CAPITOLO

14

I circuiti elettrici

Ogni circuito racconta due volte la stessa storia: nei nodi la carica non si perde, lungo le maglie non si perde l'energia.

OBIETTIVI

1. Calcolare la resistenza equivalente di resistori in serie e in parallelo e risolvere reti miste riducendole passo per passo.
2. Usare i partitori di tensione e di corrente e confrontare le potenze dissipate in serie e in parallelo.
3. Applicare le leggi dei nodi e delle maglie, con le regole dei segni, a circuiti con due maglie e più generatori.
4. Descrivere un generatore reale con la sua resistenza interna e trovare la condizione di massimo trasferimento di potenza.
5. Spiegare come si costruiscono amperometri e voltmetri e stimare quanto disturbano il circuito.
6. Descrivere la carica e la scarica di un condensatore in un circuito RC e usare la costante di tempo.

INDICE DEL CAPITOLO

14.1 Circuiti, resistori in serie e in parallelo 2
14.2 Le leggi di Kirchhoff 8
14.3 Il generatore reale 11
14.4 Gli strumenti di misura 16
14.5 Il circuito RC 18

Fisica 4 · Parte IV · La corrente elettrica · versione 1.0
Capitolo 14: I circuiti elettrici · pagine 411–440 del volume completo · estratto per lo studio

Apri il retro di una vecchia radio, di un caricabatterie o di un telecomando: troverai una piccola città di componenti saldati su una basetta verde, collegati da piste di rame. Sembra un groviglio, ma è costruito con pochi mattoni ripetuti molte volte: generatori, resistori, condensatori, fili. Lo stesso vale per l'impianto elettrico di casa, per il circuito che accende i fari di un'automobile e per il defibrillatore appeso nell'atrio di una stazione.

Nel capitolo precedente hai studiato la corrente in un singolo conduttore: la sua intensità, il modello microscopico, le leggi di Ohm e l'effetto Joule. In questo capitolo metti insieme più elementi. Imparerai a sostituire una rete di resistori con un solo resistore equivalente, a risolvere un circuito qualsiasi con le due leggi di Kirchhoff, che non sono altro che la conservazione della carica e dell'energia, a tenere conto della resistenza interna di una pila, a capire come sono fatti gli strumenti di misura e quanto disturbano ciò che misurano. Infine guarderai un circuito in cui la corrente cambia nel tempo: un condensatore che si carica e si scarica attraverso un resistore.

14.1 Circuiti, resistori in serie e in parallelo

14.1.1 Gli elementi di un circuito e i loro simboli

Per ragionare su un circuito non serve disegnarne l'aspetto reale: basta uno schema elettrico, in cui ogni componente è rappresentato da un simbolo normalizzato e i fili sono linee. I simboli che userai in questo libro sono quelli della Figura 14.1, conformi alle norme internazionali usate nelle scuole italiane: il resistore è un rettangolo, il generatore ha la piastra lunga sul polo positivo e quella corta sul polo negativo, il condensatore è formato da due piastre parallele. Un filo disegnato in uno schema è ideale: la sua resistenza è trascurabile, e tutti i suoi punti sono allo stesso potenziale.

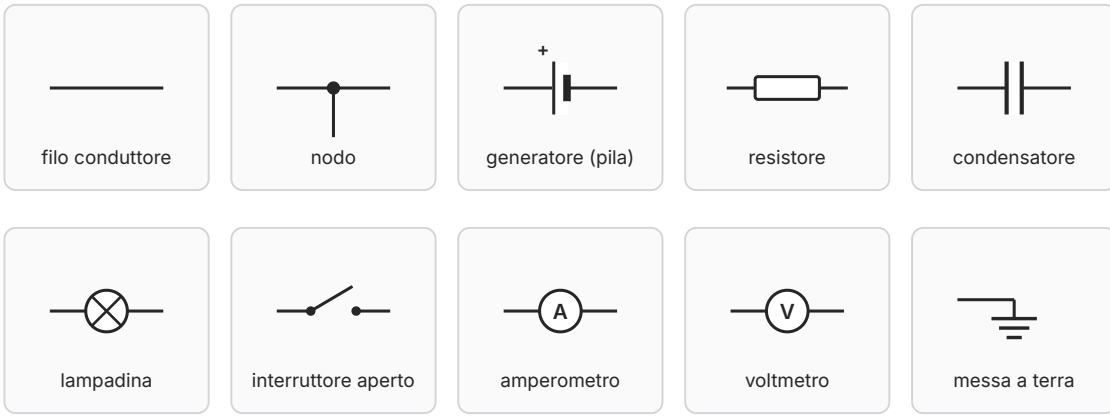


Figura 14.1 I simboli dei componenti più comuni. Nel simbolo del generatore la piastra lunga e sottile è il polo positivo, quella corta e spessa il polo negativo. Un punto pieno indica un collegamento fra fili; due linee che si incrociano senza punto non sono collegate.

Per descrivere la struttura di un circuito si usano tre parole. Un **nodo** è un punto in cui si collegano tre o più conduttori. Un **ramo** è un tratto di circuito compreso fra due nodi, senza altri nodi al suo interno: in tutti i suoi elementi passa la stessa corrente. Una **maglia** è un percorso chiuso formato da rami, che parte da un nodo e vi ritorna senza passare due volte per lo stesso punto. Il circuito più semplice, una pila con una lampadina, ha una sola maglia e nessun nodo.

14.1.2 Resistori in serie

Come i condensatori del capitolo 12, anche i resistori si possono collegare in serie o in parallelo. Due o più resistori sono collegati in serie quando si trovano uno dopo l'altro sullo stesso ramo, così che la carica che attraversa il primo deve attraversare anche tutti gli altri. Poiché la carica si conserva e, in regime stazionario, non si accumula in nessun punto del filo, in ogni secondo attraversa ciascun resistore la stessa quantità di carica: **la corrente è la stessa in tutti i resistori in serie**.

L'energia ceduta da ogni coulomb di carica che attraversa l'intera serie è la somma delle energie cedute in ciascun resistore. Poiché la differenza di potenziale è l'energia per unità di carica, le differenze di potenziale si sommano: $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3$. Per la prima legge di Ohm, $\Delta V_k = R_k I$, quindi

$$\Delta V = R_1 I + R_2 I + R_3 I = (R_1 + R_2 + R_3)\, I$$

La serie si comporta come un unico resistore, che con la stessa differenza di potenziale fa passare la stessa corrente. La sua resistenza si chiama **resistenza equivalente**, e per resistori in serie vale

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$

La resistenza equivalente di una serie è maggiore della più grande delle resistenze. Aggiungere un resistore in serie è come allungare il conduttore (seconda legge di Ohm).

14.1.3 Resistori in parallelo

Due o più resistori sono collegati in parallelo quando i loro estremi sono collegati agli stessi due nodi. Fra quei due nodi c'è una sola differenza di potenziale, quindi **la differenza di potenziale è la stessa ai capi di tutti i resistori in parallelo**. La corrente che arriva al nodo si divide fra i rami, e per la conservazione della carica la somma delle correnti nei rami è uguale alla corrente che entra nel nodo:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} + \frac{\Delta V}{R_3} = \Delta V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

Il parallelo equivale quindi a un resistore che soddisfa $I = \Delta V/R_{eq}$, con

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

La resistenza equivalente di un parallelo è minore della più piccola delle resistenze: ogni ramo in più offre alla corrente una strada in più, come aggiungere corsie a un'autostrada, o come aumentare la sezione nella seconda legge di Ohm. Per due soli resistori conviene la forma $R_{eq} = R_1R_2/(R_1 + R_2)$, «prodotto diviso somma»; per n resistori uguali di resistenza R, $R_{eq} = R/n$.

14.1.4 Partitore di tensione e partitore di corrente

In una serie di due resistori la differenza di potenziale totale si divide in parti proporzionali alle resistenze. Infatti $I = \Delta V/(R_1 + R_2)$, e quindi

$$\Delta V_1 = \Delta V \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad \Delta V_2 = \Delta V \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Questo circuito si chiama **partitore di tensione**: serve a ottenere, da un generatore, una tensione più piccola e scelta a piacere.

In un parallelo di due resistori, invece, la corrente si divide in parti inversamente proporzionali alle resistenze: passa più corrente dove la resistenza è minore. Poiché $R_1I_1 = R_2I_2 = R_{eq}I$,

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

È il **partitore di corrente**. Attenzione allo scambio degli indici: nella corrente di un ramo compare al numeratore la resistenza dell'*altro* ramo.

ERRORE FREQUENTE

«La lampadina più potente fa sempre più luce»

Su una lampadina a filamento c'è scritto, per esempio, «230 V, 100 W»: sono i valori di funzionamento quando è collegata da sola alla rete. Collegata in parallelo con una lampadina da 60 W, ciascuna riceve 230 V e quella da 100 W brilla di più. Ma se le colleghi *in serie* succede il contrario. Le resistenze di funzionamento sono $R = \Delta V^2/P$: 529 Ω per la lampadina da 100 W e 882 Ω per quella da 60 W. In serie la corrente è la stessa, $I = 230\ \text{V}/1411\ \Omega = 0{,}163\ \text{A}$, e la potenza $P = RI^2$ è maggiore nella lampadina con la resistenza maggiore: circa 23 W in quella «da 60 W» e 14 W in quella «da 100 W». (È una stima: con meno corrente i filamenti sono più freddi e la loro resistenza è minore.)

La regola è che le formule $P = RI^2$ e $P = \Delta V^2/R$ sono entrambe corrette, ma si usa quella in cui la grandezza fissata dal collegamento è la stessa per tutti: la corrente in serie, la differenza di potenziale in parallelo. E un'altra idea sbagliata da evitare: la corrente non si «consuma» attraversando la prima lampadina. Nella seconda passa la stessa corrente; ciò che si trasforma in calore e luce è l'energia delle cariche, non le cariche.

14.1.5 Ridurre una rete passo per passo

Molti circuiti con un solo generatore si risolvono riconoscendo, un pezzo alla volta, gruppi di resistori in serie o in parallelo e sostituendoli con il loro equivalente, finché resta un solo resistore. Si calcola la corrente nel generatore, e poi si torna indietro, ricostruendo la rete pezzo per pezzo e calcolando correnti e tensioni in ogni ramo. Il metodo è illustrato nella Figura 14.2 e nell'esempio che segue.

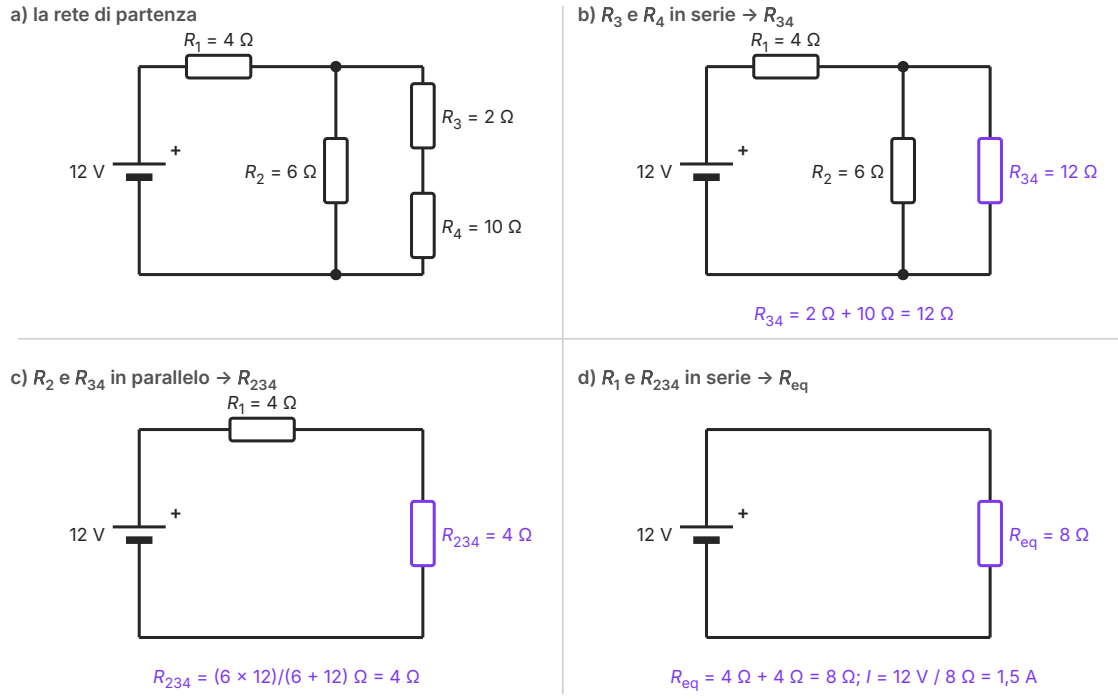


Figura 14.2 La riduzione della rete dell'esempio svolto. a) La rete di partenza, alimentata da un generatore ideale di 12 V. b) R_3 e R_4, attraversati dalla stessa corrente, sono in serie e diventano R_{34}. c) R_2 e R_{34} hanno gli estremi negli stessi due nodi: sono in parallelo e diventano R_{234}. d) R_1 e R_{234} sono in serie: la rete equivale a un solo resistore da 8 Ω.

ESEMPIO SVOLTO

Una rete mista

Problema. Nella rete della Figura 14.2a un generatore ideale di 12 V alimenta $R_1 = 4{,}0\ \Omega$ in serie con un gruppo formato da $R_2 = 6{,}0\ \Omega$ in parallelo con la serie di $R_3 = 2{,}0\ \Omega$ e $R_4 = 10\ \Omega$. Trova la corrente e la differenza di potenziale in ogni resistore, e controlla il bilancio delle potenze.

Soluzione. *Riduzione.* R_3 e R_4 sono in serie: $R_{34} = 2{,}0\ \Omega + 10\ \Omega = 12\ \Omega$. R_2 e R_{34} sono in parallelo: $R_{234} = (6{,}0 \times 12)/(6{,}0 + 12)\ \Omega = 4{,}0\ \Omega$. R_1 e R_{234} sono in serie: $R_{eq} = 4{,}0\ \Omega + 4{,}0\ \Omega = 8{,}0\ \Omega$.

Corrente nel generatore. $I = 12\ \text{V}/8{,}0\ \Omega = 1{,}5\ \text{A}$. È la corrente che attraversa R_1, e quindi $\Delta V_1 = 4{,}0\ \Omega \times 1{,}5\ \text{A} = 6{,}0\ \text{V}$.

Ritorno alla rete. Ai capi del parallelo la differenza di potenziale è $\Delta V_{234} = R_{234} I = 4{,}0\ \Omega \times 1{,}5\ \text{A} = 6{,}0\ \text{V}$ (e infatti 6,0 V + 6,0 V = 12 V). In R_2: $I_2 = 6{,}0\ \text{V}/6{,}0\ \Omega = 1{,}0\ \text{A}$. Nel ramo di R_3 e R_4: $I_{34} = 6{,}0\ \text{V}/12\ \Omega = 0{,}50\ \text{A}$. Legge dei nodi: 1,0 A + 0,50 A = 1,5 A, come deve essere. Infine $\Delta V_3 = 2{,}0\ \Omega \times 0{,}50\ \text{A} = 1{,}0\ \text{V}$ e $\Delta V_4 = 10\ \Omega \times 0{,}50\ \text{A} = 5{,}0\ \text{V}$.

Bilancio delle potenze. Il generatore eroga $\mathcal{E} I = 12\ \text{V} \times 1{,}5\ \text{A} = 18\ \text{W}$. I resistori dissipano RI^2: 9,0 W in R_1, 6,0 W in R_2, 0,50 W in R_3 e 2,5 W in R_4, in tutto 18 W. L'energia si conserva.

Commento. Il controllo dei nodi e il bilancio delle potenze costano poche righe e scoprono quasi tutti gli errori di calcolo: conviene farli sempre.

COLLEGAMENTI

La sicurezza elettrica in casa

In un appartamento tutte le prese e tutte le lampade sono collegate **in parallelo** fra i due conduttori che arrivano dal contatore, la fase e il neutro, con una tensione efficace di 230 V. Così ogni apparecchio riceve la tensione per cui è progettato e funziona indipendentemente dagli altri; ma le correnti si sommano, e accendendo insieme forno, lavatrice e stufetta la corrente nel cavo principale cresce. Per questo ogni linea è protetta da un interruttore automatico (o, negli impianti vecchi, da un fusibile) che la apre quando la corrente supera il valore che i cavi sopportano senza scaldarsi troppo.

Il pericolo per le persone è diverso: è la corrente che attraversa il corpo. Gli effetti dipendono dall'intensità, dalla durata e dal percorso; come ordini di grandezza, intorno a 1 mA la corrente si avverte appena, oltre una decina di milliampere i muscoli si contraggono e può diventare impossibile staccare la mano, alcune decine di milliampere che attraversano il torace per circa un secondo, o correnti più intense per tempi più brevi, possono provocare la fibrillazione del cuore. La resistenza del corpo, alta con la pelle asciutta, cala molto con la pelle bagnata: per questo acqua ed elettricità non vanno mai insieme.

Due dispositivi proteggono dai guasti. La messa a terra (già incontrata a proposito dell'elettrizzazione) collega le parti metalliche degli elettrodomestici, attraverso il filo giallo-verde della presa, a un conduttore interrato: se un filo interno tocca l'involucro, la corrente trova una strada di resistenza molto bassa verso terra invece di attraversare chi tocca l'apparecchio. L'**interruttore differenziale** confronta la corrente che entra nell'impianto dalla fase con quella che ne esce dal neutro: per la conservazione della carica dovrebbero essere uguali, e se differiscono di più di 30 mA vuol dire che una parte della corrente sta andando a terra per un'altra strada, magari una persona. Il differenziale allora apre il circuito in una frazione di secondo.

14.2 Le leggi di Kirchhoff

Non tutte le reti si riducono a serie e paralleli. Se in una rete ci sono due generatori su rami diversi, o resistori collegati «a ponte», il metodo del paragrafo precedente non basta. Serve un metodo generale, che il fisico tedesco Gustav Robert Kirchhoff formulò nel 1845, quando era ancora studente a Königsberg. Si basa su due leggi, che sono le leggi di conservazione della carica e dell'energia scritte per un circuito.

14.2.1 La legge dei nodi

In un circuito percorso da correnti stazionarie la carica non si accumula in nessun punto. In un nodo, quindi, tutta la carica che arriva in un secondo deve ripartire nello stesso secondo. È la **legge dei nodi** (o prima legge di Kirchhoff):

$$\Sigma I_{\text{entranti}} = \Sigma I_{\text{uscenti}}$$

Se a ogni corrente si dà il segno + quando entra nel nodo e − quando esce, la legge si scrive anche $\Sigma I = 0$: la somma algebrica delle correnti in un nodo è nulla. L'hai già usata per i resistori in parallelo, che sono il caso più semplice.

14.2.2 La legge delle maglie

Nel capitolo 11 hai visto che il campo elettrostatico è conservativo: la sua circuitazione lungo una qualsiasi linea chiusa è nulla, $\Gamma(\boldsymbol{E}) = 0$. Detto in termini di potenziale, se si parte da un punto, si percorre un cammino chiuso e si torna al punto di partenza, la somma delle variazioni di potenziale incontrate è zero, perché il potenziale del punto di partenza è uno solo. In un circuito le variazioni di potenziale lungo una maglia sono di due tipi: le cadute di potenziale nei resistori, dove il campo elettrico spinge le cariche e queste cedono energia, e i salti di potenziale nei generatori, dove le forze non elettrostatiche portano le cariche al polo a potenziale più alto, fornendo la forza elettromotrice. La **legge delle maglie** (o seconda legge di Kirchhoff) dice che

$$\Sigma \Delta V = 0 \qquad \text{lungo ogni maglia, cioè} \qquad \Sigma \varepsilon = \Sigma RI$$

La seconda forma si legge così: lungo una maglia, l'energia per unità di carica fornita dai generatori è uguale a quella ceduta nei resistori. È la conservazione dell'energia. Per scrivere le equazioni senza errori di segno servono regole precise:

1. si sceglie, per ogni ramo, un verso per la corrente, anche a caso, e lo si segna sullo schema con una freccia;
2. si sceglie, per ogni maglia, un verso di percorrenza (per esempio orario);
3. quando si attraversa un resistore nel verso della corrente ipotizzata si scrive $-RI$ (il potenziale scende), quando lo si attraversa in verso opposto $+RI$;
4. quando si attraversa un generatore dal polo negativo al positivo si scrive $+\varepsilon$, dal positivo al negativo $-\varepsilon$;
5. si pone uguale a zero la somma di tutti i termini incontrati in un giro completo.

Se alla fine una corrente risulta negativa, non c'è nessun errore: vuol dire soltanto che nel ramo la corrente scorre nel verso opposto a quello ipotizzato, con l'intensità trovata.

14.2.3 Un metodo per i circuiti a due maglie

Quante equazioni servono? Le incognite sono le correnti, una per ramo. Se il circuito ha n nodi, si scrivono $n - 1$ equazioni dei nodi (l'ultima sarebbe una conseguenza delle altre); le equazioni che mancano si ottengono dalle maglie indipendenti, cioè da maglie scelte in modo che ciascuna contenga almeno un ramo non usato dalle precedenti. Nel circuito della Figura 14.3 ci sono due nodi, A e B, e tre rami: servono tre equazioni, una del nodo A e due delle maglie. Si ottiene

un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite, che sai risolvere dal corso di matematica: con la sostituzione si riduce subito a un sistema di due equazioni in due incognite.

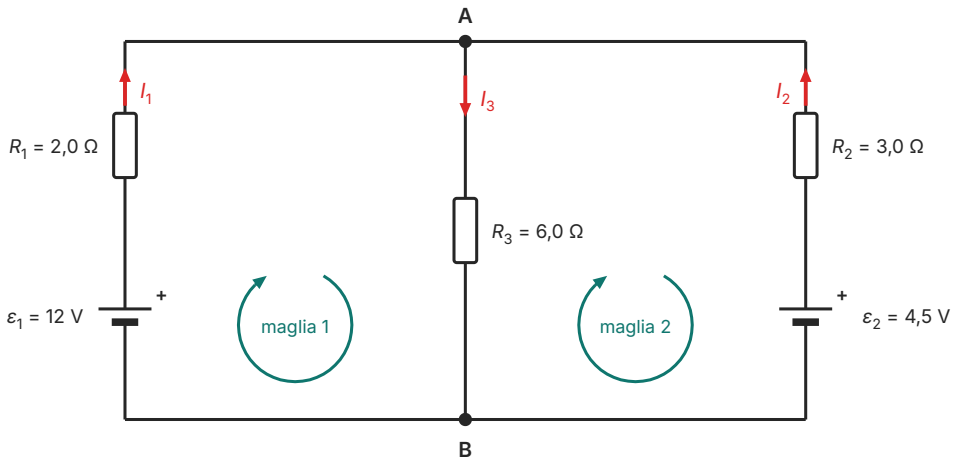


Figura 14.3 Un circuito con due maglie e due generatori. I versi delle correnti I_1, I_2, I_3 sono stati scelti a piacere; le maglie sono percorse in senso orario. Nei due generatori il polo positivo è in alto.

ESEMPIO SVOLTO

Due generatori in parallelo su un carico

Problema. Nel circuito della Figura 14.3 $\mathcal{E}_1 = 12$ V, $\mathcal{E}_2 = 4{,}5$ V, $R_1 = 2{,}0\ \Omega$, $R_2 = 3{,}0\ \Omega$ e $R_3 = 6{,}0\ \Omega$. Trova le correnti nei tre rami e interpreta il risultato.

Soluzione. *Nodo A.* Entrano I_1 e I_2, esce I_3: $I_1 + I_2 = I_3$.

Maglia 1 (sinistra, oraria, partendo da B). Si sale nel ramo di sinistra: il generatore è attraversato dal polo − al polo +, $+\mathcal{E}_1$; R_1 è attraversato nel verso di I_1, $-R_1 I_1$. Si scende nel ramo centrale nel verso di I_3: $-R_3 I_3$. Quindi $12 - 2{,}0\, I_1 - 6{,}0\, I_3 = 0$ (correnti in ampere).

Maglia 2 (destra, oraria, partendo da B). Si sale nel ramo centrale contro I_3: $+R_3 I_3$. Si scende nel ramo di destra: R_2 è attraversato contro I_2, $+R_2 I_2$, e il generatore dal + al −, $-\mathcal{E}_2$. Quindi $6{,}0\, I_3 + 3{,}0\, I_2 - 4{,}5 = 0$.

Il sistema. Sostituendo $I_3 = I_1 + I_2$ nelle due equazioni delle maglie si ha $8{,}0\, I_1 + 6{,}0\, I_2 = 12$ e $6{,}0\, I_1 + 9{,}0\, I_2 = 4{,}5$. Moltiplicando la prima per 3 e la seconda per 2 e sottraendo: $12\, I_1 = 36 - 9{,}0 = 27$, cioè $I_1 = 2{,}25$ A $\approx 2{,}3$ A. Dalla seconda: $9{,}0\, I_2 = 4{,}5 - 13{,}5 = -9{,}0$, cioè $I_2 = -1{,}0$ A. Infine $I_3 = 2{,}25$ A $- 1{,}0$ A $= 1{,}25$ A $\approx 1{,}3$ A.

Interpretazione. I_2 è negativa: nel ramo di destra la corrente scorre verso il basso ed entra nel generatore da 4,5 V dal polo positivo. Il generatore da 12 V, oltre ad alimentare R_3, sta *caricando* l'altro, come quando si collega con i cavi una batteria carica a una scarica.

Controllo. La maglia esterna (i due rami laterali) dà $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = R_1 I_1 - R_2 I_2$: 7,5 V = 4,5 V + 3,0 V. Bilancio energetico: il generatore da 12 V eroga 12 V × 2,25 A = 27 W; il generatore da 4,5 V ne assorbe 4,5 V × 1,0 A = 4,5 W; i resistori dissipano 10,1 W + 3,0 W + 9,4 W = 22,5 W. E 27 W = 4,5 W + 22,5 W.

Un'avvertenza sui segni. Il segno della forza elettromotrice dipende solo da come si attraversa il generatore: dal polo negativo al positivo il potenziale sale ($+\mathcal{E}$), qualunque sia il verso della corrente. È il segno del termine RI nei resistori, invece, a dipendere dal verso della corrente ipotizzata. Confondere le due regole, scrivendo $+\mathcal{E}$ quando il generatore «spinge» la corrente ipotizzata, è l'errore più comune.

14.3 Il generatore reale

14.3.1 Resistenza interna e tensione ai morsetti

Fino a qui il generatore è stato un **generatore ideale**: fra i suoi poli, o morsetti, c'è sempre una differenza di potenziale uguale alla forza elettromotrice $\mathcal{E}$, qualunque sia la corrente che eroga. Un generatore vero non si comporta così. Collega un voltmetro a una pila da 4,5 V: a circuito aperto leggi circa 4,5 V. Ora collega anche una piccola lampadina: la tensione letta scende un poco; con un carico che chiede molta corrente scende di più.

Il motivo è che anche l'interno del generatore, gli elettroliti di una pila o gli avvolgimenti di una dinamo, oppone resistenza al passaggio della carica. Si rappresenta un **generatore reale** come un generatore ideale di forza elettromotrice ε in serie con una resistenza r, detta **resistenza interna** (Figura 14.4a). Quando il generatore eroga la corrente I, nella resistenza interna il potenziale scende di rI, e la differenza di potenziale ai morsetti è

$$\Delta V = \varepsilon - rI$$

Solo a circuito aperto ($I = 0$) la tensione ai morsetti coincide con la forza elettromotrice: per questo un voltmetro con resistenza molto grande, che preleva una corrente trascurabile, misura ε. Se ai morsetti è collegato un resistore esterno R, la legge delle maglie per l'unica maglia dà $\varepsilon - rI - RI = 0$, cioè

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

Il generatore reale si comporta come quello ideale finché R è molto maggiore di r. Le pile alcaline nuove hanno resistenze interne dell'ordine di qualche decimo di ohm, le batterie per auto di qualche centesimo di ohm; con l'uso e con il freddo la resistenza interna cresce.

14.3.2 Il cortocircuito

Il grafico di ΔV in funzione di I (Figura 14.4b) è una retta con pendenza $-r$. Interseca l'asse delle tensioni in ε e l'asse delle correnti nel punto in cui $\Delta V = 0$, cioè quando i morsetti sono collegati da un filo di resistenza trascurabile. È il **cortocircuito**, e la corrente che si ottiene è la massima che il generatore può erogare, la **corrente di cortocircuito**:

$$I_{cc} = \frac{\varepsilon}{r}$$

Per una batteria d'auto con $\varepsilon = 12{,}6$ V e $r = 0{,}02\ \Omega$, $I_{cc} \approx 600$ A: tutta la potenza si dissipa dentro la batteria e nel filo, che possono scaldarsi fino a fondere o a incendiarsi. Mai collegare direttamente i poli di una batteria.

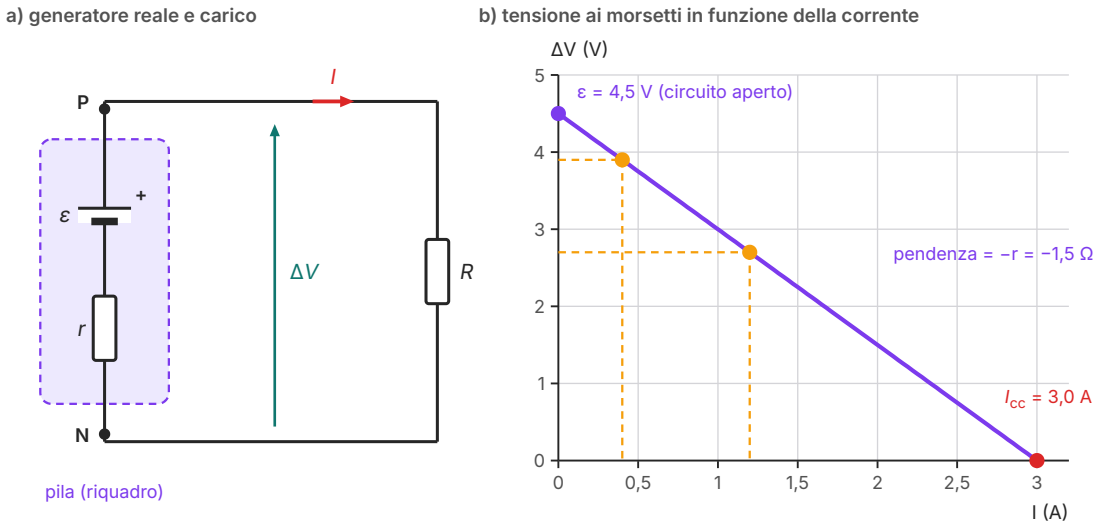


Figura 14.4 a) Modello del generatore reale: un generatore ideale di f.e.m. ε in serie con la resistenza interna r (nel riquadro), collegato a un resistore esterno R; P e N sono i morsetti. b) Tensione ai morsetti in funzione della corrente erogata, calcolata per ε = 4,5 V e r = 1,5 Ω. I punti arancioni sono le due letture usate nell'esempio svolto.

ESEMPIO SVOLTO

Forza elettromotrice e resistenza interna da un grafico

Problema. Una pila è collegata a un reostato (un resistore di resistenza regolabile). Un voltmetro misura la tensione ai morsetti e un amperometro la corrente; due letture sono i punti arancioni della Figura 14.4b: 3,90 V con 0,40 A e 2,70 V con 1,20 A. Ricava ε, r, la corrente di cortocircuito e le resistenze del reostato nelle due letture.

Soluzione. I punti stanno sulla retta $\Delta V = \varepsilon - rI$. La pendenza è (2,70 V − 3,90 V)/(1,20 A − 0,40 A) = −1,20 V/0,80 A = −1,5 Ω, quindi r = 1,5 Ω. Dal primo punto, $\varepsilon = \Delta V + rI$ = 3,90 V + 1,5 Ω × 0,40 A = 4,50 V: è l'intercetta della retta sull'asse delle tensioni. La corrente di cortocircuito è I_{cc} = 4,50 V/1,5 Ω = 3,0 A, l'intercetta sull'asse delle correnti.

Le resistenze del reostato sono $R = \Delta V/I$: 3,90 V/0,40 A = 9,75 Ω ≈ 9,8 Ω nella prima lettura e 2,70 V/1,20 A = 2,25 Ω ≈ 2,3 Ω nella seconda. Verifica: $\varepsilon/(R + r)$ = 4,50 V/11,25 Ω = 0,40 A e 4,50 V/3,75 Ω = 1,20 A.

Commento. Con due sole letture la retta passa esattamente per i punti; in laboratorio se ne prendono molte e si traccia la retta di miglior accordo, come hai imparato nel primo biennio. Non conviene misurare la corrente di cortocircuito direttamente: si danneggerebbe la pila.

14.3.3 La massima potenza trasferita

Quanta potenza può cedere un generatore reale a un carico? Se R è molto grande la tensione è quasi ε, ma la corrente è piccolissima; se R è quasi nulla la corrente è grande, ma la tensione ai morsetti è quasi zero. In entrambi i casi la potenza $P = \Delta V \cdot I$ ceduta al carico è piccola: c'è un valore intermedio di R che la rende massima.

ESEMPIO SVOLTO

Il massimo trasferimento di potenza

Problema. Dimostra che un generatore reale di f.e.m. ε e resistenza interna r cede la massima potenza a un resistore esterno quando $R = r$, e calcola questa potenza.

Passo 1: la potenza in funzione della corrente. La potenza ceduta al carico è il prodotto della tensione ai morsetti per la corrente: $P = \Delta V \cdot I = (\varepsilon - rI)I = \varepsilon I - rI^2$.

Passo 2: una parabola. Nel piano (I, P) questa è una parabola con la concavità verso il basso (il coefficiente di I^2, $-r$, è negativo), che passa per l'origine e per $I = \varepsilon/r = I_{cc}$. Il suo massimo è nel vertice, che ha ascissa $-b/(2a) = -\varepsilon/(-2r)$: $I^* = \varepsilon/(2r) = I_{cc}/2$, a metà fra le due intersezioni con l'asse.

Passo 3: il valore massimo. $P_{max} = \varepsilon \cdot \varepsilon/(2r) - r \cdot \varepsilon^2/(4r^2) = \varepsilon^2/(4r)$.

Passo 4: la resistenza del carico. Con $I^* = \varepsilon/(2r)$ la tensione ai morsetti è $\Delta V = \varepsilon - r \cdot \varepsilon/(2r) = \varepsilon/2$, e quindi $R = \Delta V/I^* = (\varepsilon/2)/(\varepsilon/(2r)) = r$.

Risultato. Il massimo trasferimento di potenza si ha quando la resistenza del carico è uguale alla resistenza interna del generatore, e vale $P_{max} = \varepsilon^2/(4r)$. Per la pila della Figura 14.4 ($\varepsilon = 4{,}5$ V, $r = 1{,}5\ \Omega$): $I^* = 1{,}5$ A e $P_{max} = (4{,}5\text{ V})^2/(6{,}0\ \Omega) = 3{,}4$ W (Figura 14.5).

Commento. In queste condizioni il generatore produce la potenza $\varepsilon I^* = \varepsilon^2/(2r)$: metà va al carico e metà si dissipa nella resistenza interna. Il *rendimento* $\Delta V/\varepsilon = R/(R + r)$ è del 50%.

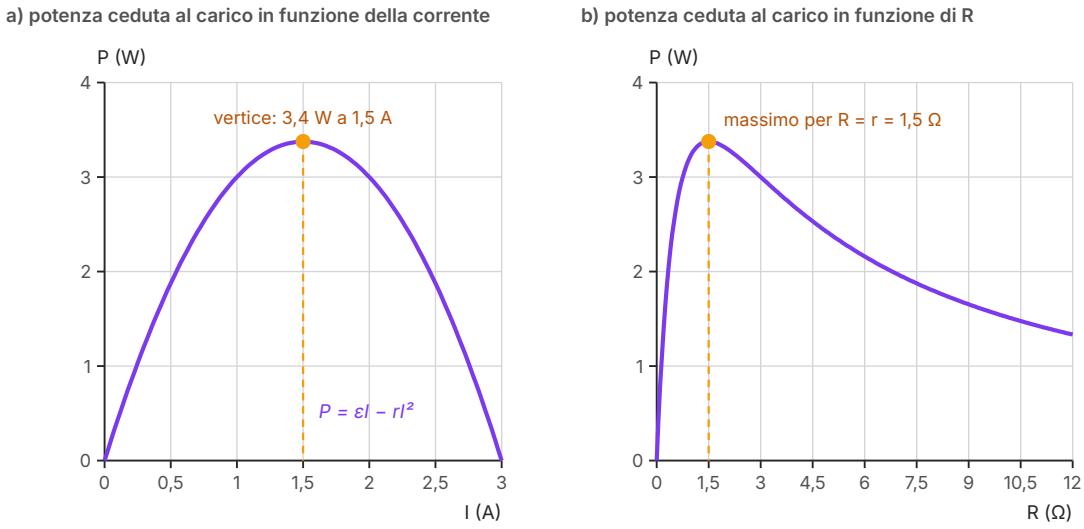


Figura 14.5 Potenza ceduta a un resistore esterno da un generatore reale, calcolata per $\varepsilon = 4{,}5$ V e $r = 1{,}5$ Ω. a) In funzione della corrente la potenza è una parabola, con il vertice a metà della corrente di cortocircuito. b) In funzione della resistenza del carico la potenza è massima, 3,4 W, quando $R = r$.

Massimo trasferimento di potenza e massimo rendimento sono quindi obiettivi diversi. Una centrale elettrica non lavora mai nelle condizioni di massima potenza: sprecherebbe metà dell'energia prodotta. Si cerca invece l'adattamento $R = r$ quando il segnale disponibile è debole e conta trasferirne il più possibile, come fra un'antenna e il ricevitore.

COLLEGAMENTI

Le batterie e la loro capacità

Su una batteria, oltre alla tensione nominale, è indicata una carica: «3000 mA·h» per un telefono, «60 A·h» per un'automobile. È la **capacità di una batteria**, la carica totale che può far circolare prima di scaricarsi (da non confondere con la capacità di un condensatore, che si misura in farad). Poiché 1 A·h = 1 A × 3600 s = 3600 C, la batteria del telefono fa circolare 10 800 C; con una corrente media di 150 mA durerebbe 20 ore.

L'energia immagazzinata è il prodotto della carica per la tensione: 3,0 A·h × 3,7 V ≈ 11 W·h, cioè circa 40 kJ, per il telefono; 60 A·h × 12 V = 720 W·h, circa 2,6 MJ, per l'auto. La capacità dichiarata vale per correnti modeste: con correnti grandi la caduta rI sulla resistenza interna aumenta e la batteria raggiunge prima la tensione minima di funzionamento. D'inverno la resistenza interna di una batteria d'auto cresce, e una batteria già un po' scarica non riesce più a dare al motorino d'avviamento le centinaia di ampere che gli servono.

14.4 Gli strumenti di misura

14.4.1 Il galvanometro

Nel capitolo precedente hai visto che un amperometro si collega in serie e un voltmetro in parallelo, e che l'amperometro ideale ha resistenza nulla, il voltmetro ideale resistenza infinita. Ma come sono fatti? Gli strumenti analogici, quelli con l'ago, hanno lo stesso cuore: il **galvanometro**, uno strumento molto sensibile in cui l'ago è solidale con una piccola bobina immersa nel campo di un magnete; la corrente che attraversa la bobina la fa ruotare, e la deviazione dell'ago è proporzionale alla corrente (capirai il perché nel capitolo 15). Il galvanometro è caratterizzato dalla sua resistenza interna R_G e dalla **corrente di fondo scala** I_G, quella che porta l'ago all'ultima tacca: valori tipici sono qualche decina di ohm e una corrente fra qualche decina di microampere e 1 mA.

14.4.2 Dal galvanometro all'amperometro

Per misurare correnti più grandi di I_G si collega in parallelo al galvanometro una resistenza molto piccola R_s, detta **resistenza di shunt** (dall'inglese *shunt*, «deviazione»), come nella Figura 14.6a. La corrente da misurare I si divide: quasi tutta passa nello shunt, e solo una piccola parte, proporzionale a I, nel galvanometro. A fondo scala i due rami in parallelo hanno la stessa differenza di potenziale, $R_G I_G = R_s(I - I_G)$, e quindi

$$R_s = \frac{R_G\, I_G}{I - I_G}$$

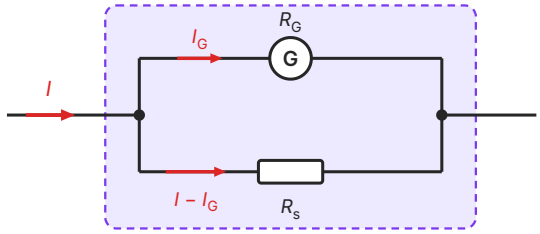
La resistenza complessiva dell'amperometro è quella del parallelo, minore di R_s: tanto più piccola quanto più grande è la corrente di fondo scala.

14.4.3 Dal galvanometro al voltmetro

Per misurare una differenza di potenziale si collega invece in serie al galvanometro una resistenza grande R_V, detta **resistenza addizionale** (Figura 14.6b). Lo strumento, collegato in parallelo fra due punti, preleva una corrente piccola, proporzionale alla differenza di potenziale fra quei punti. Il fondo scala ΔV_{fs} corrisponde alla corrente I_G: $\Delta V_{fs} = (R_G + R_V) I_G$, da cui

$$R_V = \frac{\Delta V_{fs}}{I_G} - R_G$$

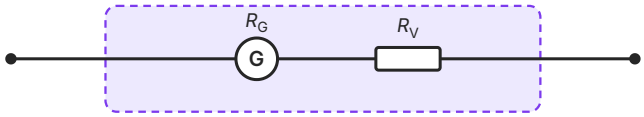
a) amperometro: galvanometro con resistenza di shunt in parallelo



resistenza complessiva molto piccola

si collega in serie nel ramo;
la corrente si divide: la maggior parte passa nello shunt, e a fondo scala $R_G\, I_G = R_s\, (I - I_G)$

b) voltmetro: galvanometro con resistenza addizionale in serie



resistenza complessiva molto grande

si collega in parallelo ai due punti fra cui si misura ΔV;
a fondo scala: $\Delta V_{fs} = (R_G + R_V)\, I_G$

Figura 14.6 Lo stesso galvanometro G diventa a) un amperometro con una resistenza di shunt in parallelo, b) un voltmetro con una resistenza addizionale in serie. I riquadri indicano lo strumento completo.

ESEMPIO SVOLTO

Progettare un amperometro e un voltmetro

Problema. Un galvanometro ha resistenza $R_G = 50{,}0\ \Omega$ e corrente di fondo scala $I_G = 1{,}00$ mA. a) Quale shunt serve per farne un amperometro con fondo scala 1,00 A, e quale resistenza ha lo strumento? b) Quale resistenza addizionale serve per farne un voltmetro con fondo scala 10,0 V?

Soluzione. a) A fondo scala nello shunt passano 1,00 A − 0,00100 A = 0,999 A, con la stessa differenza di potenziale del galvanometro, $R_G I_G = 50{,}0\ \Omega \times 1{,}00 \times 10^{-3}$ A = 0,0500 V. Quindi R_s = 0,0500 V/0,999 A = 0,0501 Ω. La resistenza dell'amperometro è quella del parallelo di 50,0 Ω e 0,0501 Ω: $(50{,}0 \times 0{,}0501)/(50{,}0 + 0{,}0501)\ \Omega = 0{,}0500\ \Omega$.

b) Con 10,0 V ai capi la corrente deve essere 1,00 mA, quindi la resistenza totale è 10,0 V/1,00 × 10^{-3} A = 10 000 Ω, e R_V = 10 000 Ω − 50,0 Ω = 9950 Ω. Il voltmetro ha una resistenza di 10,0 kΩ.

Commento. I multimetri digitali non contengono un galvanometro, ma il problema di fondo resta lo stesso: anche un voltmetro digitale ha una resistenza finita, tipicamente 10 MΩ, e un amperometro digitale una resistenza piccola ma non nulla.

14.4.4 Lo strumento disturba il circuito

Uno strumento inserito in un circuito ne fa parte, e cambia ciò che misura. Un amperometro in serie aggiunge la sua resistenza al ramo: in un ramo da 10 Ω, i 0,0500 Ω dell'amperometro dell'esempio riducono la corrente dello 0,5%, una perturbazione accettabile. Con il voltmetro le cose possono andare peggio. Considera un partitore di tensione formato da due resistori da 10 kΩ alimentati da 10,0 V: ai capi di ciascuno ci sono 5,00 V. Collega il voltmetro da 10,0 kΩ dell'esempio ai capi del secondo resistore: il parallelo di resistore e voltmetro vale 5,0 kΩ, e la tensione letta è 10,0 V × 5,0/(10 + 5,0) = 3,33 V, un terzo in meno del valore vero. Un multimetro digitale da 10 MΩ, nello stesso punto, legge 5,00 V entro lo 0,05%.

La regola pratica è che un voltmetro misura bene se la sua resistenza è molto maggiore delle resistenze del tratto di circuito su cui è collegato, e un amperometro misura bene se la sua resistenza è molto minore di quelle del ramo.

14.5 Il circuito RC

14.5.1 La carica di un condensatore

Finora le correnti sono state costanti. Considera ora il circuito della Figura 14.7a: un generatore di f.e.m. ε, un resistore R e un condensatore C, inizialmente scarico, collegati in serie da un deviatore. Un circuito che contiene un resistore e un condensatore si chiama **circuito RC**. Quando il deviatore è nella posizione 1, il generatore sposta carica da un'armatura all'altra del condensatore attraverso il resistore. Che cosa succede alla corrente?

Indichiamo con q la carica del condensatore e con i la corrente in un certo istante (le lettere minuscole ricordano che variano nel tempo). La differenza di potenziale ai capi del condensatore è q/C, e la legge delle maglie dà, in ogni istante,

$$\varepsilon = Ri + \frac{q}{C} \qquad \text{cioè} \qquad i = \frac{\varepsilon - q/C}{R}$$

All'inizio il condensatore è scarico, $q = 0$: tutta la f.e.m. cade sul resistore e la corrente vale ε/R, come se il condensatore non ci fosse. Man mano che la carica cresce, la tensione del condensatore si oppone a quella del generatore e la corrente diminuisce. Dopo molto tempo la tensione del condensatore uguaglia ε, la corrente si annulla e la carica raggiunge il valore finale $Q = C\varepsilon$. Il condensatore carico interrompe il circuito: in un circuito a corrente continua, a regime, un condensatore si comporta come un ramo aperto.

14.5.2 Un calcolo passo per passo

Per sapere come la carica passa da 0 a Q si può fare un calcolo a piccoli passi, come hai fatto per la trasformazione adiabatica nel capitolo 2. In un intervallo di tempo Δt abbastanza breve la

corrente cambia poco, e la carica che arriva sul condensatore è circa $i\Delta t$. Si calcola quindi la corrente con la carica attuale, si aggiunge $i\Delta t$, si ricalcola la corrente con la nuova carica, e così via. Esprimendo il tempo in multipli della grandezza RC e la carica come frazione di Q, il calcolo vale per ogni circuito. Il risultato è nella Tabella 14.1.

Tabella 14.1 Carica del condensatore, in percentuale della carica finale $Q = C\varepsilon$, calcolata a piccoli passi con due diverse ampiezze del passo Δt e con la formula esatta. Il tempo è espresso in unità di $\tau = RC$.

t/τ	passi $\Delta t = 0{,}1\ \tau$	passi $\Delta t = 0{,}01\ \tau$	$100\ (1 - e^{-t/\tau})$
0	0	0	0
0,1	10,0	9,6	9,5
0,2	19,0	18,2	18,1
0,5	41,0	39,5	39,3
1	65,1	63,4	63,2
2	87,8	86,6	86,5
3	95,8	95,1	95,0
5	99,5	99,3	99,3

Guarda che cosa succede a ogni passo da 0,1 τ. La carica che ancora «manca», $Q - q$, è proporzionale alla corrente, perché $i = (Q - q)/(RC)$; e in ogni passo il condensatore riceve $i\Delta t = (Q - q) \cdot 0{,}1$, cioè un decimo di ciò che manca. Dopo ogni passo, quindi, la carica mancante è moltiplicata per 0,9: dopo dieci passi, cioè al tempo RC, è $0{,}9^{10} = 0{,}349$ volte quella iniziale. Una grandezza che a intervalli di tempo uguali si moltiplica sempre per lo stesso fattore è una funzione esponenziale del tempo, come hai visto nel corso di matematica. Con passi più piccoli il risultato si stabilizza: con passi da 0,01 τ la carica mancante dopo un tempo RC è $0{,}99^{100} = 0{,}366$, e al tendere a zero del passo il fattore tende a $1/e = 0{,}368$, dove $e = 2{,}718\ldots$ è il numero di Nepero.

14.5.3 Le leggi della carica e della scarica

La grandezza RC che compare nel calcolo si chiama **costante di tempo** del circuito:

$$\tau = RC$$

Si misura in secondi: un ohm per un farad è $(\text{V/A})\cdot(\text{C/V}) = \text{C/A} = \text{s}$. Il calcolo a piccoli passi, portato al limite, dà per la carica del condensatore le leggi

$$q(t) = Q\,(1 - e^{-t/\tau}) \qquad i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\, e^{-t/\tau}$$

Non puoi ancora dimostrarle in modo rigoroso: lo farai con gli strumenti dell'analisi matematica, il prossimo anno. Puoi però controllarle in tre modi. I casi limite: per $t = 0$ danno $q = 0$ e $i = \varepsilon/R$, per t molto grande $q \to Q$ e $i \to 0$, come ci si aspetta. Le dimensioni: l'esponente t/τ è un numero puro, come deve essere. E i numeri: l'ultima colonna della Tabella 14.1 coincide con il calcolo a passi piccoli.

Se ora il deviatore passa nella posizione 2, il generatore è escluso e il condensatore, carico con Q, si scarica attraverso il resistore. La legge delle maglie dà $Ri = q/C$: la corrente è tanto maggiore quanto più carica resta, e la carica si dimezza a intervalli uguali, come i nuclei radioattivi. Le leggi della scarica sono

$$q(t) = Q\,e^{-t/\tau} \qquad i(t) = \frac{Q}{\tau}\,e^{-t/\tau} = \frac{\Delta V_0}{R}\,e^{-t/\tau}$$

dove $\Delta V_0 = Q/C$ è la tensione iniziale del condensatore; anche la sua tensione diminuisce come $e^{-t/\tau}$. La Figura 14.7b mostra le due curve. Dopo un tempo τ la carica è arrivata al 63% di quella finale, nella carica, o si è ridotta al 37% di quella iniziale, nella scarica. Dopo 5τ manca meno dell'1%: in pratica il transitorio è finito. Il tempo in cui la carica si dimezza durante la scarica è $t_{1/2} = \tau \ln 2 \approx 0{,}69\ \tau$ (ln è il logaritmo naturale, in base e). La costante di tempo ha anche un significato grafico: la tangente alla curva di carica nell'origine raggiunge il valore finale proprio al tempo τ, cioè se la corrente iniziale restasse costante il condensatore si caricherebbe in un tempo τ.

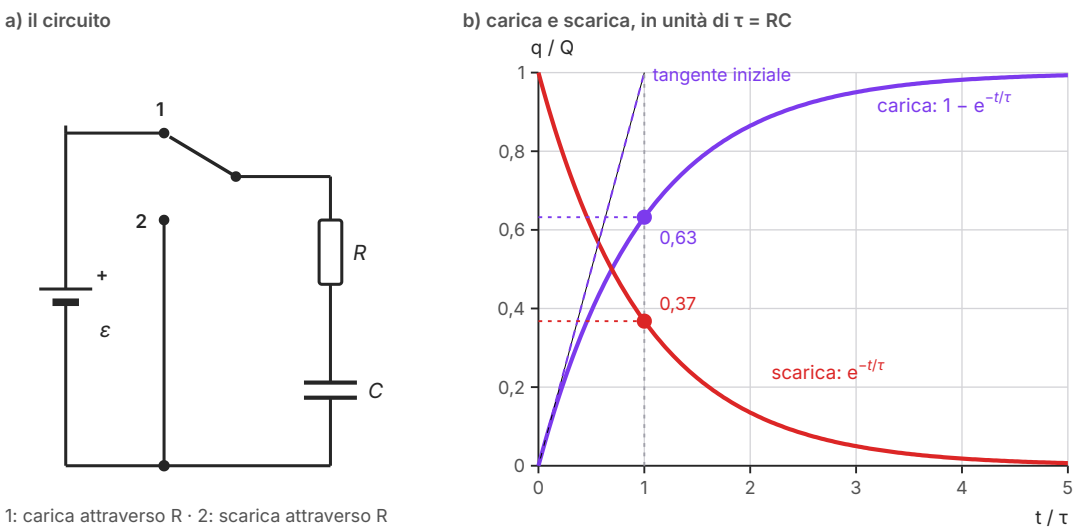


Figura 14.7 a) Circuito RC con un deviatore: nella posizione 1 il generatore carica il condensatore attraverso il resistore, nella posizione 2 il condensatore si scarica attraverso lo stesso resistore. b) Carica del condensatore in funzione del tempo, calcolata, durante la carica (in viola, in unità della carica finale $Q = C\varepsilon$) e durante la scarica (in rosso, in unità della carica iniziale). La corrente, nei due casi, decresce come la curva rossa.

ERRORE FREQUENTE

Dopo un tempo τ il condensatore non è carico a metà

Dopo un tempo $\tau = RC$ la carica è $1 - 1/e \approx 0{,}63$ volte quella finale, non la metà; la metà si raggiunge prima, dopo $0{,}69\,\tau$. E dopo 2τ non si arriva al 126%, «raddoppiando» il 63%, ma all'86%: in ogni intervallo τ il condensatore riceve il 63% della carica che *gli manca*, non di quella totale. Per lo stesso motivo, a rigore, il condensatore non finisce mai di caricarsi; ma dopo cinque costanti di tempo la differenza dalla carica finale è più piccola di qualunque incertezza di misura.

14.5.4 L'energia nella carica

Mentre carica il condensatore, il generatore sposta la carica Q attraverso la differenza di potenziale costante ε, e compie quindi il lavoro $W_{\text{gen}} = Q\varepsilon = C\varepsilon^2$. Nel capitolo 12 hai visto però che l'energia immagazzinata in un condensatore carico è $U = \tfrac{1}{2}Q\Delta V = \tfrac{1}{2}C\varepsilon^2$: solo metà. L'altra metà si è dissipata nel resistore per effetto Joule. Lo si può verificare sommando i contributi $Ri^2\Delta t$ su tanti piccoli intervalli: per esempio, per $R = 10\ \text{k}\Omega$, $C = 100\ \mu\text{F}$ ed $\varepsilon = 10\ \text{V}$ la somma, eseguita al computer a passi di 10 µs, dà 5,00 mJ, uguale a $\tfrac{1}{2}C\varepsilon^2 = 5{,}00\ \text{mJ}$, mentre il generatore ha compiuto un lavoro di 10,0 mJ. Il risultato sorprendente è che la frazione dissipata non dipende da R: con una resistenza piccola la corrente è grande ma dura poco, con una resistenza grande è piccola ma dura a lungo, e l'energia dissipata è sempre metà.

14.5.5 Le applicazioni

La costante di tempo è un orologio incorporato nel circuito, e per questo i circuiti RC sono ovunque. Fissano i ritardi dei temporizzatori, come la luce delle scale che si spegne da sola o il tergicristallo intermittente. Nel flash di una macchina fotografica una batteria da pochi volt, attraverso un circuito elevatore, carica in qualche secondo un condensatore a qualche centinaio di volt; al momento dello scatto il condensatore si scarica in un millesimo di secondo o meno attraverso un tubo pieno di gas, che emette un lampo di luce. Il principio è lo stesso nel defibrillatore: un condensatore viene caricato a una tensione di alcune migliaia di volt e poi scaricato attraverso il torace del paziente in pochi millisecondi, con un'energia dell'ordine di un centinaio di joule.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: la costante di tempo di un circuito RC

Materiali. Un condensatore elettrolitico da 1000 µF (tolleranza ±20%, tensione massima 25 V); un resistore da 47 kΩ (tolleranza ±5%); una pila da 9 V; un multimetro digitale usato come voltmetro (resistenza interna 10 MΩ, risoluzione 0,01 V) e, se possibile, come ohmmetro; un cronometro; fili con morsetti a coccodrillo. In alternativa al voltmetro e al cronometro, un sensore di tensione collegato a un sistema di acquisizione dati.

Procedimento. 1) Calcola la costante di tempo prevista dai valori nominali. 2) Carica il condensatore collegandolo direttamente alla pila per qualche secondo, rispettando la polarità indicata sull'involucro. 3) Collega il voltmetro ai capi del condensatore e il resistore in parallelo a esso; stacca la pila e, nello stesso istante, avvia il cronometro ($t = 0$). 4) Leggi la tensione ogni 20 s per circa 3 minuti (meglio se un compagno legge e un altro scrive). I dati di una prova sono nella Tabella 14.2.

Tabella 14.2 Scarica di un condensatore da 1000 µF (nominali) attraverso un resistore da 47 kΩ (nominali): tensione ai capi del condensatore in funzione del tempo (dati tipici). Incertezza su ΔV: ±0,01 V; su t: ±0,5 s.

t (s)	ΔV (V)	$\ln(\Delta V/1\ \text{V})$
0	8,94	2,191
20	6,03	1,797
40	4,04	1,396
60	2,72	1,001
80	1,81	0,593
100	1,22	0,199
120	0,82	−0,198
140	0,55	−0,598
160	0,37	−0,994

Analisi. Se la scarica segue la legge $\Delta V = \Delta V_0\, e^{-t/\tau}$, il logaritmo naturale della tensione è $\ln \Delta V = \ln \Delta V_0 - t/\tau$: in funzione del tempo è una retta con pendenza $-1/\tau$. È un modo di «linearizzare» un grafico, come hai fatto nel primo biennio con le leggi di potenza. Riportando la terza colonna in funzione della prima, i punti stanno su una retta con ottima approssimazione. La retta di miglior accordo ha pendenza $-0{,}019\ 93\ \text{s}^{-1}$, e le rette di massima e minima pendenza compatibili con le incertezze danno valori fra $-0{,}019\ 98\ \text{s}^{-1}$ e $-0{,}019\ 83\ \text{s}^{-1}$. Allargando l'intervallo per te-

nere conto del tempo di reazione nell'avvio del cronometro, $\tau = (50{,}2 \pm 0{,}5)$ s. Un controllo rapido: la tensione si dimezza, da 8,94 V a 4,47 V, fra 20 s e 40 s, in accordo con $\tau \ln 2 = 34{,}8$ s.

Confronto teoria–esperimento. I valori nominali prevedono $\tau = 47\ \text{k}\Omega \times 1000\ \mu\text{F} = 47$ s, con un'incertezza relativa del 5% + 20% = 25%: $\tau_{\text{prev}} = (47 \pm 12)$ s. La misura, $(50{,}2 \pm 0{,}5)$ s, cade nell'intervallo previsto: previsione e misura sono compatibili. La misura, però, è circa 25 volte più precisa della previsione, e la si può usare al contrario, per misurare la capacità. L'ohmmetro dà $R = 46{,}6\ \text{k}\Omega$ (±0,5%); in parallelo c'è il voltmetro da 10 MΩ, che abbassa la resistenza effettiva a 46,4 kΩ. Quindi $C = \tau/R = 50{,}2\ \text{s}/46{,}4\ \text{k}\Omega = 1{,}08$ mF, l'8% in più del valore nominale e dentro la tolleranza del ±20%.

Che cosa concludere. La scarica è esponenziale, e il modello RC la descrive bene: i punti linearizzati non mostrano andamenti sistematici. L'incertezza della previsione è dominata dalla tolleranza del condensatore elettrolitico, molto più larga di quella del resistore.

Sicurezza. Usa solo la pila da 9 V, mai la tensione di rete. Rispetta la polarità del condensatore elettrolitico e non superare la sua tensione massima: collegato al contrario o sovraccaricato può scaldarsi e rompersi. Scarica il condensatore attraverso il resistore prima di riporlo, e non toccare i suoi terminali con le dita bagnate.

Per la relazione. Riporta la tabella, il grafico di $\ln \Delta V$ in funzione di t con la retta di miglior accordo e quelle di massima e minima pendenza, il calcolo di τ con la sua incertezza e il confronto con la previsione. Discuti l'effetto del voltmetro sulla misura: di quanto cambierebbe τ con un voltmetro da 1 MΩ? Ripeti la misura con un resistore diverso e verifica che τ sia proporzionale a R.

APPROFONDIMENTO

La conduzione nei liquidi e nei gas

In un metallo la corrente è un moto di elettroni. Nei liquidi e nei gas le cose vanno diversamente, e se ne accorsero i primi sperimentatori che, dopo l'invenzione della pila di Volta nel 1800, immersero due fili collegati ai suoi poli in una soluzione salina. L'acqua pura conduce pochissimo; l'acqua in cui è sciolto un sale, un acido o una base conduce bene, perché contiene ioni positivi e negativi liberi di muoversi. Una sostanza che in soluzione libera ioni si chiama **elettrolita**. In un campo elettrico gli ioni positivi migrano verso l'elettrodo negativo (il catodo) e quelli negativi verso il positivo (l'anodo): la corrente è trasportata da cariche di entrambi i segni che si muovono in versi opposti.

Agli elettrodi gli ioni cedono o acquistano elettroni e diventano atomi o molecole neutre, che si depositano o si liberano come gas. È l'**elettrolisi**: dall'acqua resa conduttrice si ottengono idrogeno al catodo e ossigeno all'anodo, in volumi nel rapporto 2 : 1; con una soluzione di solfato di rame si deposita rame sul catodo, ed è così che si ricoprono gli oggetti con uno strato sottile di metallo. Faraday trovò le leggi quantitative dell'elettrolisi: la massa depositata è proporzionale alla carica che ha attraversato la soluzione, e per depositare una mole di uno ione con carica e serve una carica di circa 96 500 C, cioè $N_A e$.

I gas, in condizioni normali, sono ottimi isolanti: l'aria contiene pochissimi ioni, prodotti dalla radioattività naturale e dai raggi cosmici. Se però il campo elettrico è abbastanza intenso, circa 3 MV/m per l'aria secca (Tabella A.8), gli ioni e gli elettroni accelerati urtano le molecole con energia sufficiente a ionizzarle, e il numero di cariche libere cresce a valanga: si ha una **scarica nei gas**. La scintilla, il fulmine e il lampo di un flash ne sono esempi. In un tubo con gas a bassa pressione la scarica è continua e luminosa, con un colore caratteristico del gas: rosso-arancio per il neon delle insegne.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$R_{eq} = R_1 + R_2 + \ldots$ — resistori in serie: stessa corrente, le tensioni si sommano; R_{eq} è maggiore della resistenza più grande.

$1/R_{eq} = 1/R_1 + 1/R_2 + \ldots$ — resistori in parallelo: stessa differenza di potenziale, le correnti si sommano; R_{eq} è minore della resistenza più piccola. Per due resistori $R_{eq} = R_1R_2/(R_1 + R_2)$.

$\Delta V_1 = \Delta V\, R_1/(R_1 + R_2)$ — partitore di tensione (serie); $I_1 = I\, R_2/(R_1 + R_2)$ — partitore di corrente (parallelo).

$\Sigma I_{entranti} = \Sigma I_{uscenti}$ — legge dei nodi: conservazione della carica, per correnti stazionarie.

$\Sigma\varepsilon = \Sigma RI$ lungo una maglia — legge delle maglie: conservazione dell'energia, perché il campo elettrostatico è conservativo ($\Gamma(\boldsymbol{E}) = 0$). Segni: $-RI$ nel verso della corrente ipotizzata, $+\varepsilon$ dal polo − al polo +.

$\Delta V = \varepsilon - rI$, $I = \varepsilon/(R + r)$, $I_{cc} = \varepsilon/r$ — generatore reale con resistenza interna r; la tensione ai morsetti è uguale a ε solo a circuito aperto.

$P_{max} = \varepsilon^2/(4r)$ per $R = r$ — massima potenza ceduta al carico, con rendimento del 50%.

$R_s = R_G I_G/(I - I_G)$ — shunt in parallelo per un amperometro; $R_V = \Delta V_{fs}/I_G - R_G$ — resistenza in serie per un voltmetro.

$\tau = RC$ (in secondi); carica: $q = Q(1 - e^{-t/\tau})$, $i = (\varepsilon/R)\, e^{-t/\tau}$, con $Q = C\varepsilon$; scarica: $q = Q\, e^{-t/\tau}$, $i = (\Delta V_0/R)\, e^{-t/\tau}$. Dopo τ: 63% (carica) o 37% (scarica); dopo 5τ il transitorio è praticamente finito.

Nella carica il generatore compie il lavoro $C\varepsilon^2$: metà, $\frac{1}{2}C\varepsilon^2$, resta nel condensatore, metà si dissipa nel resistore, qualunque sia R.

SINTESI

- Uno schema elettrico rappresenta i componenti con simboli normalizzati. Un nodo collega tre o più conduttori, un ramo collega due nodi ed è percorso da una sola corrente, una maglia è un percorso chiuso di rami.
- Resistori in serie hanno la stessa corrente e $R_{eq} = \Sigma R$; resistori in parallelo hanno la stessa differenza di potenziale e $1/R_{eq} = \Sigma(1/R)$. Le reti con un solo generatore si risolvono spesso riducendole passo per passo.
- Nel partitore di tensione la tensione si divide in proporzione alle resistenze; nel partitore di corrente la corrente si divide in proporzione inversa.
- Per confrontare potenze si usa $P = RI^2$ in serie e $P = \Delta V^2/R$ in parallelo. La corrente non si consuma nei resistori: si trasforma l'energia delle cariche.
- Gli impianti domestici sono in parallelo a 230 V; la messa a terra e l'interruttore differenziale (30 mA) proteggono le persone dalle correnti di guasto.
- La legge dei nodi esprime la conservazione della carica, la legge delle maglie la conservazione dell'energia ($\Gamma(\boldsymbol{E}) = 0$ più le f.e.m.). Con n nodi si scrivono $n - 1$ equazioni dei nodi, e le altre dalle maglie indipendenti; una corrente negativa scorre nel verso opposto a quello ipotizzato.
- Un generatore reale equivale a un generatore ideale in serie con la resistenza interna r: $\Delta V = \varepsilon - rI$. Il grafico di ΔV in funzione di I è una retta che taglia gli assi in ε e in $I_{cc} = \varepsilon/r$.
- Il carico riceve la massima potenza, $\varepsilon^2/(4r)$, quando $R = r$; il rendimento allora è del 50%, e le reti di potenza lavorano lontano da questa condizione.
- Un galvanometro diventa amperometro con uno shunt in parallelo e voltmetro con una grande resistenza in serie. Ogni strumento disturba il circuito: il voltmetro deve avere resistenza molto maggiore, l'amperometro molto minore, di quelle del circuito.
- In un circuito RC la carica e la scarica sono esponenziali, con costante di tempo $\tau = RC$: dopo τ la carica è al 63% del valore finale nella carica, al 37% di quello iniziale nella scarica. Le leggi si giustificano con un calcolo a piccoli passi.
- Nella carica attraverso un resistore metà del lavoro del generatore si dissipa nel resistore, indipendentemente da R. I circuiti RC fissano i tempi di temporizzatori, flash e defibrillatori.
- Nei liquidi la corrente è trasportata da ioni di entrambi i segni (elettrolisi); i gas conducono solo quando sono ionizzati, come nelle scariche e nei tubi luminosi.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● In due resistori collegati in serie è sempre uguale per entrambi:
   A. la differenza di potenziale ai loro capi
   B. la corrente che li attraversa
   C. la potenza dissipata
   D. l'energia dissipata in un secondo

2. ● Tre resistori da 30 Ω collegati in parallelo hanno una resistenza equivalente di:
   A. 90 Ω
   B. 30 Ω
   C. 15 Ω
   D. 10 Ω

3. ● La legge dei nodi è una conseguenza:
   A. della conservazione della carica
   B. della conservazione dell'energia
   C. della prima legge di Ohm
   D. del fatto che il campo elettrostatico è conservativo

4. ●● Una pila con $\mathcal{E} = 9{,}0$ V e $r = 1{,}0$ Ω eroga una corrente di 2,0 A. La tensione ai suoi morsetti è:
   A. 9,0 V
   B. 11 V
   C. 7,0 V
   D. 2,0 V

5. ●● Un generatore reale cede la massima potenza a un resistore esterno quando la resistenza R del resistore è:
   A. nulla
   B. molto grande
   C. uguale alla resistenza interna r
   D. doppia della resistenza interna r

6. ● Un amperometro ideale:
   A. ha resistenza nulla e si collega in serie
   B. ha resistenza infinita e si collega in serie
   C. ha resistenza nulla e si collega in parallelo
   D. ha resistenza infinita e si collega in parallelo

7. ●● Un condensatore inizialmente scarico si carica attraverso un resistore. Dopo un tempo $\tau = RC$ dall'inizio la sua carica è circa:
   A. il 50% di quella finale
   B. il 37% di quella finale
   C. il 100% di quella finale
   D. il 63% di quella finale

8. ●● Il prodotto RC di una resistenza per una capacità si misura in:
   A. coulomb
   B. secondi
   C. volt
   D. ampere

Vero o falso

9. ● In un collegamento in parallelo la resistenza equivalente è minore della più piccola delle resistenze collegate. V / F

10. ● Accendendo un'altra lampada in un impianto domestico, la corrente nel cavo che arriva dal contatore diminuisce. V / F

11. ●● La tensione ai morsetti di una pila che eroga corrente a un circuito è maggiore della sua forza elettromotrice. V / F

12. ●● Nella carica di un condensatore attraverso un resistore, l'energia dissipata nel resistore è tanto maggiore quanto maggiore è la sua resistenza. V / F

13. ●● Un voltmetro reale collegato ai capi di un resistore riduce la resistenza del tratto di circuito su cui è collegato. V / F

Applicare

14. ● Tre resistori da 220 Ω, 330 Ω e 470 Ω sono collegati in serie a un generatore ideale da 12 V. Calcola la resistenza equivalente, la corrente e la differenza di potenziale ai capi di ciascun resistore.

15. ● Due resistori da 12 Ω e da 6,0 Ω sono collegati in parallelo a un generatore ideale da 6,0 V. Calcola la resistenza equivalente, la corrente in ciascun resistore e quella erogata dal generatore.

16. ●● Completa. In un partitore di tensione alimentato da 9,0 V, con $R_1 = 10\ \text{k}\Omega$, per avere 3,0 V ai capi di R_2 serve $R_2 =$ _____ kΩ.

17. ● In un nodo entrano due correnti di 2,0 A e 0,50 A; ne escono due, una delle quali è di 1,2 A. Quanto vale l'altra?

18. ●● A circuito aperto un voltmetro di resistenza molto grande misura 1,58 V ai capi di una pila. Collegando la pila a un resistore da 4,0 Ω la tensione ai morsetti scende a 1,50 V. Calcola la corrente e la resistenza interna della pila.

19. ●● Leggi il grafico della Figura 14.4b. Quali sono la forza elettromotrice e la corrente di cortocircuito del generatore? Ricava la resistenza interna e la tensione ai morsetti quando la corrente è di 2,0 A.

20. ●● Un galvanometro ha resistenza 120 Ω e corrente di fondo scala 200 μA. Calcola lo shunt necessario per farne un amperometro con fondo scala 2,0 A e la resistenza addizionale necessaria per farne un voltmetro con fondo scala 20 V.

21. ●● Un circuito RC ha $R = 22\ \text{k}\Omega$ e $C = 470\ \mu\text{F}$. Calcola la costante di tempo e il tempo dopo il quale un condensatore inizialmente scarico raggiunge metà della sua carica finale.

22. ● La batteria di uno smartphone ha una capacità di 3000 mA·h. Esprimi questa carica in coulomb e calcola per quante ore può erogare una corrente media di 150 mA.

Problemi

23. ●● Un resistore da 10 Ω è collegato in serie a un gruppo formato da due resistori da 20 Ω e 30 Ω in parallelo; la rete è alimentata da un generatore ideale da 11 V. Riduci la rete, calcola la corrente e la differenza di potenziale in ogni resistore e verifica il bilancio delle potenze.

24. ●●● Nel circuito della Figura 14.3 sostituisci i valori con $\varepsilon_1 = 9{,}0$ V, $R_1 = 3{,}0\ \Omega$, $\varepsilon_2 = 6{,}0$ V, $R_2 = 2{,}0\ \Omega$, $R_3 = 2{,}0\ \Omega$. a) Scrivi l'equazione del nodo A e le due equazioni delle maglie. b) Risolvi il sistema. c) Calcola la differenza di potenziale fra A e B e la potenza erogata da ciascun generatore, e verifica il bilancio energetico.

25. ●●● Una batteria ha forza elettromotrice 12 V e resistenza interna 0,50 Ω. a) Quale resistenza esterna riceve la massima potenza, e quanto vale questa potenza? b) Qual è il rendimento in queste condizioni? c) Calcola corrente, potenza ceduta al carico e rendimento con un carico da 5,5 Ω, e commenta il confronto.

26. ●●● Una batteria da 12 V con resistenza interna 0,050 Ω alimenta una lampada da campeggio di resistenza 3,0 Ω, posta a 30 m di distanza, attraverso due fili di rame (andata e ritorno) di sezione $1{,}5\ \text{mm}^2$. Usa la resistività del rame della Tabella A.7. a) Calcola la resistenza dei fili. b) Trova la corrente, la tensione ai capi della lampada e quella ai morsetti della batteria. c) Quanta potenza si perde nei fili? d) Quanto varrebbe la potenza della lampada collegata direttamente ai morsetti?

27. ●● Un partitore è formato da due resistori da 100 kΩ alimentati da 12,0 V. Che tensione legge, ai capi di uno dei due resistori, un voltmetro con resistenza 1,0 MΩ? E uno con resistenza 10 MΩ? Calcola gli errori percentuali rispetto al valore senza strumento.

28. ●●● Un condensatore da 2200 μF, carico a 9,0 V, si scarica attraverso un resistore da 1,0 kΩ. a) Calcola la costante di tempo e la corrente iniziale. b) Che tensione ha il condensatore dopo 5,0 s? c) Dopo quanto tempo la sua tensione è scesa a 1,0 V?

29. ●●● Il condensatore del flash di una fotocamera ha capacità 150 μF e si carica a 330 V attraverso una resistenza equivalente di 10 kΩ. a) Quanta energia immagazzina a carica completa? b) Calcola la costante di tempo e il tempo necessario perché la tensione arrivi al 95% del valore finale. c) Quanta energia contiene il condensatore in quel momento? d) Quanta energia si dissipa nel resistore durante l'intera carica, e quanto lavoro compie il generatore?

30. ●●● Durante la scarica di un condensatore attraverso un resistore da 47 kΩ si misurano queste tensioni: t = 0 s, 6,00 V; 10 s, 4,02 V; 20 s, 2,70 V; 30 s, 1,81 V; 40 s, 1,21 V. a) Calcola $\ln(\Delta V/1\ \text{V})$ per ogni misura e mostra che i punti stanno su una retta. b) Ricava la costante di tempo dalla pendenza. c) Calcola la capacità del condensatore.

Ragionare e argomentare

31. ● Spiega perché gli apparecchi di una casa sono collegati in parallelo e non in serie. Dai almeno due motivi.

32. ●● Stima di Fermi. Una sera lasci accese le luci di posizione di un'automobile, quattro lampadine da circa 5 W ciascuna. La batteria da 12 V ha una capacità di 60 A·h. Dopo quanto tempo, all'incirca, la batteria è scarica? Indica le approssimazioni che fai.

33. ●●● Trova l'errore. Giulia dice: «Per ottenere da una pila la massima potenza devo collegarle una resistenza piccolissima, perché la corrente è massima e $P = RI^2$». Marco risponde: «No, una resistenza grandissima, perché la tensione è massima e $P = \Delta V^2/R$». Spiega che cosa sbagliano entrambi e quale è la scelta giusta.

PER APPROFONDIRE

- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sui circuiti, con molti esempi di applicazione delle leggi di Kirchhoff e un'analisi accurata del circuito RC.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. II: le pagine sui circuiti e sulle reti di resistori, con un punto di vista originale su che cosa sia davvero un «elemento di circuito».
- [HEW] P. G. Hewitt, *Conceptual Physics*: i capitoli sui circuiti elettrici e sulla sicurezza domestica, con molte domande concettuali quasi senza formule.
- [FAR] M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity*: le serie dedicate all'elettrolisi, in cui Faraday introduce le parole elettrodo, anodo, catodo, ione ed elettrolita.
- [TAY] J. R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*: la linearizzazione di una legge esponenziale e l'uso del logaritmo per stimare una costante di tempo, utili per la relazione di laboratorio.

Glossario del capitolo

Capacità di una batteria
Carica totale che una batteria può far circolare prima di scaricarsi; si esprime di solito in ampere-ora (1 A·h = 3600 C).

Circuito RC
Circuito formato da un resistore e da un condensatore, in cui la carica e la scarica del condensatore avvengono in modo esponenziale.

Corrente di cortocircuito
Corrente erogata da un generatore reale quando i suoi morsetti sono collegati da un conduttore di resistenza trascurabile: $I_{cc} = \varepsilon/r$.

Costante di tempo
Il prodotto $\tau = RC$ di un circuito RC, in secondi: dopo un tempo τ la carica è al 63% del valore finale (carica) o al 37% di quello iniziale (scarica).

Elettrolisi
Insieme delle trasformazioni chimiche prodotte agli elettrodi dal passaggio di corrente in un elettrolita.

Galvanometro
Strumento molto sensibile che misura correnti piccole con la deviazione di un ago; con uno shunt diventa amperometro, con una resistenza in serie voltmetro.

Interruttore differenziale
Dispositivo che confronta la corrente sulla fase e sul neutro e apre il circuito se differiscono di più di una soglia (30 mA negli impianti domestici).

Legge dei nodi
Prima legge di Kirchhoff: in un nodo la somma delle correnti entranti è uguale alla somma di quelle uscenti; esprime la conservazione della carica.

Legge delle maglie
Seconda legge di Kirchhoff: lungo una maglia la somma algebrica delle variazioni di potenziale è nulla, $\Sigma\varepsilon = \Sigma RI$; esprime la conservazione dell'energia.

Maglia
Percorso chiuso formato da rami di un circuito, che non passa due volte per lo stesso punto.

Nodo (circuito)
Punto di un circuito in cui si collegano tre o più conduttori.

Partitore di tensione
Serie di due resistori che divide una differenza di potenziale in parti proporzionali alle resistenze.

Ramo
Tratto di circuito fra due nodi, senza altri nodi, percorso da un'unica corrente.

Resistenza di shunt
Piccola resistenza collegata in parallelo a un galvanometro per farne un amperometro con fondo scala più grande.

Resistenza equivalente
Resistenza del singolo resistore che, con la stessa differenza di potenziale, fa passare la stessa corrente di una rete di resistori.

Resistenza interna
Resistenza r dell'interno di un generatore reale, in serie con la f.e.m.; fa sì che la tensione ai morsetti sia $\varepsilon - rI$.

Soluzioni

1. B. Lungo un ramo la carica non si accumula, quindi la corrente è la stessa; tensioni e potenze sono proporzionali alle resistenze.

2. D. Per n resistori uguali in parallelo $R_{eq} = R/n = 30\ \Omega/3 = 10\ \Omega$.

3. A. In regime stazionario la carica non si accumula nel nodo: quella che entra in un secondo esce nello stesso secondo.

4. C. $\Delta V = \varepsilon - rI = 9{,}0\ \text{V} - 1{,}0\ \Omega \times 2{,}0\ \text{A} = 7{,}0\ \text{V}$.

5. C. La potenza $P = \varepsilon I - rI^2$ è massima nel vertice della parabola, $I = \varepsilon/(2r)$, cioè per $R = r$.

6. A. Inserito in serie nel ramo, non deve cambiarne la resistenza: idealmente la sua è nulla.

7. D. $q/Q = 1 - e^{-1} = 0{,}63$; la metà si raggiunge dopo $0{,}69\ \tau$.

8. B. $\Omega \cdot \text{F} = (\text{V/A}) \cdot (\text{C/V}) = \text{C/A} = \text{s}$.

9. V. $1/R_{eq}$ è la somma di termini positivi, quindi è maggiore di ciascun $1/R_k$.

10. F. Le utenze sono in parallelo: una lampada in più aggiunge la sua corrente a quella delle altre, e la corrente totale aumenta.

11. F. $\Delta V = \varepsilon - rI$ è minore di ε quando la pila eroga corrente; è maggiore solo mentre la pila viene caricata da un altro generatore.

12. F. L'energia dissipata è sempre $\frac{1}{2}C\varepsilon^2$, metà del lavoro del generatore: R cambia solo la durata della carica.

13. V. Il voltmetro è in parallelo al resistore, e il parallelo ha resistenza minore di ciascuno dei due; l'effetto è trascurabile solo se la resistenza del voltmetro è molto maggiore.

14. $R_{eq} = 220\ \Omega + 330\ \Omega + 470\ \Omega = 1020\ \Omega = 1{,}02\ \text{k}\Omega$; $I = 12\ \text{V}/1020\ \Omega = 11{,}8\ \text{mA}$ (la stessa nei tre resistori); $\Delta V = RI$: 2,59 V, 3,88 V, 5,53 V. Controllo: 2,59 + 3,88 + 5,53 = 12,00 V.

15. $R_{eq} = (12 \times 6{,}0)/(12 + 6{,}0)\ \Omega = 4{,}0\ \Omega$. Entrambi hanno 6,0 V ai capi: $I = 6{,}0\ \text{V}/12\ \Omega = 0{,}50\ \text{A}$ e $6{,}0\ \text{V}/6{,}0\ \Omega = 1{,}0\ \text{A}$. Il generatore eroga 0,50 A + 1,0 A = 1,5 A = 6,0 V/4,0 Ω (legge dei nodi verificata).

16. 5,0. Da $\Delta V_2 = \Delta V\, R_2/(R_1 + R_2)$: $3{,}0(10 + R_2) = 9{,}0\ R_2$, quindi $R_2 = 30/6{,}0\ \text{k}\Omega = 5{,}0\ \text{k}\Omega$. Su R_1 cadono 6,0 V, il doppio, perché R_1 è doppia.

17. Per la legge dei nodi 2,0 A + 0,50 A = 1,2 A + I, quindi $I = 1{,}3\ \text{A}$.

18. $\varepsilon = 1{,}58\ \text{V}$. $I = \Delta V/R = 1{,}50\ \text{V}/4{,}0\ \Omega = 0{,}375\ \text{A} \approx 0{,}38\ \text{A}$. Da $\Delta V = \varepsilon - rI$: $r = (1{,}58 - 1{,}50)\ \text{V}/0{,}375\ \text{A} = 0{,}21\ \Omega$.

19. Intercette: $\varepsilon = 4{,}5\ \text{V}$ (per $I = 0$) e $I_{cc} = 3{,}0\ \text{A}$ (per $\Delta V = 0$). $r = \varepsilon/I_{cc} = 1{,}5\ \Omega$, uguale all'opposto della pendenza. A 2,0 A: $\Delta V = 4{,}5\ \text{V} - 1{,}5\ \Omega \times 2{,}0\ \text{A} = 1{,}5\ \text{V}$.

20. Shunt: $R_s = R_G I_G/(I - I_G) = (120\ \Omega \times 2{,}00 \times 10^{-4}\ \text{A})/(2{,}0\ \text{A} - 0{,}0002\ \text{A}) = 0{,}024\ \text{V}/2{,}0\ \text{A} = 0{,}012\ \Omega$. Voltmetro: $R_V = 20\ \text{V}/(2{,}00 \times 10^{-4}\ \text{A}) - 120\ \Omega = 100\,000\ \Omega - 120\ \Omega \approx 99{,}9\ \text{k}\Omega$ (la resistenza totale dello strumento è 100 kΩ).

21. $\tau = RC = 22 \times 10^3\ \Omega \times 470 \times 10^{-6}\ \text{F} = 10\ \text{s}$ (10,3 s). Metà carica: $1 - e^{-t/\tau} = 0{,}5$, cioè $t = \tau \ln 2 = 0{,}693 \times 10{,}3\ \text{s} = 7{,}2\ \text{s}$.

22. $Q = 3{,}000\ \text{A·h} = 3{,}000\ \text{A} \times 3600\ \text{s} = 1{,}08 \times 10^4\ \text{C}$. $\Delta t = Q/I = 3000\ \text{mA·h}/150\ \text{mA} = 20\ \text{h}$.

23. Riduzione: parallelo $(20 \times 30)/(20 + 30)\ \Omega = 12\ \Omega$; serie $10\ \Omega + 12\ \Omega = 22\ \Omega$. $I = 11\ \text{V}/22\ \Omega = 0{,}50\ \text{A}$ nel resistore da 10 Ω, con $\Delta V = 5{,}0\ \text{V}$. Ai capi del parallelo $12\ \Omega \times 0{,}50\ \text{A} = 6{,}0\ \text{V}$: correnti $6{,}0\ \text{V}/20\ \Omega = 0{,}30\ \text{A}$ e $6{,}0\ \text{V}/30\ \Omega = 0{,}20\ \text{A}$; nodo: 0,30 + 0,20 = 0,50 A. Potenze: 2,5 W + 1,8 W + 1,2 W = 5,5 W = 11 V × 0,50 A.

24. a) Nodo A (legge dei nodi): $I_1 + I_2 = I_3$. Maglia 1 (legge delle maglie, oraria): $9{,}0 - 3{,}0\ I_1 - 2{,}0\ I_3 = 0$. Maglia 2: $2{,}0\ I_3 + 2{,}0\ I_2 - 6{,}0 = 0$. b) Sostituendo I_3: $5{,}0\ I_1 + 2{,}0\ I_2 = 9{,}0$ e $2{,}0\ I_1 + 4{,}0\ I_2 = 6{,}0$; moltiplicando la prima per 2 e sottraendo la seconda, $8{,}0\ I_1 = 12$, $I_1 = 1{,}5\ \text{A}$; poi $I_2 = (6{,}0 - 3{,}0)/4{,}0\ \text{A} = 0{,}75\ \text{A}$ e $I_3 = 2{,}25\ \text{A} \approx 2{,}3\ \text{A}$. Tutte positive: i versi ipotizzati sono quelli

reali, ed entrambi i generatori erogano. c) $\Delta V_{AB} = R_3 I_3 = 4{,}5$ V (controllo: 9,0 − 3,0 × 1,5 = 4,5 V; 6,0 − 2,0 × 0,75 = 4,5 V). Potenze erogate: 9,0 V × 1,5 A = 13,5 W e 6,0 V × 0,75 A = 4,5 W, in tutto 18 W; dissipate (conservazione dell'energia): 6,75 W + 1,13 W + 10,1 W = 18 W.

25. a) Per il massimo trasferimento di potenza (vertice della parabola $P = \varepsilon I - rI^2$) $R = r = 0{,}50\ \Omega$; $P_{max} = \varepsilon^2/(4r) = 144\ \text{V}^2/2{,}0\ \Omega = 72$ W, con $I = 12$ A. b) $\eta = R/(R + r) = 50\%$: la batteria produce 144 W e ne dissipa 72 al suo interno. c) $I = 12\ \text{V}/(5{,}5 + 0{,}50)\ \Omega = 2{,}0$ A; $P = 5{,}5\ \Omega \times (2{,}0\ \text{A})^2 = 22$ W; $\eta = 5{,}5/6{,}0 = 92\%$. Il carico riceve meno potenza, ma quasi tutta l'energia prodotta arriva a destinazione: è la condizione in cui si fanno funzionare gli impianti.

26. a) Lunghezza totale 60 m; per la seconda legge di Ohm $R_f = \rho L/S = 1{,}68 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m} \times 60\ \text{m}/(1{,}5 \times 10^{-6}\ \text{m}^2) = 0{,}67\ \Omega$. b) Un'unica maglia (legge delle maglie): $I = \varepsilon/(R + R_f + r) = 12\ \text{V}/(3{,}0 + 0{,}672 + 0{,}050)\ \Omega = 3{,}2$ A; lampada: 3,0 Ω × 3,22 A = 9,7 V; morsetti: $\varepsilon - rI = 12\ \text{V} - 0{,}050\ \Omega \times 3{,}22\ \text{A} = 11{,}8$ V. c) Per l'effetto Joule $R_f I^2 = 0{,}672\ \Omega \times (3{,}22\ \text{A})^2 = 7{,}0$ W. d) Senza fili $I = 12\ \text{V}/3{,}05\ \Omega = 3{,}93$ A e $P = 3{,}0\ \Omega \times (3{,}93\ \text{A})^2 = 46$ W, contro $3{,}0\ \Omega \times (3{,}22\ \text{A})^2 = 31$ W con i fili: la prolunga sottile fa perdere un terzo della potenza della lampada.

27. Senza strumento: 6,00 V. Con 1,0 MΩ: il parallelo vale $(0{,}10 \times 1{,}0)/(0{,}10 + 1{,}0)\ \text{M}\Omega = 90{,}9\ \text{k}\Omega$ e la tensione $12{,}0\ \text{V} \times 90{,}9/(100 + 90{,}9) = 5{,}71$ V, errore −4,8%. Con 10 MΩ: parallelo 99,0 kΩ, tensione $12{,}0\ \text{V} \times 99{,}0/199{,}0 = 5{,}97$ V, errore −0,5%.

28. a) $\tau = RC = 1{,}0 \times 10^3\ \Omega \times 2{,}2 \times 10^{-3}\ \text{F} = 2{,}2$ s; $I_0 = \Delta V_0/R = 9{,}0\ \text{V}/1{,}0\ \text{k}\Omega = 9{,}0$ mA. b) Per la legge della scarica $\Delta V = 9{,}0\ \text{V} \times e^{-5{,}0/2{,}2} = 9{,}0\ \text{V} \times 0{,}103 = 0{,}93$ V. c) $1{,}0 = 9{,}0\ e^{-t/\tau}$, quindi $t = \tau \ln 9{,}0 = 2{,}2\ \text{s} \times 2{,}20 = 4{,}8$ s.

29. a) Energia di un condensatore (capitolo 12): $U = \frac{1}{2} C\Delta V^2 = \frac{1}{2} \times 150 \times 10^{-6}\ \text{F} \times (330\ \text{V})^2 = 8{,}2$ J. b) $\tau = 1{,}0 \times 10^4\ \Omega \times 1{,}5 \times 10^{-4}\ \text{F} = 1{,}5$ s. Per la legge della carica $\Delta V = \Delta V_f(1 - e^{-t/\tau}) = 0{,}95\ \Delta V_f$ per $e^{-t/\tau} = 0{,}05$, cioè $t = \tau \ln 20 = 3{,}0\ \tau = 4{,}5$ s. c) L'energia è proporzionale al quadrato della tensione: $U = 0{,}95^2 \times 8{,}17\ \text{J} = 7{,}4$ J. d) Nella carica completa si dissipa nel resistore la stessa energia che resta nel condensatore, 8,2 J; il generatore compie il lavoro $Q\Delta V = C\Delta V^2 = 16$ J (conservazione dell'energia: 16 J = 8,2 J + 8,2 J).

30. a) $\ln \Delta V = 1{,}792$; 1,391; 0,993; 0,593; 0,191: ogni 10 s il logaritmo diminuisce di circa 0,40, quindi i punti stanno su una retta (la tensione si moltiplica per lo stesso fattore, 0,67, a intervalli uguali). b) Pendenza: $(0{,}191 - 1{,}792)/40\ \text{s} = -0{,}0400\ \text{s}^{-1} = -1/\tau$, quindi $\tau = 25$ s. c) $C = \tau/R = 25\ \text{s}/(47 \times 10^3\ \Omega) = 5{,}3 \times 10^{-4}\ \text{F} = 0{,}53$ mF.

31. Traccia. In parallelo ogni apparecchio riceve la stessa tensione di 230 V, per cui è progettato; in serie la tensione si dividerebbe fra gli apparecchi accesi e cambierebbe ogni volta che se ne accende uno. Inoltre ogni apparecchio si accende e si spegne indipendentemente dagli altri: in serie, spegnendone uno (o se uno si guasta) si interromperebbe la corrente in tutti. Infine la potenza di ciascuno non dipende dagli altri.

32. $P \approx 4 \times 5\ \text{W} = 20$ W; $I = P/\Delta V \approx 20\ \text{W}/12\ \text{V} \approx 1{,}7$ A; $\Delta t \approx 60\ \text{A}\cdot\text{h}/1{,}7\ \text{A} \approx 36$ h, circa un giorno e mezzo. In realtà meno: si è supposto che la batteria fosse completamente carica, che si possa scaricare del tutto e che la tensione resti 12 V; già con metà della carica il motorino d'avviamento potrebbe non funzionare.

33. Traccia. Entrambi usano una formula giusta come se l'altra grandezza fosse fissa, ma con un generatore reale corrente e tensione cambiano insieme con R: $I = \varepsilon/(R + r)$ e $\Delta V = \varepsilon R/(R + r)$. Con $R \to 0$ la corrente è massima ma $\Delta V \to 0$, con $R \to \infty$ la tensione è massima ma $I \to 0$: in entrambi i casi $P \to 0$. La potenza $P = R\varepsilon^2/(R + r)^2$ è massima per $R = r$, come mostra il vertice della parabola $P = \varepsilon I - rI^2$.