CAPITOLO

10

Il campo elettrico e il teorema di Gauss

Una carica non ha bisogno di toccarne un'altra per spingerla: le basta cambiare lo spazio che la circonda.

OBIETTIVI

1. Spiegare il passaggio dall'azione a distanza all'interazione mediata dal campo e definire il campo elettrico con una carica di prova.
2. Calcolare il campo di una o più cariche puntiformi con il principio di sovrapposizione, anche per componenti.
3. Disegnare e interpretare le linee di campo di una carica, di due cariche uguali, di un dipolo e di due lastre con cariche opposte.
4. Studiare il moto di una carica in un campo uniforme e il comportamento di un dipolo in un campo.
5. Calcolare il flusso del campo elettrico ed enunciare e giustificare il teorema di Gauss.
6. Applicare il teorema di Gauss alle distribuzioni con simmetria sferica, cilindrica e piana, e verificarlo in laboratorio con il pozzo di Faraday.

INDICE DEL CAPITOLO

10.1 Ripartiamo dal campo gravitazionale 2
10.2 Dall'azione a distanza al campo elettrico 2
10.3 Le linee del campo elettrico 7
10.4 Cariche e dipoli in un campo uniforme 10
10.5 Il flusso del campo elettrico e il teorema di Gauss 14
10.6 Le applicazioni del teorema di Gauss 17

Fisica 4 · Parte III · Il campo elettrico · versione 1.0
Capitolo 10: Il campo elettrico e il teorema di Gauss · pagine 289–318 del volume completo · estratto per lo studio

Strofina un palloncino sul maglione e avvicinalo ai capelli: si sollevano prima ancora che il palloncino li tocchi. Nel capitolo precedente hai imparato a calcolare questa forza con la legge di Coulomb. Ma la legge di Coulomb, come quella di Newton per la gravità, dice *quanto* vale la forza e non *come* il palloncino raggiunga i capelli attraverso l'aria. Che cosa c'è, nello spazio fra i due corpi, che trasmette la spinta?

La risposta della fisica moderna è il *campo*: la carica del palloncino modifica lo spazio intorno a sé, e ogni altra carica risente di questa modifica lì dove si trova. In questo capitolo costruirai il campo elettrico, imparerai a disegnarlo con le linee di campo, a prevedere il moto di una carica che lo attraversa e a misurarne il «flusso» attraverso una superficie. Arriverai così al teorema di Gauss, una legge che lega il campo alle cariche che lo producono e che, con l'aiuto della simmetria, permette di calcolare in poche righe campi che con la sola legge di Coulomb richiederebbero somme lunghissime.

10.1 Ripartiamo dal campo gravitazionale

Nel volume dello scorso anno (*Fisica 3*, capitolo 13) hai introdotto il campo gravitazionale per separare due cose che la forza di gravità mescola: la massa del corpo che la subisce e il punto in cui si trova. Il campo in un punto è la forza su una massa di prova divisa per la sua massa, $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}/m$, e si misura in N/kg. Intorno a un corpo sferico di massa M vale $g = GM/r^2$ ed è diretto verso il centro.

Lo hai rappresentato con le linee di campo, tangenti in ogni punto al vettore $\boldsymbol{g}$ e più fitte dove il campo è più intenso, e hai sommato i campi di più corpi come vettori. Infine hai incontrato il problema dell'azione a distanza: Newton stesso trovava assurdo che un corpo agisse su un altro attraverso il vuoto, senza nulla che trasmettesse l'azione. Quel capitolo si chiudeva con una promessa: con le cariche elettriche avresti scoperto che il campo è molto più di un artificio di calcolo. È il momento di mantenerla.

10.2 Dall'azione a distanza al campo elettrico

10.2.1 Il problema dell'interazione a distanza

La legge di Coulomb ha la stessa struttura della legge di gravitazione universale: una forza diretta lungo la congiungente, proporzionale al prodotto delle «sorgenti» (cariche invece di masse) e all'inverso del quadrato della distanza. E porta con sé lo stesso problema. Così come è scritta, la formula $F = k_0|q_1 q_2|/r^2$ contiene soltanto le posizioni delle cariche nello stesso istante: se sposti la carica q_1, la forza su q_2, magari a un chilometro di distanza, dovrebbe cambiare

nello stesso istante. Nessun segnale viaggia nello spazio fra le due cariche; semplicemente, la seconda «sa» dove si trova la prima.

Per le cariche ferme questa descrizione funziona benissimo, e la userai ancora. Ma un'azione che salta da un corpo all'altro senza attraversare lo spazio non spiega nulla, si limita a constatare. E nel quinto anno scoprirai che, quando una carica si muove, la notizia del suo spostamento raggiunge le altre cariche con un ritardo, viaggiando alla velocità della luce: nel frattempo deve esistere qualcosa che la trasporta, con la sua energia. Quel qualcosa è il campo.

Con il campo, l'interazione si racconta in due tempi: q_1 crea intorno a sé un campo, che esiste in ogni punto dello spazio anche se lì non c'è nulla; q_2 risente del campo che c'è nel punto in cui si trova. È un'interazione mediata dal campo, e del tutto locale. Il campo ha una realtà fisica propria: nel capitolo sui condensatori vedrai che contiene energia, e nel quinto anno che può viaggiare da solo nello spazio, sotto forma di luce.

APPROFONDIMENTO

Le linee di forza di Faraday

L'idea di campo nacque dall'intuizione di uno sperimentatore che conosceva poca matematica. Michael Faraday, figlio di un fabbro, lasciò presto la scuola e fece l'apprendista presso un rilegatore di libri a Londra; leggendo i volumi che rilegava si appassionò alla scienza, e riuscì a farsi assumere come assistente da Humphry Davy alla Royal Institution, dove divenne uno dei più grandi fisici sperimentali di tutti i tempi.

Spargendo limatura di ferro intorno a una calamita, Faraday vedeva i granelli disporsi lungo curve ordinate. Si convinse che quelle **linee di forza** fossero una struttura reale dello spazio, presente anche dove non c'è limatura: fili elastici che tendono ad accorciarsi, e così avvicinano due cariche opposte, e che si respingono lateralmente, e così allontanano due cariche uguali.

Fu James Clerk Maxwell, una generazione più tardi, a tradurre le linee di forza di Faraday nel linguaggio della matematica, arrivando alle equazioni che porteranno il suo nome e che studierai nel quinto anno.

10.2.2 Il vettore campo elettrico

Per esplorare il campo prodotto da una o più cariche, che chiameremo *cariche sorgenti*, si usa una **carica di prova**: una carica q positiva, così piccola da non spostare con la propria forza le cariche sorgenti e da non modificarne la distribuzione. Posta in un punto, la carica di prova subisce una forza $\boldsymbol{F}$. Si definisce **campo elettrico** in quel punto il vettore

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q}$$

cioè la forza per unità di carica. Il campo elettrico si misura in newton al coulomb (N/C). Il campo ha la direzione e il verso della forza che agirebbe su una carica *positiva*. Conoscendo il campo, la forza su una carica qualsiasi si ottiene in un colpo solo:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$$

Se q è positiva la forza ha il verso del campo, se è negativa ha verso opposto: un elettrone, per esempio, è spinto *contro* il campo. La definizione non dipende dal valore della carica di prova: raddoppiando q raddoppia la forza, e il rapporto resta lo stesso. Il campo è una proprietà del punto dello spazio e delle cariche sorgenti, non della carica che lo misura.

Il campo elettrico è un **campo vettoriale**: una grandezza che associa un vettore a ogni punto di una regione dello spazio. Rispetto al campo gravitazionale c'è una novità: le cariche hanno due segni, e i campi possono puntare verso le sorgenti o allontanarsene. Per descrivere un campo vettoriale userai due strumenti nuovi: il flusso, in questo capitolo, e la circuitazione, nel prossimo.

Attenzione: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/q$ è una *definizione operativa*, che dice come si misura il campo; il campo però c'è anche senza carica di prova. La carica di prova deve essere piccola perché, se fosse grande, attirerebbe o respingerebbe le cariche sorgenti, e il campo misurato non sarebbe più quello che c'era prima.

10.2.3 Il campo di una carica puntiforme

Una carica puntiforme Q esercita su una carica di prova q, a distanza r, una forza di modulo $k_0|Q|q/r^2$. Dividendo per q si ottiene il modulo del campo:

$$E = k_0 \frac{|Q|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|Q|}{r^2}$$

con $k_0 = 8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}$ e $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}$, come nel capitolo precedente. Il campo è *radiale*: punta in direzione opposta alla carica se Q è positiva, verso la carica se è negativa. Il suo modulo diminuisce con il quadrato della distanza: a distanza doppia è un quarto (Figura 10.1).

Per farti un'idea dei valori, una carica di 1,0 μC produce a 1,0 m un campo di $8{,}99 \times 10^9 \times 1{,}0 \times 10^{-6}/1{,}0^2 \approx 9{,}0 \times 10^3$ N/C. Dentro l'atomo di idrogeno, alla distanza tipica di $5{,}29 \times 10^{-11}$ m fra protone ed elettrone, il campo del protone vale $8{,}99 \times 10^9 \times 1{,}60 \times 10^{-19}/(5{,}29 \times 10^{-11})^2 \approx 5{,}1 \times 10^{11}$ N/C. La Tabella 10.1 raccoglie altri ordini di grandezza.

Tabella 10.1 Ordini di grandezza di alcuni campi elettrici. Il secondo e l'ultimo valore sono calcolati nel testo; quello della membrana è stimato dividendo la differenza di potenziale per lo spessore (capitolo 11); gli altri sono valori tipici.

Situazione	E (N/C)
vicino al suolo, con il bel tempo	circa 10^2
a 1 m da una carica di 1 μC	$9{,}0 \times 10^3$
al suolo, sotto una nube temporalesca	fino a circa 10^4
scarica nell'aria secca (rigidità dielettrica)	circa 3×10^6
nella membrana di una cellula nervosa (circa 70 mV su 7 nm)	circa 10^7
a $5{,}29 \times 10^{-11}$ m da un protone (atomo di idrogeno)	$5{,}1 \times 10^{11}$

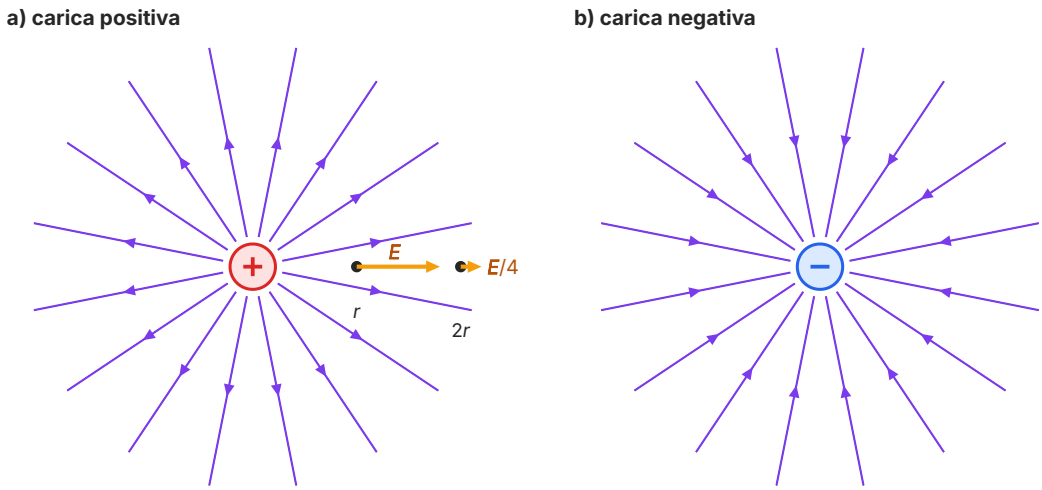

Figura 10.1 Il campo di una carica puntiforme è radiale. a) Le linee di campo di una carica positiva escono dalla carica e vanno all'infinito; i vettori in arancione mostrano che a distanza doppia il campo è quattro volte meno intenso. b) Le linee di una carica negativa arrivano dall'infinito e terminano sulla carica.

10.2.4 La sovrapposizione dei campi

Quando le cariche sorgenti sono più d'una, la forza su una carica di prova è la somma vettoriale delle forze dovute a ciascuna, come hai visto nel capitolo precedente. Dividendo per q, la stessa regola vale per i campi: il campo prodotto da più cariche è la somma vettoriale dei campi che ciascuna produrrebbe da sola,

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \ldots + \boldsymbol{E}_n$$

È il principio di sovrapposizione, che dopo le forze e le onde incontri ora nella forma che userai più spesso: i campi si sommano punto per punto, come vettori. Il metodo, in pratica, è sempre lo stesso: si calcola il modulo di ogni campo con la formula della carica puntiforme, se ne fissano direzione e verso con un disegno, si scompone ogni vettore lungo due assi e si sommano le componenti.

ESEMPIO SVOLTO

Il campo di due cariche, per componenti

Problema. Una carica $q_1 = +5{,}0$ nC si trova nel punto A, una carica $q_2 = -8{,}0$ nC nel punto B, 40 cm a destra di A. Il punto P si trova 30 cm sopra A (Figura 10.2). a) Calcola il campo elettrico in P. b) Quale forza subirebbe una goccia con carica $-2{,}0$ nC posta in P?

Soluzione. Fissiamo l'asse x verso destra e l'asse y verso l'alto, con l'origine in A. La distanza di P da B è $\sqrt{(0{,}30^2 + 0{,}40^2)}$ m $= 0{,}50$ m.

Il campo di q_1 ha modulo $E_1 = k_0 q_1 / r_1^{\,2} = 8{,}99 \times 10^9 \times 5{,}0 \times 10^{-9} / 0{,}30^2$ N/C $= 499$ N/C. Poiché q_1 è positiva, il campo si allontana da A: in P punta verso l'alto, quindi $E_{1x} = 0$ e $E_{1y} = +499$ N/C.

Il campo di q_2 ha modulo $E_2 = 8{,}99 \times 10^9 \times 8{,}0 \times 10^{-9} / 0{,}50^2$ N/C $= 288$ N/C. Poiché q_2 è negativa, il campo punta da P verso B. Il versore da P a B ha componenti $(0{,}40/0{,}50;\ -0{,}30/0{,}50) = (0{,}80;\ -0{,}60)$, quindi $E_{2x} = 0{,}80 \times 288$ N/C $= 230$ N/C e $E_{2y} = -0{,}60 \times 288$ N/C $= -173$ N/C.

a) Sommando le componenti: $E_x = 230$ N/C, $E_y = 499$ N/C $- 173$ N/C $= 327$ N/C. Il modulo è $E = \sqrt{(230^2 + 327^2)}$ N/C $= 4{,}0 \times 10^2$ N/C, e il campo forma con l'asse x un angolo di $\arctan(327/230) = 54{,}8°$ verso l'alto.

b) La forza su una carica negativa è opposta al campo: $F = |q|E = 2{,}0 \times 10^{-9}$ C $\times\ 4{,}0 \times 10^2$ N/C $= 8{,}0 \times 10^{-7}$ N, diretta verso il basso a sinistra, a $54{,}8°$ sotto il semiasse negativo delle x.

Commento. Il campo totale non dipende dalla goccia: una volta calcolato, serve per qualunque carica posta in P. Nel disegno in scala la somma è la diagonale del parallelogramma costruito sui due vettori.

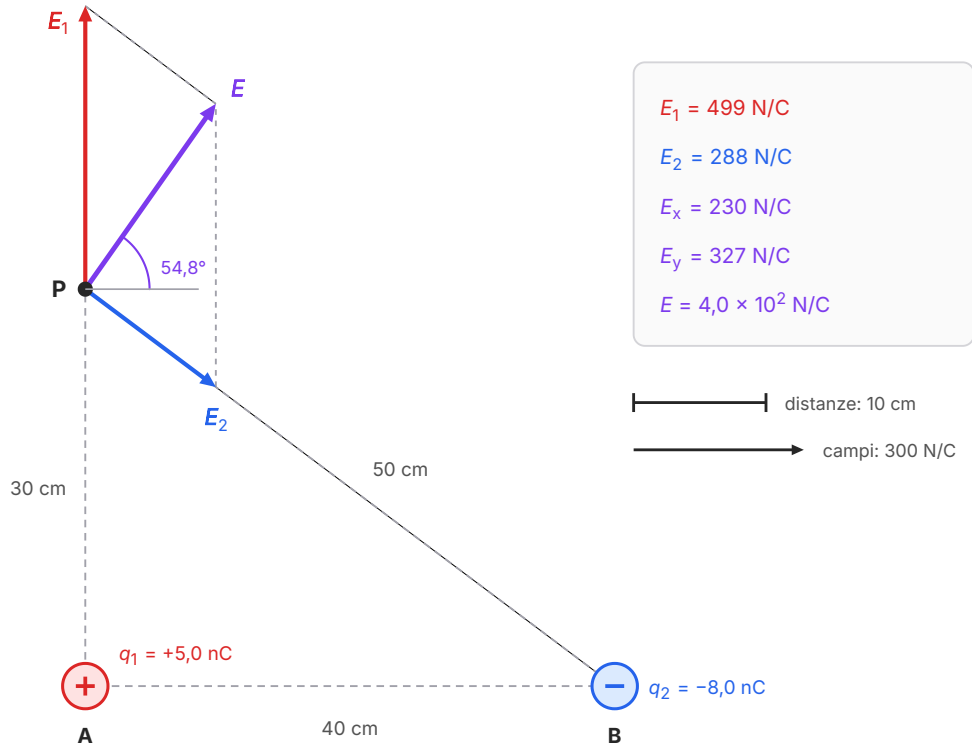

Figura 10.2 Il campo in P è la somma vettoriale dei campi delle due cariche, disegnati in scala: $\boldsymbol{E}_1$ si allontana dalla carica positiva in A, $\boldsymbol{E}_2$ punta verso la carica negativa in B. Il campo risultante $\boldsymbol{E}$ è la diagonale del parallelogramma.

10.3 Le linee del campo elettrico

10.3.1 Le regole del disegno

Per vedere un campo tutto insieme, invece che punto per punto, si usano le linee di campo, come per la gravità. Con le cariche elettriche, che hanno due segni, le regole diventano più ricche. Le linee del campo elettrico si tracciano così:

- in ogni punto la linea è tangente al vettore $\boldsymbol{E}$, e la freccia ne indica il verso;
- le linee sono più fitte dove il campo è più intenso: il numero di linee che attraversano una piccola superficie perpendicolare alle linee stesse è proporzionale all'intensità del campo;
- le linee escono dalle cariche positive ed entrano nelle cariche negative (oppure vanno all'infinito o ne arrivano), e il numero di linee che escono da una carica o vi entrano è proporzionale al valore della carica;

- due linee non si incrociano mai, perché in ogni punto il campo ha una sola direzione;
- nei punti in cui il campo è nullo non passa nessuna linea.

La seconda e la terza regola sono legate fra loro, e la loro coerenza non è scontata. Intorno a una carica puntiforme le linee sono semirette che escono in tutte le direzioni. Su una sfera di raggio r centrata nella carica, le stesse N linee si distribuiscono su un'area $4\pi r^2$: la loro densità è proporzionale a $1/r^2$, esattamente come il campo. Le linee che partono da una carica arrivano tutte a grande distanza senza perdersi per strada, e il disegno funziona proprio perché il campo decresce come l'inverso del quadrato della distanza. Questa osservazione, che sembra un dettaglio grafico, è il cuore del teorema di Gauss, a cui arriveremo fra poco.

10.3.2 Due cariche uguali e il dipolo

Le linee di campo di più cariche si ottengono dal principio di sovrapposizione, calcolando il campo totale punto per punto e seguendone la direzione. Quelle della Figura 10.3 sono state tracciate proprio così, con un calcolatore che avanza a piccoli passi lungo il campo. Per due cariche positive uguali (figura a) le linee si respingono, e nessuna va da una carica all'altra. A metà strada, nel punto O, i due campi hanno lo stesso modulo e versi opposti: il campo è nullo. Un **punto di campo nullo** come O è un punto in cui una carica di prova resterebbe in equilibrio; nessuna linea vi passa, e le linee vicine vi si avvicinano e poi deviano.

Due cariche di uguale valore e segno opposto, $+q$ e $-q$, poste a una distanza d fissa, formano un **dipolo elettrico** (figura b). Tutte le linee che escono dalla carica positiva terminano sulla carica negativa, alcune dopo un ampio giro. Nel punto medio i due campi hanno lo stesso verso, dalla carica positiva verso quella negativa, e si sommano: ciascuno vale $k_0 q/(d/2)^2$, e il campo totale è

$$E_{\text{medio}} = 2 \cdot k_0 \frac{q}{(d/2)^2} = \frac{8 k_0 q}{d^2}$$

Per due cariche di 1,0 nC a 2,0 cm di distanza, $E_{\text{medio}} = 8 \times 8{,}99 \times 10^9 \times 1{,}0 \times 10^{-9}/(0{,}020)^2$ N/C $= 1{,}8 \times 10^5$ N/C. I dipoli sono ovunque in natura: molte molecole, come quella dell'acqua, hanno il baricentro delle cariche positive separato da quello delle cariche negative e si comportano come piccoli dipoli. Si chiamano molecole polari, e le ritroverai fra poco.

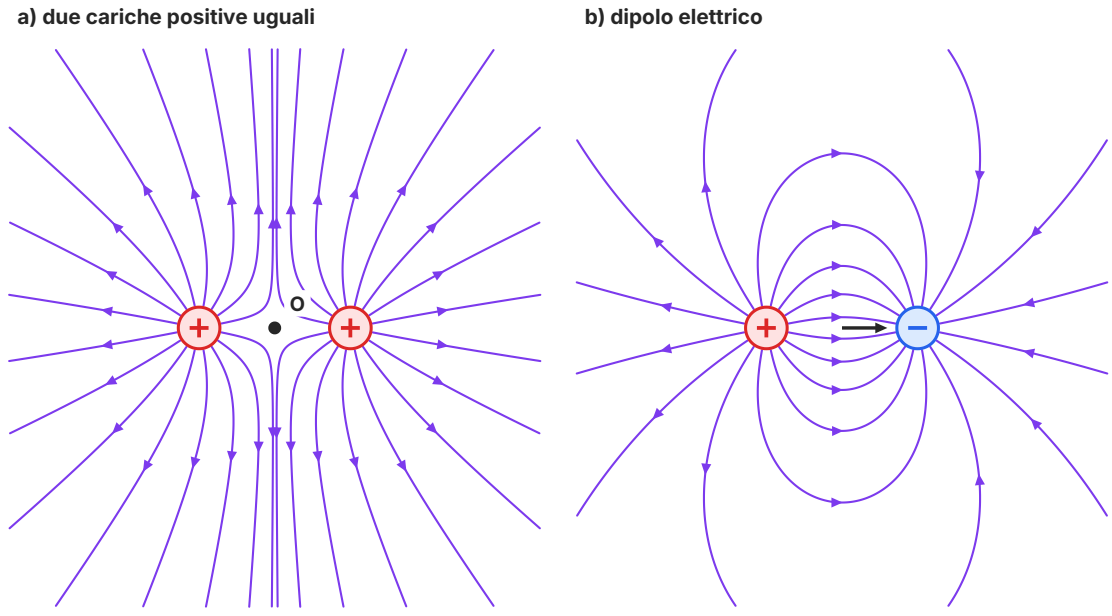

Figura 10.3 Linee di campo calcolate numericamente. a) Due cariche positive uguali: le linee si respingono e nel punto medio O il campo è nullo. b) Un dipolo elettrico: tutte le linee uscenti dalla carica positiva entrano nella carica negativa; nel punto medio il campo (freccia nera) è diretto dalla carica positiva verso quella negativa.

ERRORE FREQUENTE

Le linee di campo non sono traiettorie

È naturale pensare che una carica lasciata libera si muova lungo una linea di campo. In generale **non è vero**. La linea dà la direzione della *forza*, quindi dell'*accelerazione*, non della velocità: appena la carica si muove lungo una linea curva, l'inerzia la porta verso l'esterno della curva, come un satellite che non cade lungo le linee del campo gravitazionale.

Una carica che parte da ferma segue la linea di campo soltanto se la linea è una retta, come lungo l'asse di una carica puntiforme o in un campo uniforme.

10.3.3 Il campo uniforme

Due lastre metalliche piane e parallele, con cariche uguali e opposte distribuite in modo uniforme, producono fra di loro un campo con una proprietà speciale (Figura 10.4a): lontano dai bordi le linee sono rette parallele, equidistanti, dirette dalla lastra positiva a quella negativa. Il campo ha lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso in tutti i punti: è un **campo uniforme**. Vicino ai bordi le linee si incurvano verso l'esterno, e il campo non è più uniforme: sono gli **effetti di bordo**, tanto meno importanti quanto più le lastre sono vicine rispetto alla loro larghezza. Fuori dalle lastre il campo è quasi nullo.

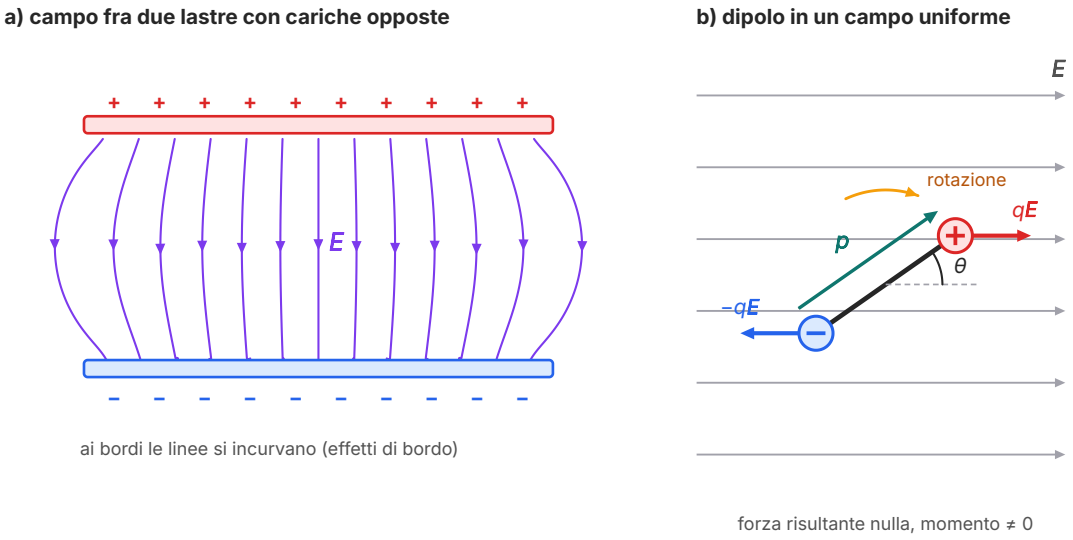

Figura 10.4 a) Linee di campo calcolate per due lastre con cariche opposte: fra le lastre il campo è uniforme, ai bordi le linee si incurvano. b) Un dipolo in un campo uniforme: le forze sulle due cariche hanno somma nulla ma formano una coppia, che fa ruotare il momento di dipolo $\boldsymbol{p}$ verso la direzione del campo.

Il campo uniforme è per l'elettricità quello che il campo gravitazionale vicino al suolo è per la meccanica: un modello semplice, in cui la forza su una carica è la stessa ovunque.

10.4 Cariche e dipoli in un campo uniforme

10.4.1 Una carica come un proiettile

Una particella di carica q e massa m in un campo uniforme subisce una forza costante $q\boldsymbol{E}$. Per il secondo principio della dinamica la sua accelerazione è

$$\boldsymbol{a} = \frac{q\boldsymbol{E}}{m}$$

costante in modulo, direzione e verso: è la stessa situazione di un sasso lanciato vicino al suolo, dove l'accelerazione costante è $\boldsymbol{g}$. Tutto ciò che hai imparato sul moto dei proiettili (*Fisica 2*, capitolo 2) vale ancora, con $q\boldsymbol{E}/m$ al posto di $\boldsymbol{g}$: una carica che parte da ferma accelera lungo la linea di campo con moto uniformemente accelerato; una carica che entra con velocità perpendicolare al campo descrive un arco di parabola.

Per le particelle cariche, il peso è di solito del tutto trascurabile. Il rapporto fra carica e massa dell'elettrone è $e/m_e = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C}/(9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg}) = 1{,}76 \times 10^{11}\ \text{C/kg}$: in un campo modesto di $1{,}0 \times 10^{4}\ \text{N/C}$ un elettrone accelera a $1{,}8 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2$, circa 10^{14} volte g. Per questo, nei pro-

blemi con elettroni e protoni, la gravità si ignora, mentre per una goccia d'olio carica (come quelle di Millikan, nel capitolo precedente) peso e forza elettrica sono confrontabili.

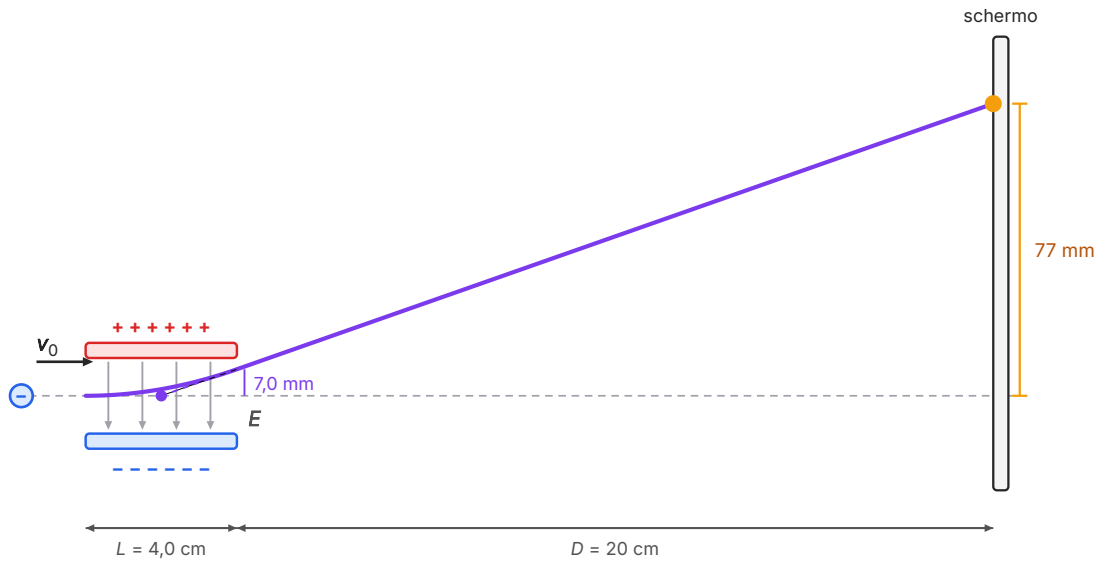

Figura 10.5 Il moto di un elettrone fra due lastre con cariche opposte, in scala. Fra le lastre la forza è costante e diretta verso la lastra positiva, e la traiettoria è un arco di parabola (spostamento di 7,0 mm); dopo le lastre l'elettrone prosegue in linea retta fino allo schermo (spostamento totale 77 mm). Il prolungamento della retta, tratteggiato, passa per il centro delle lastre.

ESEMPIO SVOLTO

La deflessione di un fascio di elettroni

Problema. Un elettrone entra con velocità orizzontale $v_0 = 2{,}0 \times 10^7$ m/s, a metà altezza, fra due lastre orizzontali lunghe $L = 4{,}0$ cm e distanti 2,0 cm, fra le quali c'è un campo uniforme di $2{,}0 \times 10^4$ N/C diretto verso il basso (Figura 10.5). a) Quanto tempo resta fra le lastre? b) Di quanto si sposta in verticale prima di uscire? Tocca una lastra? c) Con quale angolo esce? d) Di quanto è spostato il punto d'arrivo su uno schermo posto $D = 20$ cm dopo le lastre?

Soluzione. a) In orizzontale non agiscono forze, quindi il moto è uniforme: $t = L/v_0 = 0{,}040\ \text{m}/(2{,}0 \times 10^7\ \text{m/s}) = 2{,}0 \times 10^{-9}$ s.

b) Il campo punta verso il basso e la carica dell'elettrone è negativa, quindi la forza punta verso l'alto, verso la lastra positiva. L'accelerazione vale $a = eE/m_e = 1{,}60 \times 10^{-19} \times 2{,}0 \times 10^4/(9{,}11 \times 10^{-31})\ \text{m/s}^2 = 3{,}5 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2$. Lo spostamento verticale è $y = \tfrac{1}{2}at^2 = \tfrac{1}{2} \times 3{,}51 \times 10^{15} \times (2{,}0 \times 10^{-9})^2\ \text{m} = 7{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m} = 7{,}0$ mm. La lastra superiore dista 10 mm dall'asse: l'elettrone esce senza toccarla.

c) All'uscita la componente verticale della velocità è $v_y = at = 3{,}51 \times 10^{15} \times 2{,}0 \times 10^{-9}\ \text{m/s} = 7{,}0 \times 10^6$ m/s; l'angolo con l'orizzontale è $\arctan(v_y/v_0) = \arctan 0{,}351 = 19°$.

d) Dopo le lastre il campo è nullo e l'elettrone prosegue in linea retta. In un tempo D/v_0 sale ancora di $D \cdot v_y/v_0 = 0{,}20\ \text{m} \times 0{,}351 = 70$ mm. Lo spostamento totale sullo schermo è 7,0 mm + 70 mm = 77 mm.

Commento. Il peso dell'elettrone, circa 9×10^{-30} N, è del tutto trascurabile rispetto alla forza elettrica, $3{,}2 \times 10^{-15}$ N. Lo spostamento sullo schermo è proporzionale al campo, quindi alla tensione applicata alle lastre: è il principio dell'oscilloscopio a tubo a raggi catodici.

COLLEGAMENTI

La stampante a getto d'inchiostro continuo

Sulle confezioni di latte, uova e bibite la data di scadenza è spesso stampata «al volo», mentre i prodotti scorrono sul nastro, da una stampante a getto d'inchiostro continuo. Un ugello emette un getto che si spezza in un treno regolare di goccioline microscopiche. Ciascuna, mentre si stacca, attraversa un elettrodo che le dà una carica elettrica, diversa da goccia a goccia secondo il segno da stampare.

Le gocce passano poi fra due piastre con cariche opposte, dove un campo uniforme le devia come l'elettrone della Figura 10.5: la deviazione è proporzionale alla carica, e ogni goccia atterra all'altezza voluta. Le gocce neutre non vengono deviate e tornano nel serbatoio. Il campo fa da pennino invisibile, decine di migliaia di volte al secondo.

10.4.2 Il dipolo in un campo uniforme

Un dipolo è caratterizzato, oltre che dalla carica q e dalla distanza d, da un orientamento. Per descriverlo si usa il **momento di dipolo elettrico**, il vettore $\boldsymbol{p}$ di modulo

$$p = qd$$

diretto lungo la congiungente delle due cariche, *dalla carica negativa a quella positiva*. Si misura in C·m. Una molecola d'acqua, per esempio, ha un momento di dipolo di circa $6{,}2 \times 10^{-30}$ C·m.

Mettiamo il dipolo in un campo uniforme, con $\boldsymbol{p}$ che forma un angolo θ con $\boldsymbol{E}$ (Figura 10.4b). Sulla carica positiva agisce la forza $q\boldsymbol{E}$, sulla carica negativa la forza $-q\boldsymbol{E}$: le due forze hanno lo stesso modulo e versi opposti, e la loro somma è nulla. Il centro di massa del dipolo non accelera. Ma le due forze non agiscono sulla stessa retta: formano una coppia, che fa ruotare il dipolo. Il momento della coppia rispetto al centro (*Fisica 3*, capitolo 9) ha modulo

$$M = qE \cdot d \operatorname{sen} \theta = pE \operatorname{sen} \theta$$

e in forma vettoriale $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$. Il momento è massimo quando il dipolo è perpendicolare al campo e si annulla quando è parallelo ($\theta = 0$) o antiparallelo ($\theta = 180°$). La posizione con $\boldsymbol{p}$ concorde a $\boldsymbol{E}$ è di equilibrio stabile: se il dipolo se ne allontana un poco, il momento lo riporta indietro, come il peso fa con un pendolo. La posizione antiparallela è di equilibrio instabile. Un dipolo libero di ruotare, quindi, tende ad allinearsi al campo, come l'ago di una bussola nel campo magnetico terrestre.

In un campo *non* uniforme le due forze non hanno più lo stesso modulo. Un dipolo allineato al campo ha una delle due cariche più vicina alla zona in cui il campo è più intenso; la forza su quella carica prevale, e la forza risultante tira il dipolo verso quella zona. È la spiegazione completa del pettine elettrizzato che attira i pezzetti di carta, che hai incontrato nel capitolo precedente: le molecole della carta si polarizzano, diventano piccoli dipoli orientati lungo il campo del pettine e sono attirate verso il pettine, dove il campo è più intenso, qualunque sia il segno della carica del pettine.

COLLEGAMENTI

Il forno a microonde

Dentro un forno a microonde c'è un campo elettrico che cambia verso miliardi di volte al secondo: la frequenza dei forni domestici è di 2,45 GHz. Le molecole d'acqua del cibo sono dipoli, e il campo tende a farle ruotare per allinearle a sé. Poiché il verso del campo si inverte di continuo, le molecole sono costrette a ruotare avanti e indietro; ma sono immerse fra le altre molecole, e urtandole cedono loro l'energia ricevuta dal campo. L'energia del campo diventa così energia interna, e il cibo si scalda.

Il ghiaccio, nel quale le molecole d'acqua sono bloccate nel reticolo cristallino, assorbe le microonde molto meno dell'acqua liquida: per questo scongelare richiede un programma apposito, con brevi riscaldamenti alternati a pause.

10.5 Il flusso del campo elettrico e il teorema di Gauss

10.5.1 Il flusso, come una portata

Nel volume dello scorso anno (*Fisica 3*, capitolo 11) hai definito la portata di un fluido: il volume che attraversa una sezione in un secondo. Per un fluido che scorre con velocità uniforme v attraverso un'apertura piana di area S, la portata è massima, vS, se l'apertura è perpendicolare alla corrente, nulla se le è parallela, e in generale vale $vS\cos\theta$, dove θ è l'angolo fra la velocità e la perpendicolare all'apertura.

Il campo elettrico non è un fluido, e nulla scorre lungo le sue linee. Ma la stessa costruzione matematica misura «quanto campo» attraversa una superficie. Per una superficie piana di area S si definisce il **vettore superficie** $\boldsymbol{S}$: un vettore perpendicolare alla superficie, di modulo uguale alla sua area. I versi perpendicolari sono due, e bisogna sceglierne uno: la scelta si chiama orientazione della superficie. Se il campo è uniforme su tutta la superficie, il **flusso del campo elettrico** attraverso di essa è il prodotto scalare

$$\Phi(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{S} = ES\cos\theta$$

dove θ è l'angolo fra $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{S}$. Il flusso è una grandezza scalare e si misura in $\mathrm{N\cdot m^2/C}$. Come la portata, è massimo quando la superficie è perpendicolare al campo ($\theta = 0$), si dimezza per $\theta = 60°$ e si annulla quando il campo è parallelo alla superficie ($\theta = 90°$), come mostra la Figura 10.6. Il prodotto $S\cos\theta$ è l'area della proiezione della superficie su un piano perpendicolare al campo: il flusso conta le linee di campo che attraversano la superficie, e una superficie inclinata ne intercetta tante quante la sua proiezione.

Il segno del flusso dipende dall'orientazione scelta: è positivo se il campo attraversa la superficie nel verso di $\boldsymbol{S}$ ($\theta < 90°$), negativo nel verso opposto. Per esempio, in un campo uniforme di 500 N/C un rettangolo di 20 cm × 30 cm con la normale inclinata di 60° rispetto al campo è attra-

versato dal flusso 500 N/C × 0,060 m^2 × cos 60° = 15 $N \cdot m^2/C$. Se la superficie non è piana, o il campo non è uniforme, la si divide in pezzetti abbastanza piccoli da essere quasi piani, con il campo quasi uniforme su ciascuno, e si sommano i flussi dei pezzetti. In questo volume useremo soltanto superfici fatte di pezzi su cui il campo è uniforme, e il calcolo resterà una somma di pochi termini.

10.5.2 Il flusso attraverso una superficie chiusa

Una **superficie chiusa** è una superficie che racchiude completamente una regione di spazio, come la buccia di un'arancia o le sei facce di una scatola. Per una superficie chiusa l'orientazione non si sceglie: per convenzione il vettore superficie di ogni pezzetto punta *verso l'esterno*. Così il flusso è positivo dove le linee di campo escono e negativo dove entrano, e il flusso totale è un bilancio fra le linee uscenti e quelle entranti.

Prendiamo un cubo di spigolo a in un campo uniforme $\boldsymbol{E}$ parallelo a quattro facce. Sulla faccia da cui il campo entra, il vettore superficie esterno è opposto al campo e il flusso vale $-Ea^2$; sulla faccia opposta, da cui il campo esce, vale $+Ea^2$; sulle altre quattro facce il campo è parallelo alla superficie e il flusso è nullo. Il flusso totale è zero: tutte le linee che entrano nel cubo ne escono. Dentro il cubo non ci sono cariche, e non c'è nulla che possa far nascere o morire una linea.

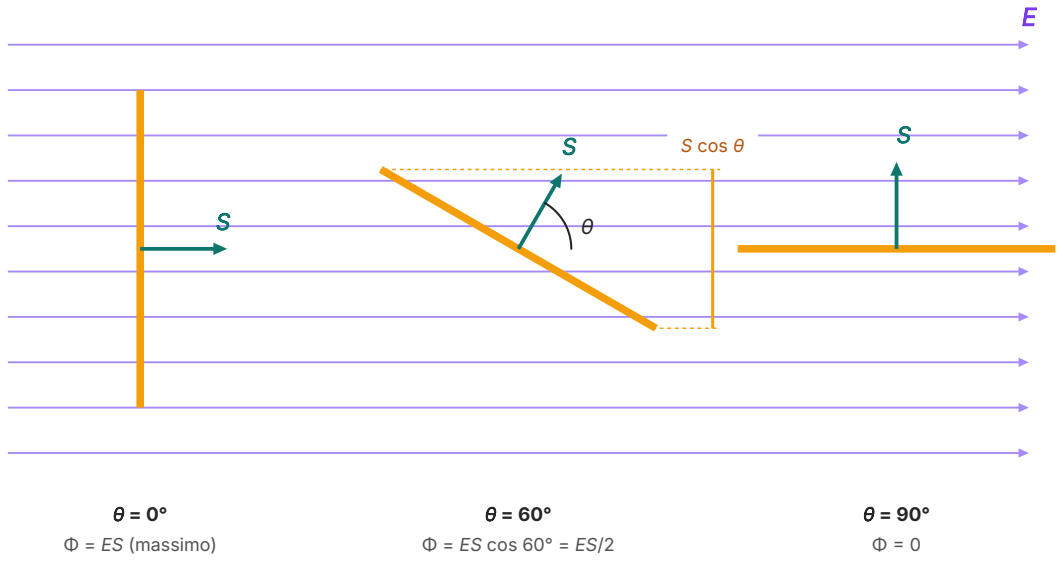

Figura 10.6 Il flusso di un campo uniforme attraverso una superficie piana di area S, vista di taglio, con il vettore superficie $\boldsymbol{S}$ perpendicolare a essa. Il flusso dipende dall'angolo θ fra $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{S}$: la superficie inclinata di 60° è attraversata dalle stesse linee della sua proiezione S cos θ, cioè dalla metà di quelle che attraversano la superficie perpendicolare; la superficie parallela al campo non ne intercetta nessuna.

10.5.3 Il teorema di Gauss

Che cosa succede se dentro la superficie chiusa c'è una carica? Partiamo dal caso più semplice: una carica puntiforme positiva q al centro di una sfera di raggio r. In ogni punto della sfera il campo è radiale, quindi perpendicolare alla superficie e parallelo al vettore superficie esterno, e ha lo stesso modulo $k_0 q/r^2$. Dividendo la sfera in tanti pezzetti, il flusso attraverso ciascuno è E per la sua area, e sommando si ottiene E per l'area della sfera:

$$\Phi(\boldsymbol{E}) = k_0 \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k_0 q = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

perché $k_0 = 1/(4\pi\varepsilon_0)$. Il raggio si è semplificato: il flusso è lo stesso per una sfera piccola e per una grande, ed è proprio quello che dicono le linee di campo, perché tutte le linee che escono dalla carica attraversano qualunque sfera la circondi. Per una carica di 1,0 μC il flusso vale $1{,}0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}/(8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}) = 1{,}1 \times 10^{5}\ \mathrm{N\cdot m^2/C}$.

Ora deformiamo la sfera in una superficie chiusa qualsiasi, con la carica sempre dentro. Le linee che attraversano la nuova superficie sono le stesse: escono dalla carica e devono attraversarla per andare all'infinito. Se la superficie ha delle pieghe, una linea può uscire, rientrare e uscire di nuovo, ma il bilancio resta di un'uscita netta. Il flusso, che conta proprio questo bilancio, non cambia. Se invece la carica è *fuori* dalla superficie, ogni linea che entra da una parte esce dall'altra, e il flusso totale è zero, come per il cubo nel campo uniforme. Infine, per il principio di sovrapposizione, se le cariche sono molte i flussi si sommano: ogni carica interna contribuisce con q/ε_0, ogni carica esterna con zero.

Si arriva così al **teorema di Gauss** per il campo elettrico: *il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa qualsiasi è uguale alla carica totale contenuta al suo interno divisa per* ε_0:

$$\Phi(\boldsymbol{E}) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La carica Q_{int} è la somma algebrica delle cariche interne, ciascuna con il suo segno: se è negativa, entrano più linee di quante ne escano e il flusso è negativo. La superficie chiusa a cui si applica il teorema si chiama **superficie gaussiana**: non è un oggetto materiale, ma una superficie immaginaria scelta da chi fa il calcolo. L'argomento delle linee di campo che abbiamo usato funziona perché il campo di una carica puntiforme decresce esattamente come $1/r^2$: il teorema di Gauss e la legge di Coulomb sono, per le cariche ferme, due modi equivalenti di dire la stessa cosa. La dimostrazione completa, per superfici di forma qualsiasi, richiede gli strumenti dell'analisi matematica.

ERRORE FREQUENTE

Flusso nullo non vuol dire campo nullo

Se una superficie chiusa non contiene cariche, il teorema di Gauss dice che il flusso *totale* è zero, non che il campo è nullo sulla superficie. Il cubo in un campo uniforme ne è l'esempio: il campo vale E su tutte le facce, ma il flusso entrante e quello uscente si compensano. Allo stesso modo, una carica esterna dà flusso nullo ma produce un campo, eccome, in ogni punto della superficie.

Il campo che compare nel flusso è quello *totale*, prodotto da tutte le cariche; la carica a destra è soltanto quella interna.

Una conseguenza notevole: la carica contenuta in una regione si può misurare *dall'esterno*, senza sapere come è distribuita, ed è ciò che farai nell'attività di laboratorio alla fine del capitolo.

10.6 Le applicazioni del teorema di Gauss

Il teorema di Gauss vale sempre, ma diventa uno strumento di calcolo quando la carica è distribuita con una simmetria. La strategia è sempre la stessa. Primo: dalla simmetria si deduce la direzione del campo e su quali superfici il suo modulo è costante. Secondo: si sceglie una superficie gaussiana fatta di pezzi su cui il campo è perpendicolare e di modulo costante, oppure parallelo alla superficie (flusso nullo). Terzo: si calcola il flusso, che diventa E per un'area, e lo si uguaglia a $Q_{\text{int}}/\varepsilon_0$. La Figura 10.7 mostra le tre superfici gaussiane che useremo.

Per descrivere come è distribuita la carica servono due grandezze nuove. Su un filo si usa la **densità lineare di carica** $\lambda = Q/\ell$, la carica per unità di lunghezza, che si misura in C/m; su una superficie si usa la **densità superficiale di carica** $\sigma = Q/S$, la carica per unità di area, in C/m^2. Una distribuzione è uniforme se queste densità sono le stesse in ogni punto. In questa parte del libro λ indica sempre una densità di carica, mai una lunghezza d'onda.

10.6.1 Il guscio sferico carico

Un guscio sferico sottile di raggio R porta una carica Q distribuita uniformemente. Per la simmetria sferica, il campo in ogni punto è radiale e ha lo stesso modulo in tutti i punti alla stessa distanza r dal centro: se puntasse da un'altra parte, ruotando il guscio, che resta identico, cambierebbe anche il campo, il che è assurdo. Scegliamo come superficie gaussiana una sfera di raggio r concentrica al guscio (Figura 10.7a): il flusso è $E \cdot 4\pi r^2$.

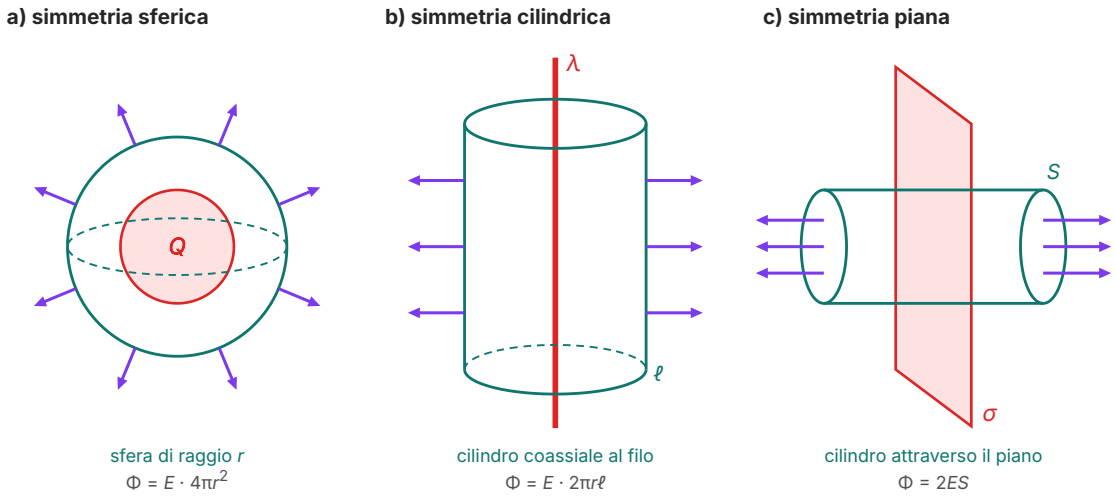

Figura 10.7 Le superfici gaussiane adatte alle tre simmetrie (in verde), con il campo (in viola) perpendicolare alle parti che contano. a) Una sfera concentrica alla distribuzione sferica. b) Un cilindro coassiale al filo: il flusso attraversa soltanto la superficie laterale. c) Un cilindro che attraversa il piano: il flusso attraversa soltanto le due basi.

- **Fuori dal guscio** ($r > R$) la carica interna è Q: $E \cdot 4\pi r^2 = Q/\varepsilon_0$, cioè $E = k_0 Q/r^2$. All'esterno il guscio produce lo stesso campo di una carica puntiforme posta nel centro.
- **Dentro il guscio** ($r < R$) la sfera gaussiana non contiene cariche: $E \cdot 4\pi r^2 = 0$, quindi $E = 0$. Le cariche del guscio producono campi che, all'interno, si cancellano esattamente in ogni punto.

Il secondo risultato non è evidente: un punto vicino al guscio è più vicino a una parte delle cariche che all'altra. Ma le cariche lontane sono più numerose, e i due effetti si compensano esattamente proprio perché il campo decresce come $1/r^2$.

10.6.2 La sfera carica in tutto il volume

Una sfera isolante di raggio R porta una carica Q distribuita uniformemente in tutto il suo volume. All'esterno il ragionamento è identico a quello per il guscio: $E = k_0 Q/r^2$. All'interno, una sfera gaussiana di raggio $r < R$ racchiude soltanto la carica contenuta nel suo volume. Poiché la carica è distribuita uniformemente, è proporzionale al volume:

$$Q_{\text{int}} = Q\,\frac{r^3}{R^3}$$

Dal teorema di Gauss, $E \cdot 4\pi r^2 = Qr^3/(\varepsilon_0 R^3)$, e quindi

$$E = k_0 \frac{Q}{R^3} r \ (r \le R)$$

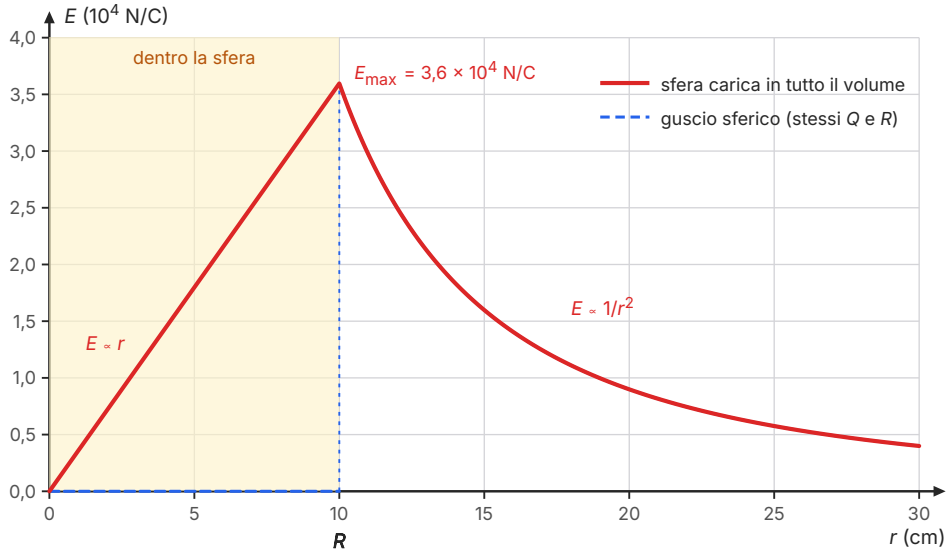

Figura 10.8 Il modulo del campo in funzione della distanza dal centro per una sfera di raggio R = 10 cm con carica Q = 40 nC distribuita uniformemente in tutto il volume (linea continua) e per un guscio sferico con gli stessi R e Q (tratteggio). All'esterno i due campi coincidono con quello di una carica puntiforme nel centro.

Dentro la sfera il campo cresce linearmente con la distanza dal centro, dove è nullo; raggiunge il valore massimo $k_0 Q/R^2$ sulla superficie e da lì decresce come $1/r^2$. Il grafico della Figura 10.8 confronta la sfera con un guscio di uguali raggio e carica: fuori sono indistinguibili, dentro sono diversissimi.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere il grafico del campo di una sfera

Problema. Il grafico della Figura 10.8 (linea continua) riporta il campo di una sfera carica uniformemente in tutto il volume. Ricava dal grafico il raggio della sfera e la sua carica; verifica poi due valori del campo, uno dentro e uno fuori.

Lettura. Il campo cresce in modo lineare fino a $r = 10$ cm e poi decresce: il raggio è $R = 10$ cm = 0,10 m. Il valore massimo, sulla superficie, è $E_{max} = 3{,}6 \times 10^4$ N/C. Il campo è diretto verso l'esterno (lo dice il segno della carica, che il grafico del modulo non mostra: supponiamola positiva).

La carica. Sulla superficie $E_{max} = k_0 Q/R^2$, quindi $Q = E_{max}R^2/k_0 = 3{,}6 \times 10^4 \times 0{,}10^2/(8{,}99 \times 10^9)$ C = $4{,}0 \times 10^{-8}$ C = 40 nC.

Verifica dentro. A $r = 5{,}0$ cm = $R/2$ il campo deve essere metà del massimo, perché all'interno è proporzionale a r: $1{,}8 \times 10^4$ N/C, come si legge sul grafico. Infatti la sfera gaussiana di raggio $R/2$ contiene un ottavo della carica, $(1/2)^3$, e ha un quarto dell'area: 1/8 diviso 1/4 dà 1/2.

Verifica fuori. A $r = 20$ cm = $2R$ il campo deve essere un quarto del massimo, perché fuori decresce come $1/r^2$: $9{,}0 \times 10^3$ N/C, cioè $0{,}90 \times 10^4$ N/C sulla scala del grafico. Concorda.

APPROFONDIMENTO

Il teorema di Gauss per la gravità

Il ragionamento delle linee di campo non usa nulla di specificamente elettrico: richiede soltanto un campo che decresce come $1/r^2$ e si somma per sovrapposizione. Il campo gravitazionale ha le stesse proprietà, con due differenze: al posto di k_0 c'è G, e il campo punta *verso* le masse, che sono sempre positive. Il teorema di Gauss per la gravità si scrive $\Phi(\boldsymbol{g}) = -4\pi G M_{int}$: il flusso attraverso una superficie chiusa è sempre negativo o nullo, perché le linee del campo gravitazionale entrano nelle masse e non ne escono mai.

Ripetendo i calcoli di questa sezione con la sfera gaussiana si ritrova il teorema del guscio sferico di *Fisica 3* (capitolo 13), che Newton aveva dimostrato con una lunga costruzione geometrica: un guscio omogeneo attrae i corpi esterni come se la sua massa fosse concentrata nel centro e non esercita alcuna forza sui corpi all'interno. E per una Terra ideale di densità uniforme, dentro il pianeta il campo gravitazionale cresce linearmente con la distanza dal centro, come il campo elettrico della sfera della Figura 10.8: a metà strada fra il centro e la superficie varrebbe 4,9 m/s^2.

10.6.3 Il filo carico infinito

Un filo rettilineo molto lungo porta una carica distribuita con densità lineare uniforme λ. Lontano dalle estremità, possiamo trattarlo come infinito. Per simmetria il campo è radiale rispetto al filo, cioè perpendicolare al filo e diretto lungo la retta che lo congiunge al punto, e ha lo stes-

so modulo in tutti i punti alla stessa distanza r. Scegliamo come superficie gaussiana un cilindro di raggio r e lunghezza ℓ, coassiale al filo (Figura 10.7b). Sulle due basi il campo è parallelo alla superficie e il flusso è nullo; sulla superficie laterale il campo è perpendicolare e costante, e il flusso è $E \cdot 2\pi r\ell$. La carica interna è quella del tratto di filo lungo ℓ, cioè $\lambda\ell$. Dal teorema di Gauss:

$$E \cdot 2\pi r\ell = \frac{\lambda\ell}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2k_0\lambda}{r}$$

Il campo di un filo decresce come $1/r$, più lentamente di quello di una carica puntiforme. Per un filo con $\lambda = 5{,}0$ nC/m, a 10 cm di distanza, $E = 2 \times 8{,}99 \times 10^9 \times 5{,}0 \times 10^{-9}/0{,}10$ N/C $= 9{,}0 \times 10^2$ N/C. La lunghezza ℓ del cilindro si è semplificata: era una scelta nostra, e il risultato non può dipenderne.

10.6.4 Il piano carico infinito

ESEMPIO SVOLTO

Il campo di un piano carico, passo per passo

Obiettivo. Ricavare il campo prodotto da un piano molto esteso con densità superficiale di carica uniforme $\sigma > 0$, in un punto vicino al piano e lontano dai bordi.

Passo 1: la simmetria. Il piano appare uguale da ogni punto alla stessa distanza, e le sue due facce sono equivalenti. Il campo non può avere componenti parallele al piano (in quale verso punterebbero?): è perpendicolare al piano, si allontana da esso da entrambe le parti, e ha lo stesso modulo in tutti i punti alla stessa distanza dal piano.

Passo 2: la superficie gaussiana. Scegliamo un cilindro con l'asse perpendicolare al piano, che lo attraversa, con le due basi di area S alla stessa distanza dalle due parti del piano (Figura 10.7c).

Passo 3: il flusso. Sulla superficie laterale il campo è parallelo alla superficie: flusso nullo. Su ciascuna base il campo è perpendicolare, uscente e di modulo E: flusso ES. Il flusso totale è $2ES$.

Passo 4: la carica interna. Il cilindro racchiude la porzione di piano di area S, con carica $Q_{\text{int}} = \sigma S$.

Passo 5: il teorema. $2ES = \sigma S/\varepsilon_0$, quindi

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Commento. Il risultato non contiene la distanza dal piano: il campo di un piano infinito è uniforme. Non contiene nemmeno l'area S, che era una scelta nostra. Per un piano con $\sigma = 1{,}0$ μC/m^2, $E = 1{,}0 \times 10^{-6}/(2 \times 8{,}85 \times 10^{-12})$ N/C $= 5{,}6 \times 10^4$ N/C a qualunque distanza. Un piano reale è finito: la formula vale finché la distanza è piccola rispetto alle dimensioni del piano e ci si tiene lontani dai bordi. Se σ è negativa il campo ha lo stesso modulo e punta verso il piano.

10.6.5 Due piani con cariche opposte

Torniamo alle due lastre parallele della Figura 10.4a, con densità $+\sigma$ e $-\sigma$. Ciascuna produce un campo uniforme di modulo $\sigma/(2\varepsilon_0)$: quello della lastra positiva si allontana da essa, quello della lastra negativa punta verso di essa. Per il principio di sovrapposizione:

- **fra le lastre** i due campi hanno lo stesso verso, dalla lastra positiva a quella negativa, e si sommano: $E = \sigma/\varepsilon_0$;
- **fuori dalle lastre**, da entrambe le parti, i due campi hanno versi opposti e si annullano: $E = 0$.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \text{ (fra due lastre con densità } \pm\sigma)$$

È la dimostrazione di quello che le linee di campo suggerivano: il campo fra le lastre è uniforme e vale il doppio del campo di una lastra sola, mentre all'esterno è nullo. Con $\sigma = 1{,}0\ \mu\text{C/m}^2$ il campo fra le lastre è $1{,}1 \times 10^5$ N/C. Questa disposizione, nel capitolo 12, diventerà il condensatore piano.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: il pozzo di Faraday

Materiali. Un **pozzo di Faraday**: un barattolo metallico cilindrico (diametro 10 cm, altezza 20 cm) su una base isolante, dentro una gabbia metallica collegata a terra che fa da schermo; un sensore di carica (elettrometro, risoluzione 0,1 nC) collegato al barattolo e alla gabbia; una sfera metallica di prova su un manico isolante; due dischetti elettrizzatori, uno di lana e uno di PVC, con manici isolanti.

Procedimento. 1) Scarica il barattolo toccandolo con un dito e azzera il sensore. 2) Strofina i dischetti fra loro e tocca con la sfera il dischetto di PVC. 3) Cala la sfera nel barattolo, *senza toccarlo*, a profondità crescenti, sull'asse e vicino alla parete, e leggi ogni volta il sensore; estraendola, la lettura torna a zero. 4) Fai toccare alla sfera il fondo interno, leggi il sensore ed estraila: calata di nuovo, non cambia più la lettura, perché ha ceduto al barattolo tutta la sua carica. 5) Scarica il barattolo, strofina di nuovo i dischetti e calali nel pozzo prima uno alla volta, poi insieme. Ripeti ogni misura tre volte: l'incertezza, dovuta soprattutto alla deriva dello zero, è di ±0,2 nC.

Tabella 10.2 Letture del sensore di carica collegato al pozzo di Faraday (dati tipici; incertezza ±0,2 nC su ogni lettura). Le profondità sono misurate dal bordo del barattolo, alto 20 cm.

Che cosa c'è nel pozzo	Posizione	Lettura (nC)
sfera di prova	appena sotto il bordo	−9,6
sfera di prova	3 cm, sull'asse	−12,1
sfera di prova	6 cm, sull'asse	−12,4
sfera di prova	12 cm, sull'asse	−12,4
sfera di prova	12 cm, a 1 cm dalla parete	−12,3
sfera di prova	17 cm, sull'asse	−12,4
nessuna (la sfera ha toccato il fondo)	—	−12,4
dischetto di PVC	10 cm	−11,8
dischetto di lana	10 cm	+11,7
i due dischetti insieme	10 cm	−0,1

Che cosa concludere. Quando la sfera è ben dentro, il barattolo la circonda quasi completamente. La sua carica richiama sulla parete interna, per induzione, una carica uguale e opposta, e spinge verso il sensore una carica uguale alla sua: lo strumento legge la carica della sfera. Le letture da 6 cm in giù, sull'asse o vicino alla parete, sono uguali entro l'incertezza: come prevede il teorema di Gauss, conta la carica racchiusa, non dove si trova. Appena sotto il

bordo la lettura è più bassa, perché parte delle linee di campo esce dall'apertura senza incontrare il barattolo.

Confronto teoria–esperimento. La carica della sfera si misura in modo indipendente facendole toccare il fondo: la sfera cede tutta la carica al barattolo e la lettura è (−12,4 ± 0,2) nC. La previsione del teorema di Gauss è che ogni lettura con la sfera ben dentro il pozzo dia lo stesso valore. Le letture da 6 cm in giù sono −12,4, −12,4, −12,3 e −12,4 nC, tutte compatibili con (−12,4 ± 0,2) nC; anche quella a 3 cm, (−12,1 ± 0,2) nC, lo è, perché la differenza, 0,3 nC, è minore della somma delle incertezze, 0,4 nC. Non lo è quella appena sotto il bordo, dove la sfera non è racchiusa. Con i dischetti, la conservazione della carica prevede cariche uguali e opposte e una somma nulla: la somma delle letture separate è (−0,1 ± 0,4) nC e la lettura dei due dischetti insieme (−0,1 ± 0,2) nC, entrambe compatibili con zero.

Sicurezza. Si usano soltanto cariche prodotte per strofinio, di pochi nanocoulomb, del tutto innocue. Se l'insegnante, per avere cariche maggiori, usa un generatore di alta tensione (o per mostrare le linee di campo con granelli di semolino sospesi nell'olio fra due elettrodi), solo lui lo maneggia, con un apparecchio a corrente limitata e senza che nessuno tocchi gli elettrodi.

Per la relazione. Riporta la tabella e discuti la compatibilità di ogni lettura con la carica misurata per contatto. Spiega con il teorema di Gauss perché la lettura non dipende dalla posizione della sfera, che cosa dicono le ultime tre righe sulla conservazione della carica e quale dischetto si è caricato positivamente.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/q$, $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ — definizione del campo elettrico (N/C) con una carica di prova positiva e piccola; la forza su una carica negativa è opposta al campo.

$E = k_0|Q|/r^2 = |Q|/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ — campo di una carica puntiforme, radiale: uscente se $Q > 0$, entrante se $Q < 0$. Vale anche fuori da una distribuzione a simmetria sferica, con r misurato dal centro.

$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \ldots$ — principio di sovrapposizione: i campi di più cariche si sommano come vettori.

$\boldsymbol{a} = q\boldsymbol{E}/m$ — in un campo uniforme una carica ha accelerazione costante e si muove come un proiettile; per elettroni e protoni il peso è trascurabile.

$p = qd$, $M = pE \operatorname{sen}\theta$ — momento di dipolo (C·m, dalla carica negativa alla positiva) e momento della coppia in un campo uniforme, dove la forza risultante è nulla e il dipolo tende ad allinearsi al campo.

$\Phi(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{S} = ES\cos\theta$ — flusso di un campo uniforme attraverso una superficie piana (N·m^2/C); per una superficie chiusa $\boldsymbol{S}$ punta verso l'esterno.

$\Phi(\boldsymbol{E}) = Q_{\text{int}}/\varepsilon_0$ — teorema di Gauss: vale per ogni superficie chiusa; Q_{int} è la somma algebrica delle sole cariche interne, ma il campo è quello di tutte le cariche. Dà il campo soltanto con una simmetria.

Guscio sferico: $E = 0$ dentro, k_0Q/r^2 fuori. Sfera uniforme: $E = k_0Qr/R^3$ dentro. Filo infinito: $E = \lambda/(2\pi\varepsilon_0 r)$. Piano infinito: $E = \sigma/(2\varepsilon_0)$, uniforme. Due lastre con $\pm\sigma$: $E = \sigma/\varepsilon_0$ fra le lastre, zero fuori (lontano dai bordi).

SINTESI

- L'azione a distanza descrive le forze fra cariche ferme, ma non spiega come l'interazione attraversi lo spazio; con il campo l'interazione diventa locale: le cariche sorgenti creano un campo, e ogni carica risente del campo nel punto in cui si trova.
- Il campo elettrico è la forza su una piccola carica di prova positiva divisa per la carica: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/q$, in N/C. Non dipende dalla carica di prova; la forza su una carica qualsiasi è $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$.
- Il campo di una carica puntiforme è radiale, uscente per una carica positiva ed entrante per una negativa, e ha modulo $k_0|Q|/r^2$. I campi di più cariche si sommano come vettori.
- Le linee di campo sono tangenti al campo, più fitte dove è più intenso, escono dalle cariche positive ed entrano nelle negative e non si incrociano. Non sono, in generale, traiettorie.
- Due cariche uguali danno un punto di campo nullo a metà strada; in un dipolo tutte le linee uscenti dalla carica positiva entrano in quella negativa. Fra due lastre con cariche opposte il campo è uniforme, salvo vicino ai bordi.
- In un campo uniforme una carica ha accelerazione costante $q\boldsymbol{E}/m$ e si muove come un proiettile; per elettroni e protoni il peso è trascurabile.
- Un dipolo in un campo uniforme subisce una forza risultante nulla e un momento $M = pE \operatorname{sen}\theta$, con $p = qd$, che tende ad allinearlo al campo; in un campo non uniforme è attirato verso la zona in cui il campo è più intenso.
- Il flusso di un campo uniforme attraverso una superficie piana è $\Phi = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{S} = ES\cos\theta$: misura quante linee di campo attraversano la superficie. Per una superficie chiusa il vettore superficie punta verso l'esterno.
- Teorema di Gauss: il flusso del campo elettrico attraverso qualunque superficie chiusa è $Q_{\text{int}}/\varepsilon_0$. Le cariche esterne danno flusso nullo, ma contribuiscono al campo.
- Con la simmetria, il teorema dà il campo: un guscio sferico ha campo nullo all'interno e all'esterno agisce come una carica puntiforme; dentro una sfera carica uniformemente $E \propto r$; un filo infinito dà $E = \lambda/(2\pi\varepsilon_0 r)$; un piano infinito dà un campo uniforme $\sigma/(2\varepsilon_0)$.
- Fra due lastre con densità $\pm\sigma$ il campo è σ/ε_0, all'esterno è nullo.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Il campo elettrico in un punto è definito come:
   - **A.** la forza che agisce su una carica qualsiasi posta nel punto
   - **B.** la forza su una piccola carica di prova positiva, divisa per la carica di prova
   - **C.** il prodotto della forza per la carica di prova
   - **D.** la carica che produce il campo, divisa per il quadrato della distanza

2. ● L'unità di misura del campo elettrico nel Sistema Internazionale è:
   A. N·C
   B. C/N
   C. N/C
   D. $N \cdot m^2/C$

3. ● Se la distanza da una carica puntiforme triplica, il modulo del campo elettrico:
   A. diventa un nono
   B. diventa un terzo
   C. triplica
   D. non cambia

4. ● Le linee del campo di una carica puntiforme negativa isolata sono:
   A. semirette uscenti dalla carica
   B. circonferenze centrate nella carica
   C. rette parallele equidistanti
   D. semirette entranti nella carica

5. ●● Un elettrone si trova in un campo elettrico uniforme diretto verso le x positive. La sua accelerazione:
   A. è nulla, perché il campo è uniforme
   B. è diretta verso le x negative
   C. è diretta verso le x positive
   D. è perpendicolare al campo

6. ●● Un cubo che non contiene cariche si trova in un campo elettrico uniforme di modulo E; ogni faccia ha area S. Il flusso del campo attraverso la superficie del cubo:
   A. vale $6ES$
   B. vale ES
   C. dipende dall'orientazione del cubo
   D. è nullo

7. ●● Una carica q si trova al centro di una sfera di raggio r. Se il raggio della sfera raddoppia, il flusso del campo attraverso la sfera:
   A. non cambia
   B. raddoppia
   C. quadruplica
   D. si riduce a un quarto

8. ●● All'interno di un guscio sferico sottile con una carica distribuita uniformemente, il campo elettrico:
   A. vale $k_0 Q/r^2$, come all'esterno
   B. cresce linearmente con la distanza dal centro
   C. è nullo in ogni punto
   D. è massimo nel centro

Vero o falso

9. ● Le linee di campo di due cariche possono incrociarsi nei punti in cui i campi delle due cariche si sommano. V / F

10. ● Il campo elettrico prodotto da una carica in un punto non dipende dal valore della carica di prova usata per misurarlo. V / F

11. ●● Una carica positiva lasciata libera, da ferma, in un campo elettrico qualsiasi si muove sempre lungo la linea di campo che passa per la sua posizione iniziale. V / F

12. ●● Se il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è nullo, il campo è nullo in tutti i punti della superficie. V / F

13. ●● Il modulo del campo prodotto da un piano carico molto esteso, lontano dai bordi, non dipende dalla distanza dal piano. V / F

Applicare

14. ● Una carica di prova di 2,5 nC, posta in un punto P, subisce una forza di $4{,}0 \times 10^{-5}$ N diretta verso est. a) Quanto vale il campo in P? b) Quale forza subirebbe in P una carica di −5,0 nC?

15. ● Calcola il modulo del campo elettrico a 20 cm da una carica puntiforme di −6,0 μC e indicane il verso.

16. ● A quale distanza da una carica puntiforme di 1,0 nC il campo elettrico vale 100 N/C?

17. ●● Due cariche puntiformi di +3,0 nC si trovano a 10 cm di distanza. Calcola il campo a) nel punto medio; b) in un punto della retta che le congiunge, esterno al segmento, a 5,0 cm da una delle due cariche.

18. ● Un rettangolo di 20 cm × 30 cm si trova in un campo uniforme di 500 N/C; la normale al rettangolo forma un angolo di 60° con il campo. Calcola il flusso del campo attraverso il rettangolo. Per quale angolo il flusso sarebbe massimo?

19. ● Una superficie chiusa contiene una carica di +4,0 nC e una di −1,5 nC; una terza carica di +2,0 nC si trova all'esterno. Calcola il flusso del campo elettrico attraverso la superficie.

20. ●● Un filo rettilineo molto lungo ha una densità lineare di carica di 2,0 nC/m. a) Calcola il campo a 5,0 cm dal filo. b) A quale distanza il campo vale 100 N/C?

21. ●● Usa il grafico della Figura 10.8 (sfera carica in tutto il volume). Trova le due distanze dal centro alle quali il campo vale metà del suo valore massimo, e verifica con le formule del capitolo che le hai lette correttamente. Quale delle due esisterebbe ancora per un guscio sferico con gli stessi R e Q?

Problemi

22. ●● Un protone parte da fermo in un campo uniforme di $3{,}0 \times 10^3$ N/C. a) Calcola la sua accelerazione. b) Con quale velocità ha percorso 2,0 cm, e in quanto tempo? c) Confronta la forza elettrica con il peso del protone.

23. ●● Una goccia d'olio di massa $4{,}9 \times 10^{-15}$ kg resta sospesa, ferma, fra due lastre orizzontali fra le quali c'è un campo uniforme di $1{,}5 \times 10^5$ N/C. a) Quale deve essere il verso del campo, se la goccia è carica negativamente? b) Calcola la carica della goccia e il numero di cariche elementari in eccesso. c) Che cosa succederebbe se la goccia perdesse un elettrone? (Collega il risultato alla quantizzazione della carica del capitolo precedente.)

24. ●●● Due cariche di +4,0 nC sono poste in due vertici di un triangolo equilatero di lato 20 cm. a) Calcola modulo, direzione e verso del campo nel terzo vertice. b) Quale carica bisogna porre nel punto medio del lato che unisce le due cariche perché il campo nel terzo vertice si annulli?

25. ●●● In un oscilloscopio un elettrone entra con velocità orizzontale $2{,}5 \times 10^7$ m/s fra due lastre di deflessione lunghe 3,0 cm; lo schermo si trova 15 cm dopo l'uscita dalle lastre. Il punto luminoso si sposta di 2,4 cm sullo schermo. a) Quanto vale il campo fra le lastre? b) Di quanto si è spostato l'elettrone all'uscita dalle lastre? c) Con quale angolo è uscito?

26. ●●● Una carica puntiforme di +10 nC si trova al centro di un guscio sferico sottile di raggio 15 cm, che porta una carica di −30 nC distribuita uniformemente. a) Calcola il campo a 10 cm e a 20 cm dal centro, indicandone il verso. b) Quale carica dovrebbe avere il guscio perché il campo all'esterno fosse nullo? In quel caso, il campo all'interno sarebbe nullo?

27. ●●● Un filo rettilineo molto lungo, con densità di carica +3,0 nC/m, si trova sull'asse di un sottile tubo metallico cilindrico di raggio 4,0 cm che porta una carica di −3,0 nC per ogni metro di lunghezza, distribuita uniformemente (è lo schema di un cavo coassiale). Calcola il campo a 2,0 cm e a 6,0 cm dall'asse, spiegando quale simmetria giustifica l'uso del teorema di Gauss.

28. ●●● Una pallina di massa 2,0 g, con carica 50 nC, è appesa a un filo isolante lungo 50 cm in un campo uniforme orizzontale di $1{,}5 \times 10^5$ N/C. a) Calcola l'angolo che il filo forma con la verticale all'equilibrio e la tensione del filo. b) La pallina, spostata di poco dalla posizione di equilibrio, oscilla come un pendolo in un campo di gravità «efficace» (*Fisica 3*, capitolo 4). Calcola il periodo delle piccole oscillazioni e confrontalo con quello in assenza di campo elettrico.

29. ●● Un'asticella isolante lunga 4,0 cm porta alle estremità due cariche di +5,0 nC e −5,0 nC. È posta in un campo uniforme di $2{,}0 \times 10^4$ N/C, con il momento di dipolo inclinato di 30° rispetto al campo. a) Calcola il momento di dipolo. b) Calcola il momento della coppia che agisce sull'asticella e quello massimo possibile. c) Qual è la forza risultante sull'asticella?

Ragionare e argomentare

30. ●● Spiega perché due linee di campo non possono mai incrociarsi. Poi spiega, con l'esempio del dipolo, perché una linea di campo in generale non è la traiettoria di una carica lasciata libera.

31. ●●● Trova l'errore. «Per calcolare il campo sulla superficie di un cubo isolante carico uniformemente in tutto il volume, con carica Q e spigolo a, uso il teorema di Gauss: il flusso attraverso le sei facce è $E \cdot 6a^2 = Q/\varepsilon_0$, quindi $E = Q/(6\varepsilon_0 a^2)$ in ogni punto della superficie.»

32. ●● Stima di Fermi. Con il bel tempo, vicino al suolo, c'è un campo elettrico di circa 100 N/C diretto verticalmente verso il basso (Tabella 10.1). Trattando la Terra come una sfera con la carica distribuita sulla superficie, stima la sua carica, con il segno. (Raggio terrestre: $6{,}37 \times 10^6$ m.)

33. ●●● Progetta un esperimento con il pozzo di Faraday dell'attività di laboratorio per verificare che la carica di una sfera di prova si divide a metà quando la sfera tocca una seconda sfera identica, neutra. Descrivi le misure, la previsione con la sua incertezza e il criterio con cui giudicherai il risultato.

PER APPROFONDIRE

- [FAR] M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity*: le serie in cui l'autore descrive le linee di forza e gli esperimenti con i recipienti metallici, da cui nasce il pozzo dell'attività di laboratorio.
- [MAX] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*: nella prefazione Maxwell spiega come ha tradotto in matematica le idee di Faraday sul campo.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. II: i primi capitoli presentano il campo elettrico, il flusso e il teorema di Gauss con molti esempi di simmetria.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: i capitoli sul campo elettrico e sulla legge di Gauss, con problemi sulla deflessione dei fasci e sulle distribuzioni simmetriche.
- [HEW] P. G. Hewitt, *Conceptual Physics*: il capitolo sui campi elettrici, per rivedere senza formule le linee di campo e la schermatura.

Glossario del capitolo

Campo elettrico
Vettore che in ogni punto dello spazio è uguale alla forza elettrica su una piccola carica di prova positiva posta nel punto, divisa per la carica di prova; si misura in N/C.

Campo uniforme
Campo che ha lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso in tutti i punti di una regione, come fra due lastre parallele con cariche opposte.

Campo vettoriale
Grandezza fisica che associa un vettore a ogni punto di una regione dello spazio, come il campo gravitazionale o il campo elettrico.

Carica di prova
Carica positiva abbastanza piccola da non modificare con la sua presenza le cariche che producono il campo che si vuole misurare.

Densità lineare di carica
Carica per unità di lunghezza di un filo carico, $\lambda = Q/\ell$; si misura in C/m.

Densità superficiale di carica
Carica per unità di area di una superficie carica, $\sigma = Q/S$; si misura in C/m^2.

Dipolo elettrico
Sistema di due cariche di uguale valore e segno opposto, $+q$ e $-q$, a una distanza fissa d.

Effetti di bordo
Deviazioni del campo fra due lastre cariche dal valore uniforme, vicino ai bordi delle lastre, dove le linee si incurvano.

Flusso del campo elettrico
Per un campo uniforme e una superficie piana, il prodotto scalare $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{S} = ES\cos\theta$; misura le linee di campo che attraversano la superficie e si esprime in $N \cdot m^2/C$.

Linee di forza
Nome dato da Faraday alle linee di campo, che egli considerava una struttura fisica reale dello spazio.

Momento di dipolo elettrico
Vettore $\boldsymbol{p}$ di modulo qd, diretto dalla carica negativa a quella positiva di un dipolo; si misura in C·m.

Pozzo di Faraday
Recipiente metallico isolato, collegato a un misuratore di carica, che misura la carica di un oggetto introdotto al suo interno indipendentemente dalla sua posizione.

Punto di campo nullo
Punto in cui i campi prodotti dalle diverse cariche si compensano e il campo totale è zero; una carica posta lì è in equilibrio.

Superficie chiusa
Superficie che racchiude completamente una regione dello spazio, separandone l'interno dall'esterno.

Superficie gaussiana
Superficie chiusa immaginaria a cui si applica il teorema di Gauss, scelta in modo da sfruttare la simmetria della distribuzione di carica.

Teorema di Gauss
Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è uguale alla carica totale contenuta all'interno divisa per ε_0.

Vettore superficie
Vettore perpendicolare a una superficie piana, di modulo uguale alla sua area; per una superficie chiusa punta verso l'esterno.

Soluzioni

1. B. La carica di prova deve essere piccola per non disturbare le sorgenti, positiva per convenzione sul verso.

2. C. Il campo è una forza per unità di carica.

3. A. E è proporzionale a $1/r^2$: $(1/3)^2 = 1/9$.

4. D. Il campo di una carica negativa punta verso la carica.

5. B. La forza $q\boldsymbol{E}$ su una carica negativa è opposta al campo, e l'accelerazione ha il verso della forza.

6. D. Tutte le linee che entrano nel cubo ne escono, e i flussi entranti e uscenti si compensano. Per il teorema di Gauss, il flusso è nullo perché la carica interna è nulla.

7. A. Per il teorema di Gauss il flusso vale q/ε_0 e non dipende dalla superficie: tutte le linee uscenti dalla carica attraversano entrambe le sfere.

8. C. Una sfera gaussiana interna non contiene carica, e per simmetria il campo su di essa sarebbe radiale e di modulo costante: deve essere nullo.

9. F. In ogni punto il campo totale ha una sola direzione, quindi per ogni punto passa una sola linea: le linee rappresentano già il campo somma.

10. V. Raddoppiando la carica di prova raddoppia la forza, e il rapporto F/q resta lo stesso: il campo dipende solo dalle sorgenti e dal punto.

11. F. La linea dà la direzione della forza, non della velocità: lungo una linea curva l'inerzia porta la carica fuori dalla linea. La segue solo se la linea è rettilinea.

12. F. Il flusso nullo significa soltanto che non c'è carica netta all'interno: in un campo uniforme, per esempio, il campo è diverso da zero su tutta la superficie.

13. V. Per il teorema di Gauss $E = \sigma/(2\varepsilon_0)$, indipendente dalla distanza finché questa è piccola rispetto alle dimensioni del piano.

14. a) $E = F/q = 4{,}0 \times 10^{-5}$ N/$(2{,}5 \times 10^{-9}$ C) $= 1{,}6 \times 10^4$ N/C, verso est. b) $F = |q|E = 5{,}0 \times 10^{-9}$ C $\times\ 1{,}6 \times 10^4$ N/C $= 8{,}0 \times 10^{-5}$ N, verso ovest (carica negativa).

15. $E = k_0|Q|/r^2 = 8{,}99 \times 10^9 \times 6{,}0 \times 10^{-6}/0{,}20^2$ N/C $= 1{,}3 \times 10^6$ N/C, diretto verso la carica, che è negativa.

16. $r = \sqrt{(k_0 Q/E)} = \sqrt{(8{,}99 \times 10^9 \times 1{,}0 \times 10^{-9}/100)}$ m $= \sqrt{0{,}0899}$ m $= 0{,}30$ m.

17. a) Nel punto medio i due campi hanno lo stesso modulo e versi opposti: $E = 0$. b) Le distanze dalle cariche sono 0,050 m e 0,15 m e i due campi hanno lo stesso verso (si allontanano dalle cariche, positive): $E = 8{,}99 \times 10^9 \times 3{,}0 \times 10^{-9} \times (1/0{,}050^2 + 1/0{,}15^2)$ N/C $= 27{,}0 \times (400 + 44{,}4)$ N/C $= 1{,}2 \times 10^4$ N/C, diretto lungo la congiungente, verso l'esterno.

18. $\Phi = ES \cos\theta = 500$ N/C $\times\ 0{,}060$ m$^2 \times \cos 60° = 15$ N·m^2/C. Il flusso è massimo, 30 N·m^2/C, per $\theta = 0°$, cioè con il rettangolo perpendicolare al campo.

19. Per il teorema di Gauss conta solo la carica interna, $Q_{\text{int}} = 4{,}0$ nC $- 1{,}5$ nC $= 2{,}5$ nC: $\Phi = 2{,}5 \times 10^{-9}$ C/$(8{,}85 \times 10^{-12}$ C^2/(N·m^2)) $= 2{,}8 \times 10^2$ N·m^2/C. La carica esterna dà flusso nullo.

20. a) Per la simmetria cilindrica, con il teorema di Gauss: $E = 2k_0\lambda/r = 2 \times 8{,}99 \times 10^9 \times 2{,}0 \times 10^{-9}/0{,}050$ N/C $= 7{,}2 \times 10^2$ N/C. b) $r = 2k_0\lambda/E = 2 \times 8{,}99 \times 10^9 \times 2{,}0 \times 10^{-9}/100$ m $= 0{,}36$ m.

21. Il massimo è $3{,}6 \times 10^4$ N/C; la metà, $1{,}8 \times 10^4$ N/C, si legge a $r \approx 5$ cm (dentro) e a $r \approx 14$ cm (fuori). Verifica: dentro $E \propto r$, quindi metà del massimo a $r = R/2 = 5{,}0$ cm; fuori $E \propto 1/r^2$, quindi $(R/r)^2 = 1/2$ e $r = R\sqrt{2} = 14{,}1$ cm. Per il guscio esisterebbe solo la seconda: dentro il guscio il campo è nullo.

22. a) $a = eE/m_{\text{p}} = 1{,}60 \times 10^{-19} \times 3{,}0 \times 10^3/(1{,}67 \times 10^{-27})$ m/s$^2 = 2{,}9 \times 10^{11}$ m/s^2. b) Moto uniformemente accelerato da fermo: $v = \sqrt{(2ad)} = \sqrt{(2 \times 2{,}87 \times 10^{11} \times 0{,}020)}$ m/s $= 1{,}1 \times 10^5$ m/s; $t = v/a = 3{,}7 \times 10^{-7}$ s. c) $F_{\text{el}} = eE = 4{,}8 \times 10^{-16}$ N, $m_{\text{p}}g = 1{,}6 \times 10^{-26}$ N: la forza elettrica è circa 3×10^{10} volte il peso.

23. a) La forza elettrica deve equilibrare il peso, quindi puntare verso l'alto; su una carica negativa è opposta al campo, che deve dunque puntare verso il basso. b) Per l'equilibrio $|q|E = mg$: $|q| = 4{,}9 \times 10^{-15} \times 9{,}8/(1{,}5 \times 10^5)$ C $= 3{,}2 \times 10^{-19}$ C, cioè 2 cariche elementari ($3{,}2/1{,}60 = 2{,}0$): $q = -2e$. c) La carica diventerebbe $-e$, la forza elettrica si dimezzerebbe e la goccia comincerebbe a cadere; per tenerla sospesa servirebbe un campo doppio. La carica può cambiare soltanto a salti di e.

24. a) Ciascuna carica produce nel terzo vertice $E_1 = 8{,}99 \times 10^9 \times 4{,}0 \times 10^{-9}/0{,}20^2$ N/C $= 899$ N/C, diretto lungo il lato, lontano dalla carica. Per il principio di sovrapposizione, le componenti parallele alla base si annullano per simmetria; quelle perpendicolari si sommano: $E = 2 \times 899$ N/C $\times \cos 30° = 1{,}6 \times 10^3$ N/C (1557 N/C), perpendicolare alla base e diretto lontano da essa. b) La terza carica, a distanza $h = 0{,}20$ m $\times$ sen 60° $= 0{,}173$ m, deve produrre un campo di 1557 N/C diretto verso la base, quindi deve essere negativa: $|q| = Eh^2/k_0 = 1557 \times 0{,}0300/(8{,}99 \times 10^9)$ C $= 5{,}2 \times 10^{-9}$ C; $q = -5{,}2$ nC.

25. a) Per il secondo principio, fra le lastre l'accelerazione è costante, $a = eE/m_e$; dopo le lastre il moto è rettilineo uniforme. Lo spostamento totale è $y = (eEL/(m_e v_0^2))(L/2 + D)$, quindi $E = y m_e v_0^2/(eL(L/2 + D)) = 0{,}024 \times 9{,}11 \times 10^{-31} \times (2{,}5 \times 10^7)^2/(1{,}60 \times 10^{-19} \times 0{,}030 \times 0{,}165)$ N/C $= 1{,}7 \times 10^4$ N/C. b) $t = L/v_0 = 1{,}2 \times 10^{-9}$ s; $a = 3{,}0 \times 10^{15}$ m/s^2; $y_1 = \frac{1}{2}at^2 = 2{,}2 \times 10^{-3}$ m $= 2{,}2$ mm. c) $v_y = at = 3{,}6 \times 10^6$ m/s; tan $\alpha = 3{,}6 \times 10^6/(2{,}5 \times 10^7) = 0{,}145$, $\alpha = 8{,}3°$. Controllo: 2,2 mm + 150 mm $\times$ 0,145 = 24 mm.

26. a) Per la simmetria sferica si usano sfere gaussiane concentriche. A 10 cm la sfera contiene solo la carica centrale: $E = 8{,}99 \times 10^9 \times 10 \times 10^{-9}/0{,}10^2$ N/C $= 9{,}0 \times 10^3$ N/C, uscente. A 20 cm la carica interna è 10 nC − 30 nC = −20 nC: $E = 8{,}99 \times 10^9 \times 20 \times 10^{-9}/0{,}20^2$ N/C $= 4{,}5 \times 10^3$ N/C, entrante (verso il centro). b) Il campo esterno è nullo se la carica interna totale è nulla: il guscio deve avere −10 nC. All'interno il campo resterebbe quello della carica centrale, perché il guscio non produce campo al suo interno: non sarebbe nullo.

27. La distribuzione ha simmetria cilindrica (filo e tubo coassiali, molto lunghi): il campo è radiale e ha lo stesso modulo alla stessa distanza dall'asse, quindi si usa un cilindro gaussiano coassiale di raggio r e lunghezza ℓ, con flusso $E \cdot 2\pi r\ell$. A 2,0 cm il cilindro contiene solo il filo: $E = 2k_0\lambda/r = 2 \times 8{,}99 \times 10^9 \times 3{,}0 \times 10^{-9}/0{,}020$ N/C $= 2{,}7 \times 10^3$ N/C, uscente dall'asse. A 6,0 cm la carica interna per unità di lunghezza è 3,0 − 3,0 = 0 nC/m: flusso nullo e, per la simmetria, $E = 0$. Un cavo coassiale non produce campo all'esterno.

28. a) All'equilibrio la risultante di peso, forza elettrica (orizzontale) e tensione è nulla. $F_{el} = qE = 50 \times 10^{-9} \times 1{,}5 \times 10^5$ N $= 7{,}5 \times 10^{-3}$ N; $mg = 2{,}0 \times 10^{-3} \times 9{,}8$ N $= 1{,}96 \times 10^{-2}$ N. tan $\theta = F_{el}/(mg) = 0{,}383$, $\theta = 21°$; $T = \sqrt{(F_{el}^2 + (mg)^2)} = 2{,}1 \times 10^{-2}$ N. b) La somma delle due forze costanti, divisa per la massa, è un'accelerazione costante «efficace» $g_{eff} = \sqrt{(g^2 + (qE/m)^2)} = \sqrt{(9{,}8^2 + 3{,}75^2)}$ m/s^2 $= 10{,}5$ m/s^2. Per il pendolo semplice $T = 2\pi\sqrt{(l/g_{eff})} = 2\pi\sqrt{(0{,}50/10{,}49)}$ s $= 1{,}37$ s, contro $2\pi\sqrt{(0{,}50/9{,}8)}$ s $= 1{,}42$ s senza campo: il periodo è un po' più breve.

29. a) $p = qd = 5{,}0 \times 10^{-9}$ C $\times 0{,}040$ m $= 2{,}0 \times 10^{-10}$ C·m. b) $M = pE$ sen 30° $= 2{,}0 \times 10^{-10} \times 2{,}0 \times 10^4 \times 0{,}50$ N·m $= 2{,}0 \times 10^{-6}$ N·m; il massimo, con il dipolo perpendicolare al campo, è $pE = 4{,}0 \times 10^{-6}$ N·m. c) Nulla: in un campo uniforme le forze sulle due cariche sono uguali e opposte.

30. Se due linee si incrociassero, nel punto d'incrocio il campo avrebbe due direzioni diverse, mentre il campo totale (somma vettoriale dei campi di tutte le cariche) è un solo vettore. Nel dipolo, un protone lasciato libero su una linea curva ha accelerazione tangente alla linea, ma appena acquista velocità l'inerzia lo porta verso l'esterno della curva: la sua traiettoria taglia le linee di campo, come un satellite in orbita non segue le linee del campo gravitazionale.

31. Il teorema di Gauss è vero anche per il cubo, ma il calcolo è sbagliato: per scrivere il flusso come $E \cdot 6a^2$ il campo dovrebbe essere perpendicolare alle facce e di modulo uguale in ogni loro punto. Un cubo non ha questa simmetria: il campo è più intenso al centro delle facce che vicino agli spigoli e,

tranne che al centro di ciascuna faccia, non è perpendicolare alla superficie. Il teorema dà correttamente il flusso totale, Q/ε_0, ma non il campo punto per punto.

32. Una sfera gaussiana appena sopra il suolo ha flusso $-E \cdot 4\pi R^2$ (il campo è entrante): la carica della Terra è $Q = -\varepsilon_0 E \cdot 4\pi R^2 = -ER^2/k_0 = -100 \times (6{,}37 \times 10^6)^2/(8{,}99 \times 10^9)$ C $\approx -5 \times 10^5$ C ($4{,}5 \times 10^5$ C). Il campo punta verso la Terra, quindi la carica è negativa. È solo una stima: l'atmosfera contiene a sua volta cariche, e il campo varia molto con il tempo meteorologico.

33. Traccia di risposta. Si carica la sfera A e se ne misura la carica Q calandola nel pozzo (tre letture, incertezza ±0,2 nC), senza toccarlo. Poi si fa toccare A con la sfera B, identica e neutra, tenendole per i manici isolanti, e si misurano separatamente le cariche di A e di B nel pozzo. Previsione: ciascuna ha $Q/2$, con incertezza metà di quella di Q (±0,1 nC), e la somma è Q, per la conservazione della carica. Criterio: ogni misura è compatibile con $Q/2$ se la differenza è minore della somma delle incertezze (±0,3 nC). Si ripete con valori diversi di Q, scaricando il pozzo prima di ogni misura e tenendo le sfere lontane da altri oggetti, perché l'umidità e il contatto con le mani disperdono la carica.