Delta t/\tau$. In ogni passo la corrente guadagna una frazione $\Delta t/\tau$ di ciò che ancora le *manca* per arrivare al valore finale. La Tabella 2.1 e la Figura 2.4 mostrano il risultato.

Tabella 2.1 Corrente nel circuito RL dopo la chiusura, in percentuale del valore finale $I = \varepsilon/R$, calcolata a piccoli passi con due diverse ampiezze del passo e con la legge esatta. Il tempo è in unità di $\tau = L/R$.

t/τ	passi $\Delta t = 0{,}1\ \tau$	passi $\Delta t = 0{,}01\ \tau$	$100\ (1 - e^{-t/\tau})$
0	0	0	0
0,1	10,0	9,6	9,5
0,2	19,0	18,2	18,1
0,5	41,0	39,5	39,3
1	65,1	63,4	63,2
2	87,8	86,6	86,5
3	95,8	95,1	95,0
5	99,5	99,3	99,3

Se hai sotto mano la Tabella 14.1 di *Fisica 4*, quella della carica del condensatore, confrontala con questa: i numeri sono identici. Non è una coincidenza. Nel circuito RC la carica mancante, $Q - q$, si riduceva a ogni passo dello stesso fattore; qui si riduce a ogni passo dello stesso fattore la corrente mancante, $I - i$. Le due equazioni hanno la stessa struttura e quindi la stessa soluzione: una grandezza che a intervalli uguali si moltiplica per lo stesso fattore è una funzione esponenziale del tempo. Al tendere a zero del passo, dopo un tempo τ la corrente mancante si riduce di un fattore $1/e = 0{,}368$, dove $e = 2{,}718\ldots$ è il numero di Nepero. Il confronto completo fra i due circuiti è nella Tabella 2.2.

Tabella 2.2 Il circuito RC e il circuito RL a confronto (generatore di f.e.m. ε, transitorio di chiusura).

	Circuito RC	Circuito RL
costante di tempo	$\tau = RC$	$\tau = L/R$
all'istante della chiusura	il condensatore si comporta come un filo: $i = \varepsilon/R$	l'induttore si comporta come un circuito aperto: $i = 0$
a regime	il condensatore si comporta come un circuito aperto: $i = 0$	l'induttore si comporta come un filo: $i = \varepsilon/R$
grandezza che non può cambiare di colpo	la carica (e la tensione) del condensatore	la corrente nell'induttore
energia immagazzinata a regime	$\frac{1}{2}C\varepsilon^2$, nel campo elettrico	$\frac{1}{2}LI^2$, nel campo magnetico

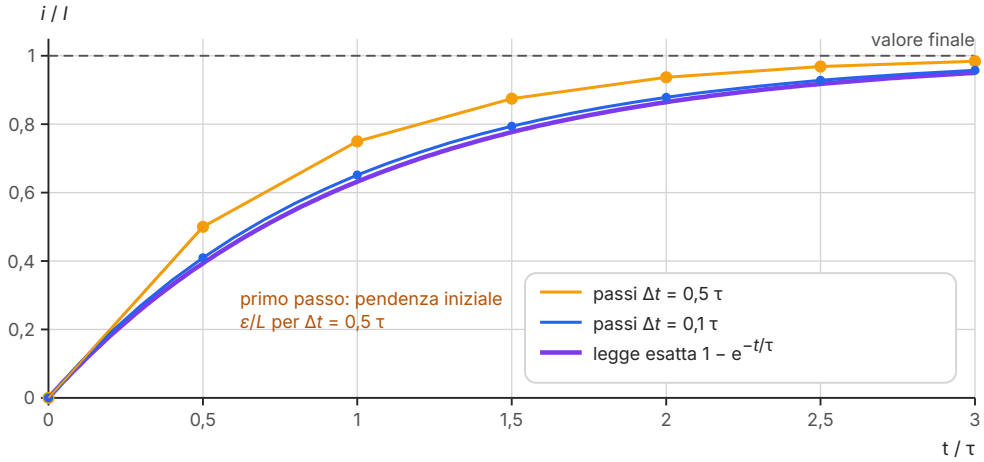


Figura 2.4 Il metodo di Eulero per la chiusura di un circuito RL, con la corrente in unità del valore finale e il tempo in unità di $\tau = L/R$. Con passi grandi ($\Delta t = 0{,}5\ \tau$, in arancione) la spezzata si allontana dalla curva esatta (in viola), perché in ogni passo usa la rapidità di crescita dell'inizio del passo, che è la più alta; con passi di $0{,}1\ \tau$ (in blu) è già quasi sovrapposta alla curva. Il primo segmento ha la pendenza iniziale ε/L.

2.3.3 Le leggi della corrente

La grandezza $\tau = L/R$ è la costante di tempo del circuito RL. Si misura in secondi: un henry diviso un ohm è $(\Omega\cdot s)/\Omega = s$. Il calcolo a passi sempre più piccoli conduce alle leggi della chiusura:

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\,(1 - e^{-t/\tau}) \qquad v_L(t) = \varepsilon\, e^{-t/\tau}$$

dove $v_L = L\Delta i/\Delta t$ è la tensione ai capi dell'induttore. Controlliamole come abbiamo fatto lo scorso anno per il circuito RC. I casi limite: per $t = 0$ la corrente è nulla e tutta la f.e.m. del generatore si trova ai capi dell'induttore; per t molto grande la corrente tende a ε/R e la tensione sull'induttore tende a zero. Le dimensioni: l'esponente t/τ è un numero puro. I numeri: l'ultima colonna della Tabella 2.1 coincide con il calcolo a passi piccoli. In ogni istante, poi, $Ri + v_L = \varepsilon(1 - e^{-t/\tau}) + \varepsilon e^{-t/\tau} = \varepsilon$, come vuole la legge delle maglie.

Se in matematica sei già arrivato alle derivate, puoi fare anche la verifica completa. La derivata di $1 - e^{-t/\tau}$ rispetto a t è $(1/\tau)e^{-t/\tau}$; quindi $di/dt = (\varepsilon/R)(1/\tau)e^{-t/\tau} = (\varepsilon/L)e^{-t/\tau}$, e $L\,di/dt + Ri = \varepsilon e^{-t/\tau} + \varepsilon - \varepsilon e^{-t/\tau} = \varepsilon$. La legge soddisfa l'equazione del circuito in ogni istante.

La Figura 2.3b mostra la curva. Dopo un tempo τ la corrente ha raggiunto il 63% del valore finale; dopo 2τ l'86%; dopo 5τ manca meno dell'1%, e in pratica il transitorio è finito. La costante di tempo ha anche un significato grafico: la retta tangente alla curva nell'origine, con pendenza ε/L, raggiunge il valore finale proprio al tempo τ. Se la corrente continuasse a crescere

con la rapidità iniziale, arriverebbe al valore finale in un tempo τ. Un'induttanza grande o una resistenza piccola rendono il transitorio lento.

2.3.4 L'apertura del circuito

Quando la corrente è arrivata al valore I, spostiamo il deviatore nella posizione 2: il generatore viene escluso, ma il circuito resta chiuso attraverso il resistore. (È proprio questo che fa il diodo collegato in parallelo a una bobina di relè.) Ora l'unica f.e.m. è quella autoindotta, e la legge delle maglie dà $-L\Delta i/\Delta t = Ri$: la corrente diminuisce, ma l'induttore la sostiene, e la diminuzione è tanto più rapida quanto più corrente resta. È la stessa situazione della scarica del condensatore, e la soluzione è la stessa:

$$i(t) = I\, e^{-t/\tau} \qquad \text{con} \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

dopo un tempo τ la corrente è ridotta al 37% del valore iniziale (curva rossa della Figura 2.3b). Nell'istante della commutazione la corrente è ancora I: se il circuito di spegnimento ha una resistenza più grande di quello di carica, la tensione ai capi di quella resistenza, uguale alla resistenza per I, supera quella del generatore, come vedrai negli esercizi. Se invece il circuito viene semplicemente interrotto, R diventa enorme (la resistenza dell'aria fra i contatti) e τ piccolissimo: la corrente si annulla quasi istantaneamente e la tensione sale fino a provocare la scintilla di cui abbiamo parlato.

ERRORE FREQUENTE

La costante di tempo è L/R, e la R è quella di tutto il circuito

«La costante di tempo del circuito RL è RL, come quella del circuito RC è RC.» **No:** è L/R. Lo si vede dalle unità (H/Ω = s, mentre Ω·H = Ω^2·s) e dal buon senso: un'induttanza più grande rallenta il transitorio, ma una resistenza più grande lo accelera, perché la corrente finale ε/R è più piccola e viene raggiunta prima. Nel circuito RC, invece, una resistenza grande rallenta la carica.

«Dopo un tempo τ la corrente è a metà del valore finale.» **No:** è al 63%; la metà si raggiunge prima, dopo $\tau \ln 2 = 0{,}69\ \tau$. E nel calcolo di τ la resistenza è quella **totale** del circuito in cui scorre la corrente: quella del resistore, più quella del filo della bobina, più la resistenza interna del generatore se non è trascurabile. Dimenticarne una è l'errore più comune in laboratorio, come vedrai nel riquadro di laboratorio di questa sezione.

ESEMPIO SVOLTO

La bobina di un elettromagnete, passo per passo

Problema. Una bobina con induttanza $L = 0{,}80$ H e resistenza 16 Ω (comprese quelle dei collegamenti) viene collegata all'istante $t = 0$ a un generatore ideale da 12 V. Calcola: a) la costante di tempo e la corrente finale; b) la rapidità di crescita della corrente all'istante iniziale; c) la corrente dopo 20 ms; d) dopo quanto tempo la corrente raggiunge il 90% del valore finale; e) la tensione ai capi dell'induttore all'istante τ.

Soluzione. a) $\tau = L/R = 0{,}80$ H/16 Ω = 0,050 s = 50 ms; $I = \varepsilon/R = 12$ V/16 Ω = 0,75 A.

b) All'istante iniziale $i = 0$, quindi $Ri = 0$ e tutta la f.e.m. del generatore è bilanciata dalla f.e.m. autoindotta: $\Delta i/\Delta t = \varepsilon/L = 12$ V/0,80 H = 15 A/s. (Controllo: $I/\tau = 0{,}75$ A/0,050 s = 15 A/s, la pendenza della tangente iniziale.)

c) $t/\tau = 20$ ms/50 ms = 0,40, quindi $i = 0{,}75\text{ A} \times (1 - e^{-0{,}40}) = 0{,}75\text{ A} \times (1 - 0{,}670) = 0{,}25$ A. Con la rapidità iniziale costante la corrente sarebbe 15 A/s × 0,020 s = 0,30 A: il valore vero è minore, perché la crescita rallenta.

d) $i = 0{,}90\,I$ quando $e^{-t/\tau} = 0{,}10$, cioè $t/\tau = \ln 10 = 2{,}30$: $t = 2{,}30 \times 50$ ms = 115 ms ≈ 0,12 s.

e) $v_L = \varepsilon e^{-1} = 12\text{ V} \times 0{,}368 = 4{,}4$ V; sul resistore ci sono 12 V − 4,4 V = 7,6 V, cioè Ri con $i = 0{,}63 \times 0{,}75$ A = 0,47 A.

Controllo. Unità: H/Ω = s, V/H = A/s. Ordini di grandezza: la corrente si stabilizza in qualche decimo di secondo, un ritardo percepibile, per esempio, nel «clic» di un grosso relè.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: la costante di tempo di un circuito RL

Materiali. Una bobina di 1200 spire montata su un nucleo di ferro laminato a U chiuso da un giogo (del tipo usato per i trasformatori smontabili); un resistore da 100 Ω (±1%); un generatore di funzioni a bassa tensione, in onda quadra da 0 a 6 V, con resistenza di uscita 50 Ω (dichiarata dal costruttore, ±1 Ω); un oscilloscopio a due canali, oppure un sensore di tensione con un sistema di acquisizione dati; un multimetro usato come ohmmetro; se disponibile, un misuratore LCR.

Procedimento. 1) Misura con l'ohmmetro la resistenza del filo della bobina: $R_b = (9{,}6 \pm 0{,}1)\ \Omega$. 2) Collega in serie il generatore, la bobina e il resistore da 100 Ω, e collega l'oscilloscopio ai capi del resistore: la tensione $V_R = Ri$ è proporzionale alla corrente. 3) Scegli una frequenza dell'onda quadra di 20 Hz: ogni semiperiodo dura 25 ms, abbastanza perché la corrente arrivi a regime (otto costanti di tempo, come vedrai). 4) Nel semiperiodo in cui l'uscita del generatore è a 0 V la corrente si spegne attraverso il resistore, la bobina e la resistenza di uscita del generatore: leggi V_R ogni millisecondo a partire dall'istante del salto (Tabella 2.3).

Tabella 2.3 Tensione ai capi del resistore da 100 Ω durante lo spegnimento della corrente nel circuito RL (dati tipici; incertezza su V_R: ±1%; base dei tempi dell'oscilloscopio: ±2%).

t (ms)	V_R (V)	$\ln(V_R/1\ \text{V})$
0	3,75	1,322
1	2,70	0,993
2	1,93	0,658
3	1,38	0,322
4	0,989	−0,011
5	0,712	−0,340
6	0,515	−0,664
7	0,368	−1,000
8	0,265	−1,328

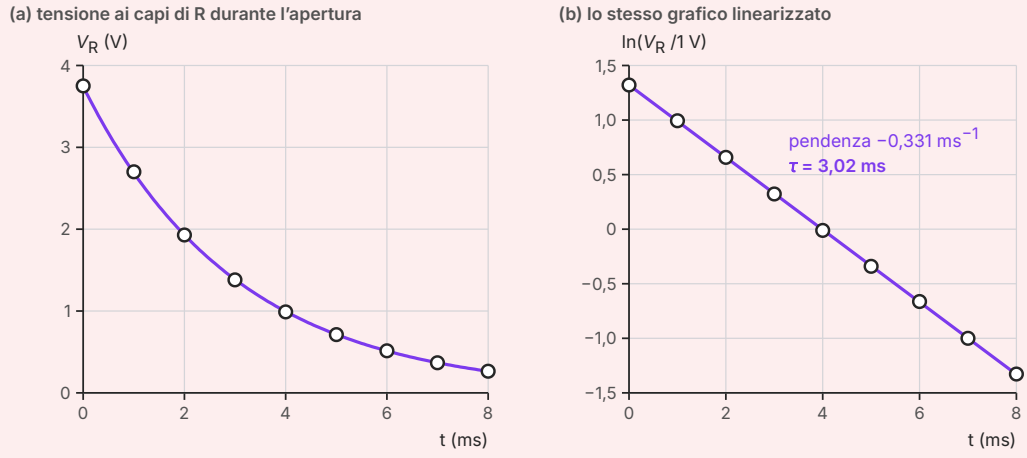


Figura 2.5 I dati della Tabella 2.3 (dati tipici). (a) La tensione ai capi del resistore, proporzionale alla corrente, decresce in modo esponenziale; la curva è quella di miglior accordo. (b) Il logaritmo naturale della tensione in funzione del tempo: i punti stanno su una retta, la cui pendenza è $-1/\tau$.

Analisi. Se la corrente si spegne con la legge $i = Ie^{-t/\tau}$, il logaritmo naturale della tensione sul resistore è $\ln V_R = \ln(RI) - t/\tau$: in funzione del tempo è una retta con pendenza $-1/\tau$, come nel circuito RC dello scorso anno. Nella Figura 2.5b i punti sono allineati senza andamenti sistematici, e la retta di miglior accordo ha pendenza $-0{,}331\ \text{ms}^{-1}$. L'incertezza della pendenza ricavata dalla dispersione dei punti è piccolissima (0,2%); domina quella della base dei tempi dell'oscilloscopio, il 2%. Quindi $\tau = 1/(0{,}331\ \text{ms}^{-1}) = (3{,}02 \pm 0{,}06)$ ms. Un controllo rapido: la tensione scende a $0{,}368 \times 3{,}75$ V = 1,38 V dopo 3 ms, quasi esattamente una costante di tempo.

Confronto teoria–esperimento. La corrente scorre attraverso tre resistenze in serie: $R_{\text{tot}} = 100\ \Omega + 9{,}6\ \Omega + 50\ \Omega = 159{,}6\ \Omega$, con un'incertezza di $1{,}0 + 0{,}1 + 1{,}0 = 2{,}1\ \Omega$ (1,3%). L'induttanza misurata è $L = \tau R_{\text{tot}} = 3{,}02 \times 10^{-3}\ \text{s} \times 159{,}6\ \Omega = 0{,}482$ H, con un'incertezza relativa del 2% + 1,3% ≈ 3,3%: $L = (0{,}48 \pm 0{,}02)$ H. Il misuratore LCR, alla frequenza di 100 Hz, dà $L = (0{,}470 \pm 0{,}009)$ H. La differenza fra le due misure, 0,012 H, è minore della somma delle incertezze, 0,025 H: le misure sono compatibili.

Che cosa concludere. La corrente nel circuito RL si spegne in modo esponenziale, come prevede il modello, e la costante di tempo permette di misurare l'induttanza. Il punto delicato è la resistenza: chi usasse solo i 100 Ω del resistore troverebbe $L = 3{,}02\ \text{ms} \times 100\ \Omega = 0{,}302$ H, un valore incompatibile con quello del misuratore LCR. Le resistenze «nascoste», quella del filo e quella del generatore, contano quanto quella visibile. Con il nucleo di ferro, inoltre, l'induttanza dipende un po' dalla corrente: per questo si lavora con correnti piccole, qui meno di 40 mA.

Sicurezza. Usa solo il generatore di funzioni a bassa tensione, mai la rete. Non aprire con un interruttore il circuito di una bobina con nucleo di ferro percorsa da corrente continua: la sovratensione di apertura può superare di molto quella di alimentazione e dare una scossa fasti-

diosa o danneggiare gli strumenti. Con l'onda quadra il circuito resta sempre chiuso attraverso il generatore.

Per la relazione. Riporta la tabella, i due grafici, la retta di miglior accordo con quelle di massima e minima pendenza, e il calcolo di τ e di L con le incertezze. Spiega perché si misura la tensione sul resistore e non sulla bobina. Ripeti la misura togliendo il giogo che chiude il nucleo: come cambiano τ e L, e perché? Infine prova con un resistore da 47 Ω e verifica che τ cambi come prevede $\tau = L/R_{\text{tot}}$.

2.4 L'energia del campo magnetico

2.4.1 Il lavoro per avviare una corrente

Mentre la corrente in un circuito RL cresce, il generatore spinge le cariche contro la f.e.m. autoindotta, e quindi compie un lavoro in più rispetto a quello che si dissipa nel resistore per effetto Joule. Dove va questo lavoro? Quando poi il circuito si apre sul resistore, la corrente continua a scorrere per qualche costante di tempo senza alcun generatore, e il resistore si scalda: l'energia che dissipa deve essere stata immagazzinata da qualche parte. Vediamo quanta.

In un breve intervallo Δt, mentre la corrente vale i e cresce di Δi, attraverso l'induttore passa la carica $i\Delta t$ e la f.e.m. autoindotta ha intensità $L\Delta i/\Delta t$. Il lavoro compiuto contro di essa è carica per tensione:

$$\Delta W = L\frac{\Delta i}{\Delta t} \cdot i\Delta t = Li\,\Delta i$$

Nel grafico della Figura 2.6, che riporta il flusso concatenato $N\Phi = Li$ in funzione della corrente, ΔW è l'area di una striscia di base Δi e altezza Li. Per portare la corrente da 0 a I bisogna sommare tutte le strisce, e la somma, con strisce sempre più sottili, tende all'area del triangolo sotto la retta di pendenza L: base I, altezza LI. È lo stesso ragionamento con cui, lo scorso anno, hai ricavato l'energia del condensatore dall'area sotto la retta della tensione in funzione della carica (*Fisica 4*, capitolo 12). L'energia immagazzinata in un induttore percorso dalla corrente I è quindi

$$U = \tfrac{1}{2}\,LI^2$$

Per il caso della figura, con L = 2,0 H e I = 3,0 A, sei gradini da 0,5 A danno 7,5 J, cento gradini 8,91 J, mille gradini 8,991 J, e il triangolo vale ½ × 2,0 H × (3,0 A)^2 = 9,0 J. Questa è l'**energia magnetica** dell'induttore. Non dipende da come la corrente è arrivata al valore I, rapidamente o lentamente, ma solo dal valore finale; e quando la corrente si spegne viene restituita tutta al circuito, che la dissipa nel resistore o nella scintilla.

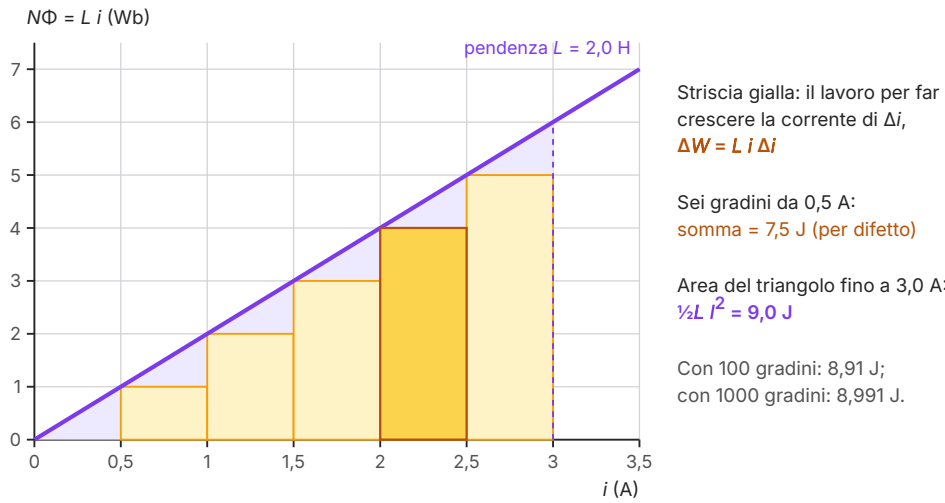


Figura 2.6 Il flusso concatenato $N\Phi = Li$ di un induttore da 2,0 H in funzione della corrente. Il lavoro per aumentare la corrente di Δi è l'area $Li\Delta i$ di una striscia (in giallo); il lavoro totale per portare la corrente da 0 a 3,0 A è l'area del triangolo, $\frac{1}{2}LI^2 = 9{,}0$ J. I rettangoli, calcolati con la corrente all'inizio di ogni gradino di 0,5 A, la approssimano per difetto.

Le due formule, $\frac{1}{2}C\Delta V^2$ per il condensatore e $\frac{1}{2}LI^2$ per l'induttore, ricordano un'altra formula ben nota, $\frac{1}{2}mv^2$. L'analogia con la meccanica è profonda (Tabella 2.4). L'induttanza è una specie di **inerzia** della corrente: come una massa non cambia velocità di colpo e serve una forza per accelerarla, così la corrente in un induttore non cambia di colpo e serve una f.e.m. per farla crescere. Una volta avviata, la corrente «vorrebbe» continuare, come un corpo in moto; se un interruttore la ferma bruscamente, la sua energia si scarica tutta insieme, come quella di un'auto contro un muro.

Tabella 2.4 L'analogia fra un induttore e un corpo in moto rettilineo.

Induttore	Corpo in moto
corrente i	velocità v
induttanza L	massa m
f.e.m. applicata $L\Delta i/\Delta t$	forza $m\Delta v/\Delta t$
flusso concatenato Li	quantità di moto mv
energia magnetica $\frac{1}{2}Li^2$	energia cinetica $\frac{1}{2}mv^2$
resistore R (dissipa)	attrito viscoso (dissipa)

2.4.2 Dove si trova l'energia

Per il condensatore abbiamo scoperto lo scorso anno che l'energia non è «nelle armature», ma nel campo elettrico fra di esse, con densità $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$. Lo stesso ragionamento, applicato a un solenoide, dice dove si trova l'energia di un induttore.

ESEMPIO SVOLTO

La densità di energia del campo magnetico, passo per passo

Problema. Un solenoide lungo l, con N spire di area S, è percorso dalla corrente I. Esprimi la sua energia magnetica in funzione del campo B al suo interno e ricava l'energia per unità di volume.

Passo 1: l'energia in funzione della corrente. Con l'induttanza del solenoide, $L = \mu_0 N^2 S/l$:

$$U = \tfrac{1}{2} LI^2 = \tfrac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 S}{l} I^2$$

Passo 2: la corrente in funzione del campo. All'interno $B = \mu_0 NI/l$, quindi $I = Bl/(\mu_0 N)$.

Passo 3: la sostituzione.

$$U = \tfrac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 S}{l} \cdot \frac{B^2 l^2}{\mu_0{}^2 N^2} = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot Sl$$

Passo 4: l'interpretazione. Il prodotto Sl è il volume interno del solenoide, proprio la regione in cui c'è campo (all'esterno di un solenoide ideale il campo è nullo). Dividendo l'energia per il volume si ottiene una grandezza che dipende solo dal campo nel punto:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Passo 5: le unità. $\mathrm{T^2/(T\cdot m/A)} = \mathrm{T\cdot A/m}$; poiché $1\ \mathrm{T} = 1\ \mathrm{N/(A\cdot m)}$, si ottiene $\mathrm{N/m^2} = \mathrm{N\cdot m/m^3} = \mathrm{J/m^3}$, un'energia per unità di volume, come deve essere.

Controllo numerico. Un solenoide lungo 1,0 m, di raggio 5,0 cm, con 2000 spire, ha $L = 3{,}95 \times 10^{-2}$ H; per avere all'interno 0,50 T servono $I = Bl/(\mu_0 N) = 199$ A. Allora $\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \times 3{,}95 \times 10^{-2}\ \mathrm{H} \times (199\ \mathrm{A})^2 = 781$ J, e $B^2/(2\mu_0) \times \text{volume} = 9{,}95 \times 10^4\ \mathrm{J/m^3} \times 7{,}85 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^3} = 781$ J: i due calcoli coincidono.

Il risultato, ricavato per un solenoide, vale per qualunque campo magnetico nel vuoto: in ogni regione in cui c'è un campo magnetico è immagazzinata energia, con **densità di energia del campo magnetico** $u_B = B^2/(2\mu_0)$. Accanto alla densità di energia del campo elettrico, $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$, completa il quadro: un campo elettromagnetico porta con sé l'energia

$$u = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

per unità di volume. Il campo non è quindi soltanto un modo comodo di calcolare le forze: è un ente fisico che possiede energia. Nel capitolo 5 vedrai che un'onda elettromagnetica trasporta proprio questa energia attraverso lo spazio vuoto, e che in un'onda le due parti, elettrica e magnetica, sono esattamente uguali.

2.4.3 Campo elettrico e campo magnetico a confronto

Confrontiamo i numeri (Figura 2.7). Il campo elettrico più intenso che l'aria sopporta senza scariche, circa 3×10^6 V/m, ha una densità di energia di circa 40 J/m^3. Un campo magnetico di appena 0,01 T ha la stessa densità di energia, e campi di 1 T, come quello fra i poli di un elettromagnete da laboratorio, arrivano a $4{,}0 \times 10^5$ J/m^3: diecimila volte di più. I magneti superconduttori dei grandi acceleratori, con campi di circa 8 T, immagazzinano decine di megajoule per metro cubo. È una delle ragioni per cui motori, generatori e trasformatori sfruttano il campo magnetico, e non quello elettrico, per trasformare grandi quantità di energia: nello stesso volume il campo magnetico ne contiene molta di più.

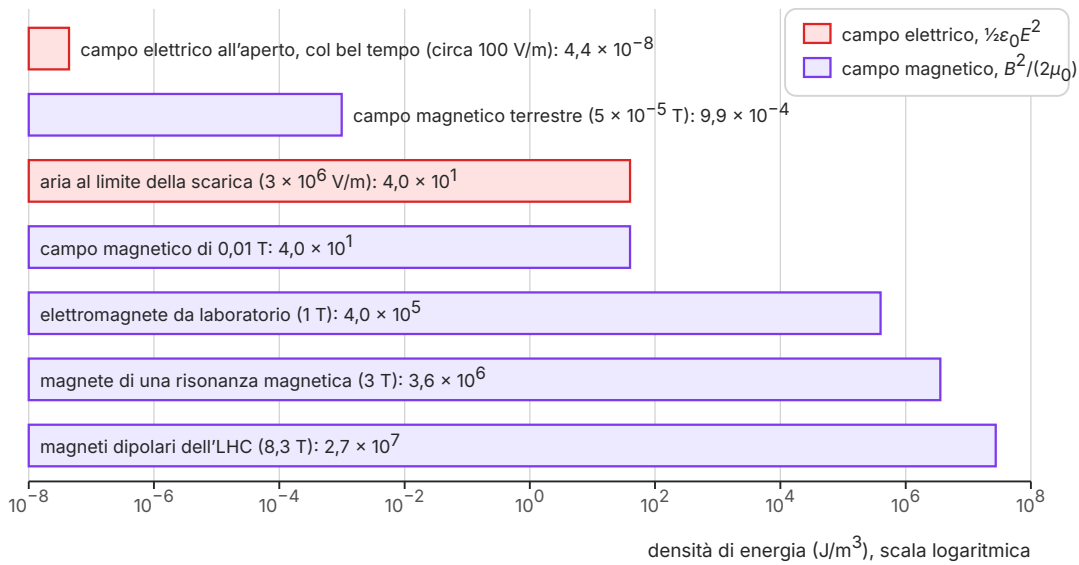


Figura 2.7 Densità di energia di alcuni campi elettrici (in rosso, $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$) e magnetici (in viola, $B^2/(2\mu_0)$), su una scala logaritmica: ogni divisione corrisponde a un fattore 100. I campi sono valori tipici arrotondati. Un campo magnetico di 0,01 T ha già la densità di energia del campo elettrico più intenso che l'aria sopporta senza scariche.

2.4.4 Il bilancio energetico del circuito RL

Ora possiamo fare il bilancio completo. Moltiplichiamo l'equazione della chiusura, $\varepsilon = Ri + L\Delta i/\Delta t$, per la corrente i:

$$\varepsilon i = Ri^2 + Li\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

Ogni termine è una potenza. A sinistra c'è la potenza erogata dal generatore; a destra la potenza dissipata nel resistore per effetto Joule e la rapidità con cui cresce l'energia magnetica dell'induttore, perché $Li\Delta i/\Delta t = \Delta U/\Delta t$. Per esempio, in un circuito con $\varepsilon = 12$ V, $R = 6{,}0\ \Omega$ e $L = 0{,}50$ H, all'istante $\tau = 83$ ms la corrente è $0{,}632 \times 2{,}0$ A $= 1{,}26$ A: il generatore eroga $12\ \text{V} \times 1{,}26\ \text{A} = 15{,}2$ W, il resistore ne dissipa $6{,}0\ \Omega \times (1{,}26\ \text{A})^2 = 9{,}6$ W e i restanti 5,6 W vanno ad accrescere l'energia del campo magnetico. A regime l'energia magnetica non cresce più e tutta la potenza del generatore va nel resistore. All'apertura sul resistore, infine, l'energia $\frac{1}{2}LI^2$ si trasforma tutta in calore: per il circuito della Figura 2.6 sommando al computer i contributi $Ri^2\Delta t$ su piccoli intervalli si trova 9,0 J, qualunque sia il valore di R. Una resistenza piccola dissipa poco per volta ma per molto tempo, una grande dissipa molto in poco tempo.

COLLEGAMENTI

L'energia nel magnete di una risonanza magnetica

Il magnete di uno scanner per la risonanza magnetica è un grande solenoide superconduttore (*Fisica 4*, capitolo 16) con un campo interno di 1,5–3 T. Stimiamo la sua energia: con 1,5 T la densità di energia è $B^2/(2\mu_0) \approx 9{,}0 \times 10^5$ J/m^3, e se il campo intenso occupa un cilindro di 0,5 m di raggio e 1,5 m di lunghezza, circa 1,2 m^3, l'energia è dell'ordine di 1 MJ (contando anche il campo nel resto dell'avvolgimento e all'esterno, la stima va presa come ordine di grandezza). È l'energia cinetica di un'automobile di una tonnellata a circa 160 km/h.

Un magnete così ha una proprietà sorprendente, che il circuito RL spiega bene. Una volta portata la corrente al valore voluto, gli estremi dell'avvolgimento vengono chiusi su se stessi con un tratto superconduttore e l'alimentatore viene staccato: la corrente circola da sola. Con $R = 0$ la costante di tempo L/R è infinita, e la corrente non si spegne: è una **corrente persistente**. Il magnete resta acceso per anni, senza alimentazione, finché l'elio liquido lo mantiene superconduttore. Se però un tratto dell'avvolgimento torna a essere un conduttore normale, la resistenza compare all'improvviso e in pochi secondi l'energia del campo si trasforma in calore, che fa evaporare l'elio liquido: è il cosiddetto *quench*, e per questo gli scanner hanno un condotto che porta l'elio all'esterno dell'edificio.

2.5 Induttanze al lavoro

2.5.1 La bobina di accensione

Mutua induzione e autoinduzione lavorano insieme in un dispositivo che si trova in ogni motore a benzina: la **bobina di accensione**, che produce la scintilla delle candele. È formata da due avvolgimenti sullo stesso nucleo di ferro: un primario di poche centinaia di spire, collegato alla batteria da 12 V attraverso un interruttore elettronico, e un secondario di molte migliaia di spire, collegato alla candela. Per qualche millisecondo l'interruttore resta chiuso, e la corrente nel primario cresce come in un circuito RL, immagazzinando energia nel campo magnetico del nucleo. Poi l'interruttore si apre di colpo: la corrente nel primario crolla in un tempo brevissimo, il flusso nel nucleo crolla con lei, e nel secondario, che ha molte più spire, si induce una f.e.m. di decine di migliaia di volt, sufficiente a far scoccare la scintilla fra gli elettrodi della candela. L'energia della scintilla è quella che il campo aveva accumulato, $\frac{1}{2}L_1 i^2$: per questo la corrente deve avere il tempo di crescere prima dell'apertura.

Il calcolo del rapporto fra le f.e.m. è semplice se tutte le linee del campo restano nel nucleo e attraversano entrambi gli avvolgimenti. Allora il flusso Φ attraverso una spira è lo stesso per le spire del primario e per quelle del secondario, e le f.e.m. indotte, $-N_1 \Delta\Phi/\Delta t$ e $-N_2 \Delta\Phi/\Delta t$, stanno nel rapporto N_2/N_1 fra i numeri di spire. Con lo stesso ragionamento si trova che, in questo caso di **accoppiamento perfetto**, $M = (N_2/N_1)L_1$. Nel prossimo capitolo lo stesso principio, applicato a una corrente alternata, darà il trasformatore.

2.5.2 Altri induttori

Gli induttori sono ovunque nell'elettronica. Negli alimentatori servono a «livellare» la corrente: poiché un induttore si oppone alle variazioni, lascia passare la parte costante della corrente e frena le sue fluttuazioni rapide. Nei convertitori che trasformano la tensione di una batteria in un'altra, un induttore viene caricato e scaricato da decine di migliaia a milioni di volte al secondo, e a ogni ciclo cede la sua energia $\frac{1}{2}Li^2$ al circuito. E l'induttanza è anche un sensore: sotto l'asfalto, davanti a molti semafori e alle sbarre dei parcheggi, sono annegate grandi spire di filo che fanno parte di un circuito oscillante. Quando un'auto si ferma sopra la spira, nella sua carrozzeria metallica nascono correnti di Foucault (capitolo 1) che modificano il campo e quindi l'induttanza della spira; l'elettronica rileva la variazione e «sa» che c'è un veicolo in attesa.

APPROFONDIMENTO

Il rocchetto a induzione

Le scintille che Joseph Henry osservava all'apertura dei suoi lunghi avvolgimenti (capitolo 1) mostravano che una bobina può produrre, per un istante, una tensione molto più alta di quella della pila che la alimenta. Nei decenni successivi i costruttori di strumenti sfruttarono questo fatto, insieme alla mutua induzione, per ottenere tensioni altissime da una semplice batteria. Il più famoso di questi apparecchi è il **rocchetto a induzione**, detto anche rocchetto di Ruhmkorff dal nome di Heinrich Ruhmkorff, un costruttore di strumenti tedesco che lavorava a Parigi.

Su un nucleo formato da un fascio di fili di ferro (separati per ridurre le correnti di Foucault) è avvolto un primario di poche spire di filo grosso; sopra, ben isolato, un secondario di moltissime spire di filo sottile, lungo anche chilometri. Un interruttore a lamina, attirato dal nucleo stesso quando la corrente passa, apre il primario, poi ricade e lo richiude, decine di volte al secondo. A ogni apertura il crollo rapidissimo della corrente induce nel secondario un impulso di decine di migliaia di volt, che fa scoccare scintille lunghe diversi centimetri. Alla chiusura, invece, l'autoinduzione del primario rallenta la crescita della corrente, e l'impulso indotto è molto più debole: per questo le scintille scoccano sempre nello stesso verso.

Il rocchetto è stato uno degli strumenti decisivi della fisica dell'Ottocento. Alimentava i tubi a scarica nei gas con cui si studiavano i raggi catodici; con un rocchetto Heinrich Hertz, fra il 1886 e il 1888, produsse le scintille oscillanti che generarono le prime onde elettromagnetiche artificiali (capitolo 5); e con un rocchetto Wilhelm Röntgen alimentava il tubo con cui, nel 1895, scoprì i raggi X (capitolo 6). La bobina di accensione delle automobili ne è la discendente diretta.

DA RICORDARE

Verso l'esame: induttanza ed energia magnetica

Questi argomenti appartengono al nucleo tematico *Forze e campi* (campo elettromagnetico, induzione elettromagnetica) e toccano due obiettivi dei quadri di riferimento: calcolare le f.e.m. e le correnti indotte, e valutare la densità di energia dei campi elettrico e magnetico.

Nei problemi il circuito RL compare spesso con un grafico della corrente da interpretare: si legge τ dal punto in cui la corrente arriva al 63% del valore finale, dall'intersezione della tangente iniziale con l'asintoto, o dalla pendenza del grafico di $\ln i$ (o di $\ln(I - i)$) in funzione del tempo. Poi $L = \tau R$.

Le trappole tipiche: usare RL invece di L/R; dimenticare la resistenza della bobina o del generatore; confondere L (induttanza) e l (lunghezza); scrivere $\frac{1}{2}Li$ invece di $\frac{1}{2}Li^2$; dimenticare che in $L = \mu_0 N^2 S/l$ il numero di spire è al quadrato. Indica sempre il verso delle f.e.m. indotte con la legge di Lenz, a parole.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$N_2\Phi_2 = Mi_1$, $\varepsilon_2 = -M\,\Delta i_1/\Delta t$ — mutua induzione: la variazione della corrente in un circuito induce una f.e.m. in un altro. M (in henry, 1 H = 1 Wb/A = 1 V·s/A) dipende dalla geometria e dai materiali, non dalla corrente; $M_{12} = M_{21}$.

$M = \mu_0 N_1 N_2 S_2/l_1$ — bobina di N_2 spire e area S_2 dentro un solenoide lungo l_1 con N_1 spire.

$N\Phi = Li$, $\varepsilon_L = -L\,\Delta i/\Delta t$ — autoinduzione: un induttore si oppone alle variazioni della propria corrente (legge di Lenz), non alla corrente; a regime in corrente continua è un filo.

$L = \mu_0 N^2 S/l$ — induttanza di un solenoide lungo (con nucleo: $\times\,\mu_r$, che per il ferro non è costante); l è la lunghezza.

$\tau = L/R$ (in secondi, con R resistenza totale) — chiusura: $i = (\varepsilon/R)(1 - e^{-t/\tau})$; apertura su R: $i = Ie^{-t/\tau}$. Dopo τ: 63% (chiusura) o 37% (apertura); dopo 5τ il transitorio è praticamente finito. La corrente in un induttore non cambia mai di colpo.

$U = \frac{1}{2}LI^2$ — energia magnetica di un induttore (in joule), area sotto la retta Li in funzione di i; viene restituita quando la corrente si spegne.

$u_B = B^2/(2\mu_0)$ — densità di energia del campo magnetico nel vuoto (J/m^3); con $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$, l'energia del campo elettromagnetico per unità di volume.

$\varepsilon i = Ri^2 + Li\Delta i/\Delta t$ — bilancio delle potenze nel circuito RL: generatore = effetto Joule + crescita dell'energia magnetica.

SINTESI

- Una corrente variabile in un circuito induce una f.e.m. in un circuito vicino: è la mutua induzione. Il flusso concatenato con il secondo circuito è proporzionale alla corrente nel primo, $N_2\Phi_2 = Mi_1$, e $\varepsilon_2 = -M\Delta i_1/\Delta t$.
- Il coefficiente di mutua induzione M si misura in henry (1 H = 1 Wb/A = 1 Ω·s), dipende dalla geometria e dai materiali, è lo stesso nei due versi; per una bobina dentro un solenoide lungo vale $\mu_0 N_1 N_2 S_2/l_1$.
- La f.e.m. indotta dipende dalla pendenza del grafico della corrente, non dal suo valore: con una corrente costante, per quanto intensa, non c'è induzione.
- Un circuito induce una f.e.m. anche su se stesso (autoinduzione, Henry 1832): $N\Phi = Li$ e $\varepsilon_L = -L\Delta i/\Delta t$. L'induttanza di un solenoide lungo è $\mu_0 N^2 S/l$; un nucleo di ferro la moltiplica per μ_r.
- Per la legge di Lenz un induttore si oppone alle variazioni della corrente, non alla corrente: frena la crescita e la diminuzione, e la corrente in un induttore non può cambiare di colpo. All'apertura di un circuito induttivo la f.e.m. autoindotta può essere molto più grande di quella del generatore e provoca scintille.
- In un circuito RL la corrente cresce come $(\varepsilon/R)(1 - e^{-t/\tau})$ e, all'apertura su un resistore, si spegne come $Ie^{-t/\tau}$, con costante di tempo $\tau = L/R$; le leggi si giustificano con un calcolo a piccoli passi, uguale a quello del circuito RC.
- Dopo τ la corrente è al 63% del valore finale (chiusura) o al 37% di quello iniziale (apertura); la tangente iniziale raggiunge il valore finale al tempo τ. Nel calcolo di τ entra la resistenza totale del circuito.
- Per avviare una corrente I in un induttore il generatore compie un lavoro in più, che resta immagazzinato come energia magnetica $\frac{1}{2}LI^2$: è l'area sotto la retta Li in funzione di i. L'induttanza è l'«inerzia» della corrente.
- L'energia è immagazzinata nel campo, con densità $B^2/(2\mu_0)$. Insieme a $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ dà l'energia per unità di volume del campo elettromagnetico; a parità di volume i campi magnetici ottenibili contengono molta più energia di quelli elettrici.
- Nel circuito RL la potenza del generatore si divide fra l'effetto Joule e la crescita dell'energia magnetica; all'apertura tutta l'energia magnetica si trasforma in calore.
- Mutua induzione e autoinduzione sono alla base della ricarica senza fili, delle etichette RFID, della bobina di accensione e del rocchetto a induzione; in un magnete superconduttore, con $R = 0$, la corrente circola indefinitamente.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● L'henry, unità di misura dell'induttanza, equivale a:
   A. Wb·A
   B. T·m/A
   C. Wb/A
   D. V·A/s

2. ● Un solenoide lungo ha induttanza L. Se, a parità di lunghezza e di sezione, si raddoppia il numero di spire, l'induttanza diventa:
   A. $L/2$
   B. $2L$
   C. L
   D. $4L$

3. ● In un circuito in corrente continua, molto tempo dopo la chiusura dell'interruttore, un induttore ideale si comporta come:
   A. un semplice filo
   B. un circuito aperto
   C. un resistore di resistenza L/t
   D. un generatore che si oppone alla corrente

4. ●● Un circuito RL ha $L = 2{,}0$ H e $R = 50\ \Omega$. La sua costante di tempo è:
   A. 100 s
   B. 25 s
   C. 0,25 s
   D. 40 ms

5. ●● In un circuito RL, chiuso all'istante $t = 0$, dopo un tempo pari alla costante di tempo la corrente vale circa:
   A. il 37% del valore finale
   B. il 63% del valore finale
   C. il 50% del valore finale
   D. il 100% del valore finale

6. ● La f.e.m. autoindotta in una bobina è nulla quando la corrente che la percorre:
   A. è molto intensa
   B. cresce lentamente
   C. è costante, qualunque sia il suo valore
   D. diminuisce lentamente

7. ●● Se la corrente in un induttore raddoppia, l'energia magnetica immagazzinata:
   A. quadruplica
   B. resta la stessa
   C. si dimezza
   D. raddoppia

8. ●● In due regioni di spazio il campo magnetico vale B e $3B$. Il rapporto fra le densità di energia magnetica nella seconda e nella prima regione è:
   A. 3
   B. 9
   C. √3
   D. 6

Vero o falso

9. ● Il coefficiente di mutua induzione di due bobine ferme dipende dall'intensità della corrente che circola nella prima bobina. V / F

10. ● La f.e.m. autoindotta in un induttore si oppone sempre alla corrente che lo percorre. V / F

11. ●● In un circuito RL, nell'istante in cui si chiude l'interruttore, la tensione ai capi dell'induttore è uguale alla f.e.m. del generatore. V / F

12. ●● Inserendo un nucleo di ferro in una bobina, la sua induttanza aumenta. V / F

Applicare

13. ● Un solenoide lungo 25 cm è formato da 500 spire di raggio 2,0 cm. Calcola la sua induttanza.

14. ●● In una bobina di induttanza 0,40 H la corrente diminuisce da 2,0 A a 0,50 A in 30 ms. Calcola il modulo della f.e.m. autoindotta media e di', motivando con la legge di Lenz, se agisce nel verso della corrente o in verso opposto.

15. ● Due bobine hanno un coefficiente di mutua induzione di 12 mH. Nella prima la corrente cresce con rapidità costante di 250 A/s. Quanto vale la f.e.m. indotta nella seconda?

16. ●● Un circuito RL ha $L = 150$ mH, $R = 30\ \Omega$ ed è alimentato da un generatore ideale da 9,0 V. Calcola la costante di tempo, la corrente finale e la corrente 10 ms dopo la chiusura.

17. ● Calcola l'energia immagazzinata in un induttore da 0,25 H percorso da una corrente di 4,0 A.

18. ●● Calcola la densità di energia di un campo magnetico di 1,5 T e l'energia contenuta in una regione di 0,20 m^3 in cui il campo ha questo valore.

19. ● Completa. L'induttanza si misura in _____ ; un induttore di 1 H percorso da una corrente che varia di 1 A al secondo presenta una f.e.m. autoindotta di _____ . La costante di tempo di un circuito RL è _____ e l'energia immagazzinata nell'induttore è _____ .

20. ●● La tabella riporta la corrente in un circuito RL alla chiusura dell'interruttore; la corrente finale è 0,500 A e la resistenza totale è 20 Ω.
t (ms): 0 · 2 · 4 · 6 · 8 · 10
i (A): 0 · 0,197 · 0,316 · 0,388 · 0,432 · 0,459
Ricava la costante di tempo leggendo la tabella e calcola l'induttanza.

Problemi

21. ●●● (Con il capitolo 1.) Un solenoide lungo 40 cm ha 800 spire di raggio 3,0 cm; attorno alla sua parte centrale è avvolta una bobina di 50 spire, chiusa su una resistenza totale di 0,50 Ω. a) Calcola il coefficiente di mutua induzione. b) La corrente nel solenoide scende uniformemente da 4,0 A a zero in 50 ms: calcola la f.e.m. indotta nella bobina e indica, con la legge di Lenz, il verso della corrente indotta. c) Calcola la carica che attraversa la bobina. d) Calcola l'induttanza del solenoide.

22. ●●● Una bobina con induttanza 2,0 H e resistenza 8,0 Ω è collegata a una batteria ideale da 12 V finché la corrente è costante. Poi, con un deviatore, la batteria viene esclusa e la bobina viene chiusa su un resistore da 40 Ω. a) Calcola la corrente iniziale e la costante di tempo dello spegnimento. b) Calcola la tensione ai capi del resistore da 40 Ω subito dopo la commutazione e confrontala con quella della batteria. c) Calcola la corrente 0,10 s dopo la commutazione. d) Calcola l'energia dissipata nel resistore da 40 Ω durante tutto lo spegnimento.

23. ●●● (Con *Fisica 4*, capitoli 12 e 16.) Un solenoide lungo 1,0 m, di raggio 5,0 cm, ha 2000 spire. a) Quale corrente serve per avere all'interno un campo di 0,50 T? b) Calcola l'induttanza e l'energia magnetica immagazzinata, in due modi. c) Calcola l'energia del campo elettrico in un condensatore che occupasse lo stesso volume, con un campo uguale alla rigidità dielettrica dell'aria, $3{,}0 \times 10^6$ V/m. d) Commenta il rapporto fra le due energie.

24. ●●● Un circuito RL ha $\mathcal{E} = 12$ V, $R = 6{,}0\ \Omega$ e $L = 0{,}50$ H. All'istante $t = \tau$ dopo la chiusura calcola: a) la corrente e la rapidità con cui cresce; b) la potenza erogata dal generatore; c) la potenza dissipata nel resistore; d) la rapidità con cui aumenta l'energia magnetica, e verifica il bilancio delle potenze.

25. ●●● Un toroide ha 1000 spire avvolte su un anello di raggio medio 10 cm e sezione 1,0 cm^2, piccola rispetto al raggio. a) Usando il campo del toroide, $B = \mu_0 NI/(2\pi r)$ (*Fisica 4*, capitolo 16), ricava la sua induttanza. b) Quanto diventa con un nucleo di ferrite con $\mu_r = 2000$, supponendo μ_r costante? c) Con il nucleo, quale corrente immagazzina un'energia di 1,0 mJ? Quanto vale allora il campo nel nucleo?

26. ●● Una bobina con induttanza 1,2 H è percorsa da 0,50 A quando si apre l'interruttore, e la corrente si annulla in circa 1,0 ms. a) Calcola la f.e.m. autoindotta media. b) Calcola l'energia che si libera. c) La rigidità dielettrica dell'aria è circa 3×10^6 V/m: fino a quale distanza fra i contatti questa tensione può far scoccare una scintilla?

27. ●● In un caricatore senza fili la corrente nella bobina della base cresce linearmente da −1,5 A a +1,5 A in 2,5 μs. Il coefficiente di mutua induzione fra la bobina della base e quella del telefono è 6,0 μH. Calcola la f.e.m. indotta nella bobina del telefono in quell'intervallo. Che cosa succede alla f.e.m. se il telefono viene spostato di lato?

28. ●●● (Con *Fisica 2*, i passaggi di stato.) Il magnete di uno scanner per la risonanza magnetica produce un campo di 3,0 T in una regione di circa 0,50 m^3. a) Calcola la densità di energia e l'energia magnetica contenuta in quella regione. b) Confrontala con l'energia cinetica di un'automobile di 1200 kg a 50 km/h. c) In un *quench* questa energia diventa calore che fa evaporare l'elio liquido del magnete, a 4,2 K. Il calore latente di vaporizzazione dell'elio è circa 21 kJ/kg e la sua densità allo stato liquido è circa 125 kg/m^3: quanti litri di elio liquido può far evaporare?

Ragionare e argomentare

29. ●● Trova l'errore. «Un circuito ha $R = 10\ \Omega$ e $L = 0{,}20$ H, quindi la costante di tempo è $RL = 2{,}0$ s: la corrente arriva a metà del valore finale dopo 2,0 s.» Correggi il ragionamento e i numeri.

30. ● Stima l'energia del campo magnetico terrestre (circa 5×10^{-5} T) contenuta nella tua aula. Con quale altra energia della vita quotidiana è confrontabile?

31. ●●● Progetta un esperimento per verificare che l'induttanza di una bobina cresce con il quadrato del numero di spire, usando la misura della costante di tempo di un circuito RL. Indica il materiale, le grandezze da tenere costanti, le misure, il grafico da costruire e il risultato atteso; spiega come tieni conto della resistenza del filo, che cambia con il numero di spire.

Verso l'esame di Stato

32. ●●● **Quesito.** Una bobina è collegata in serie a un resistore da 20 Ω e a un generatore da 6,0 V di resistenza interna trascurabile. All'istante $t = 0$ si chiude l'interruttore e un sensore registra la corrente (dati tipici):
t (ms): 0 · 5 · 10 · 15 · 20 · 30 · 45 · 60 · a regime
i (mA): 0 · 71 · 122 · 157 · 185 · 216 · 237 · 247 · 250
a) Ricava la resistenza della bobina. b) Mostra che $\ln(1 - i/I)$, dove I è la corrente a regime, è una funzione lineare del tempo e ricava dalla sua pendenza la costante di tempo; confrontala con la lettura «al 63%». c) Calcola l'induttanza, la rapidità di crescita iniziale della corrente e la tensione ai capi dell'induttore all'istante τ. d) Calcola l'energia immagazzinata a regime e spiega perché è pericoloso aprire di colpo l'interruttore, proponendo una soluzione.

33. ●●● **Problema.** (Con il capitolo 1.) La bobina di accensione di un'automobile ha un primario con $N_1 = 200$ spire, induttanza $L_1 = 4{,}0$ mH e resistenza 1,5 Ω, alimentato da una batteria da 12 V (si trascuri la sua resistenza interna), e un secondario con $N_2 = 15\,000$ spire avvolto sullo stesso nucleo; si supponga che tutte le linee del campo restino nel nucleo. a) Calcola la costante di tempo del primario e la corrente che raggiunge se l'interruttore resta chiuso per 3,0 ms; calcola l'energia magnetica immagazzinata in quell'istante. b) All'apertura la corrente del primario si annulla in 50 μs: calcola la f.e.m. media indotta nel primario e quella indotta nel secondario, usando il rapporto fra le spire, e verifica il risultato con il coefficiente di mutua induzione. c) Spiega con la legge di Lenz perché la f.e.m. nel primario, all'apertura, tende a mantenere la corrente, e perché il secondario dà una f.e.m. solo all'apertura e alla chiusura, non mentre la corrente è costante. d) Argomenta perché la tensione del secondario non può essere ottenuta dalla batteria con un circuito di soli resistori, e da che cosa dipende l'energia disponibile per la scintilla.

PER APPROFONDIRE

- [FAR] M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity*: le serie in cui Faraday studia l'«extracorrente» all'apertura dei circuiti con lunghe bobine e riconosce che si tratta di induzione di una corrente su se stessa.
- [MAX] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, vol. II: i capitoli sull'induzione, dove l'energia di un sistema di correnti è trattata, proprio come in questo capitolo, in analogia con l'energia cinetica di un sistema meccanico.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. II: i capitoli sull'induttanza e sull'energia del campo magnetico, con una discussione chiara di «dove» si trovi l'energia.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sull'induttanza, con molti esercizi sui circuiti RL e sulla densità di energia magnetica.
- [TAY] J. R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*: la linearizzazione di una legge esponenziale e la stima della pendenza con la sua incertezza, utili per la relazione sul circuito RL.

Glossario del capitolo

Accoppiamento perfetto
Situazione in cui tutte le linee del campo prodotto da un avvolgimento attraversano anche l'altro; allora le f.e.m. indotte stanno come i numeri di spire e $M = (N_2/N_1)L_1$.

Autoinduzione
Comparsa in un circuito di una f.e.m. indotta dalla variazione della sua stessa corrente.

Bobina di accensione
Coppia di avvolgimenti su un nucleo di ferro che, all'apertura del primario, induce nel secondario la tensione di decine di migliaia di volt necessaria alla scintilla delle candele.

Circuito RL
Circuito con un resistore e un induttore; alla chiusura la corrente cresce verso ε/R e all'apertura su un resistore si spegne, in modo esponenziale, con costante di tempo L/R.

Coefficiente di mutua induzione
Costante M che lega il flusso concatenato con un circuito alla corrente in un altro: $N_2\Phi_2 = Mi_1$. Dipende dalla geometria e dai materiali; è lo stesso nei due versi.

Densità di energia del campo magnetico
Energia per unità di volume immagazzinata in un campo magnetico nel vuoto: $B^2/(2\mu_0)$, in J/m^3.

Diodo di ricircolo
Diodo collegato in parallelo a una bobina che, all'apertura del circuito, offre alla corrente un percorso chiuso ed evita la sovratensione e le scintille.

Energia magnetica
Energia immagazzinata nel campo magnetico di un induttore percorso dalla corrente I: $\frac{1}{2}LI^2$.

Extracorrente di apertura
Corrente che continua a scorrere, spesso attraverso una scintilla, quando si apre un circuito induttivo, sostenuta dalla f.e.m. autoindotta.

Forza elettromotrice autoindotta
F.e.m. $\varepsilon_L = -L\Delta i/\Delta t$ che compare in un circuito quando la sua corrente varia; si oppone alla variazione (legge di Lenz).

Henry
Unità di misura dell'induttanza e della mutua induttanza: 1 H = 1 Wb/A = 1 V·s/A = 1 Ω·s.

Induttanza
Costante L che lega il flusso concatenato con un circuito alla sua corrente, $N\Phi = Li$; per un solenoide lungo $L = \mu_0 N^2 S/l$.

Induttore
Componente, di solito una bobina con molte spire, costruito per avere un'induttanza rilevante; si oppone alle variazioni della corrente.

Mutua induzione
Comparsa di una f.e.m. indotta in un circuito a causa della variazione della corrente in un altro circuito vicino, senza contatto elettrico fra i due.

Rocchetto a induzione
Strumento ottocentesco (detto anche di Ruhmkorff) in cui l'interruzione periodica della corrente in un primario induce in un secondario di molte spire impulsi di altissima tensione.

Transitorio
Intervallo di tempo, dopo una variazione brusca (come la chiusura di un interruttore), in cui le correnti e le tensioni di un circuito passano dai valori iniziali a quelli di regime.

Soluzioni

1. C. Da $N\Phi = L\,i$: $L = N\Phi/i$, quindi 1 H = 1 Wb/A (= 1 V·s/A = 1 Ω·s).

2. D. $L = \mu_0 N^2 S/l$: l'induttanza è proporzionale al quadrato del numero di spire, $(2N)^2 = 4N^2$.

3. A. A regime la corrente è costante, $\Delta i/\Delta t = 0$, e la f.e.m. autoindotta è nulla: l'induttore ideale è un filo (quello reale, un resistore pari alla resistenza del suo filo).

4. D. $\tau = L/R = 2{,}0\text{ H}/50\ \Omega = 0{,}040\text{ s} = 40\text{ ms}$.

5. B. $i/I = 1 - e^{-1} = 0{,}63$.

6. C. La f.e.m. autoindotta è $-L\Delta i/\Delta t$: dipende dalla variazione della corrente, non dal suo valore.

7. A. $U = \frac{1}{2}Li^2$: con la corrente doppia l'energia è $2^2 = 4$ volte più grande.

8. B. $u_B = B^2/(2\mu_0) \propto B^2$: $(3B)^2/B^2 = 9$.

9. F. Il campo, e quindi il flusso concatenato, è proporzionale alla corrente: il rapporto $M = N_2\Phi_2/i_1$ dipende solo dalla geometria e dai materiali (con un nucleo di ferro vicino alla saturazione, però, non sarebbe più costante).

10. F. Si oppone alle variazioni della corrente: quando la corrente diminuisce agisce nel suo stesso verso, per mantenerla.

11. V. All'istante iniziale $i = 0$, quindi $Ri = 0$ e per la legge delle maglie tutta la f.e.m. ε si trova ai capi dell'induttore.

12. V. Il campo interno, e con lui il flusso concatenato a parità di corrente, è moltiplicato per μ_r, che per il ferro è molto maggiore di 1.

13. $S = \pi(0{,}020\text{ m})^2 = 1{,}26 \times 10^{-3}\text{ m}^2$; $L = \mu_0 N^2 S/l = 4\pi \times 10^{-7}\text{ T·m/A} \times 500^2 \times 1{,}26 \times 10^{-3}\text{ m}^2/0{,}25\text{ m} = 1{,}6 \times 10^{-3}\text{ H} = 1{,}6\text{ mH}$.

14. $|\varepsilon_L| = L|\Delta i|/\Delta t = 0{,}40\text{ H} \times 1{,}5\text{ A}/0{,}030\text{ s} = 20\text{ V}$. Per la legge di Lenz la f.e.m. si oppone alla diminuzione della corrente: agisce nel verso della corrente.

15. $|\varepsilon_2| = M\Delta i_1/\Delta t = 0{,}012\text{ H} \times 250\text{ A/s} = 3{,}0\text{ V}$.

16. $\tau = L/R = 0{,}150\text{ H}/30\ \Omega = 5{,}0\text{ ms}$; $I = \varepsilon/R = 9{,}0\text{ V}/30\ \Omega = 0{,}30\text{ A}$; dopo 10 ms = 2τ: $i = 0{,}30\text{ A} \times (1 - e^{-2}) = 0{,}30\text{ A} \times 0{,}865 = 0{,}26\text{ A}$.

17. $U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}25\text{ H} \times (4{,}0\text{ A})^2 = 2{,}0\text{ J}$.

18. $u = B^2/(2\mu_0) = (1{,}5\text{ T})^2/(2 \times 4\pi \times 10^{-7}\text{ T·m/A}) = 9{,}0 \times 10^5\text{ J/m}^3$; $U = u \times V = 9{,}0 \times 10^5\text{ J/m}^3 \times 0{,}20\text{ m}^3 = 1{,}8 \times 10^5\text{ J}$.

19. henry (H); 1 V; L/R (in secondi, con R resistenza totale del circuito); $\frac{1}{2}LI^2$.

20. Dopo una costante di tempo la corrente è il 63% di quella finale: 0,632 × 0,500 A = 0,316 A, che nella tabella si legge a 4 ms. Quindi $\tau = 4{,}0\text{ ms}$ e $L = \tau R = 4{,}0 \times 10^{-3}\text{ s} \times 20\ \Omega = 0{,}080\text{ H} = 80\text{ mH}$. (Controllo: a 8 ms = 2τ la tabella dà 0,432 A = 0,865 × 0,500 A, come previsto.)

21. Principi usati: il campo del solenoide lungo, la definizione di M, la legge di Faraday-Neumann-Lenz e la carica indotta $Q = N\Delta\Phi/R$ (capitolo 1). a) La bobina avvolta attorno al solenoide è attraversata dal campo solo nella sezione del solenoide: $S = \pi(0{,}030\text{ m})^2 = 2{,}83 \times 10^{-3}\text{ m}^2$; $M = \mu_0 N_1 N_2 S/l = 4\pi \times 10^{-7} \times 800 \times 50 \times 2{,}83 \times 10^{-3}/0{,}40\text{ H} = 3{,}6 \times 10^{-4}\text{ H}$. b) $\Delta i_1/\Delta t = -4{,}0\text{ A}/0{,}050\text{ s} = -80\text{ A/s}$; $|\varepsilon_2| = 3{,}55 \times 10^{-4}\text{ H} \times 80\text{ A/s} = 2{,}8 \times 10^{-2}\text{ V} = 28\text{ mV}$. Per la legge di Lenz la corrente indotta si oppone alla diminuzione del flusso: circola nella bobina nello stesso verso della corrente del solenoide. c) $Q = M|\Delta i_1|/R = 3{,}55 \times 10^{-4}\text{ H} \times 4{,}0\text{ A}/0{,}50\ \Omega = 2{,}8 \times 10^{-3}\text{ C}$. d) $L_1 = \mu_0 N_1^2 S/l = 4\pi \times 10^{-7} \times 800^2 \times 2{,}83 \times 10^{-3}/0{,}40\text{ H} = 5{,}7 \times 10^{-3}\text{ H} = 5{,}7\text{ mH}$.

22. Principi usati: la legge di Ohm a regime (l'induttore è un filo), la legge dell'apertura del circuito RL con la resistenza totale, la conservazione dell'energia. a) $I = 12\text{ V}/8{,}0\ \Omega = 1{,}5\text{ A}$. Dopo la commutazione la corrente scorre nella bobina e nel resistore in serie: $\tau = L/(R_b + R) = 2{,}0\text{ H}/48\ \Omega = 0{,}042\text{ s} = 42\text{ ms}$. b) La corrente nell'induttore non può cambiare di

colpo: subito dopo la commutazione è ancora 1,5 A, e sul resistore ci sono 40 Ω × 1,5 A = 60 V, cinque volte la tensione della batteria; la f.e.m. autoindotta vale in quell'istante 48 Ω × 1,5 A = 72 V. c) $i = 1{,}5\ \text{A} \times e^{-0{,}10/0{,}0417} = 1{,}5\ \text{A} \times e^{-2{,}4} = 0{,}14$ A. d) L'energia magnetica iniziale, $\frac{1}{2} \times 2{,}0\ \text{H} \times (1{,}5\ \text{A})^2 = 2{,}25$ J, si dissipa tutta per effetto Joule nelle due resistenze, attraversate dalla stessa corrente: si divide in proporzione alle resistenze. Nel resistore da 40 Ω: 2,25 J × 40/48 = 1,9 J (il resto, 0,38 J, nel filo della bobina).

23. Principi usati: il campo del solenoide (*Fisica 4*, capitolo 16), l'energia magnetica e la sua densità, la densità di energia del campo elettrico (*Fisica 4*, capitolo 12). a) $I = Bl/(\mu_0 N) = 0{,}50\ \text{T} \times 1{,}0\ \text{m}/(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T·m/A} \times 2000) = 2{,}0 \times 10^2$ A. b) $S = \pi(0{,}050\ \text{m})^2 = 7{,}85 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$; $L = \mu_0 N^2 S/l = 3{,}9 \times 10^{-2}$ H; $U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \times 3{,}95 \times 10^{-2}\ \text{H} \times (199\ \text{A})^2 = 7{,}8 \times 10^2$ J. Secondo modo: $u_B = (0{,}50\ \text{T})^2/(2\mu_0) = 9{,}95 \times 10^4\ \text{J/m}^3$, per il volume $7{,}85 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$: $7{,}8 \times 10^2$ J. c) $u_E = \frac{1}{2} \times 8{,}85 \times 10^{-12} \times (3{,}0 \times 10^6)^2\ \text{J/m}^3 = 40\ \text{J/m}^3$; $U_E = 40\ \text{J/m}^3 \times 7{,}85 \times 10^{-3}\ \text{m}^3 = 0{,}31$ J. d) Il rapporto è circa $2{,}5 \times 10^3$: nello stesso volume il campo magnetico, con valori facili da ottenere, immagazzina migliaia di volte più energia del campo elettrico più intenso che l'aria sopporta. (Il rapporto è $(Bc/E)^2 = (0{,}50 \times 3{,}0 \times 10^8/3{,}0 \times 10^6)^2 = 2500$, perché $1/(\varepsilon_0\mu_0) = c^2$, come vedrai nel capitolo 5.) Il prezzo è la corrente di 200 A, che in un filo di rame dissiperebbe molta potenza: per questo i solenoidi intensi sono superconduttori.

24. Principi usati: le leggi della chiusura del circuito RL e la legge delle maglie moltiplicata per i. $\tau = 0{,}50\ \text{H}/6{,}0\ \Omega = 83$ ms, $I = 12\ \text{V}/6{,}0\ \Omega = 2{,}0$ A. a) $i = 2{,}0\ \text{A} \times (1 - e^{-1}) = 1{,}26$ A; $v_L = 12\ \text{V} \times e^{-1} = 4{,}41$ V, quindi $\Delta i/\Delta t = v_L/L = 8{,}8$ A/s. b) $\varepsilon i = 12\ \text{V} \times 1{,}26\ \text{A} = 15{,}2$ W. c) $Ri^2 = 6{,}0\ \Omega \times (1{,}26\ \text{A})^2 = 9{,}6$ W. d) $\Delta U/\Delta t = Li\Delta i/\Delta t = iv_L = 1{,}26\ \text{A} \times 4{,}41\ \text{V} = 5{,}6$ W. Bilancio: 9,6 W + 5,6 W = 15,2 W, uguale alla potenza del generatore.

25. a) Il flusso concatenato è $NBS = \mu_0 N^2 SI/(2\pi r)$, quindi $L = \mu_0 N^2 S/(2\pi r) = 4\pi \times 10^{-7} \times 1000^2 \times 1{,}0 \times 10^{-4}/(2\pi \times 0{,}10)\ \text{H} = 2{,}0 \times 10^{-4}\ \text{H} = 0{,}20$ mH. È la formula del solenoide con $l = 2\pi r$, la lunghezza della circonferenza media. b) $L = 2000 \times 0{,}20\ \text{mH} = 0{,}40$ H. c) Da $U = \frac{1}{2}LI^2$: $I = \sqrt{(2U/L)} = \sqrt{(2 \times 1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{J}/0{,}40\ \text{H})} = 7{,}1 \times 10^{-2}\ \text{A} = 71$ mA. Il campo nel nucleo è $\mu_r\mu_0 NI/(2\pi r) = 2000 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 1000 \times 0{,}0707/(2\pi \times 0{,}10)\ \text{T} = 0{,}28$ T, già vicino alla saturazione tipica delle ferriti, dell'ordine di qualche decimo di tesla: l'ipotesi di μ_r costante è al limite della sua validità.

26. a) $|\varepsilon_L| \approx LI/\Delta t = 1{,}2\ \text{H} \times 0{,}50\ \text{A}/1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{s} = 6{,}0 \times 10^2$ V, nel verso della corrente (legge di Lenz). b) $U = \frac{1}{2} \times 1{,}2\ \text{H} \times (0{,}50\ \text{A})^2 = 0{,}15$ J. c) $d \approx 600\ \text{V}/(3 \times 10^6\ \text{V/m}) = 2 \times 10^{-4}\ \text{m} = 0{,}2$ mm: proprio la distanza dei contatti nei primi istanti dell'apertura, quando la scintilla scocca.

27. $\Delta i_1/\Delta t = 3{,}0\ \text{A}/2{,}5 \times 10^{-6}\ \text{s} = 1{,}2 \times 10^6$ A/s; $|\varepsilon_2| = 6{,}0 \times 10^{-6}\ \text{H} \times 1{,}2 \times 10^6\ \text{A/s} = 7{,}2$ V. Spostando il telefono di lato, meno linee del campo della base attraversano la sua bobina: M diminuisce e con lui la f.e.m. indotta (e la potenza trasferita).

28. a) $u = (3{,}0\ \text{T})^2/(2 \times 4\pi \times 10^{-7}\ \text{T·m/A}) = 3{,}6 \times 10^6\ \text{J/m}^3$; $U = 3{,}6 \times 10^6\ \text{J/m}^3 \times 0{,}50\ \text{m}^3 = 1{,}8 \times 10^6$ J. b) $v = 50\ \text{km/h} = 13{,}9$ m/s; $K = \frac{1}{2} \times 1200\ \text{kg} \times (13{,}9\ \text{m/s})^2 = 1{,}2 \times 10^5$ J: l'energia del magnete è circa 15 volte maggiore. c) Massa di elio: $m = U/L_v = 1{,}8 \times 10^6\ \text{J}/(21 \times 10^3\ \text{J/kg}) = 85$ kg; volume: $85\ \text{kg}/(125\ \text{kg/m}^3) = 0{,}68\ \text{m}^3 \approx 7 \times 10^2$ litri. Per questo un *quench* produce una grande nube di elio gassoso, che va portata fuori dall'edificio.

29. Due errori. La costante di tempo è L/R, non RL (che si misurerebbe in Ω·H, non in secondi): $\tau = 0{,}20\ \text{H}/10\ \Omega = 0{,}020\ \text{s} = 20$ ms. E dopo τ la corrente è al 63% del valore finale, non al 50%; la metà si raggiunge dopo $\tau \ln 2 = 0{,}69 \times 20\ \text{ms} = 14$ ms.

30. Traccia di risposta. Un'aula di 8 m × 6 m × 3,5 m ha un volume di circa 170–200 m^3; $u = (5 \times 10^{-5}\ \text{T})^2/(2\mu_0) \approx 1 \times 10^{-3}\ \text{J/m}^3$, quindi $U \approx 0{,}2$ J: circa l'energia che serve per sollevare una mela di 200 g di 10 cm, o quella che una lampada da 10 W consuma in due centesimi di secondo. Il campo terrestre è debole, ma occupa un volume enorme: nell'insieme la sua energia è grandissima.

31. Traccia di risposta. Si avvolgono su uno stesso tubo di cartone, lungo e sottile, bobine con numeri di spire diversi (per esempio 100, 200, 300, 400) sulla stessa lunghezza, con lo stesso filo; oppure una bobina con prese intermedie. Si tengono costanti la lunghezza dell'avvolgimento, la sezione e il resistore in serie. Per ciascuna bobina si misura con

l'ohmmetro la resistenza del filo, che cresce con il numero di spire, e con un'onda quadra e l'oscilloscopio la costante di tempo τ dello spegnimento (dal grafico linearizzato). Si calcola $L = \tau R_{tot}$, con R_{tot} = resistore + filo + resistenza di uscita del generatore. Il grafico di L in funzione di N^2 deve essere una retta per l'origine, con pendenza vicina a $\mu_0 S/l$; in alternativa il grafico di ln L in funzione di ln N deve avere pendenza 2. Con bobine senza nucleo le induttanze sono piccole (millihenry) e le costanti di tempo di qualche decina di microsecondi: serve un oscilloscopio, e un resistore piccolo.

32. a) A regime l'induttore è un filo: R_{tot} = 6,0 V/0,250 A = 24 Ω, quindi la bobina ha resistenza 24 Ω − 20 Ω = 4,0 Ω. b) Dalla legge $i = I(1 - e^{-t/\tau})$ segue $1 - i/I = e^{-t/\tau}$ e $\ln(1 - i/I) = -t/\tau$: una retta per l'origine con pendenza $-1/\tau$. Con i dati: 5 ms → ln 0,716 = −0,334; 10 ms → −0,669; 15 ms → −0,989; 20 ms → −1,347; 30 ms → −1,995; 45 ms → −2,957. I punti sono allineati; la pendenza di miglior accordo è −0,0657 ms^{-1}, quindi τ = 15 ms (15,2 ms). Lettura al 63%: 0,632 × 250 mA = 158 mA, che si raggiunge a circa 15 ms: le due stime concordano. (Il punto a 60 ms, vicino al valore di regime, è il più incerto: 247 mA ± 1 mA dà $1 - i/I$ = 0,012 ± 0,004, e conviene escluderlo dal calcolo della pendenza.) c) $L = \tau R_{tot}$ = 0,015 s × 24 Ω = 0,36 H. Rapidità iniziale: ε/L = 6,0 V/0,36 H = 17 A/s (= I/τ). All'istante τ: $v_L = \varepsilon e^{-1}$ = 2,2 V. d) U = ½ × 0,36 H × (0,250 A)^2 = 1,1 × 10^{-2} J. Aprendo di colpo l'interruttore la corrente dovrebbe annullarsi in un tempo brevissimo: la f.e.m. autoindotta, $L\Delta i/\Delta t$, diventa molto grande (per esempio 0,36 H × 0,25 A/10 μs = 9 kV) e fa scoccare una scintilla fra i contatti, che si consumano, o danneggia l'elettronica. Soluzione: un diodo (o un resistore) in parallelo alla bobina, che offre alla corrente un percorso chiuso: la corrente si spegne con costante di tempo L/R e l'energia si dissipa nel resistore e nel filo. Indicatori: a) Analizzare; b) Interpretare/elaborare i dati; c) Sviluppare il processo risolutivo; d) Argomentare.

33. a) Per la legge della chiusura del circuito RL: $\tau_1 = L_1/R_1$ = 4,0 × 10^{-3} H/1,5 Ω = 2,7 ms; la corrente finale sarebbe 12 V/1,5 Ω = 8,0 A; dopo 3,0 ms (t/τ = 1,125): i = 8,0 A × (1 − $e^{-1,125}$) = 8,0 A × 0,675 = 5,4 A. Energia magnetica: U = ½ × 4,0 × 10^{-3} H × (5,4 A)^2 = 5,8 × 10^{-2} J = 58 mJ. b) Per l'autoinduzione: $|\varepsilon_1| = L_1\Delta i/\Delta t$ = 4,0 × 10^{-3} H × 5,4 A/50 × 10^{-6} s = 4,3 × 10^2 V. Poiché il flusso per spira è lo stesso nei due avvolgimenti, le f.e.m. stanno come i numeri di spire: $|\varepsilon_2|$ = (15 000/200) × 432 V = 75 × 432 V = 3,2 × 10^4 V. Verifica: $M = (N_2/N_1)L_1$ = 75 × 4,0 mH = 0,30 H, e $M\Delta i/\Delta t$ = 0,30 H × 5,4 A/50 × 10^{-6} s = 3,2 × 10^4 V. c) All'apertura la corrente e il flusso diminuiscono; per la legge di Lenz la f.e.m. indotta nel primario si oppone alla diminuzione, cioè agisce nel verso della corrente e tende a mantenerla (per questo serve un interruttore capace di sopportare centinaia di volt). Nel secondario la f.e.m. è $-M\Delta i_1/\Delta t$: è diversa da zero solo mentre la corrente del primario cambia, cioè alla chiusura (dove la crescita è lenta, con τ = 2,7 ms, e la f.e.m. modesta: al massimo M × 12 V/L_1 = 0,90 kV, insufficiente per la scintilla) e soprattutto all'apertura; a corrente costante il flusso non cambia e non c'è induzione. d) Un circuito di soli resistori alimentato a 12 V non può avere in nessun punto una differenza di potenziale maggiore di 12 V. La bobina invece accumula energia nel campo magnetico per qualche millisecondo, con la potenza modesta della batteria, e la restituisce in qualche decina di microsecondi: la potenza media in quell'intervallo è dell'ordine di 58 mJ/50 μs ≈ 1 kW, e la tensione può crescere quanto serve perché la corrente trovi una strada attraverso la candela. L'energia disponibile per la scintilla è al più quella immagazzinata, $\frac{1}{2}L_1 i^2$: dipende dall'induttanza e dalla corrente raggiunta, quindi dal tempo per cui l'interruttore resta chiuso rispetto a τ. Indicatori: a) Sviluppare il processo risolutivo; b) Analizzare e Sviluppare il processo risolutivo; c) Argomentare; d) Argomentare.