CAPITOLO

11

Il potenziale elettrico

Una carica positiva che scende di potenziale è come un sasso che rotola a valle: per sapere quanta energia guadagna basta il dislivello, non la strada.

OBIETTIVI

1. Dimostrare che la forza elettrostatica è conservativa e usare la circuitazione del campo elettrostatico.
2. Calcolare l'energia potenziale elettrica di due cariche, di un sistema di cariche e di una carica in un campo uniforme.
3. Definire il potenziale e la differenza di potenziale, calcolarli per cariche puntiformi con la sovrapposizione e usare l'elettronvolt.
4. Collegare campo e potenziale con le superfici equipotenziali e con le relazioni $E = -\Delta V/\Delta s$ ed $E = \Delta V/d$.
5. Applicare la conservazione dell'energia al moto delle cariche, dal cannone elettronico alla distanza di minimo avvicinamento.
6. Mappare in laboratorio le linee equipotenziali e confrontare il campo misurato con la previsione.

INDICE DEL CAPITOLO

11.1 Il lavoro della forza elettrica 2
11.2 L'energia potenziale elettrica 5
11.3 Il potenziale elettrico 9
11.4 Superfici equipotenziali e campo elettrico 11
11.5 Il moto delle cariche e la conservazione dell'energia 19

Fisica 4 · Parte III · Il campo elettrico · versione 1.0
Capitolo 11: Il potenziale elettrico · pagine 319–346 del volume completo · estratto per lo studio

Fra i due poli di una pila stilo ci sono 1,5 V, fra quelli della batteria di un'automobile 12 V, fra la base di una nube temporalesca e il suolo anche cento milioni di volt. Il volt è forse l'unità di misura elettrica più familiare: è scritto su ogni caricabatterie e su ogni elettrodomestico. Ma che cosa misura, esattamente? In questo capitolo scoprirai che misura un'energia, o meglio un'energia per ogni coulomb di carica, e che è il modo più semplice per descrivere il campo elettrico.

Nel capitolo precedente il campo elettrico era un vettore definito in ogni punto dello spazio: per conoscerlo servono tre numeri in ogni punto, e per sommare i campi di più cariche bisogna sommare vettori. Le Indicazioni nazionali chiedono di dare del campo «anche una descrizione in termini di energia e potenziale», ed è quello che faremo. Il punto di partenza è una proprietà che hai già incontrato per la gravità: il lavoro della forza elettrica non dipende dal percorso. Da qui nasce un'energia potenziale e, dividendo per la carica, una grandezza scalare, il potenziale, che basta un numero a descrivere in ogni punto. Una carta geografica con le curve di livello è l'immagine giusta da tenere in mente: il potenziale sta alla carica come l'altitudine sta a un sasso che rotola a valle.

11.1 Il lavoro della forza elettrica

11.1.1 Nel campo uniforme, come per la forza peso

Nel capitolo 10 hai visto che fra due lastre piane e parallele con cariche opposte il campo elettrico è uniforme: ha lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso in ogni punto. Una carica q posta fra le lastre subisce la forza $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$, costante, proprio come un sasso vicino al suolo subisce la forza peso $\boldsymbol{mg}$. Il lavoro di una forza costante lungo uno spostamento rettilineo è il prodotto scalare della forza per lo spostamento: conta solo la componente dello spostamento parallela alla forza.

Sposta ora la carica da A a B lungo una scala di gradini, come nella Figura 11.1a: tratti paralleli al campo alternati a tratti perpendicolari. Sui tratti perpendicolari la forza non compie lavoro; su ciascun tratto parallelo compie il lavoro $qE\Delta x_i$, dove Δx_i è la lunghezza del tratto, contata positiva nel verso del campo. Sommando, i Δx_i danno sempre lo spostamento totale Δx lungo il campo, comunque siano fatti i gradini. Poiché ogni curva si può approssimare bene quanto si vuole con una scala di gradini sempre più piccoli, il risultato vale per qualsiasi percorso:

$$W_{\mathrm{AB}} = qE\Delta x$$

Il lavoro dipende soltanto dalla posizione iniziale e da quella finale, e precisamente da quanto ci si è spostati nella direzione del campo. Se q è positiva e si sposta nel verso del campo, il lavoro è positivo; se si sposta in verso opposto, è negativo. Per una carica negativa vale il contrario.

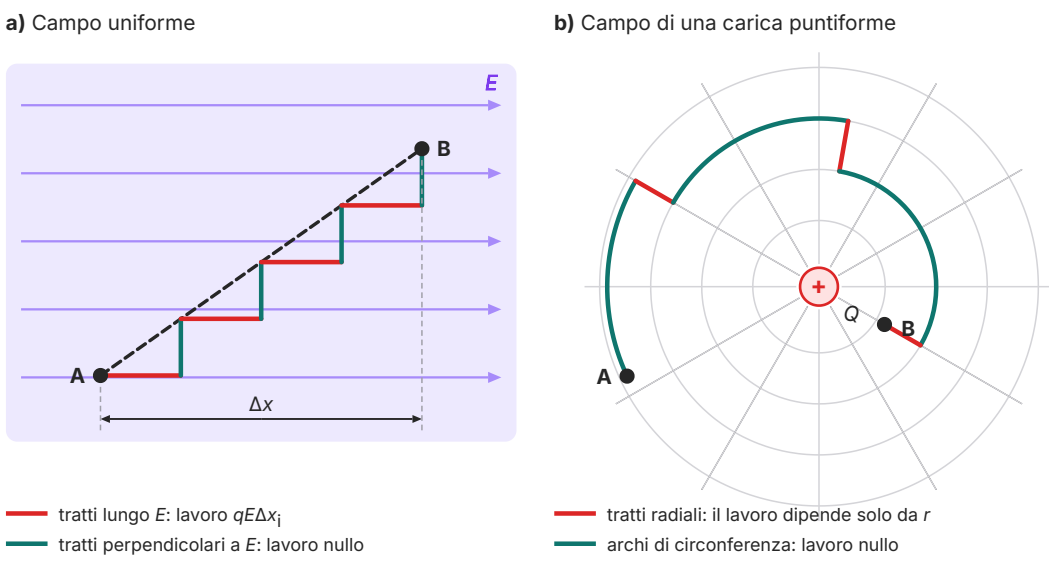

Figura 11.1 Il lavoro della forza elettrica non dipende dal percorso. a) In un campo uniforme, lungo una scala di gradini solo i tratti paralleli al campo (in rosso) contribuiscono al lavoro, e la loro somma è sempre Δx: il lavoro è lo stesso che lungo il segmento AB (tratteggiato). b) Nel campo di una carica puntiforme Q ogni percorso si può approssimare con archi di circonferenza centrati in Q (in verde), su cui il lavoro è nullo, e tratti radiali (in rosso), su cui il lavoro dipende solo dalle distanze iniziale e finale.

11.1.2 Nel campo di una carica puntiforme

Il campo di una carica puntiforme Q non è uniforme: è radiale e diminuisce come $1/r^2$. Anche qui, però, un percorso qualsiasi da A a B si può approssimare con archi di circonferenza centrati in Q e tratti radiali (Figura 11.1b). Lungo un arco la forza di Coulomb, che è radiale, è perpendicolare allo spostamento e non compie lavoro. Lungo un tratto radiale il lavoro dipende soltanto dalle distanze da Q all'inizio e alla fine del tratto. Sommando i tratti radiali, quelli percorsi in andata e in ritorno alla stessa distanza si compensano, e il risultato dipende solo da r_A e da r_B. È lo stesso ragionamento che nel volume dello scorso anno (*Fisica 3*, capitolo 13) hai fatto per la forza gravitazionale, e porta allo stesso tipo di formula.

ESEMPIO SVOLTO

Il lavoro della forza di Coulomb, a passi

Problema. Una carica di prova q si sposta in direzione radiale dalla distanza r_A alla distanza r_B da una carica puntiforme Q, che resta ferma. Calcola il lavoro della forza elettrica.

Passo 1: un tratto breve. Su un tratto da r_1 a r_2, poco più grande, la forza passa da k_0qQ/r_1^2 a k_0qQ/r_2^2. Come valore medio prendiamo $k_0qQ/(r_1r_2)$, che sta fra i due. Scriviamo la forza con il suo segno: se $qQ > 0$ la forza è repulsiva e punta verso l'esterno, nello stesso verso dello spostamento, e il lavoro è positivo. Il lavoro sul tratto è quindi

$$W_{12} = k_0 \frac{qQ}{r_1 r_2}(r_2 - r_1) = k_0 qQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

La formula vale con qualunque segno delle cariche: se $qQ < 0$ la forza è attrattiva e, per uno spostamento verso l'esterno, il lavoro risulta negativo, come deve.

Passo 2: si sommano i tratti. Dividiamo il cammino da r_A a r_B nei tratti r_A, r_1, r_2, ..., r_B. Nella somma ogni termine $1/r_k$ intermedio compare una volta con il segno + e una volta con il segno −, e si cancella. Restano il primo e l'ultimo:

$$W_{AB} = k_0 qQ\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Passo 3: un controllo numerico. Il risultato non dipende dal numero dei tratti: è esatto, e lo ritroverai con gli strumenti dell'analisi matematica come area sotto il grafico della forza. Si può controllare con dieci tratti uguali fra r e $2r$. Prendendo per ogni tratto la forza al suo inizio si ottiene un lavoro dell'8% circa troppo grande; prendendola alla fine, del 7% circa troppo piccolo; con la media $k_0qQ/(r_1r_2)$ si ottiene esattamente $k_0qQ/(2r)$, il valore della formula.

Passo 4: un percorso qualsiasi, più cariche. Per un percorso non radiale si aggiungono archi, che non contribuiscono. Se le cariche sorgenti sono molte, Q_1, Q_2, ..., ferme, la forza su q è la somma vettoriale delle forze dovute a ciascuna, e il lavoro totale è la somma dei lavori: ognuno dipende solo dagli estremi del percorso, quindi anche la somma.

Commento. La formula è quella del lavoro della forza gravitazionale, $-GMm(1/r_A - 1/r_B)$, con k_0qQ al posto di $-GMm$. Il segno meno della gravità ricorda che le masse si attraggono sempre; le cariche possono anche respingersi.

11.1.3 Una forza conservativa

Una forza il cui lavoro dipende soltanto dalla posizione iniziale e da quella finale, e non dal percorso, è una forza conservativa: lo hai imparato nel primo biennio con la forza peso e la forza elastica. Equivalentemente, il suo lavoro lungo un qualsiasi percorso chiuso, che torna al punto di partenza, è nullo. Abbiamo appena mostrato che la forza elettrica esercitata da cariche ferme è conservativa: per questo si dice che il campo elettrostatico è un **campo conservativo**.

La parola «elettrostatico» è importante: vale per i campi prodotti da cariche in quiete, e solo per essi.

11.1.4 La circuitazione del campo elettrostatico

L'ultima proprietà si può scrivere come una proprietà del campo, senza nominare la carica di prova. Considera un percorso chiuso, orientato, fatto di tratti rettilinei abbastanza brevi perché su ciascuno il campo si possa considerare costante. Su ogni tratto di lunghezza Δl_i indica con $E_{t,i}$ la componente del campo lungo il tratto, positiva se concorde con il verso di percorrenza. La **circuitazione** del campo elettrico lungo il percorso è la somma

$$\Gamma(\boldsymbol{E}) = \Sigma\, E_{t,i}\, \Delta l_i \text{ (V; in unità SI, N·m/C)}$$

Il lavoro della forza elettrica su una carica q lungo il tratto i-esimo è $qE_{t,i}\Delta l_i$, quindi il lavoro lungo tutto il percorso chiuso è $q\Gamma(\boldsymbol{E})$. Poiché la forza è conservativa, questo lavoro è nullo, e dunque:

$$\Gamma(\boldsymbol{E}) = 0 \text{ lungo qualsiasi percorso chiuso}$$

Controlliamolo in un caso semplice. In un campo uniforme percorri un rettangolo con due lati di lunghezza l paralleli al campo. Su un lato il contributo è $+El$, sull'altro, percorso in verso opposto, $-El$; sui due lati perpendicolari $E_t = 0$. La somma è zero.

La circuitazione nulla ha una conseguenza che si vede nei disegni: **le linee di campo elettrostatico non sono mai linee chiuse**. Se una linea di campo si chiudesse su sé stessa, percorrendola nel verso del campo si avrebbe $E_t > 0$ in ogni tratto e quindi $\Gamma(\boldsymbol{E}) > 0$. Le linee partono dalle cariche positive e finiscono sulle negative, come hai visto nel capitolo 10. Il flusso, che il teorema di Gauss lega alle cariche, e la circuitazione, che per il campo elettrostatico è sempre nulla, sono le due proprietà con cui si descrive un campo statico. Nel capitolo 16 incontrerai un campo, quello magnetico, la cui circuitazione intorno a una corrente non è nulla: è la differenza più profonda fra i due campi.

11.2 L'energia potenziale elettrica

11.2.1 Due cariche puntiformi

Per una forza conservativa si definisce la variazione di energia potenziale come l'opposto del lavoro: $\Delta U = U_B - U_A = -W_{AB}$. Dal risultato del paragrafo precedente:

$$U_B - U_A = k_0 \frac{qQ}{r_B} - k_0 \frac{qQ}{r_A}$$

Come per la gravità, conta solo la differenza, e lo zero si può scegliere. La scelta naturale è $U = 0$ quando le cariche sono infinitamente lontane, dove la forza si annulla. Si ottiene così l'**energia**

potenziale elettrica di due cariche puntiformi q_1 e q_2 a distanza r:

$$U = k_0 \frac{q_1 q_2}{r} \text{ (J)}$$

Il suo significato fisico è un lavoro. U è il lavoro che la forza elettrica compie quando le due cariche passano dalla distanza r a una distanza infinita; ed è anche il lavoro che un agente esterno deve compiere per portarle, lentamente, dall'infinito alla distanza r. Il segno dice molto (Figura 11.2):

- **cariche dello stesso segno**: $U > 0$, e U cresce se le cariche si avvicinano. Per avvicinarle bisogna spingerle; lasciate libere, si allontanano e l'energia potenziale si trasforma in energia cinetica;
- **cariche di segno opposto**: $U < 0$, e U diminuisce se le cariche si avvicinano. Il sistema è legato: per separare le cariche fino all'infinito bisogna fornire almeno l'energia $|U|$.

Per due masse l'energia potenziale gravitazionale, $-GMm/r$, è sempre negativa, perché la gravità attrae sempre. Nel caso elettrico la formula porta il segno delle cariche, e il prodotto $q_1 q_2$ decide se il sistema è legato. Per esempio, una carica di 2,0 μC e una di 1,0 μC a 10 cm di distanza hanno $U = 8{,}99 \times 10^9$ N·m^2/C^2 $\times$ $2{,}0 \times 10^{-6}$ C $\times$ $1{,}0 \times 10^{-6}$ C/0,10 m = 0,18 J; se la seconda carica è −1,0 μC, $U = -0{,}18$ J. Nell'atomo di idrogeno l'elettrone e il protone si trovano a una distanza tipica di $5{,}3 \times 10^{-11}$ m: $U = -k_0 e^2/r \approx -4{,}3 \times 10^{-18}$ J. È un numero piccolissimo in joule, ma enorme per un solo elettrone, e fra poco vedremo un'unità più adatta.

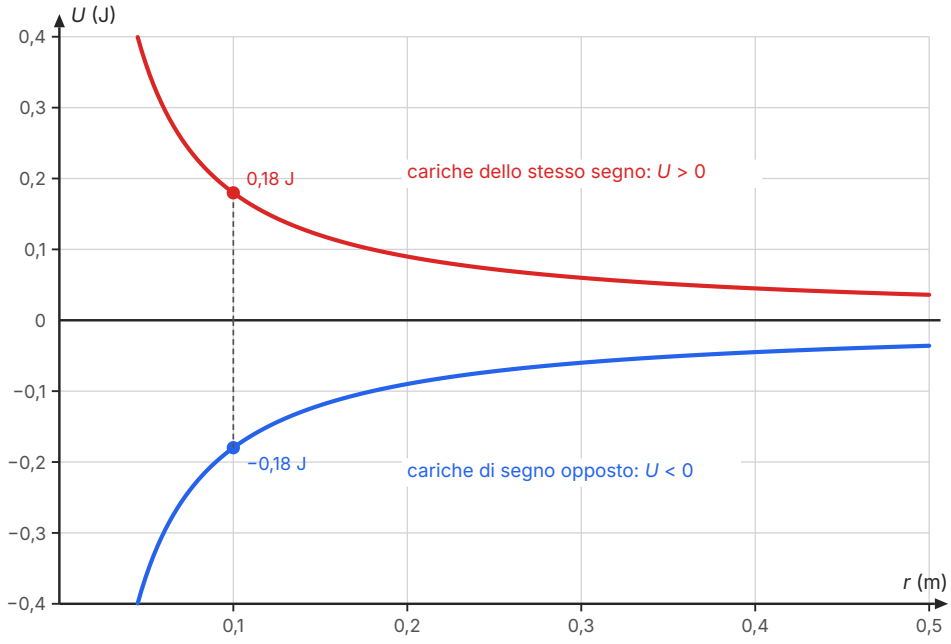

Figura 11.2 Energia potenziale elettrica in funzione della distanza per una carica q_1 = 2,0 µC e una carica q_2 = +1,0 µC (in rosso) o q_2 = −1,0 µC (in blu); curve calcolate da $U = k_0 q_1 q_2 / r$. Le due curve sono simmetriche rispetto all'asse delle ascisse e tendono a zero a grande distanza. A 10 cm, U = ±0,18 J.

11.2.2 Un sistema di cariche

Quanta energia è immagazzinata in un sistema di tre o più cariche ferme? L'energia potenziale del sistema è il lavoro necessario per costruirlo, portando le cariche dall'infinito una alla volta. Portare la prima non costa nulla, perché non c'è ancora nessuna forza. Per portare la seconda si compie il lavoro $k_0 q_1 q_2 / r_{12}$. La terza subisce la forza delle prime due, e il lavoro per portarla è la somma $k_0 q_1 q_3 / r_{13} + k_0 q_2 q_3 / r_{23}$. In totale

$$U = k_0 \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k_0 \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k_0 \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

L'**energia potenziale di un sistema di cariche** è la somma delle energie potenziali di tutte le **coppie**, ciascuna contata una sola volta: con N cariche le coppie sono $N(N-1)/2$. Il risultato non dipende dall'ordine in cui le cariche vengono portate, come deve essere per una forza conservativa.

ESEMPIO SVOLTO

L'energia di tre cariche

Problema. Tre piccole sfere cariche sono fissate ai vertici di un triangolo equilatero di lato 3,0 cm: $q_1 = q_2 = +4{,}0$ nC, $q_3 = -3{,}0$ nC. a) Calcola l'energia potenziale del sistema. b) Il sistema è legato? Quanta energia serve per allontanare le tre cariche all'infinito l'una dall'altra?

Soluzione. a) Le coppie sono tre, tutte alla distanza $r = 3{,}0 \times 10^{-2}$ m:

- $U_{12} = 8{,}99 \times 10^9 \times (4{,}0 \times 10^{-9})^2/0{,}030\ \text{J} = +4{,}8 \times 10^{-6}$ J;
- $U_{13} = U_{23} = 8{,}99 \times 10^9 \times 4{,}0 \times 10^{-9} \times (-3{,}0 \times 10^{-9})/0{,}030\ \text{J} = -3{,}6 \times 10^{-6}$ J.

$U = 4{,}79 \times 10^{-6}\ \text{J} - 2 \times 3{,}60 \times 10^{-6}\ \text{J} = -2{,}4 \times 10^{-6}$ J.

b) L'energia potenziale è negativa: per costruire il sistema dall'infinito le forze elettriche hanno compiuto in totale un lavoro positivo, e il sistema è legato. Per smontarlo, portando le cariche a distanza infinita con velocità nulla, bisogna fornire almeno $2{,}4 \times 10^{-6}$ J. La repulsione fra le due cariche positive non basta a separarle, perché ciascuna è attratta dalla carica negativa.

Commento. Nel calcolo le energie si sommano come numeri, con il loro segno: nessun vettore, nessun angolo. È il vantaggio di ragionare con l'energia.

11.2.3 Una carica nel campo uniforme

Fra due lastre parallele il campo è uniforme e punta dalla lastra positiva alla negativa. Misura con d la distanza di un punto dalla lastra negativa, contata verso quella positiva, cioè in verso opposto al campo. Se una carica q si sposta dalla lastra negativa fino alla distanza d, la forza $q\boldsymbol{E}$ e lo spostamento hanno versi opposti, e il lavoro è $-qEd$. Scegliendo $U = 0$ sulla lastra negativa:

$$U = qEd$$

È la stessa forma di mgh, con qE al posto del peso e d al posto della quota: la lastra negativa fa la parte del suolo. Per una carica positiva l'energia potenziale cresce allontanandosi dalla lastra negativa, come cresce quella di un sasso sollevato. Per un elettrone, che ha carica negativa, U diminuisce allontanandosi dalla lastra negativa: per l'elettrone «in alto» è vicino alla lastra negativa.

Quando sulla carica agiscono soltanto forze elettriche, si conserva l'energia meccanica, $K + U$: ciò che la carica perde in energia potenziale lo guadagna in energia cinetica. Lo useremo nell'ultimo paragrafo per studiare il moto delle cariche.

11.3 Il potenziale elettrico

11.3.1 Energia per unità di carica

L'energia potenziale di una carica di prova q in un punto dello spazio è proporzionale a q: raddoppiando la carica di prova raddoppia la forza e raddoppia il lavoro. Il rapporto U/q non dipende dunque dalla carica di prova, ma soltanto dalle cariche sorgenti e dal punto. È il **potenziale elettrico** in quel punto:

$$V = \frac{U}{q}$$

Il potenziale sta all'energia potenziale come il campo sta alla forza: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/q$ è la forza per unità di carica, $V = U/q$ l'energia per unità di carica. A differenza del campo, però, il potenziale è uno **scalare**: in ogni punto è un solo numero, positivo, negativo o nullo. La sua unità SI è il **volt** (V), in onore di Alessandro Volta, che nel 1800 costruì la prima pila: 1 V = 1 J/C. Un punto in cui il potenziale vale 10 V è un punto in cui una carica di 1 C avrebbe un'energia potenziale di 10 J.

Dalla formula dell'energia potenziale di due cariche si ricava subito il potenziale a distanza r da una carica puntiforme Q, nullo a distanza infinita:

$$V = k_0 \frac{Q}{r}$$

Il potenziale ha il segno della carica che lo produce: intorno a una carica positiva è positivo e cresce avvicinandosi alla carica; intorno a una carica negativa è negativo e diminuisce avvicinandosi. A 10 cm da una carica di 1,0 nC il potenziale vale $8{,}99 \times 10^9 \times 1{,}0 \times 10^{-9}/0{,}10$ V ≈ 90 V; a 20 cm la metà, 45 V. Il potenziale diminuisce come $1/r$, più lentamente del campo, che diminuisce come $1/r^2$.

11.3.2 Più cariche: una somma di numeri

Il potenziale di più cariche puntiformi si ottiene dal principio di sovrapposizione: il lavoro è la somma dei lavori dovuti a ciascuna carica, quindi

$$V = k_0 \frac{Q_1}{r_1} + k_0 \frac{Q_2}{r_2} + \ldots = \Sigma\, k_0 \frac{Q_i}{r_i}$$

È una somma di numeri con il loro segno, non di vettori: basta conoscere le distanze, senza scomporre nulla. Considera per esempio un quadrato di lato 20 cm con cariche di +2,0 nC nei due vertici di sinistra e di −2,0 nC nei due vertici di destra. Il centro dista 14 cm da tutti i vertici, e i quattro termini si cancellano a due a due: nel centro $V = 0$. Il campo nel centro, invece, non è nullo: i quattro campi, ciascuno di modulo $8{,}99 \times 10^9 \times 2{,}0 \times 10^{-9}/(0{,}141)^2$ N/C ≈ 899 N/C, hanno

tutti una componente verso destra, che vale 899 N/C × cos 45° ≈ 636 N/C, mentre le componenti verticali si annullano: $E \approx 4 \times 636$ N/C $\approx 2{,}5 \times 10^3$ N/C, verso le cariche negative.

ERRORE FREQUENTE

Potenziale nullo non vuol dire campo nullo

«Nel centro del quadrato il potenziale è zero, quindi lì una carica non subisce forze.» Sbagliato: la forza dipende dal campo, e il campo è legato a come il potenziale **cambia** da un punto all'altro, non al suo valore in un punto. Allo stesso modo, la quota di un punto non dice quanto è ripido il terreno.

Vale anche il contrario: un campo nullo non implica un potenziale nullo. A metà strada fra due cariche positive uguali q, distanti d, i due campi sono opposti e il campo è nullo, ma il potenziale vale $2k_0q/(d/2) = 4k_0q/d$, che non è zero. E nel prossimo capitolo vedrai che all'interno di un conduttore carico il campo è nullo e il potenziale è uguale in tutti i punti, ma in generale diverso da zero.

11.3.3 Differenza di potenziale e lavoro

Lo zero del potenziale, come quello dell'energia potenziale, è una scelta: fisicamente contano solo le differenze. La **differenza di potenziale** fra due punti A e B, detta anche tensione elettrica, è

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q}$$

e il lavoro compiuto dal campo su una carica q che passa da A a B è

$$W_{AB} = -\Delta U = -q\Delta V = q(V_A - V_B)$$

Quando si dice che fra i poli di una pila ci sono 1,5 V, si parla di una differenza di potenziale: ogni coulomb di carica che passa dal polo negativo a quello positivo all'interno della pila acquista 1,5 J di energia potenziale. Nei circuiti si sceglie di solito come zero il potenziale della Terra, il cosiddetto potenziale di terra: la Terra è un conduttore così grande che il suo potenziale non cambia apprezzabilmente quando le si cede o le si toglie carica (capitolo 9). La Tabella 11.1 raccoglie alcuni ordini di grandezza.

Tabella 11.1 Alcune differenze di potenziale tipiche (ordini di grandezza).

Situazione	ΔV
fra due elettrodi di un elettrocardiogramma sulla pelle	≈ 1 mV
ai capi della membrana di un neurone a riposo	≈ 70 mV
pila stilo	1,5 V
batteria di un'automobile	12 V
rete elettrica domestica (tensione alternata, quinto anno)	230 V
linee elettriche ad altissima tensione	$3{,}8 \times 10^5$ V
generatore di Van de Graaff da laboratorio scolastico	$\approx 10^5$ V
fra una nube temporalesca e il suolo	$\approx 10^8$ V

11.3.4 L'elettronvolt

Nella fisica degli atomi e delle particelle le energie in joule sono numeri scomodi. Si usa allora l'**elettronvolt** (eV): l'energia che una particella con la carica elementare acquista, o cede, attraversando una differenza di potenziale di 1 V:

$$1\ \text{eV} = e \times 1\ \text{V} = 1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}\ \text{J (negli esercizi } 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J)}$$

Il valore è esatto dal 2019, perché lo è la carica elementare. Si usano i multipli keV (10^3 eV), MeV (10^6 eV) e GeV (10^9 eV). Con questa unità le energie del mondo atomico diventano numeri maneggevoli. L'energia potenziale dell'elettrone nell'atomo di idrogeno, $-4{,}3 \times 10^{-18}$ J, vale circa −27 eV; per strappare l'elettrone all'atomo servono 13,6 eV, l'energia di ionizzazione dell'idrogeno; i legami chimici valgono qualche elettronvolt. L'energia cinetica media di una molecola d'aria a temperatura ambiente, $(3/2)k_{\text{B}}T$ con $T = 300$ K, è circa 0,04 eV, un venticinquesimo di elettronvolt: per questo, a temperatura ambiente, gli urti fra le molecole dell'aria non rompono i legami chimici. Attenzione: l'elettronvolt è un'unità di **energia**, non di potenziale.

11.4 Superfici equipotenziali e campo elettrico

11.4.1 Le superfici equipotenziali

L'insieme dei punti dello spazio che hanno lo stesso potenziale è una **superficie equipotenziale**. Spostare una carica lungo una superficie equipotenziale non costa lavoro: $W_{\text{AB}} = -q\Delta V = 0$. Ne segue una proprietà geometrica fondamentale: **in ogni punto il campo elettrico è perpendicolare alla superficie equipotenziale**. Infatti, se il campo avesse una componente lungo la super-

ficie, uno spostamento in quella direzione richiederebbe un lavoro diverso da zero. Le linee di campo attraversano quindi le superfici equipotenziali ad angolo retto.

Per una carica puntiforme il potenziale dipende solo dalla distanza r, e le superfici equipotenziali sono sfere centrate nella carica. Se le si disegna a passi uguali di potenziale, non sono equidistanti: il raggio è $r = k_0 Q/V$, e per una carica di 1,0 nC le superfici a 100 V, 200 V, 300 V, 400 V e 500 V hanno raggi 9,0 cm, 4,5 cm, 3,0 cm, 2,2 cm e 1,8 cm. Si addensano vicino alla carica, dove il campo è più intenso (Figura 11.3a). Nel piano di un disegno le superfici appaiono come curve, le **linee equipotenziali**. Per un dipolo (Figura 11.3b) le superfici equipotenziali avvolgono ciascuna delle due cariche, e il piano che taglia a metà il segmento fra le cariche è tutto a potenziale zero, perché ogni suo punto è equidistante da due cariche opposte.

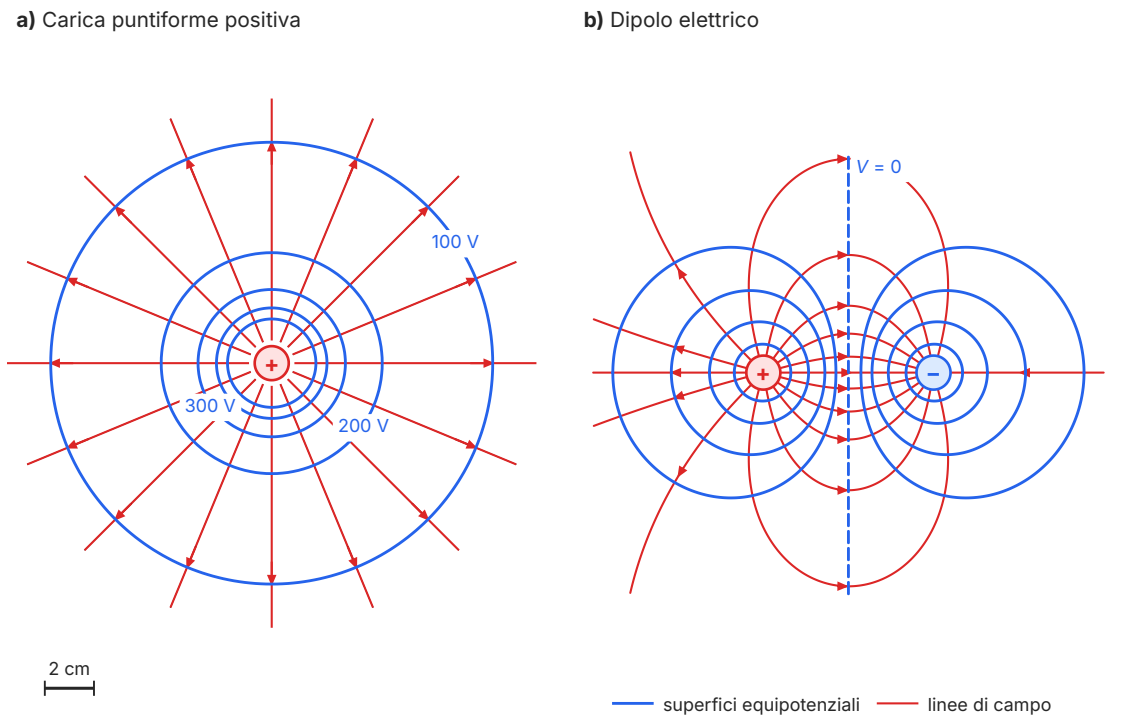

Figura 11.3 Superfici equipotenziali (in blu) e linee di campo (in rosso), calcolate. a) Carica puntiforme Q = 1,0 nC: equipotenziali a 100, 200, 300, 400 e 500 V, sempre più vicine fra loro avvicinandosi alla carica. b) Dipolo: sezione in un piano che contiene le cariche; le equipotenziali sono disegnate per valori del potenziale uguali e opposti intorno alle due cariche, e il piano mediano (tratteggiato) è a potenziale zero. In ogni punto le linee di campo tagliano le equipotenziali ad angolo retto.

L'analogia con una carta topografica è precisa. Le curve di livello (isoipse) uniscono punti alla stessa quota; dove sono fitte il terreno è ripido; l'acqua scorre lungo le linee di massima pendenza, perpendicolari alle curve di livello. Allo stesso modo le linee equipotenziali uniscono

punti allo stesso potenziale, dove sono fitte il campo è intenso, e una carica positiva libera, partendo da ferma, comincia a muoversi perpendicolarmente alle equipotenziali, verso i potenziali più bassi.

11.4.2 Dal potenziale al campo

Il legame fra campo e potenziale si può rendere quantitativo. Sposta una carica di prova q di un tratto breve Δs lungo una linea di campo, nel verso del campo. Il lavoro della forza elettrica è $qE\Delta s$, perché forza e spostamento sono paralleli; ma è anche $-q\Delta V$. Uguagliando:

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta s}$$

Il segno meno dice che, procedendo nel verso del campo, il potenziale **diminuisce**. Il modulo del campo è la rapidità con cui il potenziale cambia da un punto all'altro, misurata nella direzione in cui cambia più in fretta, cioè perpendicolarmente alle equipotenziali. Se le equipotenziali disegnate a passi uguali di potenziale sono vicine, Δs è piccolo e il campo è intenso. In una direzione qualsiasi, il rapporto $-\Delta V/\Delta s$ dà la componente del campo in quella direzione: lungo un'equipotenziale $\Delta V = 0$, e la componente è nulla, come abbiamo già visto.

La formula dà anche una seconda unità di misura per il campo: il volt al metro, V/m. Coincide con il newton al coulomb: 1 V/m = 1 J/(C·m) = 1 N·m/(C·m) = 1 N/C.

> **DA RICORDARE**
>
> **Il campo punta in discesa**
>
> Il campo elettrico punta sempre dai potenziali più alti a quelli più bassi. Una carica positiva lasciata libera si muove verso potenziali minori, come un sasso che rotola a valle. Una carica negativa, come l'elettrone, si muove verso potenziali **maggiori**. In entrambi i casi l'energia potenziale $U = qV$ diminuisce e l'energia cinetica aumenta.

11.4.3 Il campo uniforme

Fra due lastre parallele, distanti d, con una differenza di potenziale ΔV, il campo è uniforme: il potenziale diminuisce in modo lineare andando dalla lastra positiva alla negativa, e le superfici equipotenziali sono piani paralleli alle lastre, equidistanti se disegnati a passi uguali di potenziale (Figura 11.4). In questo caso la relazione vale per una distanza qualsiasi, non solo per tratti brevi, e il modulo del campo è

$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

Con 12 V applicati a due lastre distanti 6,0 cm il campo vale 12 V/0,060 m = 200 V/m, e il potenziale scende di 2,0 V per ogni centimetro. Nel capitolo 10 hai trovato che fra due lastre con den-

sità di carica ±σ il campo è $E = \sigma/\varepsilon_0$: la differenza di potenziale è allora $\Delta V = \sigma d/\varepsilon_0$, proporzionale alla carica sulle lastre. Ripartirai da qui, nel prossimo capitolo, per studiare i condensatori.

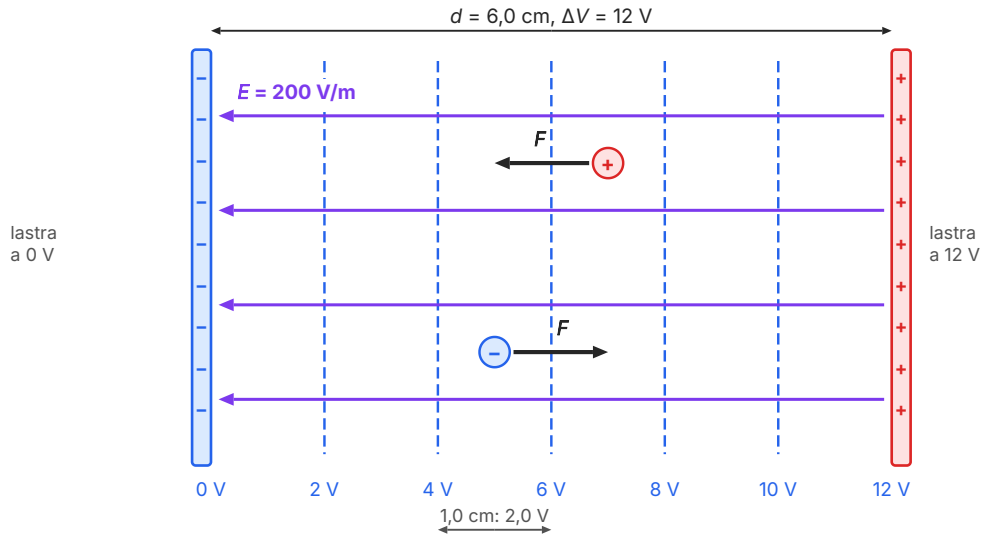

Figura 11.4 Campo uniforme fra due lastre parallele distanti d = 6,0 cm, con una differenza di potenziale di 12 V. I piani equipotenziali (tratteggiati) sono equidistanti, uno ogni 2,0 V, e perpendicolari alle linee di campo. Il campo, di 200 V/m, punta verso il potenziale minore: su una carica positiva la forza è diretta verso la lastra a 0 V, su un elettrone verso la lastra a 12 V.

11.4.4 Il potenziale di una sfera conduttrice

Su una sfera conduttrice di raggio R con carica Q, in equilibrio, la carica si distribuisce in modo uniforme sulla superficie, e all'interno il campo è nullo: lo hai visto nel capitolo 10 con il teorema di Gauss, e nel prossimo capitolo lo ritroverai come proprietà di tutti i conduttori in equilibrio. All'esterno il campo è quello di una carica puntiforme Q posta nel centro, e quindi anche il lavoro fra due punti esterni è lo stesso: il potenziale all'esterno è $V = k_0 Q/r$. All'interno il campo è nullo, spostare una carica non costa lavoro, e il potenziale resta quello della superficie:

$$V = k_0 \frac{Q}{r} \text{ per } r \geq R; \; V = k_0 \frac{Q}{R} \text{ per } r \leq R$$

L'intero conduttore, superficie e interno, è un volume equipotenziale (Figura 11.5). Sulla superficie il campo vale $k_0 Q/R^2$, cioè $E = V/R$: a parità di potenziale, una sfera più piccola ha sulla superficie un campo più intenso. Questo spiega un limite pratico dei generatori elettrostatici. L'aria diventa conduttrice, e la sfera si scarica con una scintilla, quando il campo supera circa 3×10^6 V/m (capitolo 12). Una sfera di 20 cm di raggio non può quindi superare circa 3×10^6 V/m × 0,20 m = 6×10^5 V; per raggiungere tensioni più alte servono sfere più grandi.

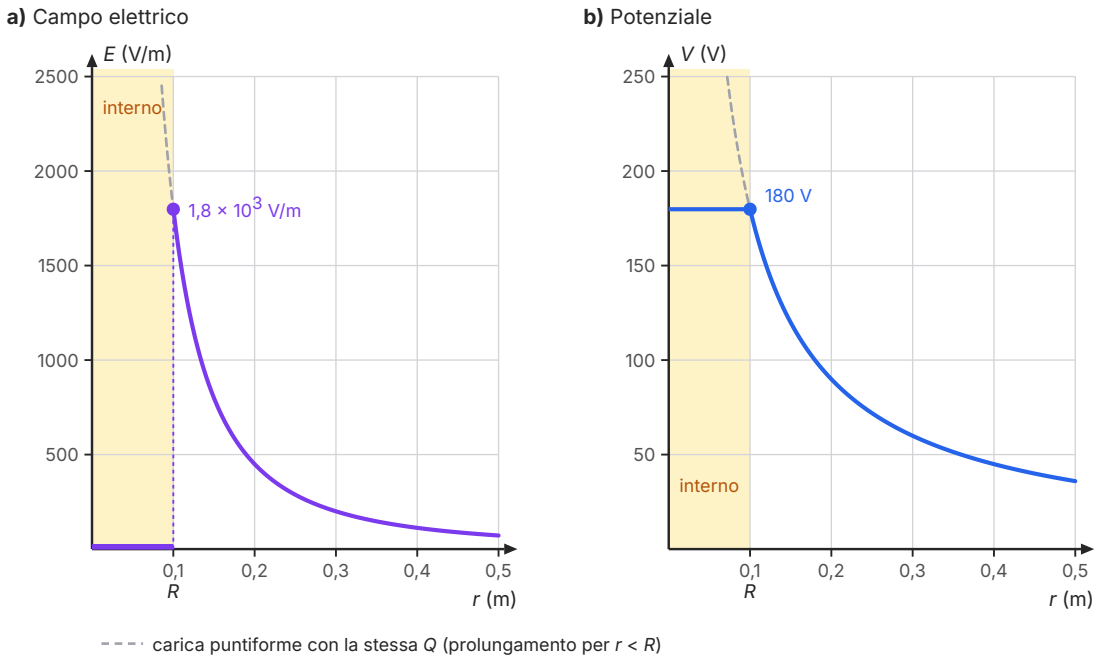

Figura 11.5 Campo elettrico (a) e potenziale (b) di una sfera conduttrice di raggio R = 0,10 m con carica Q = 2,0 nC, calcolati. All'interno (zona colorata) il campo è nullo e il potenziale è costante, 180 V; all'esterno coincidono con quelli di una carica puntiforme posta nel centro. In grigio tratteggiato, per confronto, l'andamento che avrebbe la carica puntiforme anche per $r < R$. Alla superficie il campo salta da zero a $1{,}8 \times 10^3$ V/m.

COLLEGAMENTI

Un campo fortissimo in ogni neurone

Ogni cellula del tuo corpo ha una piccola differenza di potenziale fra l'interno e l'esterno della membrana. In un neurone a riposo l'interno è circa 70 mV più basso dell'esterno: è il **potenziale di membrana**, mantenuto da pompe di ioni che consumano energia chimica. Sembra poco, ma la membrana è sottilissima, circa 7 nm. Trattandola come una lastra con un campo uniforme, $E = \Delta V/d = 0{,}070\ \text{V}/(7 \times 10^{-9}\ \text{m}) = 1 \times 10^7$ V/m: più di tre volte il campo che rende conduttrice l'aria (capitolo 12).

Quando il neurone si eccita, si aprono canali che lasciano entrare ioni sodio positivi: spinti dal campo, oltre che dalla differenza di concentrazione, vanno verso il potenziale più basso, cioè all'interno. L'interno diventa per un istante positivo, e questa inversione, il **potenziale d'azione**, corre lungo l'assone: è il segnale nervoso. Le differenze di potenziale prodotte dal cuore arrivano fino alla pelle, dove l'elettrocardiogramma le misura: sono dell'ordine del millivolt (Scienze naturali).

ESEMPIO SVOLTO

Dal grafico del potenziale al campo

Problema. Usa il grafico del potenziale della Figura 11.5b per stimare il campo elettrico fra 0,20 m e 0,30 m dal centro della sfera, e confronta il risultato con la formula del campo. Che cosa dice il grafico sul campo all'interno della sfera?

Lettura. Dal grafico, a $r = 0{,}20$ m il potenziale vale 90 V, a $r = 0{,}30$ m vale 60 V.

Calcolo. Lungo la direzione radiale, verso l'esterno: $\Delta V = 60\ \text{V} - 90\ \text{V} = -30\ \text{V}$ su $\Delta s = 0{,}10$ m, quindi $E = -\Delta V/\Delta s = 30\ \text{V}/0{,}10\ \text{m} = 3{,}0 \times 10^2$ V/m. Il segno positivo dice che il campo punta verso l'esterno, verso i potenziali minori, come deve per una carica positiva.

Confronto. A metà dell'intervallo, a 0,25 m, la formula dà $E = k_0 Q/r^2 = 8{,}99 \times 10^9 \times 2{,}0 \times 10^{-9}/(0{,}25)^2$ V/m $= 288$ V/m, il 4% in meno. La differenza nasce dall'intervallo troppo largo: il campo non è costante fra 0,20 m e 0,30 m. Con i valori del potenziale a 0,24 m (74,9 V) e a 0,26 m (69,2 V) si ottiene $5{,}8\ \text{V}/0{,}020\ \text{m} \approx 2{,}9 \times 10^2$ V/m, in accordo con la formula: più l'intervallo è breve, migliore è la stima.

Interno. Per $r < 0{,}10$ m il grafico è orizzontale: $\Delta V = 0$ per ogni spostamento, quindi $E = 0$, come mostra la Figura 11.5a.

Commento. Dove il grafico del potenziale è ripido il campo è intenso, dove è piatto il campo è nullo: il campo si legge come la pendenza del grafico, cambiata di segno.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: le linee equipotenziali su carta conduttrice

Materiali. Un foglio di carta conduttrice (carta impregnata di grafite) di 30 cm × 20 cm, fissato su un pannello di sughero; due elettrodi circolari di 1 cm di diametro e due barre di rame lunghe 15 cm, premuti sul foglio; un alimentatore a bassa tensione in corrente continua regolato su 10,0 V; un voltmetro digitale (risoluzione 0,01 V) con un puntale; un righello millimetrato e una matita morbida.

Procedimento. 1) Si collegano gli elettrodi circolari, distanti 10,0 cm, ai poli dell'alimentatore, e il morsetto comune del voltmetro all'elettrodo negativo, che fa da zero. 2) Si appoggia il puntale sul foglio e lo si sposta finché il voltmetro segna 1,00 V; si segna il punto, se ne cercano altri quattro o cinque allo stesso potenziale e li si unisce. 3) Si ripete per 2, 3, ..., 9 V. 4) Si sostituiscono gli elettrodi con le due barre, parallele e distanti $d = (10{,}0 \pm 0{,}1)$ cm, si misura con il voltmetro la differenza di potenziale fra le barre, $(10{,}0 \pm 0{,}1)$ V, e si registra il potenziale lungo la retta che le attraversa nel mezzo, ogni centimetro (Tabella 11.2).

Il foglio è attraversato da una debole corrente, e non è un sistema elettrostatico. Si dimostra però che in un foglio conduttore omogeneo il potenziale si distribuisce come il potenziale elettrostatico nel piano, quello di cariche disposte lungo fili perpendicolari al foglio: le linee equipotenziali e le linee di campo hanno la stessa geometria. Per questo la mappa ha la forma di quella di un dipolo, anche se i valori non seguono la legge $1/r$.

Tabella 11.2 Potenziale misurato lungo la retta mediana fra due barre parallele distanti 10,0 cm, con 10,0 V fra le barre (dati tipici). x è la distanza dalla barra negativa (incertezza ±0,1 cm); l'ultima colonna è il valore previsto per un campo uniforme, $V = x\Delta V/d$.

x (cm)	V_{mis} (V)	V_{prev} (V)
1	1,13	1,0
2	2,08	2,0
3	3,07	3,0
4	4,02	4,0
5	5,01	5,0
6	5,96	6,0
7	6,95	7,0
8	7,90	8,0
9	8,88	9,0

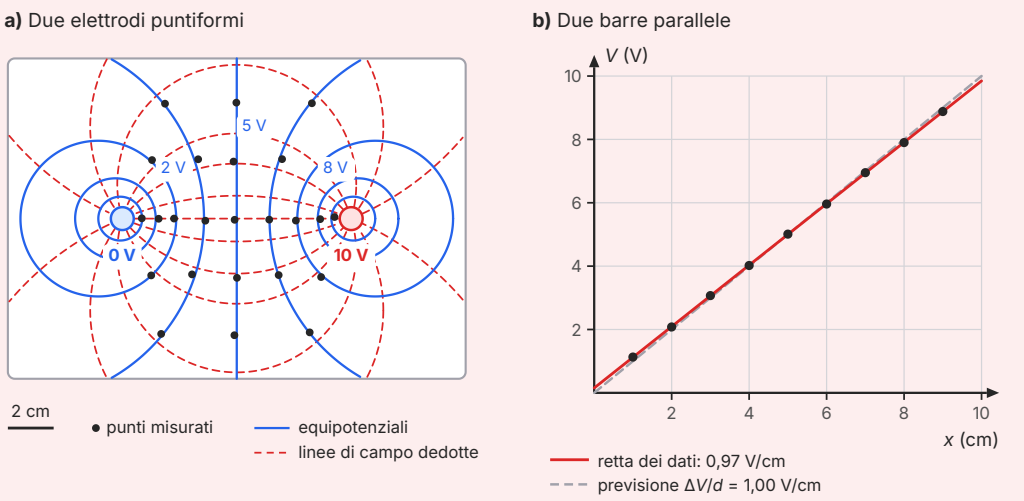

Figura 11.6 I risultati dell'attività (dati tipici). a) Con due elettrodi circolari: i punti misurati a 1, 2, ..., 9 V, le linee equipotenziali che li uniscono e le linee di campo dedotte tracciandole perpendicolari alle equipotenziali. b) Con due barre parallele: il potenziale lungo la retta mediana (Tabella 11.2), la retta che meglio approssima i dati e, tratteggiata, la previsione $\Delta V/d$.

Che cosa concludere. Le linee equipotenziali intorno agli elettrodi circolari sono curve chiuse che li avvolgono, più fitte vicino agli elettrodi; la linea a 5 V è la retta che taglia a metà il segmento fra di essi, come nel dipolo della Figura 11.3. Le linee di campo dedotte escono dall'elettrodo positivo ed entrano in quello negativo. Fra le barre i dati stanno su una retta (Figura 11.6b): il potenziale cresce in modo lineare, e il campo è uniforme.

Confronto teoria–esperimento. La pendenza della retta dei dati è 0,97 V/cm; con le rette di massima e di minima pendenza compatibili con le incertezze sulle posizioni si ottiene (0,97 ± 0,02) V/cm, cioè un campo misurato $E = (97 \pm 2)$ V/m. La previsione è $E = \Delta V/d = 10{,}0$ V/0,100 m = 100 V/m, con incertezza relativa 1% + 1% = 2%: (100 ± 2) V/m. La differenza, 3 V/m, è minore della somma delle incertezze, 4 V/m: le due misure sono compatibili. La retta dei dati, però, non passa per l'origine: prolungata, dà 0,15 V a contatto con la barra negativa e 9,85 V a contatto con quella positiva. Una piccola parte della tensione si perde nel contatto fra le barre e la carta, e la differenza di potenziale che agisce davvero sul foglio è circa 9,7 V, che corrisponde proprio a 97 V/m.

Sicurezza. Usa solo un alimentatore a bassa tensione (non oltre 12 V), mai la tensione di rete. Spegni l'alimentatore prima di spostare gli elettrodi.

Per la relazione. Allega le due mappe con le equipotenziali e le linee di campo, la tabella, il grafico di V in funzione di x con le barre d'errore e il calcolo della pendenza. Confronta il campo misurato con $\Delta V/d$, discuti l'effetto delle resistenze di contatto e proponi un modo per

eliminarlo (per esempio misurando la differenza di potenziale fra due punti del foglio, invece che fra le barre).

APPROFONDIMENTO

L'elettricità dell'atmosfera

Anche con il cielo sereno, vicino al suolo c'è un campo elettrico: il cosiddetto **campo elettrico di bel tempo**, dell'ordine di 100 V/m, diretto verso il basso. La superficie terrestre è carica negativamente, e una carica positiva di uguale valore è distribuita nell'atmosfera; fra il suolo e gli strati alti dell'atmosfera, che conducono, c'è una differenza di potenziale di qualche centinaio di migliaia di volt.

Allora fra la testa e i piedi di una persona alta 1,7 m ci sono 170 V? No. Il corpo umano è un conduttore ed è in contatto con il suolo: è anch'esso un volume equipotenziale, allo stesso potenziale della Terra. La sua presenza deforma il campo, le superfici equipotenziali gli passano sopra la testa e le linee di campo finiscono sulla sua pelle. Nessuna differenza di potenziale attraversa il corpo, e nessuna carica lo percorre.

Sotto un temporale le cose cambiano. Nella nube i moti violenti dell'aria separano le cariche: di solito la base della nube diventa negativa, e il campo vicino al suolo si inverte e cresce fino a migliaia di volt al metro. Quando il campo nell'aria raggiunge il valore che la rende conduttrice, si forma un canale di aria ionizzata e scocca il fulmine: fra la nube e il suolo la differenza di potenziale è dell'ordine di 10^8 V, e in una frazione di secondo si scaricano cariche dell'ordine di qualche coulomb a qualche decina di coulomb. Nel 1752 Benjamin Franklin descrisse il celebre esperimento dell'aquilone, che mostrava che il fulmine è una scarica elettrica; da quelle ricerche nacque il parafulmine, di cui capirai il funzionamento nel prossimo capitolo.

11.5 Il moto delle cariche e la conservazione dell'energia

11.5.1 Energia cinetica e differenza di potenziale

Se su una particella carica agisce soltanto la forza elettrica, la sua energia meccanica si conserva: $K_A + qV_A = K_B + qV_B$, cioè

$$\Delta K = -q\Delta V$$

Una carica positiva che passa a un potenziale più basso guadagna energia cinetica; una carica negativa guadagna energia cinetica passando a un potenziale più alto. Per un elettrone ($q = -e$) che parte da fermo e attraversa una differenza di potenziale $\Delta V > 0$ verso il potenziale maggiore, $\frac{1}{2}m_e v^2 = e\Delta V$, e quindi

$$v = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m_e}}$$

Con soli 100 V un elettrone raggiunge $v = \sqrt{(2 \times 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C} \times 100\ \text{V}/9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})} = 5{,}93 \times 10^{6}$ m/s, quasi seimila chilometri al secondo, e acquista un'energia cinetica di 100 eV. Un protone accelerato dalla stessa differenza di potenziale acquista la stessa energia, 100 eV, perché ha una carica dello stesso valore; ma la sua massa è circa 1800 volte maggiore, e la sua velocità è solo $1{,}38 \times 10^{5}$ m/s. Ciò che una differenza di potenziale fissa è l'**energia** acquistata, non la velocità.

> **ERRORE FREQUENTE**
>
> **Il segno della carica nel bilancio**
>
> «Un elettrone va da un punto a 0 V a un punto a 100 V: $\Delta V = +100$ V, quindi la sua energia cinetica diminuisce di 100 eV.» Sbagliato: nella formula $\Delta K = -q\Delta V$ la carica va presa con il suo segno. Per l'elettrone $-q\Delta V = -(-e)(100\ \text{V}) = +100$ eV: l'energia cinetica **aumenta**. Un controllo che non sbaglia mai: la forza elettrica su un elettrone è opposta al campo, e il campo punta verso il potenziale minore; quindi la forza spinge l'elettrone verso il potenziale maggiore, e se l'elettrone va in quel verso viene accelerato.

11.5.2 Il cannone elettronico

Per ottenere un fascio di elettroni veloci si usa un **cannone elettronico** (Figura 11.7). In un tubo in cui è stato fatto il vuoto, un catodo metallico viene scaldato da un filamento: alcuni elettroni del metallo acquistano abbastanza energia termica da uscirne, un fenomeno chiamato **emissione termoionica**. Di fronte al catodo c'è un anodo forato, a un potenziale più alto di qualche centinaio o qualche migliaio di volt. Gli elettroni vengono accelerati verso l'anodo, lo attraversano passando dal foro e proseguono, a velocità costante, in una regione senza campo. Ciascuno esce con un'energia cinetica pari a $e\Delta V$, indipendentemente dalla forma del campo fra catodo e anodo.

Fasci come questi, allora chiamati raggi catodici, permisero a J. J. Thomson di scoprire l'elettrone nel 1897; per gran parte del Novecento hanno disegnato le immagini sugli schermi dei televisori e degli oscilloscopi, e oggi si usano nei microscopi elettronici e nei tubi a raggi X.

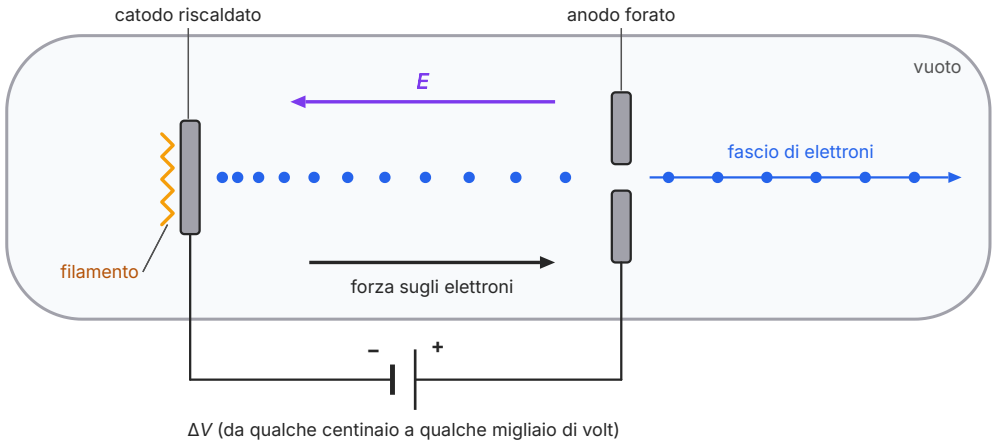

Figura 11.7 Schema di un cannone elettronico. Il catodo, scaldato da un filamento, emette elettroni, che il campo fra catodo e anodo accelera verso il potenziale maggiore. Il campo ***E*** punta dall'anodo al catodo; la forza sugli elettroni, che hanno carica negativa, è opposta. Il polo positivo del generatore (la piastra lunga del simbolo) è collegato all'anodo.

11.5.3 Frenare una carica

Una carica positiva che si muove verso potenziali più alti rallenta. Un protone che viaggia a $2{,}0 \times 10^6$ m/s ha un'energia cinetica di $\frac{1}{2} \times 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg $\times (2{,}0 \times 10^6 \text{ m/s})^2 = 3{,}3 \times 10^{-15}$ J, cioè 21 keV: si ferma, e torna indietro, se deve risalire una differenza di potenziale di 21 kV o più. Allo stesso modo una particella carica positivamente lanciata contro un nucleo atomico, che è positivo, rallenta avvicinandosi, perché la sua energia potenziale k_0qQ/r cresce. In un urto frontale si ferma alla **distanza di minimo avvicinamento**, quella in cui tutta l'energia cinetica iniziale è diventata energia potenziale: $K_0 = k_0qQ/r_{\text{min}}$. Con esperimenti di questo tipo, all'inizio del Novecento, si scoprì che la carica positiva dell'atomo è concentrata in un nucleo piccolissimo.

11.5.4 Un limite del modello

La formula $v = \sqrt{(2e\Delta V/m_e)}$ dice che un elettrone accelerato da circa 256 kV raggiungerebbe la velocità della luce, e da tensioni maggiori la supererebbe. Non succede: nessuna particella con massa raggiunge la velocità della luce, e le misure lo confermano. L'energia cinetica acquistata è sempre $e\Delta V$, ma già a qualche decina di chilovolt la velocità calcolata con $\frac{1}{2}mv^2$ sbaglia di qualche percento, e a tensioni maggiori il legame fra energia cinetica e velocità non è più $\frac{1}{2}mv^2$: serve la teoria della relatività, che studierai il prossimo anno.

ESEMPIO SVOLTO

Dentro il cannone elettronico

Problema. In un cannone elettronico la differenza di potenziale fra catodo e anodo è 3,0 kV e la loro distanza è 1,5 cm. Gli elettroni escono dal catodo con velocità trascurabile. Considera uniforme il campo fra catodo e anodo. Calcola: a) l'energia cinetica degli elettroni all'uscita dall'anodo, in eV e in joule; b) la loro velocità; c) il campo e l'accelerazione fra catodo e anodo; d) il tempo impiegato per percorrere la distanza fra catodo e anodo. e) È lecito usare la meccanica classica?

Soluzione. a) Per la conservazione dell'energia, poiché agisce solo la forza elettrica: $K = e\Delta V = 3{,}0\ \text{keV} = 3{,}0 \times 10^3 \times 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J} = 4{,}8 \times 10^{-16}\ \text{J}$.

b) $v = \sqrt{(2K/m_e)} = \sqrt{(2 \times 4{,}8 \times 10^{-16}\ \text{J}/9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})} = 3{,}2 \times 10^7\ \text{m/s}$.

c) Per il campo uniforme $E = \Delta V/d = 3{,}0 \times 10^3\ \text{V}/0{,}015\ \text{m} = 2{,}0 \times 10^5\ \text{V/m}$. Per il secondo principio della dinamica $a = eE/m_e = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C} \times 2{,}0 \times 10^5\ \text{V/m}/9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg} = 3{,}5 \times 10^{16}\ \text{m/s}^2$, più di 10^{15} volte l'accelerazione di gravità: il peso dell'elettrone è del tutto trascurabile.

d) Il moto è uniformemente accelerato con partenza da fermo, e la velocità media è metà di quella finale: $t = d/(v/2) = 0{,}015\ \text{m}/(1{,}62 \times 10^7\ \text{m/s}) = 9{,}2 \times 10^{-10}\ \text{s}$, meno di un nanosecondo. Controllo con la dinamica: $v = at = 3{,}5 \times 10^{16}\ \text{m/s}^2 \times 9{,}2 \times 10^{-10}\ \text{s} = 3{,}2 \times 10^7\ \text{m/s}$, lo stesso risultato del punto b.

e) $v/c = 3{,}2 \times 10^7/3{,}00 \times 10^8 \approx 0{,}11$: l'elettrone va all'11% della velocità della luce. A questa velocità le correzioni della relatività sono inferiori all'1% e la meccanica classica è un'ottima approssimazione.

Commento. I punti a e b non richiedono di sapere come è fatto il campo fra catodo e anodo: basta la differenza di potenziale. I punti c e d, invece, richiedono l'ipotesi del campo uniforme. È il vantaggio del metodo energetico.

COLLEGAMENTI

Acceleratori in ospedale

Nei reparti di radioterapia, per curare i tumori, si usano acceleratori lineari che portano gli elettroni a energie di alcuni MeV: milioni di elettronvolt, che non si ottengono con una sola differenza di potenziale ma con una lunga serie di spinte successive. Il fascio di elettroni colpisce un bersaglio metallico e produce raggi X molto penetranti, che vengono concentrati sul tumore.

Più semplice è il tubo a raggi X di un ambulatorio di radiologia: un cannone elettronico con una differenza di potenziale di qualche decina di chilovolt, il cui fascio colpisce un bersaglio di tungsteno. L'energia che un elettrone può cedere alla radiazione è al massimo quella che ha acquistato, $e\Delta V$: per questo, regolando la tensione del tubo, il tecnico di radiologia sceglie quanto saranno penetranti i raggi X.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$W_{AB} = k_0 qQ(1/r_A - 1/r_B)$ — lavoro della forza elettrica di una carica puntiforme Q ferma su una carica q: dipende solo dalle distanze iniziale e finale. In un campo uniforme $W_{AB} = qE\Delta x$, con Δx spostamento lungo il campo. La forza elettrostatica è conservativa.

$\Gamma(\boldsymbol{E}) = \Sigma\, E_t \Delta l = 0$ — la circuitazione del campo elettrostatico (V) è nulla lungo ogni percorso chiuso; le linee di campo elettrostatico non sono mai chiuse. Vale per campi prodotti da cariche ferme.

$U = k_0 q_1 q_2 / r$ — energia potenziale elettrica (J) di due cariche puntiformi, nulla a distanza infinita: positiva per cariche dello stesso segno, negativa (sistema legato) per cariche opposte. Per un sistema di cariche si sommano le energie di tutte le coppie.

$U = qEd$ — energia potenziale di una carica in un campo uniforme, con d distanza dalla lastra negativa (dove $U = 0$).

$V = U/q$ — potenziale elettrico (V = J/C): energia potenziale per unità di carica, scalare. Carica puntiforme: $V = k_0 Q/r$; più cariche: $V = \Sigma\, k_0 Q_i / r_i$. Sfera conduttrice: $k_0 Q/r$ all'esterno, $k_0 Q/R$ costante all'interno.

$W_{AB} = -q\Delta V = q(V_A - V_B)$ — lavoro del campo su una carica che passa da A a B; conta solo la differenza di potenziale.

1 eV = $1{,}60 \times 10^{-19}$ J — l'elettronvolt è un'unità di energia: quella acquistata dalla carica elementare attraverso 1 V.

$E = -\Delta V/\Delta s$; $E = \Delta V/d$ — il campo è perpendicolare alle superfici equipotenziali e punta verso il potenziale minore; nel campo uniforme fra lastre distanti d. 1 V/m = 1 N/C.

$\Delta K = -q\Delta V$; $v = \sqrt{(2e\Delta V/m_e)}$ — conservazione dell'energia per una carica soggetta solo alla forza elettrica; velocità di un elettrone accelerato da fermo (valida finché v è molto minore di c).

SINTESI

- Il lavoro della forza elettrica prodotta da cariche ferme non dipende dal percorso: il campo elettrostatico è conservativo. Per una carica puntiforme $W_{AB} = k_0 qQ(1/r_A - 1/r_B)$; in un campo uniforme $W_{AB} = qE\Delta x$.
- La circuitazione del campo elettrostatico, $\Sigma\, E_t \Delta l$, è nulla lungo ogni percorso chiuso; per questo le sue linee di campo non si chiudono mai su sé stesse.
- L'energia potenziale di due cariche puntiformi è $U = k_0 q_1 q_2 / r$, nulla a distanza infinita: positiva per cariche dello stesso segno, negativa per cariche opposte, che formano un sistema legato.
- L'energia potenziale di un sistema di cariche è la somma delle energie di tutte le coppie ed è il lavoro necessario per costruirlo portando le cariche dall'infinito.
- Il potenziale elettrico $V = U/q$ è l'energia potenziale per unità di carica, una grandezza scalare misurata in volt (1 V = 1 J/C). Per una carica puntiforme $V = k_0 Q/r$; per più cariche i potenziali si sommano come numeri.
- Contano solo le differenze di potenziale: il lavoro del campo su una carica che va da A a B è $q(V_A - V_B)$. Potenziale nullo non implica campo nullo, e viceversa.
- L'elettronvolt, 1 eV = $1{,}60 \times 10^{-19}$ J, è un'unità di energia adatta al mondo atomico.
- Le superfici equipotenziali sono perpendicolari alle linee di campo; spostarsi lungo una di esse non richiede lavoro. Per una carica puntiforme sono sfere concentriche; per un campo uniforme, piani paralleli.
- Il campo è legato alla variazione del potenziale: $E = -\Delta V/\Delta s$ lungo una linea di campo, e il campo punta verso i potenziali minori. Fra due lastre parallele $E = \Delta V/d$; 1 V/m = 1 N/C.
- Una sfera conduttrice carica è un volume equipotenziale: all'esterno $V = k_0 Q/r$, all'interno $V = k_0 Q/R$.
- Se agisce solo la forza elettrica, $\Delta K = -q\Delta V$: le cariche positive accelerano verso i potenziali minori, gli elettroni verso i maggiori. Un elettrone accelerato da ΔV acquista l'energia $e\Delta V$, come nel cannone elettronico.
- Ad alte tensioni la relazione $\frac{1}{2}mv^2$ non vale più e serve la relatività: nessuna particella raggiunge la velocità della luce.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Una carica si sposta da un punto A a un punto B in un campo elettrostatico. Il lavoro della forza elettrica:
   - **A.** dipende dalla lunghezza del percorso
   - **B.** è nullo per qualsiasi percorso
   - **C.** dipende soltanto dalle posizioni di A e di B
   - **D.** è massimo lungo il percorso rettilineo

2. ● Il volt è uguale a:
   - **A.** 1 N/C
   - **B.** 1 J/C
   - **C.** 1 C/J
   - **D.** 1 J·C

3. ● L'elettronvolt è un'unità di misura di:
   - **A.** potenziale elettrico
   - **B.** carica elettrica
   - **C.** campo elettrico
   - **D.** energia

4. ● Le superfici equipotenziali di una carica puntiforme sono:
   - **A.** sfere concentriche centrate nella carica
   - **B.** piani paralleli
   - **C.** semirette uscenti dalla carica
   - **D.** cilindri coassiali

5. ●● In una regione in cui c'è un campo elettrico, il campo punta:
   - **A.** lungo le superfici equipotenziali
   - **B.** verso i potenziali maggiori
   - **C.** verso i potenziali minori
   - **D.** sempre verso le cariche positive

6. ●● Un elettrone, inizialmente fermo in un campo elettrico, viene lasciato libero. Si muove:
   - **A.** lungo una superficie equipotenziale
   - **B.** verso potenziali maggiori, e la sua energia potenziale diminuisce
   - **C.** verso potenziali minori, e la sua energia potenziale aumenta
   - **D.** verso potenziali minori, e la sua energia potenziale diminuisce

7. ●● Nel punto medio del segmento che unisce le due cariche di un dipolo:
   A. il campo e il potenziale sono nulli
   B. il campo è nullo e il potenziale no
   C. il campo e il potenziale sono entrambi diversi da zero
   D. il potenziale è nullo e il campo no

8. ●● Due cariche puntiformi dello stesso segno vengono avvicinate fino a dimezzarne la distanza. La loro energia potenziale elettrica:
   A. raddoppia
   B. si dimezza
   C. quadruplica
   D. non cambia

Vero o falso

9. ● Se in un punto il potenziale elettrico è nullo, anche il campo elettrico in quel punto è nullo. V / F

10. ● La circuitazione del campo elettrostatico lungo un qualsiasi percorso chiuso è nulla. V / F

11. ●● L'energia potenziale elettrica di due cariche puntiformi di segno opposto è negativa. V / F

12. ●● Due superfici equipotenziali corrispondenti a potenziali diversi possono intersecarsi. V / F

13. ●● Un protone lasciato libero in un campo elettrico si sposta verso punti a potenziale minore, e la sua energia potenziale diminuisce. V / F

Applicare

14. ● Calcola il potenziale elettrico a 30 cm da una carica puntiforme di 4,0 nC.

15. ● Esprimi in joule un'energia di 5,0 keV ed esprimi in elettronvolt un'energia di $3{,}2 \times 10^{-19}$ J.

16. ● Una carica di +3,0 μC si sposta da un punto A, dove il potenziale è 120 V, a un punto B, dove è 40 V. Calcola il lavoro compiuto dal campo e la variazione di energia potenziale della carica.

17. ● Due lastre parallele distanti 4,0 mm sono collegate a una batteria da 12 V. Calcola il campo elettrico fra le lastre, in V/m e in N/C.

18. ●● Calcola, in joule e in elettronvolt, l'energia potenziale elettrica di un elettrone e di un protone alla distanza di $5{,}3 \times 10^{-11}$ m.

19. ●● In un campo uniforme di $2{,}5 \times 10^{4}$ V/m due punti A e B si trovano sulla stessa linea di campo, a 6,0 cm l'uno dall'altro, e il campo punta da A verso B. Completa: la differenza di potenziale fra A e B è _____ V, e il potenziale è maggiore nel punto _____ .

20. ●● Dal grafico della Figura 11.5b leggi il potenziale nel centro della sfera e a 30 cm dal centro. Dal valore letto sulla superficie ricava la carica della sfera e confrontala con quella indicata nella didascalia.

21. ●● Quattro cariche puntiformi, di +3,0 nC, +3,0 nC, +3,0 nC e −1,0 nC, sono poste ai vertici di un quadrato di lato 20 cm. Calcola il potenziale nel centro del quadrato.

Problemi

22. ●●● Un elettrone parte da fermo e viene accelerato da una differenza di potenziale di 2,0 kV. a) Calcola la sua energia cinetica finale, in eV e in joule, e la sua velocità. b) Secondo la formula classica, quale differenza di potenziale porterebbe l'elettrone alla velocità della luce? c) Che cosa ti dice questo risultato sui limiti della formula?

23. ●● Un protone entra con velocità $3{,}0 \times 10^6$ m/s in una regione in cui un campo elettrico uniforme di $2{,}0 \times 10^5$ V/m, parallelo alla velocità, lo frena. a) Quale differenza di potenziale deve risalire il protone per fermarsi? b) Quale distanza percorre prima di fermarsi?

24. ●●● Tre cariche puntiformi uguali di +1,0 nC sono fissate ai vertici di un triangolo equilatero di lato 3,0 cm. a) Calcola l'energia potenziale del sistema. b) Calcola il potenziale nel centro del triangolo. c) Quanto lavoro deve compiere un agente esterno per portare, lentamente, una quarta carica di +1,0 nC dall'infinito al centro del triangolo? d) Qual è l'energia potenziale del sistema di quattro cariche?

25. ●●● Una particella alfa (carica $2e$, massa $6{,}64 \times 10^{-27}$ kg) con energia cinetica di 5,0 MeV viene lanciata frontalmente contro un nucleo di oro (carica $79e$), che si può considerare fermo. a) Calcola la velocità iniziale della particella. b) Calcola la distanza di minimo avvicinamento. c) Quale velocità ha la particella quando si trova al doppio di quella distanza?

26. ●●● (Collegamento con il capitolo 10.) Un elettrone, accelerato da fermo da una differenza di potenziale di 1,5 kV, entra a metà altezza fra due piastre deflettrici lunghe 4,0 cm e distanti 1,0 cm, con velocità parallela alle piastre; fra le piastre c'è una differenza di potenziale di 60 V. a) Calcola la velocità di ingresso. b) Calcola il campo fra le piastre e l'accelerazione dell'elettrone. c) Calcola lo spostamento trasversale all'uscita dalle piastre. d) Di quanto è aumentata, in eV, l'energia cinetica dell'elettrone fra l'ingresso e l'uscita? Verificalo con la differenza di potenziale attraversata.

27. ●● (Collegamento con *Fisica 3*, capitolo 15.) A quale temperatura l'energia cinetica media di traslazione delle molecole di un gas perfetto, $(3/2)k_B T$, vale 1,0 eV? Che cosa ti dice il risultato sulla possibilità che gli urti fra le molecole dell'aria, a temperatura ambiente, ionizzino gli atomi?

28. ●● La sfera di un generatore elettrostatico ha un raggio di 15 cm. L'aria intorno diventa conduttrice quando il campo supera $3{,}0 \times 10^6$ V/m. Calcola il potenziale massimo che la sfera può raggiungere e la carica corrispondente.

29. ●●● (Collegamento con *Fisica 3*, capitolo 6.) Due piccole sfere identiche, di massa 2,0 g e carica +50 nC ciascuna, sono tenute ferme a 2,0 cm di distanza su un piano orizzontale senza attrito, e poi vengono lasciate libere. Calcola la velocità di ciascuna quando sono molto lontane l'una dall'altra.

Ragionare e argomentare

30. ●● Spiega, usando la circuitazione, perché una linea di campo elettrostatico non può essere una curva chiusa.

31. ●●● Fra due lastre parallele il campo è uniforme; spesso lo si disegna come se si annullasse di colpo fuori dai bordi delle lastre. Considera un percorso rettangolare con un lato fra le lastre, parallelo al campo, e il lato opposto fuori dalle lastre, e mostra che un campo così violerebbe la proprietà della circuitazione. Che cosa ne concludi sul campo vicino ai bordi?

32. ●● Trova l'errore. «Nel punto medio fra due cariche positive uguali il campo è nullo, quindi anche il potenziale è nullo.»

33. ●●● Nel campo elettrico di bel tempo, di circa 100 V/m, fra la testa e i piedi di una persona alta 1,7 m dovrebbero esserci circa 170 V. Spiega perché la persona non sente nulla e descrivi come cambiano le superfici equipotenziali intorno al suo corpo.

PER APPROFONDIRE

- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. II: i capitoli sul potenziale elettrostatico e sulle sue applicazioni, dove campo e potenziale sono presentati come due descrizioni dello stesso campo.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sul potenziale elettrico, con molti esempi su sistemi di cariche, superfici equipotenziali e moto di particelle cariche.
- [HEW] P. G. Hewitt, *Conceptual Physics*: il capitolo sull'elettrostatica, per rivedere senza formule la differenza fra energia potenziale elettrica e potenziale, con l'esempio del generatore di Van de Graaff.
- [FAR] M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity*: le ricerche sull'induzione elettrostatica, in cui l'autore pensa le forze elettriche come tensioni lungo linee di forza che riempiono lo spazio.
- [TAY] J. R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*: la stima della pendenza di una retta e della sua incertezza, come nell'attività di laboratorio sulla carta conduttrice.

Glossario del capitolo

Campo conservativo
Campo in cui il lavoro della forza su una carica di prova dipende solo dalla posizione iniziale e da quella finale; il campo elettrostatico è conservativo.

Campo elettrico di bel tempo
Campo elettrico presente vicino al suolo con il cielo sereno, dell'ordine di 100 V/m e diretto verso il basso.

Cannone elettronico
Dispositivo che produce un fascio di elettroni veloci: gli elettroni emessi da un catodo riscaldato sono accelerati verso un anodo forato a potenziale più alto.

Circuitazione
Somma $\Sigma\, E_t \Delta l$ dei prodotti della componente del campo lungo ciascun tratto per la lunghezza del tratto, estesa a un percorso chiuso; per il campo elettrostatico è sempre nulla.

Differenza di potenziale
Differenza $\Delta V = V_B - V_A$ fra i potenziali di due punti, uguale alla variazione di energia potenziale per unità di carica; detta anche tensione.

Distanza di minimo avvicinamento
In un urto frontale fra cariche dello stesso segno, la distanza alla quale tutta l'energia cinetica iniziale si è trasformata in energia potenziale.

Elettronvolt
Unità di energia (eV) uguale all'energia acquistata dalla carica elementare attraverso una differenza di potenziale di 1 V: 1 eV = 1,602 176 634 × 10^{-19} J.

Emissione termoionica
Uscita di elettroni da un metallo riscaldato, dovuta all'energia termica che alcuni elettroni acquistano.

Energia potenziale di un sistema di cariche
Somma delle energie potenziali di tutte le coppie di cariche, ciascuna contata una volta; è il lavoro necessario per costruire il sistema portando le cariche dall'infinito.

Energia potenziale elettrica
Energia associata alla posizione di cariche in un campo elettrico; per due cariche puntiformi $U = k_0 q_1 q_2 / r$, nulla a distanza infinita.

Linee equipotenziali
Intersezioni delle superfici equipotenziali con il piano di un disegno o di un foglio.

Potenziale d'azione
Rapida inversione del potenziale di membrana di un neurone, dovuta all'ingresso di ioni sodio, che si propaga lungo l'assone: è il segnale nervoso.

Potenziale di membrana
Differenza di potenziale fra l'interno e l'esterno della membrana di una cellula; circa −70 mV in un neurone a riposo.

Potenziale elettrico
Energia potenziale per unità di carica in un punto, $V = U/q$; per una carica puntiforme $V = k_0 Q/r$.

Superficie equipotenziale
Luogo dei punti dello spazio che hanno lo stesso potenziale; in ogni punto è perpendicolare al campo elettrico.

Volt
Unità SI del potenziale elettrico e della differenza di potenziale: 1 V = 1 J/C.

Soluzioni

1. C. Il campo elettrostatico è conservativo: il lavoro dipende solo dagli estremi.

2. B. 1 V = 1 J/C (il newton al coulomb è l'unità del campo, uguale al volt al metro).

3. D. 1 eV = $1{,}60 \times 10^{-19}$ J.

4. A. Il potenziale k_0Q/r dipende solo dalla distanza dalla carica.

5. C. Il campo punta dai potenziali maggiori ai minori ed è perpendicolare alle equipotenziali.

6. B. La forza su un elettrone è opposta al campo, quindi diretta verso i potenziali maggiori; $U = -eV$ diminuisce e l'energia cinetica aumenta.

7. D. Il punto è equidistante da due cariche opposte, quindi $V = 0$; i due campi hanno lo stesso verso (dalla carica positiva alla negativa) e si sommano.

8. A. $U = k_0q_1q_2/r$ è inversamente proporzionale a r.

9. F. Nel punto medio di un dipolo $V = 0$ ma il campo non è nullo: il campo dipende da come varia il potenziale, non dal suo valore.

10. V. La forza elettrostatica è conservativa, quindi il lavoro su un percorso chiuso, che è $q\Gamma(\boldsymbol{E})$, è nullo.

11. V. $U = k_0q_1q_2/r$ è negativa perché $q_1q_2 < 0$: il sistema è legato.

12. F. In un punto comune alle due superfici il potenziale avrebbe due valori diversi, il che è impossibile.

13. V. Su una carica positiva la forza ha il verso del campo, che punta verso i potenziali minori; $U = qV$ diminuisce e l'energia cinetica aumenta.

14. $V = k_0Q/r = 8{,}99 \times 10^9$ N·m^2/C^2 $\times\ 4{,}0 \times 10^{-9}$ C/0,30 m = $1{,}2 \times 10^2$ V (120 V).

15. 5,0 keV = $5{,}0 \times 10^3 \times 1{,}60 \times 10^{-19}$ J = $8{,}0 \times 10^{-16}$ J; $3{,}2 \times 10^{-19}$ J/($1{,}60 \times 10^{-19}$ J/eV) = 2,0 eV.

16. $W_{AB} = q(V_A - V_B) = 3{,}0 \times 10^{-6}$ C $\times$ 80 V = $2{,}4 \times 10^{-4}$ J; $\Delta U = -W_{AB} = -2{,}4 \times 10^{-4}$ J. La carica positiva va verso il potenziale minore e perde energia potenziale.

17. $E = \Delta V/d = 12$ V/$4{,}0 \times 10^{-3}$ m = $3{,}0 \times 10^3$ V/m = $3{,}0 \times 10^3$ N/C.

18. $U = -k_0e^2/r = -8{,}99 \times 10^9 \times (1{,}60 \times 10^{-19})^2/5{,}3 \times 10^{-11}$ J = $-4{,}3 \times 10^{-18}$ J; diviso per $1{,}60 \times 10^{-19}$ J/eV: −27 eV.

19. $\Delta V = Ed = 2{,}5 \times 10^4$ V/m $\times$ 0,060 m = $1{,}5 \times 10^3$ V; il potenziale è maggiore in A, perché il campo punta verso il potenziale minore ($V_B - V_A = -1{,}5 \times 10^3$ V).

20. Nel centro, come in tutta la sfera, $V = 180$ V; a 0,30 m $V \approx 60$ V (un terzo, perché la distanza è tripla del raggio). Dalla superficie: $Q = VR/k_0 = 180$ V $\times$ 0,10 m/$8{,}99 \times 10^9$ N·m^2/C^2 = $2{,}0 \times 10^{-9}$ C = 2,0 nC, come nella didascalia.

21. Ogni vertice dista dal centro $r = 0{,}20$ m/$\sqrt{2}$ = 0,141 m. La somma delle cariche è 8,0 nC: $V = k_0\Sigma Q/r = 8{,}99 \times 10^9 \times 8{,}0 \times 10^{-9}/0{,}141$ V = $5{,}1 \times 10^2$ V. Poiché le distanze sono uguali, basta sommare le cariche.

22. a) $K = e\Delta V = 2{,}0$ keV = $2{,}0 \times 10^3 \times 1{,}60 \times 10^{-19}$ J = $3{,}2 \times 10^{-16}$ J (per la conservazione dell'energia, agisce solo la forza elettrica); $v = \sqrt{(2K/m_e)} = \sqrt{(2 \times 3{,}2 \times 10^{-16}/9{,}11 \times 10^{-31})}$ m/s = $2{,}7 \times 10^7$ m/s (circa 0,09c). b) Ponendo $v = c$ in $\frac{1}{2}m_ev^2 = e\Delta V$: $\Delta V = m_ec^2/(2e) = 9{,}11 \times 10^{-31} \times (3{,}00 \times 10^8)^2/(2 \times 1{,}60 \times 10^{-19})$ V = $2{,}6 \times 10^5$ V. c) Nessuna particella con massa raggiunge c: per tensioni di quest'ordine (e già, con errori di qualche percento, da alcune decine di kV) il legame $\frac{1}{2}mv^2$ fra energia e velocità non vale più e serve la relatività. L'energia acquistata resta $e\Delta V$.

23. a) Il protone deve trasformare tutta l'energia cinetica in energia potenziale: $e\Delta V = \frac{1}{2}m_pv^2$, $\Delta V = m_pv^2/(2e) = 1{,}67 \times 10^{-27} \times (3{,}0 \times 10^6)^2/(2 \times 1{,}60 \times 10^{-19})$ V = $4{,}7 \times 10^4$ V (47 kV). b) $d = \Delta V/E = 4{,}7 \times 10^4$ V/$2{,}0 \times 10^5$ V/m = 0,23 m.

24. a) Tre coppie a distanza $a = 0{,}030$ m: $U = 3k_0q^2/a = 3 \times 8{,}99 \times 10^9 \times (1{,}0 \times 10^{-9})^2/0{,}030$ J = $9{,}0 \times 10^{-7}$ J. b) Il centro dista $a/\sqrt{3} = 0{,}0173$ m da ogni vertice; per sovrapposizione (somma scalare) $V = 3k_0q/(0{,}0173$

m) = $1{,}6 \times 10^3$ V (1557 V). c) L'agente esterno, spostando lentamente la carica, compie un lavoro uguale alla variazione della sua energia potenziale: $W_{est} = q(V_{centro} - 0) = 1{,}0 \times 10^{-9}$ C × 1557 V = $1{,}6 \times 10^{-6}$ J. d) Si aggiungono le tre nuove coppie, cioè proprio il lavoro del punto c: $U = 9{,}0 \times 10^{-7}$ J + $1{,}56 \times 10^{-6}$ J = $2{,}5 \times 10^{-6}$ J.

25. a) $K = 5{,}0$ MeV = $5{,}0 \times 10^6 \times 1{,}60 \times 10^{-19}$ J = $8{,}0 \times 10^{-13}$ J; $v = \sqrt{(2K/m)} = \sqrt{(2 \times 8{,}0 \times 10^{-13}/6{,}64 \times 10^{-27})}$ m/s = $1{,}6 \times 10^7$ m/s. b) Per la conservazione dell'energia, nel punto di inversione tutta l'energia cinetica è diventata energia potenziale: $K = k_0(2e)(79e)/r_{min}$, quindi $r_{min} = 8{,}99 \times 10^9 \times 158 \times (1{,}60 \times 10^{-19})^2/8{,}0 \times 10^{-13}$ m = $4{,}5 \times 10^{-14}$ m. c) A distanza $2r_{min}$ l'energia potenziale è metà di K_0, quindi l'energia cinetica è 2,5 MeV, metà di quella iniziale; la velocità si riduce del fattore $\sqrt{2}$: $v = 1{,}55 \times 10^7/\sqrt{2}$ m/s = $1{,}1 \times 10^7$ m/s.

26. a) Per la conservazione dell'energia nel cannone: $v_0 = \sqrt{(2e\Delta V/m_e)} = \sqrt{(2 \times 1{,}60 \times 10^{-19} \times 1500/9{,}11 \times 10^{-31})}$ m/s = $2{,}3 \times 10^7$ m/s. b) Il campo fra le piastre è uniforme: $E = 60$ V/0,010 m = $6{,}0 \times 10^3$ V/m; per il secondo principio della dinamica $a = eE/m_e = 1{,}60 \times 10^{-19} \times 6{,}0 \times 10^3/9{,}11 \times 10^{-31}$ m/s^2 = $1{,}05 \times 10^{15}$ m/s^2, perpendicolare alle piastre. c) Il moto è come quello di un proiettile (capitolo 10): lungo le piastre la velocità è costante, $t = 0{,}040$ m/$2{,}30 \times 10^7$ m/s = $1{,}74 \times 10^{-9}$ s; trasversalmente $y = \frac{1}{2}at^2 = 0{,}5 \times 1{,}05 \times 10^{15} \times (1{,}74 \times 10^{-9})^2$ m = $1{,}6 \times 10^{-3}$ m = 1,6 mm (minore di 5 mm: l'elettrone non tocca le piastre). d) Il lavoro del campo è $eEy = e \times 6{,}0 \times 10^3$ V/m × $1{,}6 \times 10^{-3}$ m = 9,6 eV. Verifica: spostandosi di 1,6 mm verso la piastra positiva l'elettrone sale di $\Delta V = Ey = 9{,}6$ V, quindi $\Delta K = -(-e)\Delta V = 9{,}6$ eV, una piccola frazione dei 1500 eV iniziali.

27. $(3/2)k_B T = 1{,}0$ eV ⇒ $T = 2 \times 1{,}60 \times 10^{-19}$ J/(3 × 1,38 × 10^{-23} J/K) = $7{,}7 \times 10^3$ K. A temperatura ambiente (300 K) l'energia media è circa 0,04 eV, centinaia di volte meno dei più di 10 eV che servono per ionizzare gli atomi e le molecole dell'aria: gli urti termici non ionizzano l'aria (solo una frazione trascurabile di molecole ha energie molto superiori alla media).

28. Sulla superficie $E = k_0 Q/R^2 = V/R$, quindi $V_{max} = E_{max}R = 3{,}0 \times 10^6$ V/m × 0,15 m = $4{,}5 \times 10^5$ V; $Q_{max} = V_{max}R/k_0 = 4{,}5 \times 10^5 \times 0{,}15/8{,}99 \times 10^9$ C = $7{,}5 \times 10^{-6}$ C.

29. Energia potenziale iniziale: $U_0 = k_0 q^2/r = 8{,}99 \times 10^9 \times (5{,}0 \times 10^{-8})^2/0{,}020$ J = $1{,}1 \times 10^{-3}$ J. Sulle sfere non agiscono forze esterne orizzontali, quindi per la conservazione della quantità di moto (inizialmente nulla) le due sfere, di massa uguale, hanno velocità uguali e opposte. Per la conservazione dell'energia (non c'è attrito) quando sono lontane $U = 0$ e $2 \times \frac{1}{2}mv^2 = U_0$, cioè $v = \sqrt{(U_0/m)} = \sqrt{(1{,}12 \times 10^{-3}\text{ J}/2{,}0 \times 10^{-3}}$ kg) = 0,75 m/s ciascuna.

30. Traccia di risposta: se una linea di campo fosse chiusa, percorrendola nel verso del campo la componente tangenziale E_t sarebbe positiva in ogni tratto, e la circuitazione $\Sigma E_t \Delta l$ sarebbe positiva. Ma per il campo elettrostatico la circuitazione lungo ogni percorso chiuso è nulla (il lavoro su una carica che torna al punto di partenza è zero): quindi le linee non possono chiudersi, e devono partire da cariche positive e finire su cariche negative (o all'infinito).

31. Traccia di risposta: lungo il lato interno, di lunghezza l, percorso nel verso del campo, il contributo è $El > 0$; lungo il lato esterno il campo sarebbe nullo, e lungo i due lati che li collegano, paralleli alle lastre, il campo (perpendicolare alle lastre all'interno, nullo all'esterno) non avrebbe componenti lungo il percorso. La circuitazione sarebbe $El \neq 0$, contro la proprietà del campo elettrostatico. Quindi vicino ai bordi il campo non si annulla di colpo: le linee di campo si incurvano verso l'esterno e c'è un campo anche fuori dalle lastre (campo di bordo), che diminuisce gradualmente.

32. L'errore è confondere campo e potenziale. Il campo è nullo perché i due campi hanno moduli uguali e versi opposti; i potenziali invece si sommano come numeri con il loro segno, e con due cariche positive sono entrambi positivi: $V = 2k_0 q/(d/2) = 4k_0 q/d \neq 0$.

33. Traccia di risposta: il corpo umano è un conduttore in contatto con il suolo; in equilibrio è tutto allo stesso potenziale della Terra, quindi fra testa e piedi non c'è differenza di potenziale e nessuna carica lo attraversa. Il campo di bel tempo si deforma: le superfici equipotenziali, che lontano dalla persona sono piani orizzontali equidistanti (con 100 V/m, un piano ogni metro a passi di 100 V), si sollevano e

passano sopra la testa, addensandosi vicino a essa; le linee di campo, perpendicolari alle equipotenziali, terminano sulla superficie del corpo, dove si accumula una piccola carica indotta. Il campo è più intenso sopra la testa che nell'aria libera.