CAPITOLO

6

Sovrapposizione, interferenza e onde stazionarie

Due sassi non possono occupare lo stesso posto; due onde sì, e da quell'incontro nasce un disegno che nessuna delle due avrebbe saputo tracciare da sola.

OBIETTIVI

1. Enunciare il principio di sovrapposizione per le onde e riconoscerne i limiti di validità.
2. Calcolare l'ampiezza della somma di due onde armoniche in funzione della differenza di fase e collegarla alla differenza di cammino.
3. Descrivere l'interferenza di due sorgenti coerenti nel piano e riconoscere nelle linee nodali dei rami d'iperbole.
4. Ricavare dal principio di Huygens le leggi della riflessione e della rifrazione delle onde e spiegare il ruolo della lunghezza d'onda nella diffrazione.
5. Descrivere le onde stazionarie e calcolare le frequenze dei modi normali di una corda fissata ai due estremi.
6. Verificare in laboratorio, con l'esperimento di Melde, la formula delle armoniche di una corda.

INDICE DEL CAPITOLO

6.1 Il principio di sovrapposizione 2
6.2 L'interferenza in una dimensione 4
6.3 L'interferenza di due sorgenti nel piano 7
6.4 Il principio di Huygens: riflessione e rifrazione 11
6.5 La diffrazione 13
6.6 Le onde stazionarie 15

Fisica 4 · Parte II · Le onde e la luce · versione 1.0
Capitolo 6: Sovrapposizione, interferenza e onde stazionarie · pagine 167–194 del volume completo · estratto per lo studio

Lancia due sassi in uno stagno, a un metro di distanza l'uno dall'altro. Le due serie di cerchi si allargano, si raggiungono e si attraversano; per qualche secondo la superficie dell'acqua si copre di un disegno regolare, con strisce dove l'acqua si agita il doppio e strisce dove resta quasi ferma. Poi i cerchi proseguono per la loro strada, ciascuno come se l'altro non fosse mai esistito. Un sasso lanciato contro un altro sasso, invece, rimbalza: due corpi non possono occupare lo stesso posto, due onde sì.

Nel capitolo precedente abbiamo studiato un'onda alla volta: come si propaga, con quale velocità, che cosa trasporta, che cosa le succede all'estremo di una corda. In questo capitolo mettiamo insieme più onde. Scopriremo che la regola con cui si combinano è semplicissima, una somma, e che da questa somma nascono fenomeni che sono la firma inconfondibile delle onde: l'**interferenza**, la **diffrazione**, le **onde stazionarie** delle corde di una chitarra. Sono gli stessi fenomeni che, nel capitolo 8, ci permetteranno di dire che anche la luce è un'onda.

6.1 Il principio di sovrapposizione

6.1.1 Due impulsi che si incrociano

Tendiamo una corda lunga e, nello stesso istante, diamo un colpo verso l'alto a ciascuna delle due estremità. Partono due impulsi che corrono uno verso l'altro (capitolo 5). Che cosa succede quando si incontrano? La Figura 6.1a mostra la risposta, calcolata per due impulsi di altezza diversa. Finché sono separati ognuno avanza con la sua forma. Quando si sovrappongono, lo spostamento di ogni punto della corda è la **somma** degli spostamenti che i due impulsi gli darebbero se fossero soli: dove le due gobbe coincidono, la corda sale fino a un'altezza uguale alla somma delle due altezze. Infine i due impulsi si separano e proseguono **esattamente come prima**, con la forma e la velocità che avevano.

Ancora più sorprendente è il caso della Figura 6.1b: un impulso verso l'alto e uno verso il basso, uguali e opposti. Nell'istante in cui si sovrappongono perfettamente gli spostamenti si cancellano punto per punto e la corda è, per un attimo, perfettamente rettilinea. Gli impulsi però non sono scomparsi: un istante dopo riemergono intatti. Dove sono finiti nel frattempo? Nella velocità della corda. In quell'istante la corda è dritta ma non ferma: i suoi punti si stanno muovendo, alcuni verso l'alto e altri verso il basso, e l'energia degli impulsi, che un attimo prima era in parte energia potenziale elastica della corda deformata, è tutta energia cinetica.

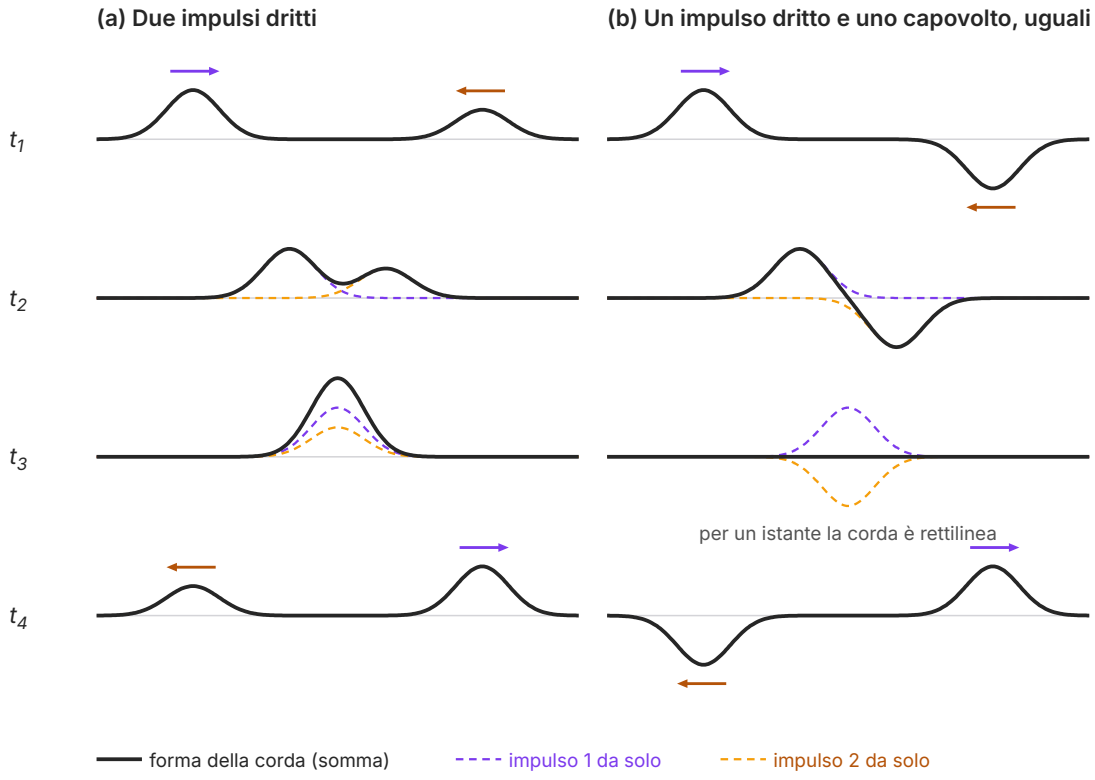


Figura 6.1 Due impulsi gaussiani che corrono in versi opposti su una corda, in quattro istanti successivi (calcolati). Le linee tratteggiate sono gli impulsi come sarebbero se ciascuno fosse solo; la linea continua, la loro somma, è la forma reale della corda. (a) Due impulsi verso l'alto, di altezze 1 e 0,6: nella sovrapposizione l'altezza arriva a 1,6. (b) Due impulsi uguali e opposti: all'istante t_3 la corda è rettilinea. In entrambi i casi, dopo l'incontro, ciascun impulso prosegue con la forma che aveva.

6.1.2 Il principio, nella sua forma per le onde

Nel volume dello scorso anno il principio di sovrapposizione riguardava le forze: la forza totale su un corpo è la somma vettoriale delle forze che agiscono su di esso, ciascuna calcolata come se le altre non ci fossero. Per le onde vale un enunciato dello stesso tipo, che ora diventa il nostro punto di partenza.

Principio di sovrapposizione (per le onde). Quando due o più onde si propagano nello stesso mezzo, lo spostamento di ogni punto del mezzo, in ogni istante, è la somma degli spostamenti che le singole onde produrrebbero se si propagassero da sole. Dopo essersi attraversate, le onde proseguono senza essere modificate dall'incontro.

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

Se gli spostamenti sono vettori, come per le onde sulla superficie dell'acqua o per una corda che vibra in due direzioni, la somma è vettoriale. Il principio non è una legge universale: vale nei **mezzi lineari**, quelli in cui la forza di richiamo è proporzionale alla deformazione, come una molla che segue la legge di Hooke. Per spostamenti piccoli quasi tutti i mezzi si comportano così: le corde, l'aria percorsa da suoni non troppo intensi, la superficie dell'acqua quando le onde sono basse rispetto alla loro lunghezza. Un'onda che si frange sulla spiaggia, l'onda d'urto di un'esplosione, il suono di intensità estrema non obbediscono più a questa semplice regola. In tutto questo capitolo supponiamo che il mezzo sia lineare.

6.2 L'interferenza in una dimensione

6.2.1 Due onde armoniche che viaggiano insieme

Applichiamo ora il principio a due onde armoniche che si propagano sulla stessa corda, nello stesso verso, con la stessa frequenza e la stessa ampiezza, ma con una differenza di fase. Come nel capitolo 5 scriviamo la prima $y_1 = A\,\text{sen}(kx - \omega t)$; la seconda è uguale, ma il suo argomento è spostato di una quantità costante $\Delta\varphi$, la **differenza di fase** fra le due onde:

$$y_2 = A\,\text{sen}(kx - \omega t + \Delta\varphi)$$

La sovrapposizione di due o più onde che dà luogo, nei diversi punti del mezzo, ad ampiezze maggiori o minori di quelle delle singole onde si chiama **interferenza**. Per calcolarla ci serve un'identità goniometrica, una delle *formule di prostaferesi* che studierai quest'anno in matematica:

$$\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = 2\,\text{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Controlliamola con un esempio numerico: con $\alpha = 70°$ e $\beta = 30°$ il primo membro vale 0,9397 + 0,5000 = 1,4397, il secondo $2 \times \text{sen}\,50° \times \cos 20° = 2 \times 0{,}7660 \times 0{,}9397 = 1{,}4397$. L'esempio svolto che segue la usa per trovare l'onda risultante.

ESEMPIO SVOLTO

L'ampiezza della somma di due onde, passo per passo

Problema. Due onde $y_1 = A\ \text{sen}(kx - \omega t)$ e $y_2 = A\ \text{sen}(kx - \omega t + \Delta\varphi)$ si sovrappongono. Ricava l'onda risultante e la sua ampiezza.

Passo 1: il principio di sovrapposizione. Lo spostamento di ogni punto è la somma: $y = A[\text{sen}(kx - \omega t + \Delta\varphi) + \text{sen}(kx - \omega t)]$.

Passo 2: la formula di prostaferesi. Poniamo $\alpha = kx - \omega t + \Delta\varphi$ e $\beta = kx - \omega t$. Allora $(\alpha + \beta)/2 = kx - \omega t + \Delta\varphi/2$ e $(\alpha - \beta)/2 = \Delta\varphi/2$. Quindi

$$y = [2A\cos\frac{\Delta\varphi}{2}]\ \text{sen}(kx - \omega t + \frac{\Delta\varphi}{2})$$

Passo 3: la lettura del risultato. Il secondo fattore è un'onda armonica con lo stesso k e lo stesso ω: la somma è ancora un'onda della **stessa lunghezza d'onda e della stessa frequenza**, che viaggia nello stesso verso con la stessa velocità. Il fattore fra parentesi quadre non dipende né da x né da t: è la sua ampiezza, presa in valore assoluto perché un'ampiezza è positiva,

$$A_{\text{ris}} = 2A\ |\cos(\Delta\varphi/2)|$$

Controllo. Con $\Delta\varphi = 0$ le due onde coincidono e $A_{\text{ris}} = 2A$, come deve essere sommando una cosa a se stessa. Con $\Delta\varphi = \pi$, $\cos(\pi/2) = 0$: in ogni punto, quando una sale l'altra scende di altrettanto, e la somma è nulla. Con $\Delta\varphi = \pi/2$ si ottiene $2A\cos(\pi/4) = \sqrt{2}\,A \approx 1{,}41\,A$: l'ampiezza risultante non è la somma delle ampiezze. Le unità tornano: $\cos(\Delta\varphi/2)$ è un numero puro.

La Figura 6.2 mostra i tre casi. Quando $\Delta\varphi = 0$, o un multiplo pari di π, le creste di un'onda coincidono con le creste dell'altra: si parla di **interferenza costruttiva** e l'ampiezza è massima, $2A$. Quando $\Delta\varphi = \pi$, o un multiplo dispari di π, le creste di un'onda cadono sui cavi dell'altra: è l'**interferenza distruttiva**, e se le ampiezze sono uguali l'onda risultante è nulla.

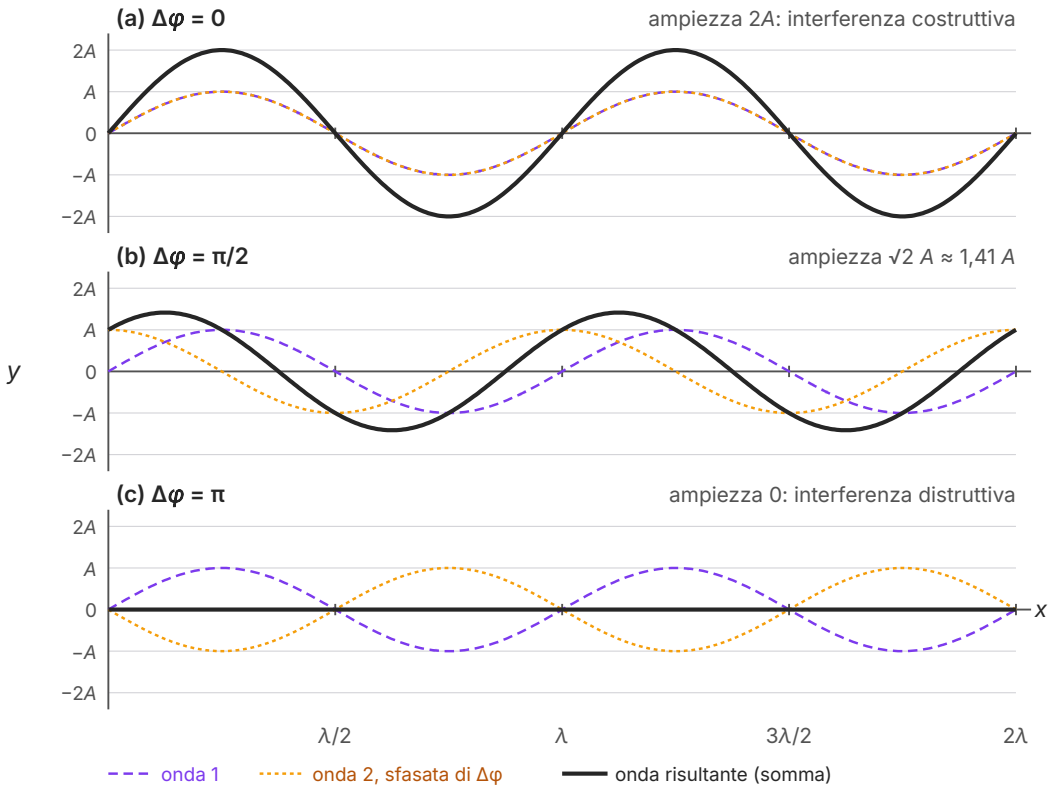


Figura 6.2 Sovrapposizione di due onde armoniche di uguale ampiezza A e uguale lunghezza d'onda, fotografate nello stesso istante, per tre valori della differenza di fase (calcolata da $y = 2A\cos(\Delta\varphi/2)\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \Delta\varphi/2)$). (a) Onde in fase: ampiezza $2A$. (b) Onde in quadratura: ampiezza $\sqrt{2}\,A$. (c) Onde in opposizione di fase: si annullano in ogni punto.

6.2.2 Differenza di fase e differenza di cammino

Da dove nasce una differenza di fase? Il caso più importante è quello di due onde emesse **in fase** da due sorgenti e arrivate in uno stesso punto dopo aver percorso distanze diverse, r_1 e r_2. In quel punto la prima ha fase $kr_1 - \omega t$, la seconda $kr_2 - \omega t$; la differenza è $\Delta\varphi = k(r_1 - r_2) = 2\pi\,\Delta r/\lambda$, dove la **differenza di cammino** $\Delta r = |r_1 - r_2|$ è la differenza fra le distanze percorse. Ogni lunghezza d'onda di differenza di cammino sposta la fase di 2π, cioè non la cambia affatto. Ne seguono le due condizioni che useremo per tutto il capitolo (e di nuovo nel capitolo 8, per la luce):

$$\text{costruttiva: } \Delta r = m\lambda \qquad \text{distruttiva: } \Delta r = (m + \tfrac{1}{2})\lambda$$

dove $m = 0, 1, 2\ldots$ è un numero intero.

DA RICORDARE

In termini di fase. Costruttiva se $\Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi\ldots$; distruttiva se $\Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi\ldots$; in generale $A_{ris} = 2A|\cos(\Delta\varphi/2)|$.

In termini di cammino, per sorgenti in fase. Costruttiva se la differenza di cammino è un numero intero di lunghezze d'onda; distruttiva se è un numero intero di lunghezze d'onda più mezza. Se le sorgenti sono in opposizione di fase le due condizioni si scambiano.

L'ampiezza non si somma, gli spostamenti sì. Il principio di sovrapposizione somma gli spostamenti istante per istante; l'ampiezza risultante dipende dalla fase e va da 0 a $2A$.

COLLEGAMENTI

Le cuffie a cancellazione attiva del rumore

In una cabina d'aereo il rombo dei motori è un rumore grave e abbastanza regolare. Le cuffie a cancellazione attiva lo combattono con l'interferenza distruttiva: un piccolo microfono, sul guscio della cuffia, capta il rumore che arriva dall'esterno; un circuito elettronico produce in tempo reale un segnale uguale ma in opposizione di fase ($\Delta\varphi = \pi$), che l'altoparlante della cuffia emette insieme alla musica. All'orecchio arrivano le due onde di pressione e si cancellano in gran parte.

Il trucco funziona bene soprattutto per i suoni gravi, di lunghezza d'onda grande. Perché la cancellazione sia buona, l'«antirumore» deve arrivare all'orecchio con la fase giusta: un ritardo che sposta la fase anche solo di una frazione di π rovina il risultato, e a parità di ritardo lo sfasamento è tanto maggiore quanto più la frequenza è alta. Per i suoni acuti, come le voci vicine, si affida il lavoro all'isolamento passivo dei cuscinetti.

6.3 L'interferenza di due sorgenti nel piano

6.3.1 Sorgenti coerenti e ondoscopio

Per osservare l'interferenza delle onde sull'acqua si usa l'**ondoscopio**: una vaschetta con il fondo di vetro e pochi millimetri d'acqua, illuminata dall'alto, in cui un'asta collegata a un piccolo motore vibrante tocca la superficie e produce onde. Le creste fanno da lenti e proiettano sul tavolo sottostante strisce chiare, i cavi strisce scure: si vede l'onda, ferma se si illumina con una luce stroboscopica.

Se l'asta porta due punte, S_1 e S_2, entrambe le sorgenti si muovono con lo stesso moto: hanno la stessa frequenza e oscillano in fase. Due sorgenti di uguale frequenza la cui differenza di fase resta costante nel tempo si dicono **sorgenti coerenti**. È una condizione essenziale: se la differenza di fase cambiasse a caso da un istante all'altro, il disegno di interferenza si sposterebbe continuamente e, osservato per un tempo anche breve, sparirebbe in una media uniforme. Due

punte mosse da due motori indipendenti non producono una figura stabile; due punte sulla stessa asta sì.

6.3.2 Linee ventrali e linee nodali

Consideriamo un punto P della superficie a distanza r_1 da S_1 e r_2 da S_2 (vedi la Figura 6.3). Le due onde vi arrivano con una differenza di cammino $|r_1 - r_2|$ e, per quanto visto nel paragrafo precedente, P oscilla con ampiezza massima se $|r_1 - r_2| = m\lambda$ e resta fermo se $|r_1 - r_2| = (m + ½)\lambda$. (Stiamo supponendo che le due onde arrivino in P con la stessa ampiezza; lontano dalle sorgenti è quasi vero, perché r_1 e r_2 sono quasi uguali.) L'insieme dei punti che oscillano con ampiezza massima forma le **linee ventrali**, l'insieme dei punti fermi le **linee nodali**.

Che forma hanno queste linee? Ognuna è l'insieme dei punti P per cui la differenza delle distanze da due punti fissi, S_1 e S_2, è costante. È la definizione di **iperbole** che hai studiato in *Matematica 3*, capitolo 10: il luogo dei punti per cui è costante la differenza (in valore assoluto) delle distanze da due fuochi. Quindi **le linee nodali e le linee ventrali sono rami di iperbole con i fuochi nelle due sorgenti**. Fa eccezione la linea ventrale con $m = 0$, l'asse del segmento S_1S_2, dove le distanze sono uguali: è un'iperbole degenere, una retta.

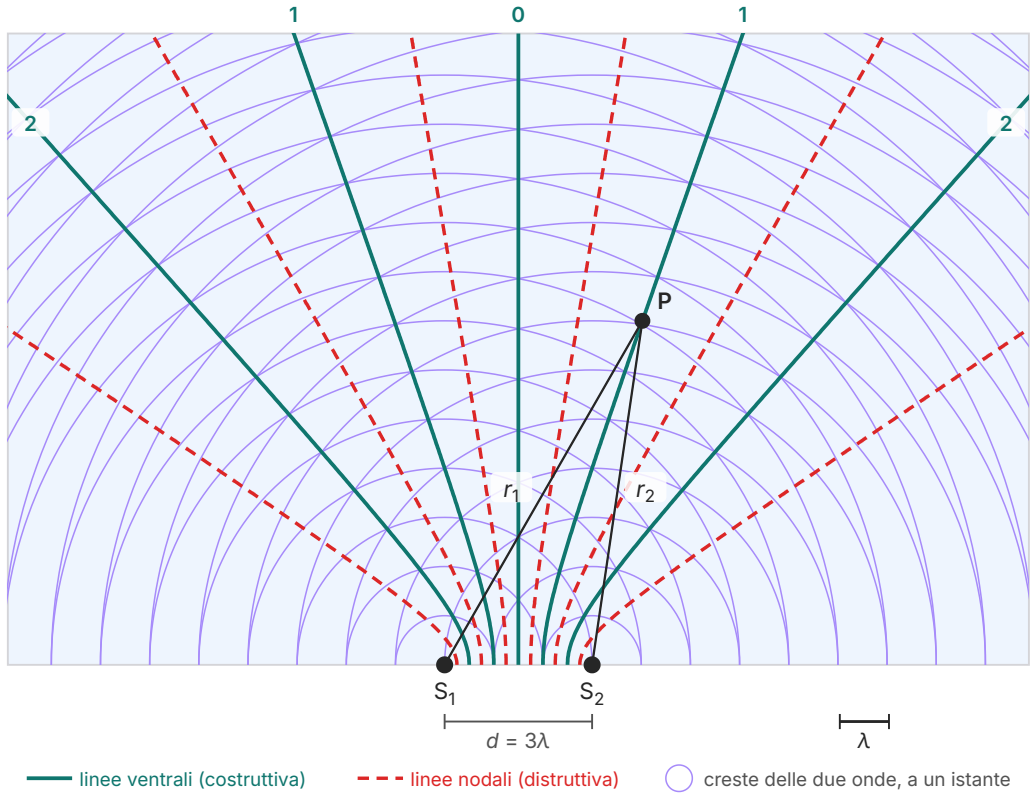


Figura 6.3 Interferenza di due sorgenti puntiformi in fase S_1 e S_2, a distanza $d = 3\lambda$, vista dall'alto (calcolata). In viola chiaro le creste delle due onde in un istante; in verde le linee ventrali, $|r_1 - r_2| = m\lambda$, con il valore di m; in rosso tratteggiato le linee nodali, $|r_1 - r_2| = (m + ½)\lambda$. Sono rami di iperbole con i fuochi nelle sorgenti. Il punto P si trova sulla linea ventrale con $m = 1$: $r_1 - r_2 = \lambda$.

La Figura 6.3 mostra il disegno calcolato per due sorgenti distanti $d = 3\lambda$. Dove una cresta di un'onda incrocia una cresta dell'altra l'acqua sale del doppio; lungo le linee nodali una cresta incontra sempre un cavo. Quante linee ci sono? La differenza di cammino $|r_1 - r_2|$ non può superare la distanza d fra le sorgenti (in un triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due), quindi esistono solo le linee con $m\lambda < d$ oppure $(m + ½)\lambda < d$. Con $d = 3\lambda$ le linee nodali sono sei, tre per parte, e le ventrali cinque (più le due semirette che prolungano S_1S_2 oltre le sorgenti, dove $|r_1 - r_2| = d$). Sorgenti più distanti, o lunghezze d'onda più piccole, producono un disegno più fitto. Ed è proprio questo che rende l'interferenza uno strumento di misura: dalla posizione delle linee si ricava la lunghezza d'onda.

ESEMPIO SVOLTO

Misurare la lunghezza d'onda all'ondoscopio

Problema. In un ondoscopio due punte in fase, distanti 4,0 cm, vibrano a 16,0 Hz. Su un foglio sotto la vaschetta uno studente segna tre punti della prima linea nodale a destra dell'asse (m = 0) e tre punti della seconda (m = 1), e misura con un righello le loro distanze dalle sorgenti, con un'incertezza di 0,1 cm (Tabella 6.1). Ricava la lunghezza d'onda e la velocità delle onde, con le incertezze.

Tabella 6.1 Distanze di sei punti di due linee nodali dalle sorgenti S_1 e S_2 (dati tipici; incertezza 0,1 cm su ogni distanza).

Linea nodale	Punto	r_1 (cm)	r_2 (cm)	$r_1 - r_2$ (cm)
prima (m = 0)	A	4,8	4,2	0,6
	B	8,6	8,0	0,6
	C	12,6	12,0	0,6
seconda (m = 1)	D	5,7	4,0	1,7
	E	9,8	8,2	1,6
	F	14,1	12,5	1,6

Soluzione. 1) **La relazione da usare.** Sulla prima linea nodale $r_1 - r_2 = \lambda/2$, sulla seconda $r_1 - r_2 = 3\lambda/2$. 2) **Le incertezze.** Ogni differenza è affetta dalle incertezze di due misure: $\Delta(r_1 - r_2) = 0{,}1$ cm + 0,1 cm = 0,2 cm. 3) **Prima linea.** La differenza media è 0,60 cm, quindi $\lambda = 2 \times 0{,}60$ cm = 1,2 cm, con incertezza $2 \times 0{,}2$ cm = 0,4 cm: $\lambda = (1{,}2 \pm 0{,}4)$ cm, un'incertezza del 33%. 4) **Seconda linea.** La media è $(1{,}7 + 1{,}6 + 1{,}6)/3$ cm $\approx 1{,}63$ cm, quindi $\lambda = 1{,}63$ cm$/1{,}5 \approx 1{,}09$ cm, con incertezza 0,2 cm$/1{,}5 \approx 0{,}13$ cm: $\lambda = (1{,}09 \pm 0{,}13)$ cm, un'incertezza del 12%.

Che cosa concludere. Le due stime sono compatibili, ma la seconda è tre volte più precisa: l'incertezza sulla differenza di cammino è sempre 0,2 cm, mentre la grandezza misurata è tre volte più grande. Conviene usare le linee nodali più lontane dall'asse. Prendiamo $\lambda = (1{,}1 \pm 0{,}1)$ cm; la velocità è $v = \lambda f = 1{,}1$ cm $\times$ 16,0 Hz ≈ 18 cm/s, con incertezza relativa del 12% circa: $v = (18 \pm 2)$ cm/s.

Controllo. Con d = 4,0 cm e $\lambda \approx 1{,}1$ cm, $d/\lambda \approx 3{,}6$: esistono linee nodali con $m + \tfrac{1}{2} = 0{,}5,\ 1{,}5,\ 2{,}5,\ 3{,}5$, quattro per parte. La seconda linea nodale esiste davvero, e i punti D, E, F si allontanano dall'asse quanto più sono lontani dalle sorgenti, come deve fare un ramo d'iperbole.

6.4 Il principio di Huygens: riflessione e rifrazione

6.4.1 Ogni punto di un fronte d'onda è una sorgente

Nel *Traité de la lumière* (1690) Christiaan Huygens propose un modo geometrico di costruire come avanza un'onda, che usiamo ancora oggi. Ne diamo l'enunciato moderno, il **principio di Huygens**: ogni punto di un fronte d'onda si comporta come una sorgente di onde sferiche secondarie, che si propagano in avanti con la velocità dell'onda in quel mezzo; dopo un intervallo di tempo Δt il nuovo fronte d'onda è la superficie tangente a tutte queste **onde secondarie** (il loro *inviluppo*).

Proviamolo su un'onda piana. In ogni punto del fronte disegniamo una semicirconferenza di raggio $v\Delta t$: la retta tangente a tutte è parallela al fronte di partenza e spostata di $v\Delta t$. L'onda piana resta piana e avanza con velocità v, come ci aspettiamo. (Huygens ignorò le onde secondarie dirette all'indietro; una giustificazione più solida arrivò più tardi, con Fresnel e i suoi successori: ne parleremo nel capitolo 8.) Il principio diventa interessante quando l'onda incontra qualcosa: un cambiamento di mezzo, un ostacolo, un'apertura.

6.4.2 La riflessione

Un fronte d'onda piano arriva obliquamente su una parete. Il suo primo punto tocca la parete e comincia a emettere un'onda secondaria; nel tempo in cui l'ultimo punto del fronte percorre la distanza che lo separa dalla parete, l'onda secondaria del primo punto si allarga di un raggio uguale, perché la velocità è la stessa. I due triangoli rettangoli che si formano (uno con il fronte incidente, l'altro con il fronte riflesso) hanno la stessa ipotenusa sulla parete e un cateto uguale: sono congruenti. Ne segue che il fronte riflesso forma con la parete lo stesso angolo del fronte incidente: è la legge della riflessione che conosci dall'ottica geometrica (*Fisica 2*), ritrovata per qualsiasi onda.

6.4.3 La rifrazione

Le onde sull'acqua bassa sono più lente dove l'acqua è meno profonda (capitolo 5). In un ondoscopio basta appoggiare sul fondo una lastra di vetro per creare una zona di acqua più bassa: un'onda piana che arriva obliquamente sul bordo della lastra cambia direzione. È la rifrazione, e il principio di Huygens permette di trovarne la legge (vedi la Figura 6.4).

Sia v_1 la velocità nel mezzo 1 e v_2 nel mezzo 2, e sia AB un fronte d'onda nell'istante in cui il suo estremo A tocca la superficie di separazione. Nel tempo Δt che l'estremo B impiega per arrivare in D, percorrendo BD = $v_1\Delta t$, l'onda secondaria partita da A si propaga nel mezzo 2 fino a una distanza AC = $v_2\Delta t$. Il nuovo fronte nel mezzo 2 è la retta DC, tangente in C all'onda secondaria di A.

Guardiamo i due triangoli rettangoli ABD (retto in B, perché il raggio BD è perpendicolare al fronte AB) e ACD (retto in C, perché DC è tangente alla circonferenza di centro A). Hanno in comune l'ipotenusa AD. L'angolo θ_1 fra il fronte incidente e la superficie, in A, è opposto al cateto BD; l'angolo θ_2 fra il fronte rifratto e la superficie, in D, è opposto al cateto AC. Quindi

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{v_1\,\Delta t}{\mathrm{AD}} \qquad \operatorname{sen}\theta_2 = \frac{v_2\,\Delta t}{\mathrm{AD}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

Poiché i raggi sono perpendicolari ai fronti, θ_1 e θ_2 sono anche gli angoli che i raggi formano con la normale alla superficie: gli angoli di incidenza e di rifrazione. La relazione ha la stessa forma della legge di Snell dell'ottica geometrica (*Fisica 2*): l'onda si avvicina alla normale quando entra nel mezzo in cui è più lenta. Nel capitolo 8 la useremo per la luce, scoprendo che cosa dice sulla velocità della luce nel vetro e nell'acqua.

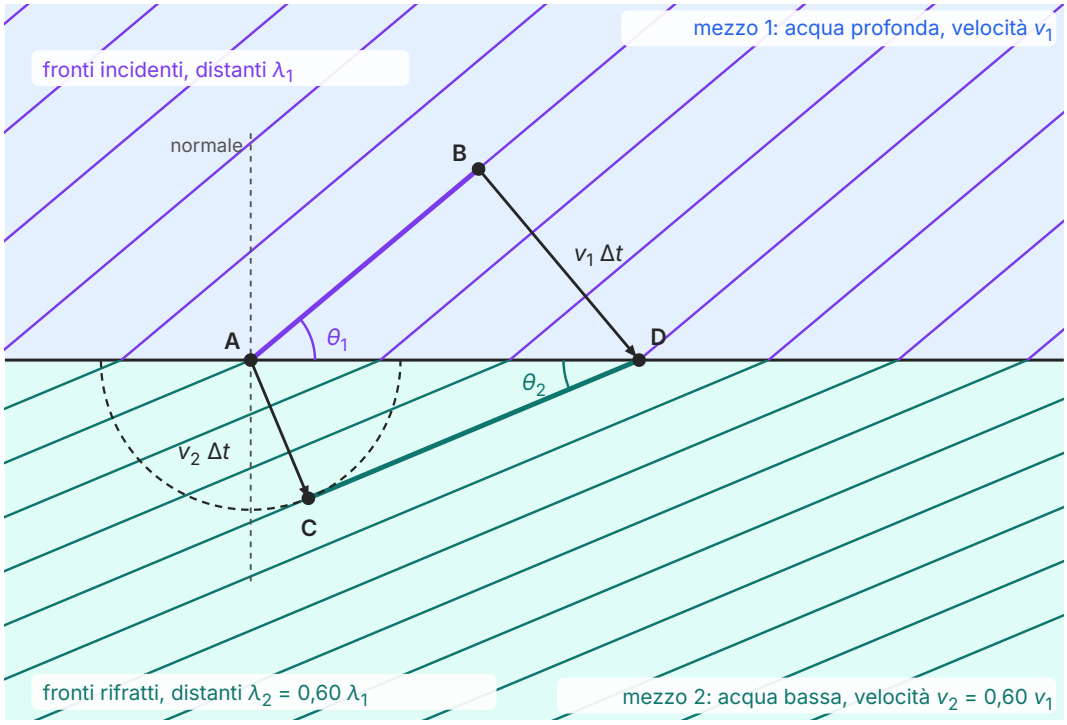


Figura 6.4 Costruzione di Huygens della rifrazione di un'onda piana che passa dall'acqua profonda all'acqua bassa, disegnata in scala con $\theta_1 = 40°$ e $v_2 = 0{,}60\,v_1$. Mentre l'estremo B del fronte AB percorre BD = $v_1\Delta t$, l'onda secondaria emessa da A raggiunge il raggio AC = $v_2\Delta t$ (arco tratteggiato); il fronte rifratto DC è tangente a quell'arco. Ne risulta $\operatorname{sen}\theta_2 = 0{,}60 \operatorname{sen} 40° \approx 0{,}386$, cioè $\theta_2 \approx 22{,}7°$. I fronti rifratti sono più vicini: $\lambda_2 = 0{,}60\,\lambda_1$.

Che cosa succede alla frequenza e alla lunghezza d'onda? Ogni cresta che arriva sulla superficie di separazione «genera» una cresta nel secondo mezzo: in un secondo ne passano tante quante

ne arrivano. La **frequenza** è quindi la stessa nei due mezzi: è fissata dalla sorgente. Cambia la velocità, fissata dal mezzo, e di conseguenza la lunghezza d'onda, $\lambda = v/f$: nel mezzo più lento i fronti sono più fitti, $\lambda_2/\lambda_1 = v_2/v_1$, come si vede nella figura.

ERRORE FREQUENTE

«Quando un'onda entra in acqua più bassa rallenta, quindi la sua frequenza diminuisce.» **No.** La frequenza è il numero di creste che passano in un secondo per un punto; se fosse diversa da una parte e dall'altra della superficie di separazione, le creste si accumulerebbero (o mancherebbero) su di essa, istante dopo istante. Nella rifrazione la frequenza resta quella della sorgente; cambiano la velocità e la lunghezza d'onda, nello stesso rapporto.

Un secondo errore riguarda gli angoli. Nella Figura 6.4 gli angoli sono misurati fra i fronti e la superficie; nella legge di Snell fra i raggi e la normale. Sono uguali, perché ruotando entrambe le rette di 90° l'angolo fra di esse non cambia; ma non bisogna mescolare un angolo dell'uno e uno dell'altro tipo nella stessa formula.

La rifrazione spiega un fatto che chiunque abbia guardato il mare da una scogliera ha notato: le onde arrivano quasi parallele alla riva, qualunque sia la direzione da cui provengono al largo. Avvicinandosi alla costa l'acqua diventa meno profonda e le onde rallentano; la parte di un fronte che è già in acqua bassa avanza più lentamente di quella ancora al largo, e il fronte ruota fino a disporsi quasi parallelo alle linee di uguale profondità. Per lo stesso motivo un promontorio, circondato da fondali bassi, concentra su di sé l'energia delle onde, mentre le baie sono più riparate.

6.5 La diffrazione

6.5.1 Onde che aggirano gli ostacoli

Facciamo arrivare un'onda piana dell'ondoscopio contro una barriera con un'apertura. Se l'onda fosse un fascio di particelle che viaggiano in linea retta, dopo la barriera avremmo una striscia d'onda larga quanto l'apertura e, ai suoi lati, una zona d'ombra perfettamente calma. Non è ciò che si osserva. L'onda, dopo l'apertura, si allarga anche nella zona che la geometria dei raggi direbbe in ombra. Il fenomeno per cui un'onda che incontra un'apertura o un ostacolo si propaga anche oltre i limiti dell'ombra geometrica si chiama **diffrazione**.

Quanto è vistosa la diffrazione? Dipende dal confronto fra la lunghezza d'onda λ e la larghezza a dell'apertura, come mostra la Figura 6.5. Se l'apertura è stretta, con a paragonabile a λ o più piccola, dall'altra parte emergono onde quasi circolari, come se nell'apertura ci fosse una sorgente puntiforme: l'onda si allarga in tutte le direzioni in avanti. Se l'apertura è molto più larga di λ, l'onda prosegue quasi diritta, con un fronte piano largo quanto l'apertura; solo ai bordi si incurva leggermente, invadendo di poco la zona d'ombra. In buona approssimazione il fascio si

allarga di un angolo dell'ordine di λ/a radianti: piccolo se l'apertura è grande. Nel capitolo 8 vedremo che cosa succede dentro il fascio diffratto, dove le onde secondarie interferiscono fra loro.

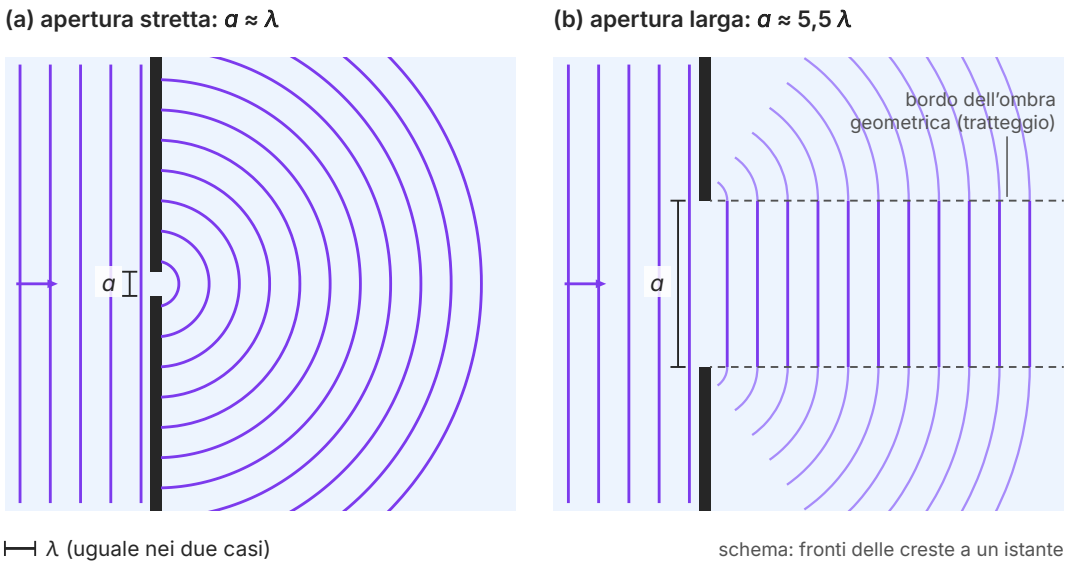


Figura 6.5 Diffrazione di un'onda piana attraverso un'apertura di larghezza a (schema dei fronti delle creste, con la stessa lunghezza d'onda nei due casi). (a) Con $a \approx \lambda$ l'onda emerge quasi circolare e invade tutta la regione oltre la barriera. (b) Con $a \approx 5{,}5\,\lambda$ l'onda prosegue quasi diritta; solo ai bordi i fronti si incurvano (in viola chiaro, dove l'onda è più debole) oltre il limite dell'ombra geometrica (tratteggio).

Il principio di Huygens dà un'immagine qualitativa del fenomeno. I punti del fronte che si trovano nell'apertura emettono onde secondarie; se l'apertura è piccola, i punti sono così vicini da comportarsi come un'unica sorgente puntiforme, e l'onda che ne esce è circolare. Se l'apertura è grande, l'inviluppo delle onde secondarie è un fronte piano nella parte centrale, e solo agli estremi, dove manca il contributo dei punti vicini, l'onda può curvarsi.

Anche un ostacolo viene aggirato: dietro un palo piantato in mare, largo pochi centimetri, le onde lunghe qualche metro si richiudono subito; la diga foranea di un porto, lunga centinaia di metri, crea invece una vasta zona riparata, nella quale le onde entrano solo un po', diffratte dalla testata della diga.

6.5.2 Perché sentiamo dietro l'angolo ma non vediamo

Un suono di 343 Hz nell'aria a 20 °C ha lunghezza d'onda $\lambda = v/f = (343\ \text{m/s})/(343\ \text{Hz}) = 1{,}00\ \text{m}$, una misura paragonabile a quella di una porta. Il suono che attraversa una porta aperta si diffrange fortemente e raggiunge anche chi è nella stanza accanto, lontano dalla linea diritta che passa per la porta: per questo sentiamo una persona che parla nel corridoio senza vederla. Con

le frequenze più alte la diffrazione è meno forte (a 5000 Hz, $\lambda \approx 7$ cm): un suono acuto ascoltato «di lato» a una porta arriva più attenuato di uno grave.

La luce visibile ha lunghezze d'onda di qualche decimo di micrometro, fra circa 400 nm e 700 nm: una porta è larga più di un milione di lunghezze d'onda. Il suo angolo di diffrazione, circa $\lambda/a \approx 10^{-6}$ rad, è così piccolo che la luce, attraverso la porta, procede in linea retta, e l'ombra ha bordi netti. Ecco perché per secoli il modello dei raggi ha funzionato così bene: la diffrazione della luce esiste, ma per osservarla servono aperture di decimi di millimetro o meno. Lo faremo nel capitolo 8.

6.6 Le onde stazionarie

6.6.1 Due onde che viaggiano in versi opposti

Fissiamo una corda a un muro e muoviamo l'altro capo su e giù con continuità. L'onda che mandiamo si riflette all'estremo fisso e torna indietro capovolta (capitolo 5): sulla corda viaggiano due onde della stessa frequenza in versi opposti. Per certe frequenze ben precise la corda smette di sembrare percorsa da onde e si divide in tratti che oscillano su e giù, separati da punti che restano fermi. È un'**onda stazionaria**: una configurazione di oscillazione prodotta dalla sovrapposizione di due onde uguali che si propagano in versi opposti, nella quale il profilo non avanza.

Sommiamo un'onda che viaggia verso $+x$, $y_1 = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t)$, e una uguale che viaggia verso $-x$, $y_2 = A\,\mathrm{sen}(kx + \omega t)$. Con la formula di prostaferesi, ponendo $\alpha = kx - \omega t$ e $\beta = kx + \omega t$, si ha $(\alpha + \beta)/2 = kx$ e $(\alpha - \beta)/2 = -\omega t$; poiché $\cos(-\omega t) = \cos \omega t$,

$$y(x, t) = 2A\,\mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t)$$

Questa espressione non contiene più la combinazione $kx - \omega t$: non descrive qualcosa che si sposta. Ogni punto della corda, di posizione x, compie un moto armonico (*Fisica 3*, capitolo 4) con la pulsazione ω delle onde componenti e con un'ampiezza $2A|\mathrm{sen}(kx)|$ che dipende dalla sua posizione.

I punti in cui $\mathrm{sen}(kx) = 0$ non si muovono mai: sono i **nodi**. Succede quando $kx = 0, \pi, 2\pi\ldots$, cioè in $x = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2\ldots$: **due nodi successivi distano $\lambda/2$**. A metà strada fra due nodi, dove $|\mathrm{sen}(kx)| = 1$, l'ampiezza è massima, $2A$: sono i **ventri**, anch'essi distanti $\lambda/2$ fra loro e a $\lambda/4$ dai nodi più vicini. Tutti i punti compresi fra due nodi successivi oscillano in fase, arrivando insieme alla massima altezza; i punti del tratto adiacente oscillano in opposizione di fase, perché $\mathrm{sen}(kx)$ ha cambiato segno.

Un'onda stazionaria non trasporta energia lungo la corda. Un nodo è un punto sempre fermo: la parte di corda alla sua sinistra non compie lavoro su quella alla sua destra, e l'energia non può attraversarlo. In ogni tratto fra due nodi l'energia resta lì e cambia soltanto forma: è tutta energia potenziale elastica quando la corda è nella massima deformazione, tutta energia

cinetica quando la corda passa per la posizione rettilinea. Le due onde componenti trasportano energie uguali in versi opposti.

6.6.2 La corda fissata ai due estremi

Una corda di chitarra o di violino è fissata a entrambi gli estremi, a distanza L: in $x = 0$ e in $x = L$ devono esserci due nodi. Il primo è automatico, perché sen 0 = 0; il secondo richiede sen(kL) = 0, cioè $kL = n\pi$ con $n = 1, 2, 3\ldots$ Poiché $k = 2\pi/\lambda$, la condizione diventa $L = n\lambda/2$: **sulla corda deve stare un numero intero di mezze lunghezze d'onda**. Le sole lunghezze d'onda e le sole frequenze possibili sono quindi

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad f_n = \frac{nv}{2L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\left(\frac{F_T}{\mu}\right)} \qquad (n = 1, 2, 3\ldots)$$

dove abbiamo usato la velocità delle onde su una corda tesa, $v = \sqrt{(F_T/\mu)}$ (capitolo 5). La frequenza più bassa, $f_1 = v/(2L)$, si chiama **frequenza fondamentale** (o prima armonica); le altre sono i suoi multipli interi, $f_n = nf_1$, e si chiamano **armoniche**. Le configurazioni di oscillazione corrispondenti sono i **modi normali di oscillazione** della corda, rappresentati nella Figura 6.6: il modo n-esimo ha n tratti oscillanti, detti anche **fusi**, e $n + 1$ nodi, estremi compresi.

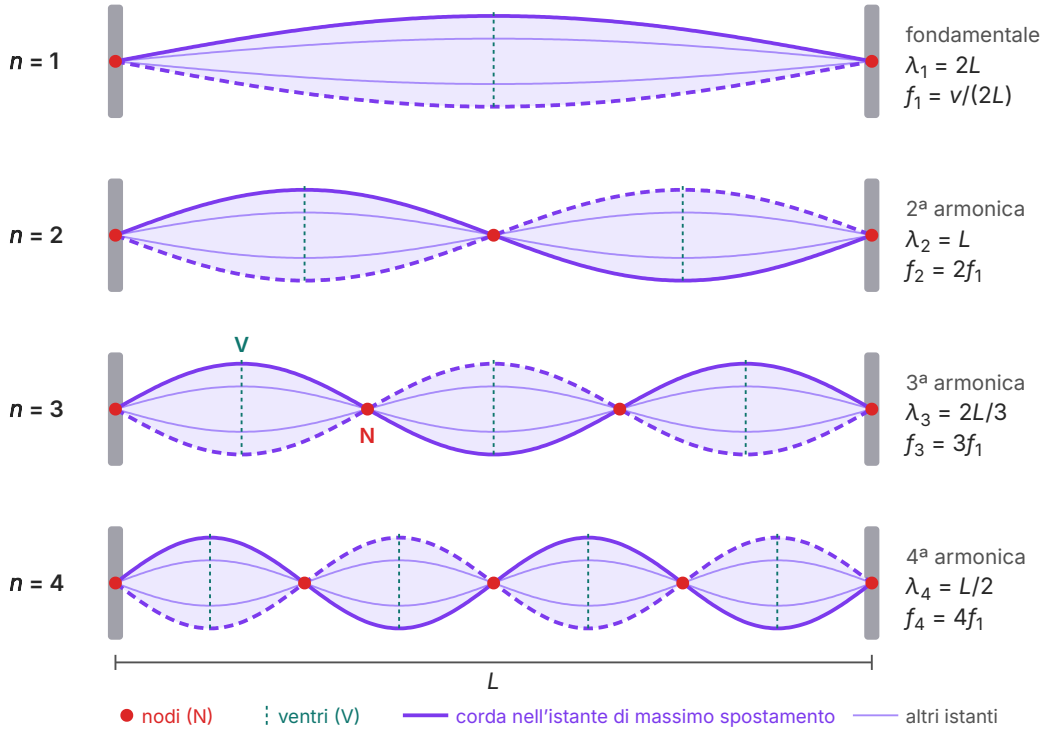


Figura 6.6 I primi quattro modi normali di oscillazione di una corda fissata ai due estremi, a distanza L (calcolati da $y = 2A\,\mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t)$ con $k = n\pi/L$). In viola la corda negli istanti di massimo spostamento (continua e tratteggiata), in viola chiaro due istanti intermedi; i nodi (N) sono in rosso, i ventri (V) sono segnati dalle linee verticali verdi. Il modo n ha n fusi, lunghezza d'onda $2L/n$ e frequenza nf_1.

Il legame con la risonanza studiata lo scorso anno è diretto. Un oscillatore come una massa su una molla ha una sola frequenza propria; una corda tesa ne ha infinite, le frequenze dei suoi modi normali. Se si fa vibrare un estremo della corda con una frequenza qualsiasi, le onde riflesse avanti e indietro si sovrappongono con fasi disordinate e la corda si muove poco; se la frequenza coincide con una delle f_n, le riflessioni successive si rinforzano a vicenda, la corda entra in risonanza e l'onda stazionaria raggiunge una grande ampiezza.

ESEMPIO SVOLTO

La corda di una chitarra

Problema. La quinta corda di una chitarra (il La) è lunga, fra il capotasto e il ponticello, 0,650 m, ha una densità lineare di 3,6 g/m e, ben accordata, ha la frequenza fondamentale di 110 Hz. Calcola a) la velocità delle onde sulla corda e la lunghezza d'onda della fondamentale; b) la tensione della corda; c) le frequenze della seconda e della terza armonica; d) a quale distanza dal ponticello bisogna premere la corda contro un tasto per ottenere la fondamentale di 165 Hz.

Soluzione. a) Per la fondamentale $\lambda_1 = 2L = 2 \times 0{,}650\ \text{m} = 1{,}30\ \text{m}$. La velocità è fissata dalla corda e dalla sua tensione: $v = \lambda_1 f_1 = 1{,}30\ \text{m} \times 110\ \text{Hz} = 143\ \text{m/s}$.

b) Da $v = \sqrt{(F_T/\mu)}$ si ricava $F_T = \mu v^2 = 3{,}6 \times 10^{-3}\ \text{kg/m} \times (143\ \text{m/s})^2 \approx 74\ \text{N}$: più o meno il peso di una massa di 7,5 kg.

c) $f_2 = 2f_1 = 220\ \text{Hz}$, $f_3 = 3f_1 = 330\ \text{Hz}$.

d) Premendo la corda contro un tasto si accorcia la parte che vibra, mentre la tensione e quindi la velocità restano le stesse. Serve $L' = v/(2f') = (143\ \text{m/s})/(2 \times 165\ \text{Hz}) \approx 0{,}433\ \text{m}$, cioè il tasto deve trovarsi a 0,433 m dal ponticello (a 0,217 m dal capotasto).

Controllo. Il rapporto delle frequenze, 165/110 = 3/2, deve essere l'inverso del rapporto delle lunghezze: 0,650 m/0,433 m = 1,50. Il risultato è indipendente dalla tensione: per suonare una nota una volta e mezza più acuta si fa vibrare due terzi della corda, su qualunque chitarra.

COLLEGAMENTI

Corde, tasti e accordatura

La formula $f_1 = (1/2L)\sqrt{(F_T/\mu)}$ è il manuale d'uso di ogni strumento a corda. Le corde gravi sono più spesse, spesso rivestite da una spirale di filo metallico, per avere una μ grande senza diventare troppo rigide; si accorda girando i piroli, che cambiano la tensione: una frequenza più alta del 6% richiede una tensione più alta del 12%, perché $f \propto \sqrt{F_T}$. Con i tasti, o con le dita sulla tastiera di un violino, si cambia L.

Una corda pizzicata, però, non vibra in un solo modo: oscilla contemporaneamente nella fondamentale e in molte armoniche, con ampiezze che dipendono da dove e come viene pizzicata. Il principio di sovrapposizione permette a tutti questi modi di coesistere sulla stessa corda. La miscela di armoniche è una delle cose che distinguono il suono di una chitarra da quello di un violino che suona la stessa nota: ne parleremo nel prossimo capitolo, studiando il timbro.

APPROFONDIMENTO

Le figure di Chladni

Le onde stazionarie esistono anche in due dimensioni: sulla pelle di un tamburo, su una lastra di metallo o sulla tavola di legno di una chitarra. Il fisico e musicista tedesco Ernst Chladni le rese visibili con un esperimento semplice: fissò al centro una lastra metallica sottile, la cosparse di sabbia fine e la fece vibrare strofinandone il bordo con un archetto di violino. La sabbia, scossa via dalle zone che oscillano, si raccoglie lungo le **linee nodali**, che restano ferme, e disegna figure geometriche regolari.

Cambiando il punto in cui si strofina l'archetto, o il punto in cui si tocca il bordo con un dito per imporre un nodo, la lastra vibra in un modo diverso e la sabbia corre a formare una figura nuova, di solito più intricata quanto più è alta la frequenza. Come per la corda, una lastra ha molti modi normali, ciascuno con la sua frequenza; ma in due dimensioni le frequenze dei modi non sono più multipli interi della fondamentale. Le figure di Chladni si ottengono oggi con un altoparlante che fa vibrare la lastra a una frequenza scelta, e sono usate anche da alcuni liutai per studiare come vibrano le tavole degli strumenti.

ERRORE FREQUENTE

«In un'onda stazionaria i nodi distano una lunghezza d'onda.» **No:** due nodi successivi distano $\lambda/2$, e lo stesso vale per due ventri; fra un nodo e il ventre più vicino c'è $\lambda/4$. Sulla corda fissata agli estremi la fondamentale ha un solo fuso, quindi la corda è lunga mezza lunghezza d'onda: $\lambda_1 = 2L$, non L.

«Nei nodi c'è interferenza distruttiva, quindi lì l'energia viene distrutta.» **No.** L'interferenza ridistribuisce l'energia nello spazio: ciò che manca nei nodi si ritrova nei ventri, dove l'ampiezza è doppia e l'energia, proporzionale al quadrato dell'ampiezza, quattro volte quella di una singola onda. Lo stesso vale per le linee nodali dell'ondoscopio.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: l'esperimento di Melde

Materiali. Un vibratore meccanico collegato a un generatore di funzioni a bassa tensione, regolato a $f = (50{,}0 \pm 0{,}1)$ Hz; un filo di nylon intrecciato; una carrucola fissata al bordo del tavolo; un portapesi e masse da 0,5 g a 500 g; un metro a nastro (risoluzione 1 mm); una bilancia (risoluzione 0,01 g).

Procedimento. 1) **Densità lineare per pesata.** Taglia 2,000 m dello stesso filo e pesalo: 0,96 g. Quindi $\mu = 0{,}96\ \text{g}/2{,}000\ \text{m} = (4{,}80 \pm 0{,}05) \times 10^{-4}$ kg/m. 2) **Montaggio.** Lega un capo del filo al vibratore, fallo passare sulla carrucola e appendi all'altro capo il portapesi: la tensione è il suo peso, $F_T = mg$. Il tratto che vibra, dal vibratore alla sommità della carrucola, è lungo $L = (1{,}200 \pm 0{,}005)$ m. L'ampiezza del vibratore è di pochi millimetri, molto minore di quella dei ventri: il punto di attacco si comporta quasi come un nodo. 3) **Ricerca delle risonanze.** Partendo da circa 750 g, diminuisci la massa appesa finché la corda vibra con un solo fuso ampio e stabile; poi cerca la massa che dà due fusi, tre, quattro, cinque. Per ogni modo annota l'intervallo di masse in cui i fusi restano netti: è l'incertezza. 4) Per ogni n calcola F_T, $1/\sqrt{F_T}$ e il valore di μ che la formula delle armoniche prevede: $\mu = F_T n^2/(2Lf)^2$.

Tabella 6.2 Masse appese per le quali il filo vibra in risonanza con n fusi, a $f = 50{,}0$ Hz e $L = 1{,}200$ m (dati tipici di una prova; $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$).

n	m (g)	F_T (N)	$1/\sqrt{F_T}$ ($\text{N}^{-1/2}$)	μ (10^{-4} kg/m)
1	700 ± 15	6,86 ± 0,15	0,382 ± 0,004	4,76
2	178 ± 4	1,74 ± 0,04	0,757 ± 0,009	4,85
3	77 ± 2	0,755 ± 0,020	1,151 ± 0,015	4,72
4	45 ± 1	0,441 ± 0,010	1,506 ± 0,017	4,90
5	28,5 ± 1,0	0,279 ± 0,010	1,89 ± 0,03	4,85

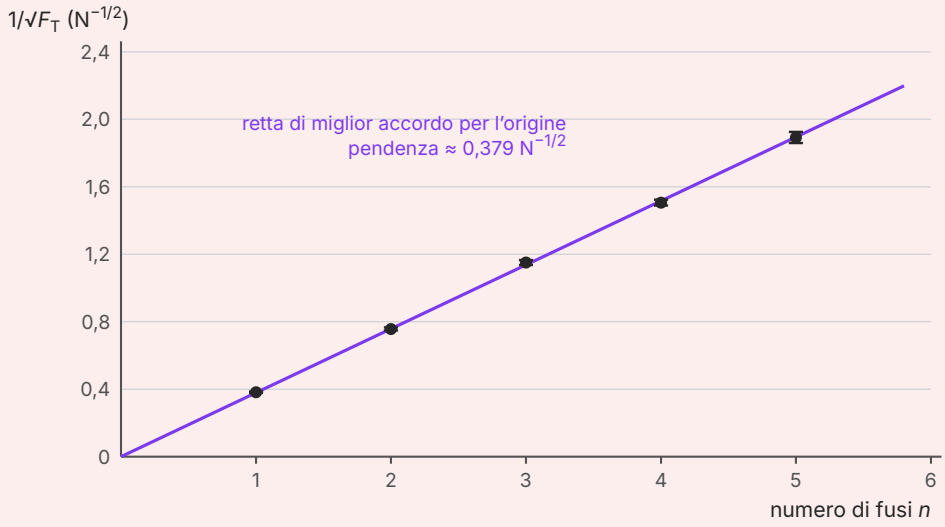


Figura 6.7 Il reciproco della radice della tensione in funzione del numero di fusi, con le barre d'errore, per i dati della Tabella 6.2. Se $f_n = (n/2L)\sqrt{(F_T/\mu)}$ con f fissata, $1/\sqrt{F_T} = n/(2Lf\sqrt{\mu})$: i punti devono stare su una retta per l'origine.

Che cosa concludere. Con la frequenza fissata dal vibratore, la formula delle armoniche prevede $F_T = \mu(2Lf/n)^2$: la tensione necessaria è inversamente proporzionale a n^2. Il grafico di $1/\sqrt{F_T}$ in funzione di n (Figura 6.7) è infatti una retta che passa per l'origine, entro le barre d'errore, con pendenza $\approx 0{,}379\ \mathrm{N}^{-1/2}$. I cinque valori di μ dell'ultima colonna hanno media $4{,}82 \times 10^{-4}$ kg/m e semidispersione $0{,}09 \times 10^{-4}$ kg/m: $\mu_{\text{onde}} = (4{,}82 \pm 0{,}09) \times 10^{-4}$ kg/m. Dalla pendenza si ottiene $1/(2Lf \times 0{,}379\ \mathrm{N}^{-1/2})^2 \approx 4{,}84 \times 10^{-4}$ kg/m, in accordo.

Confronto teoria–esperimento. La densità lineare ricavata dalle risonanze, $(4{,}82 \pm 0{,}09) \times 10^{-4}$ kg/m, e quella pesata, $(4{,}80 \pm 0{,}05) \times 10^{-4}$ kg/m, sono compatibili: gli intervalli si sovrappongono. Si può anche usare la teoria per una previsione: con la μ pesata, tre fusi richiedono una massa $m = \mu(2Lf/3)^2/g = (78 \pm 2)$ g, mentre si misura (77 ± 2) g: anche qui c'è compatibilità. Le piccole differenze hanno cause che il modello trascura: il punto di attacco al vibratore non è un nodo perfetto, e sotto i carichi maggiori il filo si allunga un poco, diventando più sottile.

Sicurezza. Il generatore e il vibratore lavorano a bassa tensione: non collegarli mai alla rete elettrica. Fissa bene la carrucola e tieni i piedi lontani dal portapesi: se il filo si spezza, la massa cade.

Per la relazione. Segui lo schema di *Fisica 1*, capitolo 5. Spiega perché la frequenza è la stessa per tutti i modi e che cosa cambia da un modo all'altro; perché si riporta $1/\sqrt{F_T}$ e non F_T; come hai stimato l'incertezza sulla massa. Concludi con il confronto fra le due misure di μ e una discussione degli effetti sistematici.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$y = y_1 + y_2$ — principio di sovrapposizione: gli spostamenti prodotti da più onde si sommano punto per punto, istante per istante. Vale nei mezzi lineari (piccole deformazioni).

$A_{ris} = 2A|\cos(\Delta\varphi/2)|$ — ampiezza della somma di due onde di uguale ampiezza A, frequenza e verso, sfasate di $\Delta\varphi$ (rad).

$\Delta\varphi = 2\pi\Delta r/\lambda$ — differenza di fase dovuta a una differenza di cammino Δr (m), per sorgenti in fase. Costruttiva se $\Delta r = m\lambda$, distruttiva se $\Delta r = (m + ½)\lambda$. Nel piano, linee ventrali e nodali sono rami di iperbole con i fuochi nelle sorgenti, che devono essere coerenti.

$\text{sen}\,\theta_1/\text{sen}\,\theta_2 = v_1/v_2 = \lambda_1/\lambda_2$ — rifrazione di un'onda, dal principio di Huygens; la frequenza non cambia.

Diffrazione: è vistosa quando la larghezza a dell'apertura o dell'ostacolo è paragonabile a λ; il fascio si allarga di un angolo dell'ordine di λ/a.

$y = 2A\,\text{sen}(kx)\cos(\omega t)$ — onda stazionaria prodotta da due onde uguali in versi opposti: nodi distanti $\lambda/2$, nessun trasporto netto di energia.

$\lambda_n = 2L/n$, $f_n = nv/(2L) = (n/2L)\sqrt{(F_T/\mu)}$ — modi normali di una corda di lunghezza L (m) fissata ai due estremi; f_n in Hz, F_T in N, μ in kg/m.

SINTESI

- Per il principio di sovrapposizione, quando più onde attraversano lo stesso mezzo lineare lo spostamento di ogni punto è la somma degli spostamenti dovuti alle singole onde; dopo l'incontro ogni onda prosegue invariata.
- Due onde armoniche di uguale ampiezza, frequenza e verso, sfasate di $\Delta\varphi$, danno un'onda della stessa frequenza e lunghezza d'onda con ampiezza $2A|\cos(\Delta\varphi/2)|$: costruttiva ($2A$) per $\Delta\varphi$ multiplo pari di π, distruttiva (0) per $\Delta\varphi$ multiplo dispari di π.
- Per due sorgenti in fase la differenza di fase in un punto è $2\pi\Delta r/\lambda$: l'interferenza è costruttiva se la differenza di cammino è $m\lambda$, distruttiva se è $(m + ½)\lambda$.
- Un disegno d'interferenza stabile richiede sorgenti coerenti, di uguale frequenza e con differenza di fase costante.
- Nel piano, le linee ventrali e le linee nodali di due sorgenti sono rami di iperbole con i fuochi nelle sorgenti; il loro numero cresce con il rapporto d/λ, e la loro posizione permette di misurare λ.
- Per il principio di Huygens ogni punto di un fronte d'onda emette onde secondarie, e il nuovo fronte è il loro inviluppo; ne seguono le leggi della riflessione e della rifrazione, $\text{sen}\,\theta_1/\text{sen}\,\theta_2 = v_1/v_2$.
- Nella rifrazione la frequenza, fissata dalla sorgente, resta la stessa; la velocità, fissata dal mezzo, e la lunghezza d'onda cambiano nello stesso rapporto.
- La diffrazione è la propagazione di un'onda oltre i limiti dell'ombra geometrica di un'apertura o di un ostacolo; è vistosa quando le loro dimensioni sono paragonabili alla lunghezza d'onda. Per questo il suono aggira gli angoli e la luce, nella vita quotidiana, no.
- Due onde uguali che viaggiano in versi opposti formano un'onda stazionaria, $y = 2A\,\text{sen}(kx)\cos(\omega t)$: ogni punto oscilla con un'ampiezza che dipende dalla posizione, nulla nei nodi e massima nei ventri, distanti $\lambda/2$; l'energia non si propaga.
- Su una corda fissata ai due estremi stanno solo onde stazionarie con un numero intero di mezze lunghezze d'onda: $\lambda_n = 2L/n$ e $f_n = nv/(2L)$, multipli interi della fondamentale.
- Le frequenze dei modi normali sono le frequenze proprie della corda: se la si fa vibrare a una di esse, entra in risonanza (esperimento di Melde).

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Due impulsi che corrono in versi opposti su una corda tesa si incontrano. Dopo essersi attraversati:
   - **A.** si riflettono l'uno sull'altro e tornano indietro
   - **B.** si fondono in un unico impulso più alto
   - **C.** proseguono con la stessa forma e la stessa velocità che avevano prima
   - **D.** proseguono, ma con l'ampiezza dimezzata

2. ● Due onde armoniche di uguale ampiezza A e uguale frequenza viaggiano nello stesso verso, in opposizione di fase. L'ampiezza dell'onda risultante è:
   - **A.** 0
   - **B.** A
   - **C.** $\sqrt{2}\,A$
   - **D.** $2A$

3. ●● Due sorgenti in fase emettono onde di lunghezza d'onda 0,10 m. In un punto P le distanze dalle sorgenti sono $r_1 = 1{,}25$ m e $r_2 = 1{,}00$ m. In P l'interferenza è:
   - **A.** costruttiva, perché la differenza di cammino è un multiplo intero di λ
   - **B.** costruttiva, perché le due onde hanno la stessa frequenza
   - **C.** distruttiva, perché P è più vicino a S_2
   - **D.** distruttiva, perché la differenza di cammino è 2,5 λ

4. ● Un'onda passa dall'acqua profonda all'acqua bassa. Quale grandezza resta invariata?
   - **A.** la lunghezza d'onda
   - **B.** la frequenza
   - **C.** la velocità di propagazione
   - **D.** la direzione di propagazione, se l'incidenza è obliqua

5. ●● La diffrazione di un'onda attraverso una fenditura è più vistosa quando:
   - **A.** la larghezza della fenditura è paragonabile alla lunghezza d'onda
   - **B.** la larghezza della fenditura è molto maggiore della lunghezza d'onda
   - **C.** l'ampiezza dell'onda è molto grande
   - **D.** la frequenza dell'onda è molto alta, a parità di velocità

6. ● In un'onda stazionaria la distanza fra due nodi successivi è:
   - **A.** $\lambda/4$
   - **B.** λ
   - **C.** $\lambda/2$
   - **D.** 2λ

7. ●● La frequenza fondamentale di una corda fissata ai due estremi è 110 Hz. La terza armonica ha frequenza:
   A. 36,7 Hz
   B. 220 Hz
   C. 110 Hz
   D. 330 Hz

8. ●● Se si quadruplica la tensione di una corda, lasciandone invariate la lunghezza e la densità lineare, la sua frequenza fondamentale:
   A. quadruplica
   B. raddoppia
   C. resta la stessa
   D. si dimezza

Vero o falso

9. ● Dove due onde interferiscono in modo distruttivo, l'energia delle onde viene distrutta. V / F

10. ● Due sorgenti si dicono coerenti se hanno la stessa frequenza e una differenza di fase costante nel tempo. V / F

11. ●● In un'onda stazionaria tutti i punti compresi fra due nodi successivi oscillano in fase. V / F

12. ●● Quando un'onda passa dall'acqua profonda all'acqua bassa, la sua frequenza diminuisce. V / F

13. ●● Un'onda stazionaria su una corda trasporta energia da un estremo all'altro. V / F

Applicare

14. ● Due onde armoniche di ampiezza 3,0 mm, con la stessa frequenza e lo stesso verso, sono sfasate di $\pi/3$. Calcola l'ampiezza dell'onda risultante.

15. ● In un ondoscopio due sorgenti in fase producono onde di lunghezza d'onda 1,8 cm. Un punto P dista $r_1 = 12{,}6$ cm e $r_2 = 9{,}0$ cm dalle sorgenti; un punto Q dista 11,7 cm e 9,0 cm. Stabilisci per ciascun punto se si trova su una linea ventrale o su una linea nodale, e quale.

16. ● Su una corda lunga 0,65 m, fissata ai due estremi, le onde si propagano a 286 m/s. Calcola la lunghezza d'onda e la frequenza della fondamentale e le frequenze della seconda e della terza armonica.

17. ●● Un'onda sull'acqua, di frequenza 4,0 Hz, passa da una zona in cui si propaga a 0,30 m/s a una in cui si propaga a 0,20 m/s. L'angolo di incidenza è 35°. Calcola l'angolo di rifrazione e le lunghezze d'onda nei due mezzi.

18. ●● Su una corda c'è l'onda stazionaria $y = (4{,}0\ \text{mm})\ \text{sen}[(5{,}0\ \text{rad/m})\,x]\ \cos[(600\ \text{rad/s})\,t]$. Ricava la lunghezza d'onda, la frequenza, l'ampiezza e la velocità delle due onde che la compongono, e le posizioni dei primi tre nodi a partire da $x = 0$.

19. ● Completa. In un'onda stazionaria i punti che restano sempre fermi si chiamano _____ , quelli che oscillano con l'ampiezza massima si chiamano _____ ; fra un nodo e il ventre più vicino c'è una distanza di _____ . Su una corda fissata ai due estremi la lunghezza della corda è sempre un multiplo intero di _____ .

20. ●● Una corda lunga 0,90 m vibra con la forma della terza riga della Figura 6.6, a 240 Hz. Quanti nodi ha, estremi compresi? Calcola la lunghezza d'onda, la velocità delle onde sulla corda e la frequenza fondamentale.

21. ●● Calcola il rapporto fra la larghezza di una porta, 0,90 m, e la lunghezza d'onda a) di un suono di 340 Hz nell'aria a 20 °C; b) della luce verde, di lunghezza d'onda 550 nm. Spiega che cosa dicono i due rapporti sulla diffrazione nei due casi.

Problemi

22. ●●● In un ondoscopio due punte in fase, distanti 6,0 cm, vibrano a 12 Hz; le onde si propagano a 0,18 m/s. a) Calcola la lunghezza d'onda. b) Quante linee nodali attraversano il segmento che unisce le due punte? c) A che distanza l'uno dall'altro si trovano i punti fermi lungo quel segmento?

23. ●● (Con il capitolo 5.) La prima corda di una chitarra, lunga 0,648 m, ha una densità lineare di 0,40 g/m e una frequenza fondamentale di 329,6 Hz. a) Calcola la velocità delle onde e la tensione della corda. b) A quale distanza dal capotasto si deve premere la corda per ottenere una fondamentale di 440 Hz?

24. ●●● In un esperimento di Melde il tratto di filo che vibra è lungo 1,50 m, il vibratore lavora a 60 Hz e la densità lineare del filo è 2,5 g/m. a) Calcola le masse da appendere per ottenere 2, 3 e 4 fusi. b) Uno studente appende 0,50 kg: quanti fusi vedrà? Motiva la risposta.

25. ●●● (Con *Fisica 3*, capitolo 4.) Una corda lunga 0,50 m vibra nella fondamentale a 200 Hz; l'ampiezza nel ventre è 3,0 mm. a) Calcola la velocità massima e l'accelerazione massima del punto al centro della corda. b) Ripeti il calcolo per il punto a un sesto della lunghezza da un estremo. c) Confronta la velocità massima del punto centrale con la velocità delle onde sulla corda.

26. ●●● (Con il capitolo 5.) Onde lunghe del mare, di periodo 12 s, passano da un fondale profondo 20 m a uno profondo 5,0 m; in acqua bassa la loro velocità è $v = \sqrt{(gh)}$. L'angolo di incidenza sulla linea che separa i due fondali è 30°. a) Calcola le velocità nei due fondali. b) Calcola l'angolo di rifrazione. c) Calcola le lunghezze d'onda. d) Spiega perché le onde arrivano quasi parallele alla riva.

27. ●●● Due sorgenti in fase S_1 e S_2, distanti 5,0 cm, producono onde di lunghezza d'onda 2,0 cm. Un punto P si muove lungo la retta perpendicolare a S_1S_2 passante per S_1, a distanza y da S_1. Trova i valori di y per cui P si trova su una linea nodale e quelli per cui si trova su una linea ventrale (S_1 escluso).

28. ●●● (Con il capitolo 5.) Una corda lunga 1,20 m, fissata ai due estremi, entra in risonanza a 150 Hz e poi a 200 Hz, senza altre risonanze fra le due. a) Qual è la frequenza fondamentale? A quali armoniche corrispondono le due risonanze? b) Calcola la velocità delle onde. c) Se la densità lineare è 5,0 g/m, qual è la tensione?

29. ●● Uno studente misura le prime quattro frequenze di risonanza di una corda lunga 0,80 m: 61 Hz, 119 Hz, 182 Hz e 241 Hz. a) Verifica che sono, entro gli errori di misura, multipli interi di una stessa frequenza e stimala. b) Calcola la velocità delle onde sulla corda.

Ragionare e argomentare

30. ● Spiega perché sentiamo una persona che parla nel corridoio, dietro una porta aperta, anche se non la vediamo.

31. ●● Trova l'errore. «Una corda lunga 0,50 m, su cui le onde viaggiano a 100 m/s, ha frequenze di risonanza $f_n = nv/L$ = 200 Hz, 400 Hz, 600 Hz...» Correggi il ragionamento e il risultato.

32. ●●● Progetta un esperimento per misurare la velocità delle onde in un ondoscopio usando l'interferenza di due sorgenti. Indica che cosa misuri, con quali strumenti, e come scegli i punti per rendere piccola l'incertezza.

33. ●●● Il modello delle iperboli nodali suppone che le due onde arrivino in ogni punto con la stessa ampiezza, e che il mezzo sia lineare. Discuti in quali regioni dell'ondoscopio la prima ipotesi è meno accurata e che cosa si osserva lì sulle linee nodali; poi spiega perché il principio di sovrapposizione non si può applicare alle onde che si frangono sulla spiaggia.

PER APPROFONDIRE

- [HUY] C. Huygens, *Traité de la lumière*: nel primo capitolo la costruzione delle onde secondarie e del loro inviluppo, nel terzo la rifrazione ricavata dal rapporto delle velocità.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: i capitoli sull'interferenza e sui modi normali di una corda, con il collegamento fra onde stazionarie e armoniche.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sulle onde, per molti esercizi su interferenza, onde stazionarie e risonanza di una corda.
- [HEW] P. G. Hewitt, *Conceptual Physics*: il capitolo sulle onde, per un'introduzione senza formule all'interferenza e alla diffrazione delle onde sull'acqua.
- [TAY] J. R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*: le rette di miglior accordo e il confronto fra due misure della stessa grandezza, utili per la relazione sull'esperimento di Melde.

Glossario del capitolo

Armoniche
Frequenze multiple intere della fondamentale, $f_n = nf_1$; la fondamentale è la prima armonica.

Differenza di cammino
Differenza $|r_1 - r_2|$ fra le distanze percorse da due onde per arrivare in uno stesso punto; produce una differenza di fase $2\pi\Delta r/\lambda$.

Differenza di fase
Differenza $\Delta\varphi$ fra gli argomenti delle funzioni seno di due onde armoniche della stessa frequenza; si misura in radianti.

Diffrazione
Propagazione di un'onda oltre i limiti dell'ombra geometrica di un'apertura o di un ostacolo; è vistosa quando le loro dimensioni sono paragonabili a λ.

Frequenza fondamentale
La più bassa frequenza di risonanza di una corda fissata ai due estremi, $f_1 = v/(2L)$.

Interferenza
Sovrapposizione di onde che produce, nei diversi punti del mezzo, ampiezze maggiori o minori di quelle delle singole onde.

Interferenza costruttiva
Interferenza fra onde in fase ($\Delta\varphi$ multiplo pari di π): l'ampiezza risultante è la somma delle ampiezze.

Interferenza distruttiva
Interferenza fra onde in opposizione di fase ($\Delta\varphi$ multiplo dispari di π): l'ampiezza risultante è la differenza delle ampiezze, nulla se sono uguali.

Linea nodale
Insieme dei punti in cui due onde coerenti interferiscono in modo distruttivo; per due sorgenti puntiformi in fase è un ramo d'iperbole con i fuochi nelle sorgenti.

Linea ventrale
Insieme dei punti in cui due onde coerenti interferiscono in modo costruttivo e il mezzo oscilla con ampiezza massima.

Mezzo lineare
Mezzo in cui la forza di richiamo è proporzionale alla deformazione; in esso vale il principio di sovrapposizione.

Modi normali di oscillazione
Configurazioni di onda stazionaria in cui un sistema può oscillare, ciascuna con una sua frequenza propria; per la corda, quelle con n fusi.

Nodo (onda stazionaria)
Punto di un'onda stazionaria che resta sempre fermo; due nodi successivi distano $\lambda/2$.

Onda stazionaria
Oscillazione prodotta dalla sovrapposizione di due onde uguali che viaggiano in versi opposti; il profilo non avanza e l'energia non si propaga.

Onde secondarie
Onde sferiche emesse, secondo il principio di Huygens, da ciascun punto di un fronte d'onda, con la velocità dell'onda nel mezzo.

Ondoscopio
Vaschetta con fondo trasparente e pochi millimetri d'acqua, illuminata dall'alto, in cui si producono e si osservano onde sulla superficie.

Principio di Huygens
Ogni punto di un fronte d'onda è sorgente di onde secondarie sferiche; il nuovo fronte d'onda è l'inviluppo di queste onde.

Principio di sovrapposizione (onde)
In un mezzo lineare lo spostamento prodotto da più onde è, in ogni punto e in ogni istante, la somma degli spostamenti prodotti dalle singole onde.

Sorgenti coerenti
Sorgenti di uguale frequenza la cui differenza di fase resta costante nel tempo; solo esse producono un disegno d'interferenza stabile.

Ventre
Punto di un'onda stazionaria che oscilla con l'ampiezza massima, a metà strada fra due nodi.

Soluzioni

1. C. Per il principio di sovrapposizione gli impulsi si sommano solo mentre sono sovrapposti; poi ciascuno prosegue come se l'altro non ci fosse stato.

2. A. $A_{ris} = 2A|\cos(\pi/2)| = 0$: in ogni punto una sale quanto l'altra scende.

3. D. $\Delta r = 1{,}25\text{ m} - 1{,}00\text{ m} = 0{,}25\text{ m} = 2{,}5\,\lambda = (2 + ½)\lambda$: interferenza distruttiva (P è su una linea nodale). La sola uguaglianza delle frequenze non basta a dire che è costruttiva.

4. B. La frequenza è fissata dalla sorgente; velocità (fissata dal mezzo) e lunghezza d'onda cambiano; con incidenza obliqua cambia anche la direzione.

5. A. La diffrazione è vistosa quando $a \approx \lambda$; con $a \gg \lambda$ l'onda prosegue quasi diritta. Una frequenza alta, a parità di velocità, significa λ piccola: meno diffrazione. L'ampiezza non conta.

6. C. I nodi stanno dove $\text{sen}(kx) = 0$, cioè a $kx = 0, \pi, 2\pi\ldots$: due nodi successivi distano $\lambda/2$.

7. D. $f_3 = 3f_1 = 3 \times 110\text{ Hz} = 330\text{ Hz}$.

8. B. $f_1 = (1/2L)\sqrt{(F_T/\mu)} \propto \sqrt{F_T}$: con F_T quattro volte maggiore la frequenza raddoppia.

9. F. L'interferenza ridistribuisce l'energia: quella che manca dove l'interferenza è distruttiva si ritrova, in quantità maggiore, dove è costruttiva.

10. V. È la definizione: se la differenza di fase cambiasse nel tempo il disegno d'interferenza non resterebbe fermo.

11. V. Fra due nodi $\text{sen}(kx)$ ha segno costante, quindi tutti i punti hanno lo stesso fattore $\cos(\omega t)$: raggiungono insieme gli estremi. I tratti adiacenti sono in opposizione di fase.

12. F. La frequenza è fissata dalla sorgente e non cambia; diminuiscono la velocità (fissata dal mezzo) e la lunghezza d'onda.

13. F. I nodi sono fermi e l'energia non li attraversa; le due onde componenti trasportano energie uguali in versi opposti.

14. $A_{ris} = 2A|\cos(\Delta\varphi/2)| = 2 \times 3{,}0\text{ mm} \times \cos(\pi/6) = 6{,}0\text{ mm} \times 0{,}866 \approx 5{,}2\text{ mm}$.

15. P: $\Delta r = 12{,}6\text{ cm} - 9{,}0\text{ cm} = 3{,}6\text{ cm} = 2\lambda$: interferenza costruttiva, P è sulla linea ventrale con $m = 2$ (dalla parte della seconda sorgente). Q: $\Delta r = 11{,}7\text{ cm} - 9{,}0\text{ cm} = 2{,}7\text{ cm} = 1{,}5\,\lambda = (1 + ½)\lambda$: Q è sulla seconda linea nodale ($m = 1$).

16. $\lambda_1 = 2L = 1{,}3\text{ m}$; $f_1 = v/(2L) = 286\text{ m/s} / 1{,}30\text{ m} = 220\text{ Hz}$; $f_2 = 440\text{ Hz}$; $f_3 = 660\text{ Hz}$. La velocità è fissata dalla corda; le frequenze possibili dalla condizione sui nodi agli estremi.

17. $\text{sen}\,\theta_2 = (v_2/v_1)\,\text{sen}\,\theta_1 = (0{,}20/0{,}30) \times \text{sen}\,35° \approx 0{,}382$, quindi $\theta_2 \approx 22°$. La frequenza (fissata dalla sorgente) non cambia: $\lambda_1 = v_1/f = 0{,}30\text{ m/s} / 4{,}0\text{ Hz} = 0{,}075\text{ m} = 7{,}5\text{ cm}$; $\lambda_2 = 0{,}20\text{ m/s} / 4{,}0\text{ Hz} = 0{,}050\text{ m} = 5{,}0\text{ cm}$.

18. $k = 5{,}0\text{ rad/m} \Rightarrow \lambda = 2\pi/k \approx 1{,}26\text{ m}$; $\omega = 600\text{ rad/s} \Rightarrow f = \omega/2\pi \approx 95{,}5\text{ Hz}$. Ogni onda componente ha ampiezza $A = 4{,}0\text{ mm} / 2 = 2{,}0\text{ mm}$ e velocità $v = \omega/k = 600/5{,}0\text{ m/s} = 120\text{ m/s}$. Nodi dove $\text{sen}(kx) = 0$: $x = 0$; $\pi/5\text{ m} \approx 0{,}63\text{ m}$; $2\pi/5\text{ m} \approx 1{,}26\text{ m}$ (distanti $\lambda/2$).

19. nodi; ventri; $\lambda/4$; $\lambda/2$ (mezza lunghezza d'onda).

20. Tre fusi, quindi 4 nodi (estremi compresi). $L = 3\lambda/2 \Rightarrow \lambda = 2 \times 0{,}90\text{ m} / 3 = 0{,}60\text{ m}$. $v = \lambda f = 0{,}60\text{ m} \times 240\text{ Hz} = 144\text{ m/s}$ (fissata dalla corda). $f_1 = 240\text{ Hz} / 3 = 80\text{ Hz}$.

21. a) $\lambda = 343\text{ m/s} / 340\text{ Hz} \approx 1{,}01\text{ m}$; $a/\lambda = 0{,}90\text{ m} / 1{,}01\text{ m} \approx 0{,}89$: la porta è larga quanto una lunghezza d'onda, il suono si diffrange fortemente e si diffonde in tutta la stanza. b) $a/\lambda = 0{,}90\text{ m} / (550 \times 10^{-9}\text{ m}) \approx 1{,}6 \times 10^6$: la diffrazione è trascurabile (angolo dell'ordine di 10^{-6} rad) e la luce procede in linea retta.

22. Principi usati: la frequenza è fissata dalle sorgenti e la velocità dall'acqua; per il principio di sovrapposizione un punto è fermo dove la differenza

di cammino è $(m + ½)\lambda$. a) $\lambda = v/f = 0{,}18$ m/s / 12 Hz = 0,015 m = 1,5 cm. b) Lungo il segmento, a distanza x dal punto medio, $r_1 - r_2 = 2x$; i nodi sono dove $2|x| = (m + ½)\lambda$ con $2|x| < d = 6{,}0$ cm $= 4\lambda$: $(m + ½) = 0{,}5$; 1,5; 2,5; 3,5, quattro per parte. Le linee nodali che attraversano il segmento sono 8. c) Fra due nodi successivi $2x$ varia di λ, cioè x varia di $\lambda/2$: i punti fermi distano $\lambda/2 = 0{,}75$ cm: lungo il segmento si forma un'onda stazionaria.

23. a) $v = 2Lf_1 = 2 \times 0{,}648$ m $\times$ 329,6 Hz $\approx$ 427 m/s; $F_T = \mu v^2 = 4{,}0 \times 10^{-4}$ kg/m $\times$ (427 m/s)$^2 \approx 73$ N. b) La tensione, quindi la velocità, non cambia: $L' = v/(2f') = 427$ m/s / (2 $\times$ 440 Hz) $\approx 0{,}485$ m. Si preme a 0,648 m − 0,485 m $\approx 0{,}163$ m = 16,3 cm dal capotasto. Controllo: 0,648/0,485 $\approx 1{,}34 = 440/329{,}6$.

24. Principi usati: la condizione di risonanza $f_n = (n/2L)\sqrt{(F_T/\mu)}$ con f fissata dal vibratore, e l'equilibrio del portapesi ($F_T = mg$). a) Con n fusi la velocità deve essere $v = 2Lf/n = 180/n$ m/s, quindi $F_T = \mu v^2 = 2{,}5 \times 10^{-3}$ kg/m $\times$ (180 m/s)$^2/n^2 = 81$ N/n^2. $n = 2$: 20 N, $m = F_T/g \approx 2{,}1$ kg; $n = 3$: 9,0 N, $m \approx 0{,}92$ kg; $n = 4$: 5,1 N, $m \approx 0{,}52$ kg. b) Con 0,50 kg, $F_T = 4{,}9$ N e $n = \sqrt{(81/4{,}9)} \approx 4{,}07$, non intero: la condizione di risonanza non è soddisfatta per nessun modo. Si vedrà una vibrazione disordinata e di piccola ampiezza, vicina ai quattro fusi, che diventano netti solo aumentando la massa a circa 0,52 kg.

25. Principi usati: in un'onda stazionaria ogni punto compie un moto armonico (*Fisica 3*, capitolo 4) di pulsazione $\omega = 2\pi f$ e ampiezza $2A|\text{sen}(kx)|$; per il moto armonico $v_{max} = \omega\cdot$ampiezza e $a_{max} = \omega^2\cdot$ampiezza. a) $\omega = 2\pi \times 200$ Hz ≈ 1257 rad/s; al centro (ventre) l'ampiezza è 3,0 mm: $v_{max} = 1257$ rad/s $\times$ 0,0030 m $\approx 3{,}8$ m/s; $a_{max} = (1257$ rad/s$)^2 \times 0{,}0030$ m $\approx 4{,}7 \times 10^3$ m/s^2, quasi 500 volte g. b) A $L/6$, $kx = \pi/6$ e $\text{sen}(\pi/6) = 0{,}5$: ampiezza 1,5 mm, $v_{max} \approx 1{,}9$ m/s, $a_{max} \approx 2{,}4 \times 10^3$ m/s^2. c) La velocità delle onde è $v = 2Lf = 2 \times 0{,}50$ m $\times$ 200 Hz = 200 m/s, circa 50 volte la velocità massima dei punti della corda: la velocità del mezzo non è la velocità dell'onda.

26. Principi usati: la velocità delle onde in acqua bassa (capitolo 5) e la legge della rifrazione dal principio di Huygens. a) $v_1 = \sqrt{(9{,}8$ m/s$^2 \times 20$ m$)} = 14$ m/s; $v_2 = \sqrt{(9{,}8$ m/s$^2 \times 5{,}0$ m$)} = 7{,}0$ m/s. b) $\text{sen}\,\theta_2 = (v_2/v_1)$ sen 30° = 0,50 $\times$ 0,50 = 0,25 $\Rightarrow \theta_2 \approx 14°$. c) Il periodo, fissato dalla sorgente, non cambia: $\lambda_1 = v_1 T = 14$ m/s $\times$ 12 s $\approx 1{,}7 \times 10^2$ m; $\lambda_2 = 7{,}0$ m/s $\times$ 12 s = 84 m (entrambe molto maggiori della profondità, condizione richiesta dalla formula; sul fondale di 20 m, dove λ è solo 8 volte h, $\sqrt{(gh)}$ è un'approssimazione discreta, che sovrastima la velocità di circa il 10%). d) Avvicinandosi alla riva la profondità diminuisce con continuità, la velocità pure, e il raggio si avvicina sempre più alla normale alle linee di uguale profondità: i fronti diventano quasi paralleli alla riva.

27. Principi usati: la condizione d'interferenza per sorgenti in fase e il teorema di Pitagora. P dista $r_1 = y$ da S_1 e $r_2 = \sqrt{(y^2 + d^2)}$ da S_2, quindi $\delta = r_2 - r_1 = \sqrt{(y^2 + d^2)} - y$, che diminuisce da d (per $y \to 0$) verso 0 (per y grande). Da $\sqrt{(y^2 + d^2)} = y + \delta$, elevando al quadrato: $y = (d^2 - \delta^2)/(2\delta)$, con $0 < \delta < d$. Linee nodali, $\delta = 1{,}0$ cm e 3,0 cm: $y = (25 - 1)/2$ cm = 12 cm e $y = (25 - 9)/6$ cm $\approx 2{,}7$ cm ($\delta = 5{,}0$ cm non è minore di d). Linee ventrali, $\delta = 2{,}0$ cm e 4,0 cm: $y = (25 - 4)/4$ cm $\approx 5{,}3$ cm e $y = (25 - 16)/8$ cm $\approx 1{,}1$ cm. Andando da S_1 verso l'infinito si incontrano quindi: ventrale (1,1 cm), nodale (2,7 cm), ventrale (5,3 cm), nodale (12 cm); oltre, l'ampiezza tende al massimo della linea $m = 0$, che P raggiunge solo all'infinito.

28. Principi usati: le frequenze dei modi normali sono $f_n = nf_1$ e due risonanze consecutive differiscono di f_1; la velocità è fissata dalla corda. a) $f_1 = 200$ Hz − 150 Hz = 50 Hz; 150 Hz = $3f_1$ (terza armonica) e 200 Hz = $4f_1$ (quarta). b) $v = 2Lf_1 = 2 \times 1{,}20$ m $\times$ 50 Hz = 120 m/s. c) Dalla velocità su una corda tesa (capitolo 5): $F_T = \mu v^2 = 5{,}0 \times 10^{-3}$ kg/m $\times$ (120 m/s)$^2 = 72$ N.

29. a) Dividendo ogni frequenza per il suo n: 61/1 = 61 Hz; 119/2 = 59,5 Hz; 182/3 $\approx$ 60,7 Hz; 241/4 $\approx$ 60,3 Hz. I quattro valori differiscono dalla loro media di poco più dell'1% al massimo, compatibile con l'incertezza di lettura: le frequenze sono multiple di $f_1 \approx 60$ Hz. (Con una retta per l'origine nel grafico di f_n in funzione di n si ottiene una pendenza di 60,3 Hz.) b) $v = 2Lf_1 = 2 \times 0{,}80$ m $\times$ 60 Hz ≈ 96 m/s.

30. Traccia di risposta. Le voci hanno lunghezze d'onda dell'ordine del metro (a 343 Hz, 1,00 m), paragonabili alla larghezza di una porta: il suono si diffrange e dopo la porta si allarga in tutte le dire-

zioni, raggiungendo anche chi è fuori dalla linea diritta. La luce ha $\lambda \approx 0{,}5$ μm, milioni di volte minore della porta: la diffrazione è trascurabile, la luce procede in linea retta e la persona resta nella zona d'ombra. Contribuiscono anche le riflessioni del suono sulle pareti.

31. Lo studente ha dimenticato il fattore 2: su una corda fissata ai due estremi $L = n\lambda/2$, quindi $f_n = nv/(2L)$. Con $v = 100$ m/s e $L = 0{,}50$ m: $f_1 = 100$ Hz, poi 200 Hz, 300 Hz... Controllo: con $f_1 = 200$ Hz si avrebbe $\lambda_1 = v/f_1 = 0{,}50$ m $= L$, cioè due fusi, non uno.

32. Traccia di risposta. Si fissano due punte in fase sulla stessa asta (sorgenti coerenti), si misura la frequenza del vibratore (con il generatore o con una luce stroboscopica che «ferma» le onde) e la distanza d fra le punte. Con la luce stroboscopica si individuano le linee nodali, e su un foglio sotto la vaschetta si segnano alcuni punti di ciascuna; con un righello (1 mm) si misurano r_1 e r_2. Da $|r_1 - r_2| = (m + ½)\lambda$ si ricava λ, poi $v = \lambda f$. Poiché l'incertezza su $r_1 - r_2$ è la stessa per tutti i punti, conviene usare linee nodali con m grande e quindi sorgenti abbastanza distanti (d di alcune lunghezze d'onda); si ripetono le misure su più punti e su entrambi i lati dell'asse, e si confronta v con quella ottenuta misurando direttamente λ su una sola onda.

33. Traccia di risposta. Vicino alle sorgenti le distanze r_1 e r_2 sono molto diverse e l'ampiezza di un'onda circolare diminuisce allontanandosi dalla sorgente (capitolo 5): le due onde arrivano con ampiezze diverse, l'interferenza distruttiva non è completa e le linee nodali non sono del tutto ferme, ma solo zone di ampiezza minima. Il contrasto migliora lontano dalle sorgenti, dove $r_1 \approx r_2$. Il principio di sovrapposizione vale nei mezzi lineari, cioè per piccole deformazioni: un'onda che si frange ha un'altezza paragonabile alla profondità dell'acqua, la cresta va più veloce della base e si rovescia; la forma dell'onda cambia da sola e due onde di questo tipo che si incontrano non si sommano semplicemente.