CAPITOLO

12

I conduttori in equilibrio e i condensatori

Due lastre di metallo separate da un velo d'aria: l'energia di un condensatore non sta nel metallo, ma nel campo che riempie lo spazio fra le armature.

OBIETTIVI

1. Dedurre dal teorema di Gauss le proprietà di un conduttore in equilibrio elettrostatico e il teorema di Coulomb.
2. Spiegare il potere delle punte, il funzionamento del parafulmine e quello della gabbia di Faraday.
3. Definire la capacità e calcolarla per una sfera conduttrice e per un condensatore piano, anche con un dielettrico.
4. Ricavare la capacità equivalente di condensatori in serie e in parallelo e risolvere semplici reti.
5. Calcolare l'energia di un condensatore e interpretarla come energia immagazzinata nel campo elettrico.
6. Misurare in laboratorio la capacità di un condensatore piano e ricavare la costante dielettrica della carta.

INDICE DEL CAPITOLO

12.1 I conduttori in equilibrio elettrostatico 2
12.2 Il potere delle punte e lo schermo elettrostatico 5
12.3 La capacità 9
12.4 Il condensatore piano 10
12.5 Condensatori in serie e in parallelo 16
12.6 L'energia del condensatore e del campo elettrico 18

Fisica 4 · Parte III · Il campo elettrico · versione 1.0
Capitolo 12: I conduttori in equilibrio e i condensatori · pagine 347–374 del volume completo · estratto per lo studio

Durante un temporale l'abitacolo di un'automobile è uno dei posti più sicuri in cui trovarsi, anche se un fulmine colpisce la carrozzeria. Lo schermo del tuo telefono si accorge del dito che lo sfiora perché il dito, che è un conduttore, cambia di pochissimo la capacità elettrica di una griglia di elettrodi nascosta sotto il vetro. Il flash di una fotocamera libera in un millesimo di secondo l'energia che ha raccolto in qualche secondo. Sono tre conseguenze di ciò che accade quando le cariche, libere di muoversi in un conduttore, smettono di muoversi e raggiungono l'equilibrio.

In questo capitolo applichi ai conduttori il teorema di Gauss (capitolo 10) e il potenziale (capitolo 11). Ne ricavi dove si dispone la carica e perché si accumula sulle punte, come si costruisce uno schermo contro i campi elettrici e come si immagazzinano carica ed energia in un *condensatore*. Alla fine troverai la risposta a una domanda che sembra filosofica e invece si misura: dove sta l'energia elettrica? Nel campo.

12.1 I conduttori in equilibrio elettrostatico

Nel capitolo 9 hai visto che in un metallo una parte degli elettroni, gli elettroni liberi, può muoversi in tutto il volume del materiale. Se carichi un conduttore, o se gli avvicini un corpo carico, questi elettroni si spostano; in un tempo brevissimo, però, il moto ordinato si arresta e la distribuzione delle cariche non cambia più. Si dice allora che il conduttore è in **equilibrio elettrostatico**: le cariche sono ferme su scala macroscopica, anche se gli elettroni continuano la loro agitazione termica. Da questa sola condizione, insieme al teorema di Gauss, discendono quattro proprietà.

12.1.1 Il campo all'interno è nullo

Supponi che in un punto interno al materiale il campo $\boldsymbol{E}$ sia diverso da zero. Gli elettroni liberi che si trovano lì subirebbero la forza $\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{E}$ e si metterebbero in moto: il conduttore non sarebbe in equilibrio. Quindi, in equilibrio elettrostatico, **il campo elettrico è nullo in ogni punto interno al materiale conduttore**.

Attenzione al significato di questa frase. Se il conduttore si trova in un campo esterno, per esempio vicino a una carica, il campo di quella carica non «si ferma» alla superficie del metallo. Gli elettroni liberi si spostano finché le cariche indotte producono, all'interno, un campo che annulla esattamente quello esterno: è il principio di sovrapposizione dei campi (capitolo 10). La Figura 12.1 mostra il risultato per una sfera conduttrice scarica in un campo uniforme: le linee di campo si curvano per terminare sulle cariche negative indotte e ripartono da quelle positive, e dentro la sfera non entra nessuna linea.

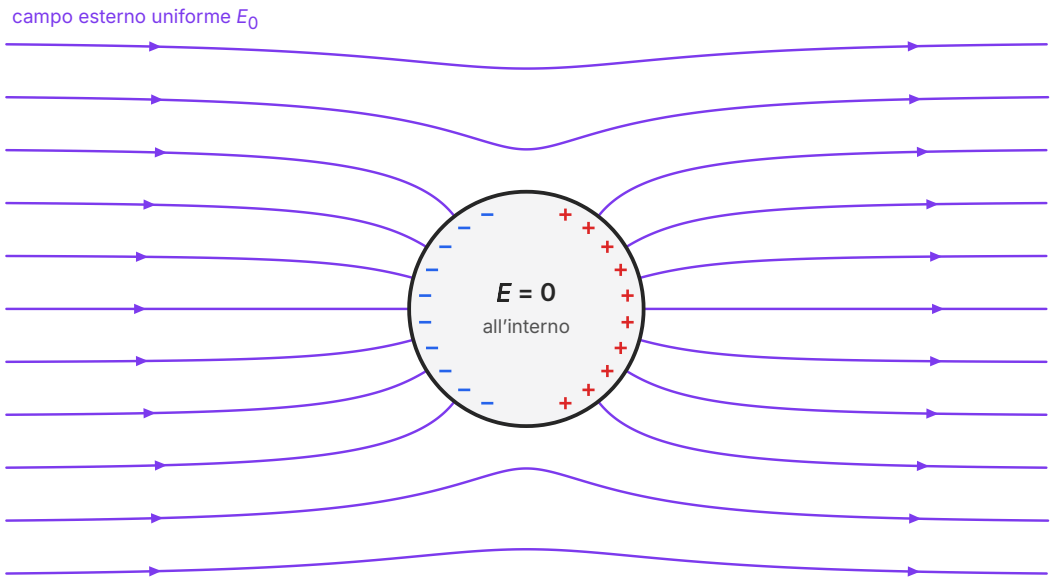

Figura 12.1 Una sfera conduttrice scarica in un campo elettrico uniforme. Le linee di campo, calcolate, terminano sulle cariche negative indotte sul lato sinistro e ripartono da quelle positive sul lato destro, incontrando la superficie perpendicolarmente. All'interno il campo delle cariche indotte annulla quello esterno. La densità delle cariche indotte è massima sull'asse e nulla sull'equatore.

12.1.2 La carica in eccesso sta sulla superficie

Scegli una superficie chiusa qualsiasi che stia tutta all'interno del materiale. In ogni suo punto $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$, quindi il flusso $\Phi(\boldsymbol{E})$ attraverso di essa è nullo e, per il teorema di Gauss, è nulla anche la carica che racchiude. Puoi prendere la superficie appena sotto la superficie del conduttore, a una distanza piccola quanto vuoi: dentro non c'è carica netta. Ne segue che **la carica in eccesso di un conduttore in equilibrio si dispone tutta sulla sua superficie esterna**, in uno strato spesso pochi diametri atomici. È ciò che hai visto con il pozzo di Faraday nel laboratorio del capitolo 10: la sfera di prova che tocca il fondo interno del barattolo gli cede tutta la sua carica, perché la carica non può restare all'interno e si porta sulla faccia esterna del recipiente.

La carica si distribuisce sulla superficie con una densità superficiale σ che in generale *non* è uniforme: è uniforme soltanto su una sfera isolata, per simmetria. Fra poco vedrai da che cosa dipende.

12.1.3 Il campo in superficie è perpendicolare e il conduttore è equipotenziale

Appena fuori dal conduttore il campo non è nullo, ma non può avere una componente parallela alla superficie: se l'avesse, le cariche superficiali scivolerebbero lungo di essa. Quindi **il campo appena fuori da un conduttore in equilibrio è perpendicolare alla sua superficie**.

Ora sposta una carica di prova fra due punti qualsiasi del conduttore. Se il percorso è interno, il campo è nullo e non compie lavoro; se il percorso corre sulla superficie, il campo è perpendicolare allo spostamento e il lavoro è ancora nullo. Poiché la differenza di potenziale è il lavoro del campo cambiato di segno e diviso per la carica (capitolo 11), $\Delta V = 0$: **tutti i punti di un conduttore in equilibrio, interni e superficiali, hanno lo stesso potenziale**. La superficie del conduttore è una superficie equipotenziale, e infatti il campo le è perpendicolare, come accade per tutte le superfici equipotenziali. Nel capitolo 11 l'hai già visto per una sfera conduttrice di raggio R e carica Q: all'esterno $V = k_0 Q/r$, dentro e sulla superficie $V = k_0 Q/R$, costante.

DA RICORDARE

Le quattro proprietà di un conduttore in equilibrio elettrostatico

- Il campo elettrico è nullo in ogni punto interno al materiale.
- La carica in eccesso si trova sulla superficie esterna; all'interno la carica netta è zero.
- Appena fuori, il campo è perpendicolare alla superficie e vale σ/ε_0 (teorema di Coulomb).
- Il conduttore è equipotenziale: il potenziale è lo stesso in tutti i suoi punti, ma la densità di carica σ in generale cambia da punto a punto.

Valgono solo **in equilibrio**. In un filo percorso da corrente le cariche si muovono, e il campo all'interno del metallo non è nullo: è proprio questo campo che le spinge (capitolo 13).

12.1.4 Il teorema di Coulomb

Quanto vale il campo appena fuori dalla superficie, dove la densità di carica è σ? Usa come superficie gaussiana un piccolo cilindro, simile a una moneta, con le basi di area ΔS parallele alla superficie del conduttore: una base appena fuori, l'altra appena dentro il metallo. La base interna ha flusso nullo, perché lì $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$; la superficie laterale ha flusso nullo, perché fuori il campo è perpendicolare alla superficie del conduttore e quindi parallelo alla parete del cilindro, e dentro è nullo. Resta il flusso attraverso la base esterna, $E\Delta S$. La carica racchiusa è $\sigma\Delta S$, e il teorema di Gauss dà $E\Delta S = \sigma\Delta S/\varepsilon_0$, cioè

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \text{ (appena fuori dalla superficie di un conduttore in equilibrio)}$$

È il **teorema di Coulomb**. Il campo è diretto verso l'esterno dove $\sigma > 0$ e verso l'interno dove $\sigma < 0$. Per esempio, dove $\sigma = 1{,}0\ \mu\text{C/m}^2$ il campo vale $1{,}0 \times 10^{-6}/(8{,}85 \times 10^{-12})\ \text{N/C} = 1{,}1 \times 10^5\ \text{N/C}$.

Nel capitolo 10 hai trovato che un piano infinito con densità σ produce un campo di modulo $\sigma/(2\varepsilon_0)$, la metà. Non c'è contraddizione. La piccola porzione di superficie racchiusa nel cilindro produce, da sola, un campo $\sigma/(2\varepsilon_0)$ da entrambe le parti, uscente sia verso l'esterno sia verso l'interno del metallo. Tutte le altre cariche del conduttore producono lì un secondo campo, che all'interno deve cancellare il primo (perché il campo totale nel metallo è zero) e quindi all'ester-

no lo raddoppia. Il teorema di Coulomb tiene conto di tutte le cariche del conduttore, il campo del piano di una sola porzione.

ERRORE FREQUENTE

Campo nullo non vuol dire potenziale nullo

«Dentro il conduttore il campo è zero, quindi anche il potenziale è zero.» È falso. Il campo è legato alle *variazioni* del potenziale ($E = -\Delta V/\Delta s$, capitolo 11): campo nullo significa potenziale *costante*, non nullo. Una sfera conduttrice di raggio 10 cm con carica 50 nC ha, in ogni suo punto interno, $E = 0$ e $V = k_0 Q/R = 4{,}5$ kV.

Allo stesso modo, «il conduttore è equipotenziale» non significa che la carica sia distribuita in modo uniforme: il potenziale è lo stesso ovunque, la densità σ no. Il prossimo paragrafo mostra quanto può cambiare.

12.2 Il potere delle punte e lo schermo elettrostatico

12.2.1 Due sfere collegate da un filo

Per capire come si distribuisce la carica su un conduttore di forma qualsiasi, considera un modello semplice: due sfere conduttrici di raggi R_1 e R_2, molto lontane fra loro e collegate da un filo conduttore lungo e sottile (Figura 12.2). Il sistema è un unico conduttore, quindi in equilibrio le due sfere hanno lo stesso potenziale. Poiché sono lontane, il potenziale di ciascuna è dovuto quasi solo alla sua carica, e la carica sul filo sottile è trascurabile:

$$k_0 \frac{Q_1}{R_1} = k_0 \frac{Q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

La sfera più grande prende più carica, in proporzione al raggio. Le densità superficiali, però, vanno al contrario: poiché $\sigma = Q/(4\pi R^2)$,

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \cdot \frac{R_2^{\,2}}{R_1^{\,2}} = \frac{R_2}{R_1}$$

La densità di carica è inversamente proporzionale al raggio, e per il teorema di Coulomb lo è anche il campo in superficie: $E = \sigma/\varepsilon_0 = V/R$. La sfera piccola ha meno carica ma un campo più intenso.

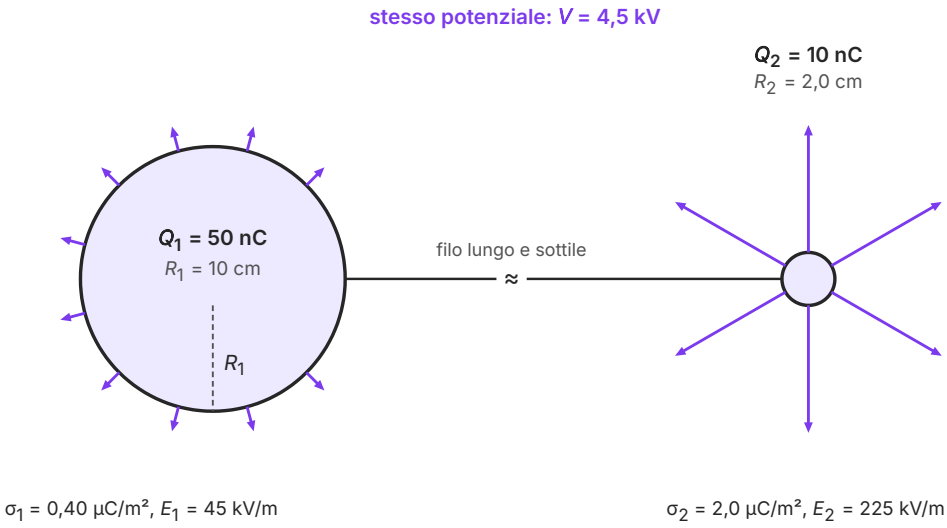

Figura 12.2 Due sfere conduttrici lontane collegate da un filo sottile. Hanno lo stesso potenziale; la sfera piccola ha un quinto della carica della grande ma una densità di carica, e quindi un campo in superficie, cinque volte maggiore. Le frecce sono proporzionali al campo in superficie. I valori sono quelli dell'esempio svolto.

ESEMPIO SVOLTO

Carica che si ridistribuisce fra due sfere

Problema. Una sfera conduttrice di raggio $R_1 = 10$ cm ha carica 60 nC. Con un filo lungo e sottile la colleghi a una sfera scarica di raggio $R_2 = 2{,}0$ cm, molto lontana. Calcola le cariche finali, il potenziale comune, le densità di carica e i campi in superficie.

1. Prima del collegamento. $V = k_0 Q/R_1 = 8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2 \times 60 \times 10^{-9}\ \text{C}/0{,}10\ \text{m} = 5{,}4 \times 10^3\ \text{V}$.

2. Le due condizioni. Per la conservazione della carica $Q_1 + Q_2 = 60$ nC; per l'equilibrio, potenziali uguali: $Q_1/R_1 = Q_2/R_2$, cioè $Q_1 = 5Q_2$.

3. Le cariche. $6Q_2 = 60$ nC, quindi $Q_2 = 10$ nC e $Q_1 = 50$ nC: 10 nC sono passati attraverso il filo.

4. Il potenziale comune. $V = k_0 Q_1/R_1 = 8{,}99 \times 10^9 \times 50 \times 10^{-9}/0{,}10\ \text{V} = 4{,}5 \times 10^3\ \text{V}$; controllo: $k_0 Q_2/R_2 = 8{,}99 \times 10^9 \times 10 \times 10^{-9}/0{,}020\ \text{V} = 4{,}5 \times 10^3\ \text{V}$.

5. Densità e campi. $\sigma_1 = Q_1/(4\pi R_1^2) = 50 \times 10^{-9}\ \text{C}/(4\pi \times 0{,}010\ \text{m}^2) = 4{,}0 \times 10^{-7}\ \text{C/m}^2$, $\sigma_2 = 10 \times 10^{-9}\ \text{C}/(4\pi \times 4{,}0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2) = 2{,}0 \times 10^{-6}\ \text{C/m}^2$. Per il teorema di Coulomb $E_1 = \sigma_1/\varepsilon_0 = 4{,}5 \times 10^4$ V/m ed $E_2 = 2{,}2 \times 10^5$ V/m (più precisamente 225 kV/m). Controllo con $E = V/R$: 4495 V/0,10 m = 45 kV/m e 4495 V/0,020 m = 225 kV/m.

Commento. Il rapporto fra i campi è 5, come il rapporto inverso fra i raggi. Il potenziale è sceso da 5,4 kV a 4,5 kV, perché la stessa carica occupa ora un conduttore più «capiente»: è l'idea di capacità, che incontrerai fra poco.

12.2.2 Le punte

Il risultato delle due sfere vale, qualitativamente, per ogni conduttore: **la densità di carica, e con essa il campo in superficie, è maggiore dove il raggio di curvatura è minore**. Su un conduttore a forma di goccia la carica si addensa sulla punta (Figura 12.3); su una superficie piatta o concava è più rarefatta. È il **potere delle punte**.

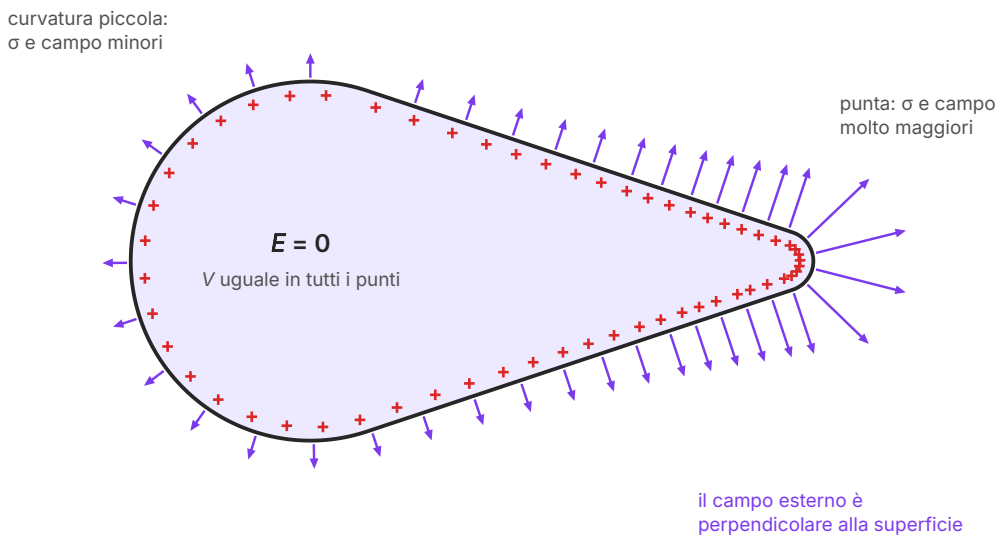

Figura 12.3 Distribuzione schematica della carica su un conduttore con una punta. Il conduttore è equipotenziale e dentro il campo è nullo; le cariche sono più fitte dove il raggio di curvatura è piccolo, e il campo esterno (frecce, perpendicolari alla superficie) vi è più intenso.

Vicino a una punta il campo può superare la *rigidità dielettrica* dell'aria, circa 3 MV/m (è il campo massimo che l'aria sopporta senza diventare conduttrice: la studierai nel paragrafo sul dielettrico), anche quando il potenziale del conduttore non è altissimo. L'aria allora si ionizza: gli ioni vengono accelerati, urtano le molecole e ne ionizzano altre, e la punta perde carica in una scarica silenziosa e a volte luminosa, l'effluvio. I marinai la conoscevano come fuoco di Sant'Elmo, il bagliore che compare sulla cima degli alberi delle navi durante i temporali. Per la stessa ragione gli apparecchi ad alta tensione hanno elettrodi arrotondati e lisci: il generatore elettrostatico dei laboratori scolastici termina con una grande sfera levigata, che trattiene la carica proprio perché non ha punte.

Benjamin Franklin sfruttò le punte nel **parafulmine**: un'asta metallica appuntita posta sul punto più alto di un edificio e collegata con un conduttore robusto a una piastra interrata. Il suo compito principale è offrire al fulmine un percorso preferenziale e a bassa resistenza verso terra, in modo che la corrente non attraversi muri, tubi e impianti.

12.2.3 Le cavità e lo schermo elettrostatico

Considera ora un conduttore cavo, con una cavità vuota al suo interno, posto in un campo esterno qualsiasi. Prendi una superficie gaussiana tutta nel metallo che circondi la cavità: il campo vi è nullo, quindi la carica totale sulla parete della cavità è zero. Potrebbe esserci carica positiva in una zona della parete e negativa in un'altra? In quel caso una linea di campo attraverserebbe la cavità dalla zona positiva a quella negativa. Percorri un cammino chiuso che segua quella linea dentro la cavità e torni indietro attraverso il metallo: lungo il primo tratto il campo è parallelo allo spostamento e la somma $\Sigma E_t \Delta l$ è positiva, nel metallo è nulla, quindi la circuitazione $\Gamma(\boldsymbol{E})$ sarebbe diversa da zero. Ma il campo elettrostatico ha circuitazione nulla lungo qualunque cammino chiuso (capitolo 11). Dunque sulla parete della cavità non c'è carica, e **nella cavità vuota di un conduttore in equilibrio il campo è nullo, qualunque siano le cariche esterne**.

Un involucro conduttore funziona quindi da **schermo elettrostatico**: ciò che sta dentro non risente dei campi elettrici statici esterni. Una rete metallica a maglie fitte si comporta quasi come una lamiera piena; un involucro di questo tipo si chiama **gabbia di Faraday**. Nel 1836 Michael Faraday fece costruire una grande stanza cubica rivestita di materiale conduttore, la isolò da terra e la caricò fortemente; entrato con strumenti sensibilissimi, non rilevò alcun effetto delle cariche, nemmeno mentre sulla superficie esterna scoccavano scintille.

COLLEGAMENTI

Gabbie di Faraday quotidiane

L'automobile. Quando un fulmine colpisce un'auto con carrozzeria metallica, la corrente scorre sulla superficie esterna della lamiera e raggiunge il terreno attraverso l'aria umida e la strada; l'abitacolo resta protetto. Non sono gli pneumatici a isolare l'auto: una scarica che ha attraversato chilometri d'aria non si ferma davanti a pochi centimetri di gomma. Un'auto decappottabile o con la carrozzeria in plastica non offre la stessa protezione.

Il forno a microonde. La rete metallica nel vetro dello sportello ha fori di pochi millimetri. Le microonde del forno, onde elettromagnetiche (le studierai il prossimo anno) di frequenza 2,45 GHz, hanno una lunghezza d'onda di circa 12 cm e non passano in modo apprezzabile da aperture così piccole; la luce visibile, con lunghezza d'onda inferiore al micrometro, le attraversa e ti permette di guardare dentro.

I cavi schermati. I cavi coassiali dell'antenna televisiva hanno attorno al conduttore centrale una calza di fili metallici collegata a terra, che scherma il segnale dai disturbi esterni.

Lo schermo funziona in un verso solo, se l'involucro è isolato. Una carica q posta nella cavità attira sulla parete interna una carica $-q$ (lo richiede il teorema di Gauss applicato a una superficie nel metallo), e sulla superficie esterna compare $+q$: chi sta fuori «vede» la carica. Se però l'invo-

lucro è collegato a terra, la carica $+q$ della superficie esterna fluisce nel terreno e lo schermo funziona in entrambi i versi.

12.3 La capacità

12.3.1 La capacità di un conduttore isolato

Carica un conduttore isolato con una carica Q: assume un potenziale V, misurato rispetto all'infinito. Se raddoppi la carica, ogni carica superficiale raddoppia nella stessa posizione (la forma della distribuzione dipende solo dalla geometria), e per il principio di sovrapposizione raddoppiano il campo in ogni punto e il potenziale. Quindi Q e V sono direttamente proporzionali, e il loro rapporto è una caratteristica del conduttore: la **capacità**

$$C = \frac{Q}{V}$$

La capacità misura quanta carica bisogna dare al conduttore per portarlo al potenziale di 1 V. Nel SI si misura in **farad** (simbolo F), in onore di Faraday: 1 F = 1 C/V. Come vedrai subito, il farad è un'unità enorme, e nella pratica si usano i sottomultipli: microfarad (1 μF = 10^{-6} F), nanofarad (1 nF = 10^{-9} F) e picofarad (1 pF = 10^{-12} F).

12.3.2 La sfera conduttrice

Per una sfera isolata di raggio R il potenziale è $V = k_0 Q/R$, quindi

$$C = \frac{R}{k_0} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

La capacità di una sfera è proporzionale al suo raggio e non dipende dalla carica. Una sfera di 10 cm di raggio ha $C = 0{,}10\ \text{m}/(8{,}99 \times 10^9\ \text{N·m}^2/\text{C}^2) = 1{,}1 \times 10^{-11}$ F = 11 pF. La Terra, con $R = 6{,}37 \times 10^6$ m, ha $C = 7{,}1 \times 10^{-4}$ F: un intero pianeta non arriva a un millifarad.

Una sfera non può essere caricata quanto si vuole. Il campo in superficie vale $E = \sigma/\varepsilon_0 = V/R$, e quando supera la rigidità dielettrica dell'aria, circa 3×10^6 V/m, l'aria intorno diventa conduttrice e la sfera si scarica. Per la sfera di 10 cm il potenziale massimo è $3 \times 10^6\ \text{V/m} \times 0{,}10\ \text{m} = 3 \times 10^5$ V, e la carica massima $Q = CV \approx 3{,}3$ μC. Una sfera più grande arriva a potenziali più alti: ecco perché i generatori elettrostatici per tensioni elevate hanno sfere grandi.

12.3.3 Il condensatore

Un conduttore isolato accumula poca carica. Le cose cambiano se gli si avvicina un secondo conduttore con carica opposta: il campo della seconda carica riduce il potenziale del primo conduttore, e per raggiungere la stessa differenza di potenziale serve molta più carica. Un sistema di due conduttori vicini, separati da un isolante e con cariche uguali e opposte $+Q$ e $-Q$, si

chiama **condensatore**; i due conduttori sono le sue **armature**. Per caricarlo basta collegare le armature ai poli di una batteria, che sposta elettroni da un'armatura all'altra: la carica totale del condensatore resta zero.

La capacità di un condensatore è il rapporto fra la carica Q dell'armatura positiva e la differenza di potenziale ΔV fra l'armatura positiva e quella negativa:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Questa definizione usa una differenza di potenziale, e quindi non dipende dalla scelta dello zero. Anche qui Q e ΔV sono proporzionali, e C dipende soltanto dalla forma e dalle dimensioni delle armature, dalla loro distanza e dal materiale isolante interposto: non dalla carica né dalla tensione. Nei circuiti il condensatore si disegna con due tratti paralleli uguali, come nella Figura 12.6.

12.4 Il condensatore piano

12.4.1 La capacità del condensatore piano

Il **condensatore piano** è formato da due lastre metalliche piane e parallele, di area S, a una distanza d piccola rispetto alle loro dimensioni. Nel capitolo 10 hai ricavato dal teorema di Gauss il campo fra due piani con densità $+\sigma$ e $-\sigma$: è uniforme, vale σ/ε_0 ed è nullo all'esterno. È lo stesso valore del teorema di Coulomb, perché le cariche stanno sulle facce interne delle armature, una di fronte all'altra. Con $\sigma = Q/S$ e, per un campo uniforme, $\Delta V = Ed$ (capitolo 11):

$$\Delta V = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S} \Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

La capacità cresce con l'area delle armature e diminuisce con la loro distanza. Il risultato è esatto per armature infinite; per armature reali le linee di campo si incurvano verso l'esterno vicino ai bordi (l'effetto di bordo, a sinistra nella Figura 12.4), e la formula resta un'ottima approssimazione finché d è molto più piccola dei lati delle armature.

Ora puoi apprezzare quanto è grande un farad. Un condensatore piano in aria da 1 F, con armature distanti 1 mm, dovrebbe avere $S = Cd/\varepsilon_0 = 1\ \text{F} \times 10^{-3}\ \text{m}/(8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F/m}) = 1{,}1 \times 10^{8}\ \text{m}^2$: un quadrato di 10,6 km di lato. Nota che le unità di ε_0, $\text{C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$, coincidono con F/m, perché 1 F = 1 C/V e 1 V = 1 N·m/C.

ESEMPIO SVOLTO

Un condensatore piano, passo per passo

Problema. Un condensatore piano ha armature di area 200 cm^2 distanti 1,00 mm, in aria. Lo colleghi a una batteria da 12,0 V. a) Calcola la capacità. b) Calcola la carica e la densità di carica sulle armature. c) Calcola il campo in due modi. d) Fino a quale tensione si può caricare prima che l'aria si perfori? e) Scolleghi la batteria e allontani le armature fino a 2,00 mm: che cosa cambia?

a) $S = 200\ cm^2 = 2{,}00 \times 10^{-2}\ m^2$. $C = \varepsilon_0 S/d = 8{,}85 \times 10^{-12}\ F/m \times 2{,}00 \times 10^{-2}\ m^2/(1{,}00 \times 10^{-3}\ m) = 1{,}77 \times 10^{-10}\ F = 177\ pF$.

b) $Q = C\Delta V = 1{,}77 \times 10^{-10}\ F \times 12{,}0\ V = 2{,}12 \times 10^{-9}\ C = 2{,}12\ nC$; $\sigma = Q/S = 2{,}12 \times 10^{-9}\ C/(2{,}00 \times 10^{-2}\ m^2) = 1{,}06 \times 10^{-7}\ C/m^2$.

c) Dalla tensione: $E = \Delta V/d = 12{,}0\ V/(1{,}00 \times 10^{-3}\ m) = 1{,}20 \times 10^4\ V/m$. Dalla carica: $E = \sigma/\varepsilon_0 = 1{,}06 \times 10^{-7}/(8{,}85 \times 10^{-12})\ V/m = 1{,}20 \times 10^4\ V/m$. I due risultati coincidono.

d) Il campo non deve superare la rigidità dielettrica dell'aria, $E_{max} \approx 3 \times 10^6\ V/m$: $\Delta V_{max} = E_{max} d \approx 3 \times 10^6\ V/m \times 1{,}00 \times 10^{-3}\ m = 3 \times 10^3\ V$, cioè circa 3 kV. La batteria da 12 V è ben lontana dal limite.

e) Con la batteria scollegata la carica resta 2,12 nC (le armature sono isolate). La capacità si dimezza, 88,5 pF; la tensione raddoppia, $\Delta V = Q/C = 24{,}0\ V$. Il campo $E = \sigma/\varepsilon_0$ non cambia, perché non cambia σ: a campo uniforme fisso, raddoppiare la distanza raddoppia la differenza di potenziale.

12.4.2 Il dielettrico

Se lo spazio fra le armature viene riempito con un isolante, che in questo contesto si chiama **dielettrico**, la capacità aumenta: Faraday scoprì che il rapporto fra la capacità con il dielettrico e quella nel vuoto è un numero caratteristico del materiale. È la costante dielettrica relativa ε_r che hai incontrato nel capitolo 9, quando hai visto che in un mezzo isolante la forza di Coulomb si riduce di quello stesso fattore.

La spiegazione è la polarizzazione del dielettrico (capitolo 9). Nel campo del condensatore ogni molecola diventa un piccolo dipolo, oppure, se lo era già, tende ad allinearsi, con l'estremo negativo verso l'armatura positiva. All'interno del materiale le cariche positive e negative di molecole vicine si compensano; sulle due facce del dielettrico, invece, resta uno strato non compensato: negativo sulla faccia rivolta all'armatura positiva, positivo su quella rivolta all'armatura negativa. Sono le **cariche di polarizzazione**, legate alle molecole e non libere di muoversi nel materiale. Il loro campo è opposto a quello delle armature, e a parità di carica sulle armature il campo nel dielettrico si riduce (Figura 12.4):

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} \Rightarrow \Delta V = \frac{\Delta V_0}{\varepsilon_r} \Rightarrow C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

Nella figura, con $\varepsilon_r = 3$, delle nove linee di campo che partono dall'armatura positiva sei terminano sulle cariche di polarizzazione e soltanto tre attraversano il dielettrico: la densità delle cariche di polarizzazione è $\sigma(1 - 1/\varepsilon_r)$, due terzi di quella delle armature. La Tabella A.8 dell'appendice riporta alcuni valori: $\varepsilon_r = 1{,}0006$ per l'aria secca (che in quasi tutti i calcoli equivale al vuoto), circa 3 per la carta, da 5 a 10 per il vetro. L'acqua ha $\varepsilon_r \approx 80$, ma l'acqua comune conduce e non si usa nei condensatori.

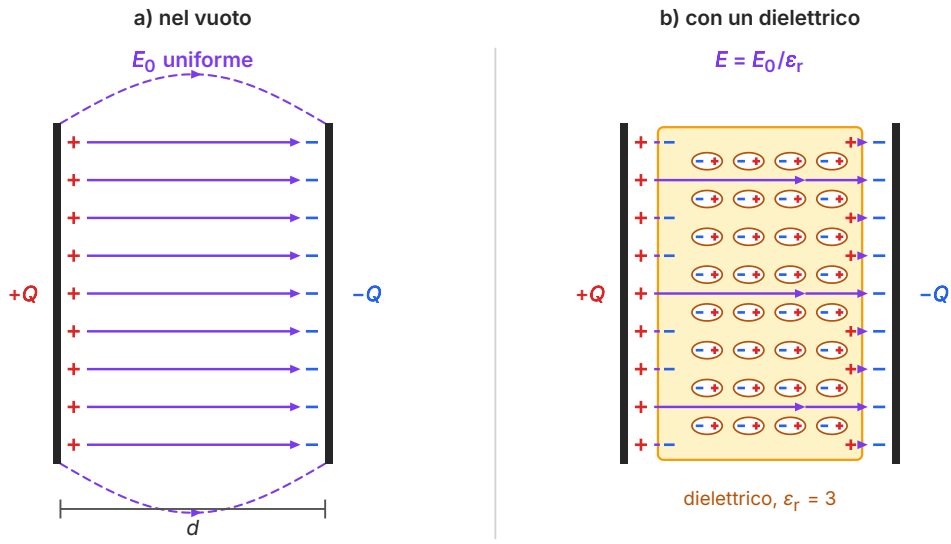

Figura 12.4 Condensatore piano con la stessa carica sulle armature: a) nel vuoto, con il campo uniforme E_0 e l'incurvarsi delle linee ai bordi; b) riempito per quasi tutto lo spessore da un dielettrico con $\varepsilon_r = 3$. Le molecole polarizzate lasciano sulle facce del dielettrico cariche di polarizzazione opposte a quelle delle armature: su di esse terminano o ripartono due linee di campo su tre, e il campo nel dielettrico è un terzo di quello nel vuoto. Schema non in scala.

12.4.3 La rigidità dielettrica

Nessun isolante sopporta un campo arbitrariamente intenso. Oltre un certo valore il campo strappa elettroni alle molecole, gli elettroni accelerati ne ionizzano altre e l'isolante diventa improvvisamente conduttore: si ha una **scarica**, che nell'aria è una scintilla e in un isolante solido è una perforazione permanente. Il campo massimo che un materiale sopporta si chiama **rigidità dielettrica**: circa 3 MV/m per l'aria secca a pressione atmosferica, circa 15 MV/m per la carta (Tabella A.8). Per questo ogni condensatore reale riporta sull'involucro, oltre alla capacità, la tensione massima di lavoro.

Un buon dielettrico serve quindi due volte: aumenta la capacità di un fattore ε_r e permette di avvicinare le armature, o di alzare la tensione, senza che il condensatore si scarichi attraverso l'isolante.

12.4.4 I condensatori reali

Per ottenere grandi capacità in poco volume servono grandi aree, distanze piccolissime e dielettrici con ε_r elevato. Nei condensatori a film due lunghi nastri metallici, separati da una pellicola di plastica, vengono arrotolati come un sigaro. Nei condensatori ceramici il dielettrico è un materiale ceramico con ε_r molto alto. Nei condensatori elettrolitici il dielettrico è uno strato di ossido spesso meno di un micrometro, cresciuto su un foglio di alluminio: arrivano a migliaia di microfarad, ma vanno collegati rispettando la polarità indicata. In un circuito elettronico si trovano capacità che vanno dal picofarad al millifarad. I **supercondensatori**, infine, usano elettrodi di carbonio porosissimo, con un'area interna enorme, e una separazione fra le cariche di dimensioni molecolari: raggiungono migliaia di farad, ma sopportano solo 2,5–3 V circa.

APPROFONDIMENTO

La bottiglia di Leida

Il primo condensatore della storia nacque quasi per caso. Nel 1745 Ewald Georg von Kleist, in Pomerania, e l'anno seguente Pieter van Musschenbroek, a Leida, cercavano di «raccogliere» l'elettricità prodotta da una macchina a strofinio in un recipiente di vetro pieno d'acqua, attraverso un chiodo o un filo immerso. Chi teneva in mano la bottiglia e poi toccava il filo riceveva una scossa violenta, molto più forte di quella data dalla macchina da sola. Musschenbroek ne scrisse con spavento, e lo strumento prese il nome della città: **bottiglia di Leida**.

Oggi è chiaro che cosa accadeva: l'acqua (o il filo) all'interno e la mano all'esterno erano le due armature, il vetro il dielettrico. Ben presto il vetro fu rivestito di lamine metalliche dentro e fuori, e Benjamin Franklin mostrò che le due armature si caricano con cariche uguali e opposte. Una stima con la formula del condensatore piano, per una bottiglia da un litro con armature di circa 0,05 m^2, vetro spesso 2 mm e $\varepsilon_r \approx 6$, dà una capacità dell'ordine del nanofarad: poca, ma caricata a decine di migliaia di volt basta per una scossa memorabile.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: la capacità di un condensatore fatto in casa

Materiali. Due fogli di alluminio da cucina di 20,0 cm × 30,0 cm con una linguetta per il collegamento; fogli di carta da stampante in formato A3, che sporgono di qualche centimetro dall'alluminio; un libro pesante per tenere il «sandwich» pressato; un micrometro (risoluzione 0,01 mm); un multimetro con la portata per le capacità (incertezza dichiarata ±2% della lettura) e due cavetti con morsetti a coccodrillo.

Procedimento. 1) Misura con il micrometro lo spessore d di una pila di 1, 2, 3, 4, 6 e 8 fogli di carta, pressati. 2) Metti la pila fra i due fogli di alluminio, allineati, con le linguette da parti opposte, e premi il tutto sotto il libro. 3) Collega il multimetro alle linguette e leggi la capacità C. 4) Per ogni pila calcola $1/d$ e riporta C in funzione di $1/d$. Se $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 S/d$, i punti stanno su una retta per l'origine con pendenza $\varepsilon_r \varepsilon_0 S$.

Tabella 12.1 Capacità del condensatore di alluminio e carta (S = 0,0600 m²) al variare del numero di fogli (dati tipici).

Fogli	d (mm)	$1/d$ (m^{-1})	C (nF)
1	0,10 ± 0,01	10 000	14,5 ± 0,3
2	0,21 ± 0,01	4760	6,78 ± 0,14
3	0,31 ± 0,01	3230	4,65 ± 0,09
4	0,42 ± 0,01	2380	3,51 ± 0,07
6	0,63 ± 0,01	1590	2,34 ± 0,05
8	0,84 ± 0,01	1190	1,77 ± 0,04

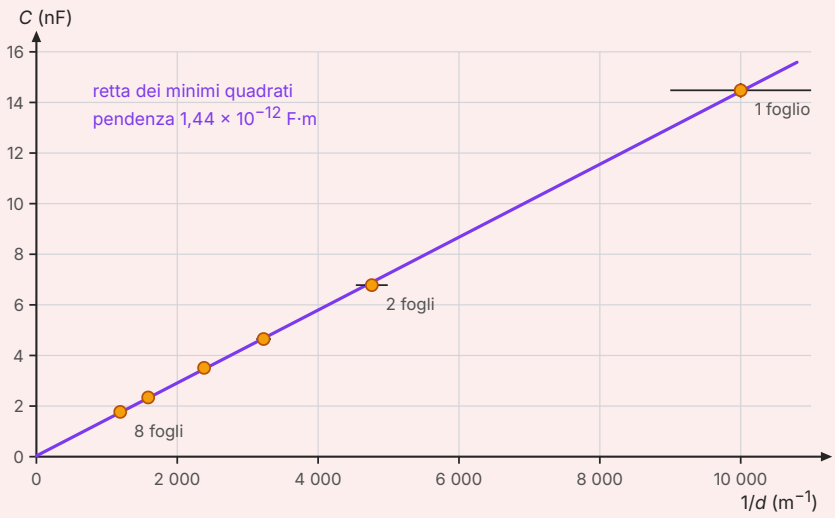

Figura 12.5 I dati della Tabella 12.1 nel piano $1/d$–C, con le barre d'incertezza (quella orizzontale è grande per un solo foglio, perché 0,01 mm è un decimo dello spessore). La retta dei minimi quadrati passa praticamente per l'origine; la sua pendenza è $\varepsilon_r \varepsilon_0 S$.

Che cosa concludere. I punti della Figura 12.5 stanno su una retta: la capacità è inversamente proporzionale alla distanza fra le armature. La retta dei minimi quadrati ha pendenza $(1{,}44 \pm 0{,}01) \times 10^{-12}$ F·m e intercetta $(0{,}03 \pm 0{,}05)$ nF, compatibile con zero: la capacità dei cavetti è trascurabile. Dalla pendenza: ε_r = pendenza/$(\varepsilon_0 S) = 1{,}44 \times 10^{-12}$ F·m/$(8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m $\times$ 0,0600 m$^2) = 2{,}71$. L'incertezza relativa sull'area (±0,1 cm su ogni lato, cioè circa 0,8%) e quella sulla pendenza (circa 0,7%) danno $\varepsilon_r = 2{,}71 \pm 0{,}04$.

Confronto teoria–esperimento. La Tabella A.8 indica per la carta «circa 3»; le carte comuni hanno valori fra 2 e 4, e il valore tabulato può essere letto come $3{,}0 \pm 0{,}5$. Con questo valore la capacità prevista per 4 fogli è $C = 3{,}0 \times 8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m $\times$ 0,0600 m$^2/(0{,}42 \times 10^{-3}$ m) = $(3{,}8 \pm 0{,}6)$ nF; la misura, $(3{,}51 \pm 0{,}07)$ nF, cade dentro l'intervallo previsto: previsione e misura sono compatibili (*Fisica 1*, capitolo 4). Il valore misurato di ε_r, $2{,}71 \pm 0{,}04$, è compatibile con $3{,}0 \pm 0{,}5$ ma sta nella parte bassa dell'intervallo: fra i fogli e fra la carta e l'alluminio restano sottili strati d'aria, con $\varepsilon_r \approx 1$, che abbassano la costante dielettrica efficace del «sandwich».

Sicurezza. L'esperienza usa soltanto il multimetro, che applica una tensione di pochi volt: non collegare mai il condensatore alla rete elettrica né ad alimentatori ad alta tensione, e non smontare apparecchi che contengono condensatori.

Per la relazione. Riporta la tabella, il grafico con le barre d'incertezza, il calcolo di ε_r con la sua incertezza e il confronto con il valore tabulato. Proponi una verifica dell'ipotesi degli strati d'aria: per esempio, ripeti le misure con il libro più pesante o senza libro e osserva come cambia la pendenza.

12.5 Condensatori in serie e in parallelo

Nei circuiti i condensatori si collegano fra loro in vari modi. Una rete di condensatori collegata a una batteria si comporta come un unico condensatore che, con la stessa differenza di potenziale ai capi, accumula la stessa carica complessiva: la sua capacità si chiama **capacità equivalente**, C_{eq}. Due collegamenti sono fondamentali (Figura 12.6).

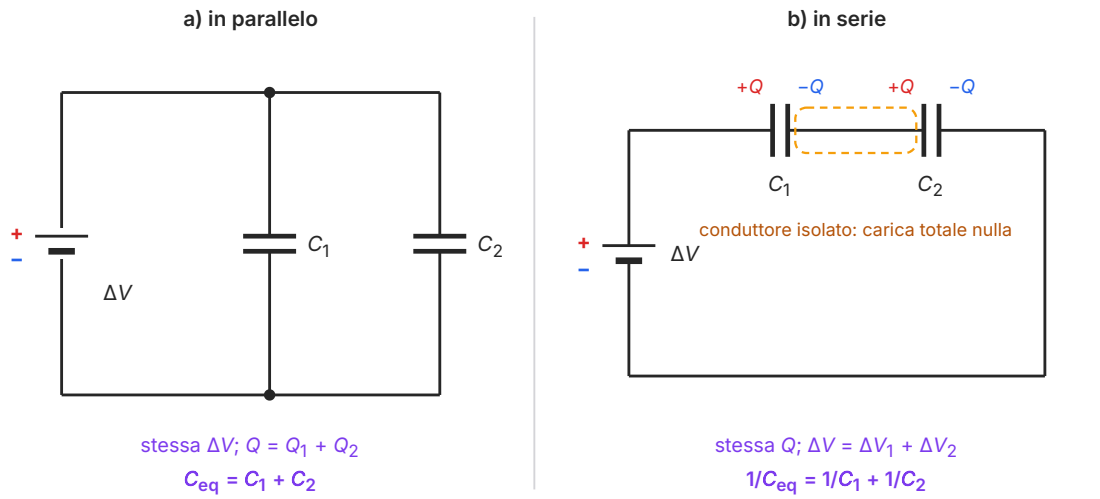

Figura 12.6 a) Due condensatori in parallelo: le armature sono collegate a coppie agli stessi due punti del circuito e hanno la stessa differenza di potenziale. b) Due condensatori in serie: le armature interne, unite da un filo, formano un conduttore isolato e scarico, perciò i due condensatori hanno la stessa carica. La batteria è disegnata con il tratto lungo sul polo positivo.

12.5.1 Il collegamento in parallelo

Nel **collegamento in parallelo** le armature di sinistra dei condensatori sono collegate tutte a un punto del circuito e quelle di destra a un altro. Ogni gruppo di armature collegate è un unico conduttore, e quindi è equipotenziale: **tutti i condensatori in parallelo hanno la stessa differenza di potenziale** ΔV. Ciascuno prende la carica $Q_1 = C_1\Delta V$, $Q_2 = C_2\Delta V$, e la carica totale fornita dalla batteria è

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)\Delta V \Rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots$$

Le capacità in parallelo si sommano. Si capisce anche pensando a due condensatori piani uguali messi in parallelo: equivalgono a un solo condensatore con area doppia.

12.5.2 Il collegamento in serie

Nel **collegamento in serie** i condensatori sono disposti uno dopo l'altro. La batteria porta una carica $+Q$ sulla prima armatura e $-Q$ sull'ultima. Le due armature interne, unite da un filo, formano un conduttore isolato e inizialmente scarico, riquadrato nella Figura 12.6b: per induzione, sull'armatura affacciata a $+Q$ compare $-Q$ e, per la conservazione della carica, sull'altra compare $+Q$. Quindi **tutti i condensatori in serie hanno la stessa carica** Q. Le differenze di potenziale invece si sommano, perché il potenziale scende per gradi da un capo all'altro della serie:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$$

In serie si sommano gli inversi delle capacità, e la capacità equivalente è minore della più piccola delle capacità. Due condensatori piani uguali in serie equivalgono a uno con distanza doppia: $C_{eq} = C/2$. Per due condensatori la formula si può scrivere $C_{eq} = C_1C_2/(C_1 + C_2)$. Nel capitolo 14 troverai le regole opposte per i resistori: quelli in serie si sommano, quelli in parallelo si combinano con gli inversi.

ESEMPIO SVOLTO

Una rete di tre condensatori

Problema. $C_1 = 2{,}0\ \mu F$ e $C_2 = 3{,}0\ \mu F$ sono in parallelo; il gruppo è in serie con $C_3 = 5{,}0\ \mu F$, e la rete è collegata a una batteria da 12 V. Calcola la capacità equivalente e la carica e la differenza di potenziale di ciascun condensatore.

1. Riduci il parallelo. $C_{12} = C_1 + C_2 = 5{,}0\ \mu F$.

2. Riduci la serie. $1/C_{eq} = 1/(5{,}0\ \mu F) + 1/(5{,}0\ \mu F)$, quindi $C_{eq} = 2{,}5\ \mu F$.

3. Carica totale. $Q = C_{eq}\Delta V = 2{,}5\ \mu F \times 12\ V = 30\ \mu C$. Poiché C_{12} e C_3 sono in serie, entrambi hanno questa carica: $Q_3 = 30\ \mu C$.

4. Tensioni. $\Delta V_3 = Q_3/C_3 = 30\ \mu C/5{,}0\ \mu F = 6{,}0\ V$; $\Delta V_{12} = 30\ \mu C/5{,}0\ \mu F = 6{,}0\ V$. Controllo: 6,0 V + 6,0 V = 12 V.

5. Torna al parallelo. C_1 e C_2 hanno la stessa tensione, 6,0 V: $Q_1 = 2{,}0\ \mu F \times 6{,}0\ V = 12\ \mu C$, $Q_2 = 3{,}0\ \mu F \times 6{,}0\ V = 18\ \mu C$. Controllo: 12 µC + 18 µC = 30 µC, la carica del gruppo.

Commento. Si procede sempre così: si riduce la rete dall'interno verso l'esterno fino a un solo condensatore, poi si torna indietro usando le due regole, stessa carica in serie e stessa tensione in parallelo.

12.6 L'energia del condensatore e del campo elettrico

12.6.1 Il lavoro per caricare un condensatore

Caricare un condensatore significa portare carica da un'armatura all'altra, a piccole porzioni, contro il campo che le cariche già presenti producono. Quando le armature hanno carica q, la differenza di potenziale è $\Delta V = q/C$; per portare un'altra piccola carica Δq dall'armatura negativa a quella positiva bisogna compiere un lavoro $\Delta W = \Delta V \Delta q$, che diventa energia potenziale elettrica (capitolo 11). Il guaio è che ΔV cresce man mano che il condensatore si carica, quindi le porzioni successive costano sempre di più.

La soluzione è grafica, come per il lavoro di un gas nel piano p–V (capitolo 1). Nel grafico di ΔV in funzione di q (Figura 12.7) il condensatore è descritto da una retta passante per l'origine, con pendenza $1/C$. Il lavoro per una piccola porzione Δq è l'area di un rettangolino sotto la retta, e il lavoro totale per portare la carica da 0 a Q è l'area del triangolo sotto la retta. La somma dei rettangoli si avvicina all'area del triangolo man mano che i gradini si assottigliano: per il condensatore della figura, con $C = 2{,}0\ \mu F$ e $Q = 24\ \mu C$, otto gradini danno 126 μJ, cento gradini 142,6 μJ, mille gradini 143,9 μJ, e il triangolo vale 144 μJ. Con gli strumenti dell'analisi matematica dimostrerai il risultato in modo rigoroso. L'energia immagazzinata è quindi

$$U = \tfrac{1}{2} Q \Delta V = \tfrac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

Le tre forme sono equivalenti, perché $Q = C\Delta V$; conviene usare quella che contiene le grandezze fisse del problema. Questa energia potenziale elettrica, l'**energia del condensatore**, viene restituita quando il condensatore si scarica, per esempio in un circuito.

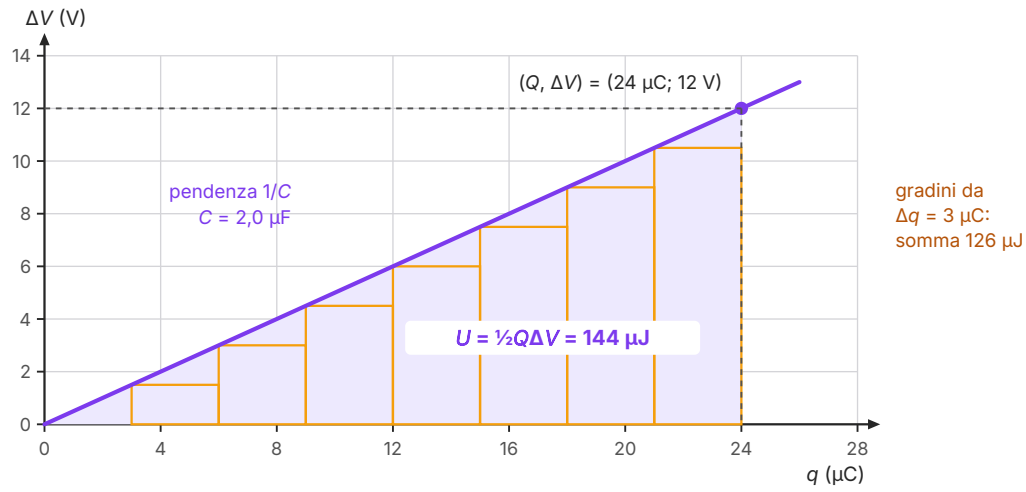

Figura 12.7 La differenza di potenziale di un condensatore di 2,0 μF in funzione della carica q sulle armature. L'area del triangolo sotto la retta fino a Q = 24 μC è l'energia immagazzinata, $\frac{1}{2}Q\Delta V$ = 144 μJ. I rettangoli arancioni sono il lavoro calcolato a gradini di 3 μC, con la tensione all'inizio di ogni gradino: la loro somma, 126 μJ, approssima per difetto l'area del triangolo.

Nota un fatto curioso. La batteria che carica il condensatore sposta la carica Q sempre alla stessa differenza di potenziale ΔV, e compie quindi il lavoro $Q\Delta V$, il doppio dell'energia che il condensatore immagazzina. La metà mancante va perduta nel processo di carica, in gran parte come calore nei fili: nel capitolo 14 vedrai che questo accade qualunque sia la resistenza del circuito.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere il grafico ΔV–q

Problema. Usa la Figura 12.7. a) Ricava la capacità dal grafico. b) Quanta energia ha il condensatore quando la carica è metà di quella finale? c) Quanto lavoro serve per aggiungere la seconda metà della carica? d) Quanto lavoro compie la batteria da 12 V in tutta la carica?

a) La pendenza della retta è 12 V/24 μC = 0,50 V/μC, che è $1/C$: C = 24 μC/12 V = 2,0 μF.

b) Per q = 12 μC si legge ΔV = 6,0 V; l'area del triangolo è $U = \frac{1}{2} \times 12\ \mu C \times 6{,}0\ V = 36\ \mu J$, un quarto dell'energia finale: dimezzare la carica riduce l'energia a un quarto, perché $U = q^2/(2C)$.

c) 144 μJ − 36 μJ = 108 μJ: la seconda metà della carica costa tre volte la prima, perché viene spostata contro una differenza di potenziale maggiore. Nel grafico è l'area del trapezio fra q = 12 μC e q = 24 μC, (6,0 V + 12 V)/2 × 12 μC = 108 μJ.

d) $W_{batt} = Q\Delta V$ = 24 μC × 12 V = 288 μJ: il doppio dell'energia immagazzinata, come previsto.

12.6.2 L'energia sta nel campo

Dove si trova, fisicamente, questa energia? Per un condensatore piano puoi riscrivere U usando il campo fra le armature. Con $C = \varepsilon_0 S/d$ e $\Delta V = Ed$:

$$U = \tfrac{1}{2} C \Delta V^2 = \tfrac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d} (Ed)^2 = \tfrac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \cdot (Sd)$$

Il prodotto Sd è il volume della regione fra le armature, proprio quella in cui il campo è diverso da zero. L'energia divisa per il volume in cui c'è campo è la **densità di energia del campo elettrico**:

$$u = \frac{U}{Sd} = \tfrac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

La densità di energia si misura in J/m^3 e dipende soltanto dal campo nel punto considerato. L'hai ricavata per un condensatore piano, ma vale per qualunque campo elettrico nel vuoto; in un dielettrico diventa $\tfrac{1}{2}\varepsilon_r \varepsilon_0 E^2$. Il risultato cambia il modo di pensare all'energia elettrica: non sta «nelle cariche», ma è distribuita nello spazio, ovunque ci sia campo. È la descrizione del campo «in termini di energia» con cui si chiude lo studio del campo elettrico: il campo non è soltanto un modo comodo di calcolare le forze, è un ente fisico che possiede energia. Il prossimo anno vedrai che le onde elettromagnetiche trasportano proprio questa energia, lontano dalle cariche che le hanno prodotte.

I valori sono modesti. Anche al limite della rigidità dielettrica dell'aria, $E = 3 \times 10^6$ V/m, la densità di energia è $u = \tfrac{1}{2} \times 8{,}85 \times 10^{-12} \times (3 \times 10^6)^2$ J/m$^3 \approx 40$ J/m^3, mentre un litro di benzina contiene più di 30 MJ, cioè oltre 3×10^{10} J/m^3. I condensatori non servono a immagazzinare molta energia, ma a cederla in tempi brevissimi.

COLLEGAMENTI

Energia in un lampo: flash, defibrillatori, supercondensatori

Il flash. Il flash di una fotocamera carica un condensatore, tipicamente di qualche centinaio di microfarad a circa 300 V: con 150 μF l'energia è $\frac{1}{2} \times 150 \times 10^{-6}\ \text{F} \times (300\ \text{V})^2 \approx 7\ \text{J}$. La batteria, che fornisce pochi volt e una corrente limitata, impiega qualche secondo a caricarlo; il condensatore si scarica nel tubo del lampo in circa un millesimo di secondo, con una potenza di alcuni kilowatt.

Il defibrillatore. Un defibrillatore esterno accumula in un condensatore, caricato a tensioni dell'ordine del kilovolt, un'energia di qualche centinaio di joule e la scarica attraverso il torace in pochi millisecondi, per riportare il cuore a un ritmo regolare.

I supercondensatori. Un supercondensatore da 3000 F a 2,7 V immagazzina $\frac{1}{2} \times 3000\ \text{F} \times (2{,}7\ \text{V})^2 \approx 1{,}1 \times 10^4\ \text{J}$. È meno di una batteria delle stesse dimensioni, ma si carica e si scarica in pochi secondi e sopporta moltissimi cicli: per questo si usa per recuperare l'energia di frenata di autobus e tram.

Sicurezza. Un condensatore può restare carico a lungo dopo che l'apparecchio è stato spento e staccato dalla presa. Non aprire mai un flash, un forno a microonde, un alimentatore o un vecchio televisore: i loro condensatori possono dare scosse pericolose.

12.6.3 Inserire un dielettrico

Che cosa succede all'energia se si inserisce un dielettrico fra le armature di un condensatore già carico? Dipende da che cosa resta fisso, e qui si sbaglia spesso.

ERRORE FREQUENTE

Batteria collegata o condensatore isolato?

Un condensatore da 100 pF in aria è caricato a 50 V: $Q = 5{,}0$ nC, $U = \tfrac{1}{2}C\Delta V^2 = 125$ nJ. Lo si riempie con un dielettrico di $\varepsilon_r = 4{,}0$, in due modi diversi. La Tabella 12.2 riassume i risultati.

Tabella 12.2 Inserimento di un dielettrico con $\varepsilon_r = 4{,}0$ in un condensatore da 100 pF caricato a 50 V.

	C (pF)	Q (nC)	ΔV (V)	E fra le armature	U (nJ)
prima	100	5,0	50	E_0	125
batteria collegata	400	20	50	E_0	500
condensatore isolato	400	5,0	12,5	$E_0/4$	31

Batteria collegata: ΔV fisso. La capacità quadruplica, quindi la carica quadruplica (la batteria ne fornisce altri 15 nC) e l'energia sale a $\tfrac{1}{2}C\Delta V^2 = 500$ nJ. Il campo, $E = \Delta V/d$, non cambia.

Condensatore isolato: Q fisso. La tensione scende a $Q/C = 12{,}5$ V, il campo si riduce a un quarto e l'energia scende a $Q^2/(2C) = 31$ nJ.

Conviene sempre scegliere la formula dell'energia che contiene la grandezza che resta costante.

In entrambi i casi il dielettrico viene *risucchiato* fra le armature dalle forze elettriche, che agiscono sulle cariche di polarizzazione vicino ai bordi. Con il condensatore isolato il lavoro che il campo compie sul dielettrico, 94 nJ, è proprio l'energia che il condensatore perde. Con la batteria collegata il bilancio è meno ovvio: la batteria fornisce 15 nC × 50 V = 750 nJ, di cui 375 nJ aumentano l'energia del condensatore e 375 nJ diventano lavoro sul dielettrico. In entrambi i casi l'energia si conserva, a patto di contare tutti i protagonisti.

IN SINTESI

Le formule dei conduttori e dei condensatori

- Conduttore in equilibrio elettrostatico: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ all'interno, carica in eccesso sulla superficie, conduttore equipotenziale. Appena fuori: $E = \sigma/\varepsilon_0$, perpendicolare alla superficie (teorema di Coulomb). Valido solo se le cariche sono ferme.
- Due sfere lontane collegate: $Q_1/R_1 = Q_2/R_2$, $\sigma_1/\sigma_2 = R_2/R_1$: la densità di carica e il campo sono maggiori dove il raggio di curvatura è minore (potere delle punte).
- Capacità: $C = Q/V$ per un conduttore isolato, $C = Q/\Delta V$ per un condensatore; si misura in farad, 1 F = 1 C/V. Dipende solo dalla geometria e dal dielettrico.
- Sfera isolata: $C = 4\pi\varepsilon_0 R = R/k_0$. Condensatore piano: $C = \varepsilon_r\varepsilon_0 S/d$, per d piccola rispetto alle armature; nel dielettrico, a parità di carica, $E = E_0/\varepsilon_r$.
- Parallelo (stessa ΔV): $C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots$ Serie (stessa Q): $1/C_{eq} = 1/C_1 + 1/C_2 + \ldots$
- Energia del condensatore: $U = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = Q^2/(2C)$, area sotto la retta ΔV–q; in joule.
- Densità di energia del campo elettrico nel vuoto: $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ (J/m^3): l'energia è immagazzinata nel campo.
- Dielettrico inserito con la batteria collegata: ΔV costante, Q e U aumentano di un fattore ε_r; con il condensatore isolato: Q costante, ΔV e U diminuiscono di un fattore ε_r.

SINTESI

- Un conduttore è in equilibrio elettrostatico quando le sue cariche non si muovono più in modo ordinato; allora il campo all'interno del materiale è nullo, perché altrimenti gli elettroni liberi si muoverebbero.
- Per il teorema di Gauss la carica in eccesso di un conduttore in equilibrio si trova sulla superficie esterna; nella cavità vuota di un conduttore il campo è nullo, perché lo richiedono il teorema di Gauss e la circuitazione nulla del campo elettrostatico.
- Il campo appena fuori da un conduttore è perpendicolare alla superficie e vale σ/ε_0 (teorema di Coulomb); il conduttore è equipotenziale, ma la densità di carica in generale non è uniforme.
- La densità di carica è maggiore dove il raggio di curvatura è minore: due sfere collegate hanno σ inversamente proporzionale al raggio. Sulle punte il campo può ionizzare l'aria; su questo si basa il parafulmine.
- Un involucro conduttore (gabbia di Faraday) scherma il suo interno dai campi elettrostatici esterni: è il motivo per cui un'auto con la carrozzeria metallica protegge dai fulmini.
- La capacità $C = Q/V$ di un conduttore isolato, o $C = Q/\Delta V$ di un condensatore, dipende solo dalla geometria e dal materiale isolante; il farad è un'unità molto grande. Per una sfera $C = 4\pi\varepsilon_0 R$.
- Per il condensatore piano $C = \varepsilon_r\varepsilon_0 S/d$. Un dielettrico si polarizza, le cariche di polarizzazione riducono il campo di un fattore ε_r e la capacità aumenta dello stesso fattore.
- Ogni isolante ha una rigidità dielettrica, il campo massimo oltre il quale avviene la scarica: per l'aria circa 3 MV/m. Ne segue la tensione massima di lavoro di un condensatore.
- In parallelo i condensatori hanno la stessa differenza di potenziale e le capacità si sommano; in serie hanno la stessa carica e si sommano gli inversi delle capacità.
- L'energia di un condensatore è l'area sotto la retta ΔV–q: $U = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = Q^2/(2C)$. La batteria compie un lavoro doppio, $Q\Delta V$.
- L'energia è immagazzinata nel campo, con densità $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$: il campo elettrico è un ente fisico dotato di energia.
- Inserendo un dielettrico a batteria collegata ΔV resta costante e l'energia aumenta; a condensatore isolato Q resta costante e l'energia diminuisce.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● All'interno del materiale di un conduttore in equilibrio elettrostatico il campo elettrico è:
   A. uguale al campo appena fuori dalla superficie
   B. nullo
   C. diretto verso il centro del conduttore
   D. uguale a σ/ε_0

2. ● La carica in eccesso di un conduttore pieno in equilibrio si trova:
   A. sulla superficie esterna
   B. distribuita in modo uniforme nel volume
   C. concentrata al centro
   D. metà sulla superficie e metà nel volume

3. ● Il farad equivale a:
   A. 1 C·V
   B. 1 V/C
   C. 1 C/V
   D. 1 J/C

4. ● Un condensatore piano isolato, carico, ha le armature a distanza d. Se la distanza diventa $2d$, la capacità:
   A. raddoppia
   B. quadruplica
   C. non cambia
   D. si dimezza

5. ●● Due condensatori uguali, ciascuno di capacità C, sono collegati in serie. La capacità equivalente è:
   A. $2C$
   B. $C/2$
   C. C
   D. $4C$

6. ●● Appena fuori dalla superficie di un conduttore in equilibrio, in un punto dove la densità di carica è σ, il campo elettrico ha modulo:
   A. $\sigma/(2\varepsilon_0)$
   B. $\sigma\varepsilon_0$
   C. σ/ε_0
   D. $2\sigma/\varepsilon_0$

7. ●● Si inserisce un dielettrico fra le armature di un condensatore che resta collegato a una batteria. Quale grandezza **non** cambia?
   - **A.** la carica sulle armature
   - **B.** la capacità
   - **C.** l'energia immagazzinata
   - **D.** la differenza di potenziale

8. ●● La densità di energia del campo elettrico nel vuoto è proporzionale:
   - **A.** al quadrato del modulo del campo
   - **B.** al modulo del campo
   - **C.** all'inverso del modulo del campo
   - **D.** all'inverso del quadrato del modulo del campo

Vero o falso

9. ● Un'automobile colpita da un fulmine protegge i passeggeri soprattutto perché gli pneumatici di gomma la isolano dal terreno. V / F

10. ● Su un conduttore carico in equilibrio la densità superficiale di carica è la stessa in tutti i punti della superficie. V / F

11. ●● Tutti i punti di un conduttore in equilibrio, sia interni sia superficiali, hanno lo stesso potenziale. V / F

12. ●● La capacità di un condensatore raddoppia se si raddoppia la carica sulle sue armature. V / F

13. ●● In un collegamento in parallelo tutti i condensatori hanno la stessa carica. V / F

Applicare

14. ● Calcola la capacità di una sfera conduttrice isolata di raggio 15 cm e il potenziale che raggiunge quando la sua carica è 30 nC.

15. ● Un condensatore piano in aria ha armature di area 50 cm^2 distanti 0,50 mm. Calcola la capacità e la carica che accumula se è collegato a una batteria da 9,0 V.

16. ● In un punto della superficie di un conduttore in equilibrio la densità di carica è 4,0 $\mu C/m^2$. Calcola il modulo del campo elettrico appena fuori e indica la sua direzione e il suo verso.

17. ● Completa. In un collegamento in serie tutti i condensatori hanno la stessa _____ ; in un collegamento in parallelo hanno la stessa _____ . La capacità equivalente di condensatori in _____ è minore della più piccola delle capacità.

18. ●● Calcola la capacità equivalente di due condensatori da 4,0 μF e 6,0 μF collegati a) in serie, b) in parallelo.

19. ●● Un condensatore elettrolitico da 470 μF è caricato a 25 V. Calcola la carica sulle armature e l'energia immagazzinata.

20. ●● Usa il grafico della Figura 12.7. a) Quanto vale la differenza di potenziale quando la carica è 18 μC? b) Quanta energia ha il condensatore in quel momento? c) Quale frazione dell'energia finale rappresenta?

21. ●● Un condensatore piano ha le armature distanti 2,0 mm. Calcola la tensione massima che sopporta se fra le armature c'è a) aria (rigidità dielettrica 3 MV/m), b) carta (15 MV/m).

Problemi

22. ●● Una sfera conduttrice di raggio 12 cm ha carica 40 nC. La colleghi con un filo lungo e sottile a una sfera scarica di raggio 4,0 cm, molto lontana. a) Calcola le cariche finali delle due sfere. b) Calcola il potenziale comune e confrontalo con quello della prima sfera prima del collegamento. c) Calcola il campo sulla superficie di ciascuna sfera e il loro rapporto.

23. ●● Un condensatore piano ha armature di area 0,040 m^2 separate da un foglio di carta spesso 0,10 mm ($\varepsilon_r = 3{,}0$, rigidità dielettrica 15 MV/m). a) Calcola la capacità. b) Qual è la tensione massima che si può applicare? c) Quali sono la carica e l'energia massime?

24. ●●● Un condensatore $C_1 = 6{,}0$ μF è in serie con $C_2 = 3{,}0$ μF; questa serie è in parallelo con $C_3 = 4{,}0$ μF, e la rete è collegata a una batteria da 18 V. a) Calcola la capacità equivalente. b) Calcola la carica e la differenza di potenziale di ciascun condensatore, controllando le regole della serie e del parallelo. c) Calcola l'energia totale immagazzinata e verifica che è la somma delle energie dei tre condensatori.

25. ●●● Un condensatore piano in aria da 50 pF viene caricato a 200 V. a) Calcola carica ed energia. b) Si stacca la batteria e si riempie lo spazio fra le armature con un dielettrico di $\varepsilon_r = 5{,}0$: calcola capacità, tensione ed energia finali e spiega dove è finita la differenza di energia. c) Ripeti con la batteria sempre collegata: calcola carica ed energia finali e il lavoro compiuto dalla batteria.

26. ●●● Un condensatore piano in aria ha armature di area 0,010 m^2 distanti 5,0 mm e carica 2,0 nC. a) Calcola la capacità, la differenza di potenziale e il campo fra le armature (con due metodi diversi). b) Un elettrone parte da fermo dall'armatura negativa: con quale velocità arriva su quella positiva? c) Esprimi in elettronvolt l'energia cinetica acquistata. (Collega con il capitolo 11.)

27. ●●● Un supercondensatore da 3000 F è caricato a 2,7 V. a) Calcola la carica e l'energia immagazzinata. b) Se tutta questa energia fosse usata per scaldare 1,00 kg d'acqua a 20,0 °C, quale temperatura raggiungerebbe l'acqua? (Collega con il primo principio, capitolo 1.) c) Quale area dovrebbero avere le armature di un condensatore piano con la stessa capacità e un dielettrico di carta ($\varepsilon_r = 3{,}0$) spesso 0,10 mm? Esprimila in km^2.

28. ●● La sfera di un generatore elettrostatico ha raggio 20 cm e si trova in aria (rigidità dielettrica 3,0 MV/m). a) Qual è il potenziale massimo che può raggiungere? b) Quale carica corrisponde a quel potenziale? c) Quanti elettroni sono stati tolti alla sfera per caricarla positivamente con quella carica? (Collega con il capitolo 9.) d) Quanta energia possiede la sfera carica?

29. ●●● Fra le armature quadrate di un condensatore piano in aria, di lato 10 cm e distanti 2,0 mm, il campo vale $1{,}5 \times 10^6$ V/m. a) Calcola la densità di energia del campo e l'energia contenuta fra le armature. b) Calcola la capacità e la differenza di potenziale, e ricalcola l'energia con $\frac{1}{2}C\Delta V^2$: i due risultati coincidono? c) Di quanto si potrebbe ancora aumentare la tensione prima della scarica?

Ragionare e argomentare

30. ●● Spiega perché in equilibrio elettrostatico il campo all'interno di un conduttore deve essere nullo, e perché questo non vale per un filo di rame collegato ai poli di una batteria.

31. ●● Trova l'errore. Uno studente scrive: «Collegando in serie due condensatori le armature si sommano, quindi la capacità equivalente è la somma delle capacità, come nel parallelo».

32. ●●● Stima di Fermi. Modella il corpo umano come una sfera conduttrice isolata con lo stesso volume (circa 0,07 m^3) e stimane la capacità. Nelle norme sulle scariche elettrostatiche si usa per il corpo umano un valore di circa 100 pF: perché è maggiore della tua stima? Camminando su una moquette in un giorno secco ci si può caricare a circa 10 kV: stima la carica e l'energia della scintilla che scocca quando tocchi una maniglia.

33. ●●● Progetta un esperimento per verificare che la capacità di un condensatore piano è direttamente proporzionale all'area delle armature, con materiali semplici e il multimetro del laboratorio. Indica le grandezze da tenere costanti, le misure, il grafico da costruire e il risultato atteso.

PER APPROFONDIRE

- [FAR] M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity*: le serie in cui Faraday descrive la stanza schermata e introduce la «capacità induttiva specifica» dei dielettrici, cioè la nostra costante dielettrica relativa.
- [MAX] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*: i capitoli sui sistemi di conduttori e sulla capacità, per vedere come la teoria dei condensatori fu sistemata nell'Ottocento.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. II: i capitoli sui conduttori, sui condensatori, sui dielettrici e sull'energia elettrostatica, con la discussione di dove si trova l'energia del campo.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sulla capacità, con molti esercizi su reti di condensatori e dielettrici.
- [HEW] P. G. Hewitt, *Conceptual Physics*: le pagine sugli schermi elettrostatici, sui parafulmini e sui condensatori, con esempi quotidiani.
- [TAY] J. R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*: il metodo dei minimi quadrati e l'incertezza della pendenza, usati nel laboratorio di questo capitolo.

Glossario del capitolo

Armature
I due conduttori di un condensatore.

Capacità
Rapporto fra la carica e il potenziale di un conduttore isolato, $C = Q/V$, o fra la carica e la differenza di potenziale delle armature di un condensatore, $C = Q/\Delta V$; dipende solo dalla geometria e dal dielettrico.

Cariche di polarizzazione
Cariche legate alle molecole che compaiono sulle facce di un dielettrico polarizzato; il loro campo riduce quello delle armature.

Collegamento in parallelo
Collegamento di componenti (condensatori, resistori...) con gli estremi negli stessi due punti del circuito: hanno tutti la stessa differenza di potenziale. Per i condensatori $C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots$; per i resistori si sommano gli inversi delle resistenze (capitolo 14).

Collegamento in serie
Collegamento di componenti (condensatori, resistori...) uno dopo l'altro sullo stesso ramo: i condensatori hanno tutti la stessa carica, i resistori sono attraversati dalla stessa corrente. Per i condensatori $1/C_{eq} = 1/C_1 + 1/C_2 + \ldots$; per i resistori si sommano le resistenze (capitolo 14).

Condensatore
Sistema di due conduttori vicini, separati da un isolante e con cariche uguali e opposte.

Condensatore piano
Condensatore con armature piane e parallele, di area S e distanza d; $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 S/d$.

Densità di energia del campo elettrico
Energia per unità di volume immagazzinata nel campo elettrico; nel vuoto $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$, in J/m^3.

Dielettrico
Materiale isolante posto fra le armature di un condensatore; ne aumenta la capacità di un fattore ε_r.

Energia del condensatore
Energia potenziale elettrica immagazzinata in un condensatore carico: $U = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = Q^2/(2C)$.

Equilibrio elettrostatico
Stato di un conduttore in cui le cariche non si muovono più in modo ordinato; il campo all'interno del materiale è nullo.

Farad
Unità SI della capacità: 1 F = 1 C/V.

Gabbia di Faraday
Schermo elettrostatico realizzato con una lamiera o una rete metallica a maglie fitte.

Parafulmine
Asta metallica appuntita, collegata a terra con un conduttore robusto, che offre al fulmine un percorso preferenziale verso il terreno.

Potere delle punte
Proprietà dei conduttori in equilibrio per cui la densità di carica e il campo in superficie sono maggiori dove il raggio di curvatura è minore.

Rigidità dielettrica
Campo elettrico massimo che un isolante sopporta prima della scarica; circa 3 MV/m per l'aria secca.

Schermo elettrostatico
Involucro conduttore che rende nullo il campo elettrostatico nella cavità che racchiude, qualunque siano le cariche esterne.

Teorema di Coulomb
Appena fuori dalla superficie di un conduttore in equilibrio il campo è perpendicolare alla superficie e vale σ/ε_0, dove σ è la densità superficiale di carica locale.

Soluzioni

1. B. Se il campo non fosse nullo, gli elettroni liberi si muoverebbero e il conduttore non sarebbe in equilibrio.

2. A. Per il teorema di Gauss, il flusso attraverso qualunque superficie chiusa interna al materiale è nullo, quindi lo è la carica racchiusa.

3. C. Dalla definizione $C = Q/\Delta V$.

4. D. $C = \varepsilon_0 S/d$ è inversamente proporzionale alla distanza.

5. B. $1/C_{eq} = 1/C + 1/C = 2/C$, quindi $C_{eq} = C/2$.

6. C. È il teorema di Coulomb, ricavato dal teorema di Gauss con un cilindretto a cavallo della superficie.

7. D. La batteria fissa ΔV; la capacità aumenta di ε_r, e con essa carica ed energia.

8. A. $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$.

9. F. È la carrozzeria metallica, che fa da gabbia di Faraday, a proteggere i passeggeri; una scarica che ha attraversato chilometri d'aria supera facilmente pochi centimetri di gomma.

10. F. La densità è maggiore dove il raggio di curvatura è minore (potere delle punte); è uniforme solo su una sfera isolata.

11. V. Il campo interno è nullo e quello in superficie è perpendicolare alla superficie, quindi il campo non compie lavoro fra due punti qualsiasi del conduttore.

12. F. La capacità dipende solo dalla geometria e dal dielettrico: raddoppiando la carica raddoppia anche ΔV, e il rapporto $Q/\Delta V$ non cambia.

13. F. In parallelo hanno la stessa differenza di potenziale; le cariche $Q_i = C_i \Delta V$ sono uguali solo se le capacità sono uguali.

14. $C = R/k_0 = 0{,}15\ \text{m}/(8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2) = 1{,}7 \times 10^{-11}$ F = 17 pF; $V = Q/C = 30 \times 10^{-9}\ \text{C}/(1{,}67 \times 10^{-11}\ \text{F}) = 1{,}8 \times 10^3$ V.

15. $C = \varepsilon_0 S/d = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F/m} \times 5{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m}^2/(5{,}0 \times 10^{-4}\ \text{m}) = 8{,}9 \times 10^{-11}$ F = 89 pF; $Q = C\Delta V = 8{,}85 \times 10^{-11}\ \text{F} \times 9{,}0\ \text{V} = 8{,}0 \times 10^{-10}$ C = 0,80 nC.

16. $E = \sigma/\varepsilon_0 = 4{,}0 \times 10^{-6}/(8{,}85 \times 10^{-12})$ N/C $= 4{,}5 \times 10^5$ N/C, perpendicolare alla superficie e diretto verso l'esterno, perché $\sigma > 0$.

17. carica; differenza di potenziale; serie.

18. a) $1/C_{eq} = 1/(4{,}0\ \mu\text{F}) + 1/(6{,}0\ \mu\text{F})$, $C_{eq} = 4{,}0 \times 6{,}0/10\ \mu\text{F} = 2{,}4\ \mu\text{F}$. b) $C_{eq} = 4{,}0\ \mu\text{F} + 6{,}0\ \mu\text{F} = 10\ \mu\text{F}$.

19. $Q = C\Delta V = 470 \times 10^{-6}\ \text{F} \times 25\ \text{V} = 1{,}2 \times 10^{-2}$ C; $U = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{1}{2} \times 470 \times 10^{-6}\ \text{F} \times (25\ \text{V})^2 = 0{,}15$ J.

20. a) $\Delta V = q/C = 18\ \mu\text{C}/2{,}0\ \mu\text{F} = 9{,}0$ V (si legge sulla retta). b) $U = \frac{1}{2} \times 18\ \mu\text{C} \times 9{,}0\ \text{V} = 81\ \mu\text{J}$. c) 81/144 = 0,56 = 9/16: l'energia va come il quadrato della carica, $(18/24)^2 = 9/16$.

21. a) $\Delta V_{max} = E_{max} d = 3 \times 10^6\ \text{V/m} \times 2{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m} = 6 \times 10^3$ V. b) $15 \times 10^6\ \text{V/m} \times 2{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m} = 3{,}0 \times 10^4$ V.

22. a) Le sfere hanno lo stesso potenziale: $Q_1/R_1 = Q_2/R_2$, cioè $Q_1 = 3Q_2$; per la conservazione della carica $Q_1 + Q_2 = 40$ nC, quindi $Q_2 = 10$ nC e $Q_1 = 30$ nC. b) $V = k_0 Q_1/R_1 = 8{,}99 \times 10^9 \times 30 \times 10^{-9}/0{,}12\ \text{V} = 2{,}2 \times 10^3$ V; prima era $k_0 \times 40\ \text{nC}/0{,}12\ \text{m} = 3{,}0 \times 10^3$ V. c) $E_1 = V/R_1 = 1{,}9 \times 10^4$ V/m, $E_2 = V/R_2 = 5{,}6 \times 10^4$ V/m; il rapporto $E_2/E_1 = R_1/R_2 = 3$.

23. a) $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 S/d = 3{,}0 \times 8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F/m} \times 0{,}040\ \text{m}^2/(1{,}0 \times 10^{-4}\ \text{m}) = 1{,}1 \times 10^{-8}$ F = 11 nF. b) $\Delta V_{max} = 15 \times 10^6\ \text{V/m} \times 1{,}0 \times 10^{-4}\ \text{m} = 1{,}5 \times 10^3$ V. c) $Q_{max} = C\Delta V_{max} = 1{,}06 \times 10^{-8}\ \text{F} \times 1500\ \text{V} = 1{,}6 \times 10^{-5}$ C; $U_{max} = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{1}{2} \times 1{,}06 \times 10^{-8}\ \text{F} \times (1500\ \text{V})^2 = 1{,}2 \times 10^{-2}$ J.

24. a) Per la regola della serie, $C_{12} = 6{,}0 \times 3{,}0/9{,}0\ \mu\text{F} = 2{,}0\ \mu\text{F}$; per la regola del parallelo, $C_{eq} = 2{,}0\ \mu\text{F} + 4{,}0\ \mu\text{F} = 6{,}0\ \mu\text{F}$. b) Per il parallelo C_3 ha tutta la tensione della batteria: $\Delta V_3 = 18$ V, $Q_3 = 4{,}0\ \mu\text{F} \times 18\ \text{V} = 72\ \mu\text{C}$. Anche il ramo in serie ha 18 V: la sua carica è $Q = 2{,}0\ \mu\text{F} \times 18\ \text{V} = 36\ \mu\text{C}$, uguale per C_1 e C_2 (regola della serie); $\Delta V_1 = 36\ \mu\text{C}/6{,}0\ \mu\text{F} = 6{,}0$ V, $\Delta V_2 = 36\ \mu\text{C}/3{,}0\ \mu\text{F} = 12$ V, e 6,0 V + 12 V = 18 V. La carica fornita dalla bat-

teria è 72 μC + 36 μC = 108 μC = $C_{eq} \times 18$ V. c) $U = \frac{1}{2}C_{eq}\Delta V^2 = \frac{1}{2} \times 6{,}0\ \mu F \times (18\ V)^2 = 972\ \mu J \approx 9{,}7 \times 10^{-4}$ J; somma: $\frac{1}{2} \times 72\ \mu C \times 18\ V + \frac{1}{2} \times 36\ \mu C \times 6{,}0\ V + \frac{1}{2} \times 36\ \mu C \times 12\ V = 648\ \mu J + 108\ \mu J + 216\ \mu J = 972\ \mu J$.

25. a) $Q = C\Delta V = 50\ pF \times 200\ V = 1{,}0 \times 10^{-8}$ C; $U = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = 1{,}0 \times 10^{-6}$ J. b) Condensatore isolato: per la conservazione della carica Q resta $1{,}0 \times 10^{-8}$ C; $C = 5{,}0 \times 50\ pF = 250\ pF$; $\Delta V = Q/C = 40$ V; $U = Q^2/(2C) = 2{,}0 \times 10^{-7}$ J. L'energia diminuisce di $8{,}0 \times 10^{-7}$ J: è il lavoro compiuto dalle forze elettriche che attirano il dielettrico fra le armature (energia che va a chi lo trattiene o diventa calore). c) Batteria collegata: $\Delta V = 200$ V fisso; $Q = 250\ pF \times 200\ V = 5{,}0 \times 10^{-8}$ C; $U = \frac{1}{2} \times 250\ pF \times (200\ V)^2 = 5{,}0 \times 10^{-6}$ J. La batteria sposta $4{,}0 \times 10^{-8}$ C alla tensione di 200 V e compie il lavoro $8{,}0 \times 10^{-6}$ J: per la conservazione dell'energia, $4{,}0 \times 10^{-6}$ J aumentano l'energia del condensatore e $4{,}0 \times 10^{-6}$ J sono il lavoro delle forze elettriche sul dielettrico.

26. a) $C = \varepsilon_0 S/d = 8{,}85 \times 10^{-12}\ F/m \times 0{,}010\ m^2/(5{,}0 \times 10^{-3}\ m) = 1{,}8 \times 10^{-11}$ F; $\Delta V = Q/C = 2{,}0 \times 10^{-9}\ C/(1{,}77 \times 10^{-11}\ F) = 1{,}1 \times 10^2$ V (113 V). Campo: $E = \Delta V/d = 113\ V/(5{,}0 \times 10^{-3}\ m) = 2{,}3 \times 10^4$ V/m; oppure, per il teorema di Gauss applicato alle armature, $E = \sigma/\varepsilon_0 = (2{,}0 \times 10^{-7}\ C/m^2)/(8{,}85 \times 10^{-12}) = 2{,}3 \times 10^4$ V/m. b) Per la conservazione dell'energia (capitolo 11) l'elettrone, che va verso il potenziale più alto, acquista l'energia cinetica $e\Delta V$: $v = \sqrt{(2e\Delta V/m_e)} = \sqrt{(2 \times 1{,}60 \times 10^{-19}\ C \times 113\ V/9{,}11 \times 10^{-31}\ kg)} = 6{,}3 \times 10^6$ m/s. c) $K = e\Delta V = 113$ eV $\approx 1{,}1 \times 10^2$ eV.

27. a) $Q = C\Delta V = 3000\ F \times 2{,}7\ V = 8{,}1 \times 10^3$ C; $U = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{1}{2} \times 3000\ F \times (2{,}7\ V)^2 = 1{,}1 \times 10^4$ J. b) Per il primo principio, senza lavoro e con tutta l'energia ceduta come calore all'acqua: $Q_{calore} = mc\Delta T$, $\Delta T = 10\,935\ J/(1{,}00\ kg \times 4186\ J/(kg \cdot K)) = 2{,}6$ K, quindi l'acqua arriva a 22,6 °C. c) $S = Cd/(\varepsilon_r\varepsilon_0) = 3000\ F \times 1{,}0 \times 10^{-4}\ m/(3{,}0 \times 8{,}85 \times 10^{-12}\ F/m) = 1{,}1 \times 10^{10}\ m^2 = 1{,}1 \times 10^4\ km^2$, circa la superficie dell'Abruzzo: il supercondensatore ottiene la stessa capacità in un cilindro di pochi centimetri grazie all'area interna enorme degli elettrodi porosi e alla separazione di dimensioni molecolari.

28. a) Sulla superficie $E = V/R$, quindi $V_{max} = E_{max}R = 3{,}0 \times 10^6\ V/m \times 0{,}20\ m = 6{,}0 \times 10^5$ V. b) $Q = RV/k_0 = 0{,}20\ m \times 6{,}0 \times 10^5\ V/(8{,}99 \times 10^9\ N \cdot m^2/C^2) = 1{,}3 \times 10^{-5}$ C. c) $N = Q/e = 1{,}33 \times 10^{-5}\ C/(1{,}60 \times 10^{-19}\ C) = 8{,}3 \times 10^{13}$ elettroni. d) $U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2} \times 1{,}33 \times 10^{-5}\ C \times 6{,}0 \times 10^5\ V = 4{,}0$ J.

29. a) $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \times 8{,}85 \times 10^{-12} \times (1{,}5 \times 10^6)^2\ J/m^3 = 9{,}96\ J/m^3 \approx 10\ J/m^3$; il volume fra le armature è 0,010 $m^2 \times 2{,}0 \times 10^{-3}\ m = 2{,}0 \times 10^{-5}\ m^3$, quindi $U = u \cdot Sd = 2{,}0 \times 10^{-4}$ J. b) $C = \varepsilon_0 S/d = 4{,}4 \times 10^{-11}$ F; $\Delta V = Ed = 3{,}0 \times 10^3$ V; $\frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{1}{2} \times 4{,}425 \times 10^{-11}\ F \times (3000\ V)^2 = 2{,}0 \times 10^{-4}$ J: i risultati coincidono, perché $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ è stata ricavata proprio da $\frac{1}{2}C\Delta V^2$. c) Il campo può arrivare a circa 3×10^6 V/m, il doppio: la tensione massima è circa 6×10^3 V, quindi si può aumentare di circa 3 kV (e l'energia diventerebbe quattro volte maggiore).

30. Traccia di risposta. Gli elettroni liberi si muovono sotto l'azione di qualunque campo: se all'interno ci fosse un campo, si sposterebbero e la distribuzione delle cariche cambierebbe, contro l'ipotesi di equilibrio; quindi si spostano finché le cariche indotte annullano il campo interno. In un filo collegato a una batteria l'equilibrio non viene mai raggiunto: la batteria mantiene una differenza di potenziale fra gli estremi, nel filo c'è un campo e gli elettroni si muovono continuamente (corrente elettrica, capitolo 13).

31. Traccia di risposta. L'errore sta nel pensare che le armature «si sommino». In serie le armature interne, collegate fra loro, formano un conduttore isolato e scarico: i condensatori hanno la stessa carica e le loro tensioni si sommano, quindi si sommano gli inversi delle capacità e C_{eq} è minore di ciascuna capacità. Si sommano le capacità nel parallelo, dove si somma l'area delle armature a parità di tensione.

32. Traccia di risposta. Sfera di volume 0,07 m^3: $R = (3 \times 0{,}07/(4\pi))^{1/3} \approx 0{,}26$ m, $C = R/k_0 \approx 3 \times 10^{-11}\ F \approx 30$ pF. Il valore reale è maggiore perché il corpo non è isolato nello spazio: il pavimento e gli oggetti vicini, collegati a terra, fanno da seconda armatura di un condensatore e ne aumentano la capacità, come accade avvicinando le armature di un condensatore piano. Con $C \approx 100$ pF e $\Delta V \approx 10$ kV: $Q = C\Delta V \approx 1 \times 10^{-6}\ C = 1\ \mu C$; $U = \frac{1}{2}C\Delta V^2 \approx \frac{1}{2} \times 10^{-10}\ F \times 10^8\ V^2 \approx 5 \times 10^{-3}$ J, pochi millijoule: abbastanza per una scintilla fastidiosa, troppo poco per essere pericolosa.

33. Traccia di risposta. Si costruisce un condensatore con due fogli di alluminio separati da un numero fisso di fogli di carta (distanza d e dielettrico costanti), pressati con lo stesso peso. Si varia l'area efficace sovrapponendo le armature per lunghezze diverse (per esempio da 5 cm a 30 cm, con la larghezza fissa), cioè cambiando S e misurando ogni volta C con il multimetro. Si costruisce il grafico di C in funzione di S: il risultato atteso è una retta per l'origine con pendenza $\varepsilon_r\varepsilon_0/d$; si stima l'incertezza sulla pendenza e si verifica che l'intercetta sia compatibile con zero (o con la piccola capacità dei cavetti). Precauzioni: misurare d con il micrometro, tenere i fogli ben allineati e le linguette lontane, usare solo il multimetro.