CAPITOLO

5

Le onde meccaniche

Un'onda attraversa il mare da una costa all'altra, e non si porta via neppure una goccia d'acqua: viaggia la forma, non la materia.

OBIETTIVI

1. Riconoscere un'onda meccanica, distinguere onde trasversali, longitudinali e miste e descrivere fronti d'onda e raggi.
2. Usare ampiezza, lunghezza d'onda, periodo e frequenza e la relazione $v = \lambda f$, distinguendo ciò che dipende dalla sorgente da ciò che dipende dal mezzo.
3. Calcolare la velocità di un'onda su una corda tesa, $v = \sqrt{(F_T/\mu)}$, e giustificarla con l'analisi dimensionale.
4. Scrivere e interpretare la funzione d'onda $y = A\ \mathrm{sen}(kx - \omega t)$, leggendone la fotografia e la storia e distinguendo velocità di oscillazione e velocità di propagazione.
5. Collegare l'energia di un'onda all'ampiezza e alla frequenza e calcolare l'intensità di un'onda sferica.
6. Prevedere la riflessione e la trasmissione di un impulso e misurare in laboratorio la velocità delle onde su un tubo teso.

INDICE DEL CAPITOLO

5.1 Ripartiamo dal moto armonico 2
5.2 Che cos'è un'onda 3
5.3 Le grandezze caratteristiche e la velocità di propagazione 6
5.4 La funzione d'onda armonica 10
5.5 L'energia trasportata da un'onda 13
5.6 Riflessione e trasmissione di un impulso 16

Fisica 4 · Parte II · Le onde e la luce · versione 1.0
Capitolo 5: Le onde meccaniche · pagine 141–166 del volume completo · estratto per lo studio

Lancia un sasso in uno stagno: dal punto in cui è caduto partono anelli che si allargano, e una foglia che galleggia a qualche metro di distanza comincia ad alzarsi e ad abbassarsi. Eppure la foglia non viene trascinata verso la riva: resta più o meno dove si trovava. Qualcosa ha viaggiato dal sasso alla foglia, e quel qualcosa non è acqua. È un'onda.

Le onde sono ovunque: il suono che ti arriva alle orecchie, le scosse di un terremoto, le increspature su una corda di chitarra, la «ola» che fa il giro di uno stadio. Con questo capitolo inizia lo studio dei fenomeni ondulatori. Cominciamo dalle **onde meccaniche**, quelle che hanno bisogno di un mezzo materiale per propagarsi, perché si possono vedere e toccare; ma le idee e la matematica che costruirai qui, la lunghezza d'onda, la frequenza, la funzione d'onda, serviranno per tutte le onde, anche per la luce. Il punto di partenza è un moto che conosci bene: il moto armonico.

5.1 Ripartiamo dal moto armonico

Nel volume dello scorso anno (*Fisica 3*, capitolo 4) hai studiato il moto di un oscillatore armonico: una massa appesa a una molla, un pendolo per piccole oscillazioni. La sua posizione cambia nel tempo secondo la legge

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

dove A è l'ampiezza (lo spostamento massimo dal centro), e la grandezza $\omega t + \varphi_0$ è la fase, che dice in quale punto del ciclo si trova l'oscillatore; φ_0 è la fase all'istante $t = 0$. La pulsazione ω è legata al periodo T e alla frequenza f da

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

La velocità dell'oscillatore è massima al centro, dove vale ωA, ed è nulla agli estremi. Per una massa m attaccata a una molla di costante elastica k_{el} la pulsazione è $\omega = \sqrt{(k_{\text{el}}/m)}$: dipende soltanto dalle proprietà del sistema, ed è la sua frequenza propria. Se una forza periodica esterna lo sollecita con una frequenza vicina a quella propria, l'ampiezza diventa grande: è la risonanza. (Qui la costante elastica si scrive k_{el}: la lettera k servirà per un'altra grandezza.)

Due oscillatori con fasi che differiscono di π sono in opposizione di fase, e che l'energia di un oscillatore è $\tfrac{1}{2}k_{\text{el}}A^2$. Un'onda è una fila di oscillatori armonici con la stessa frequenza, ciascuno un po' in ritardo sul precedente.

5.2 Che cos'è un'onda

5.2.1 Una perturbazione che viaggia

Fissa a un muro l'estremo di una corda lunga, tienila tesa e dai un colpo secco verso l'alto con la mano. Sulla corda si forma una gobba che corre verso il muro. Ogni tratto di corda, al passaggio della gobba, si alza e poi torna giù nella posizione di prima; la gobba invece avanza. Hai prodotto un **impulso**, una perturbazione di breve durata. Se invece muovi la mano su e giù con regolarità, la corda si riempie di creste e di avvallamenti che si susseguono: è un'**onda periodica**, e se la mano compie un moto armonico l'onda si chiama armonica.

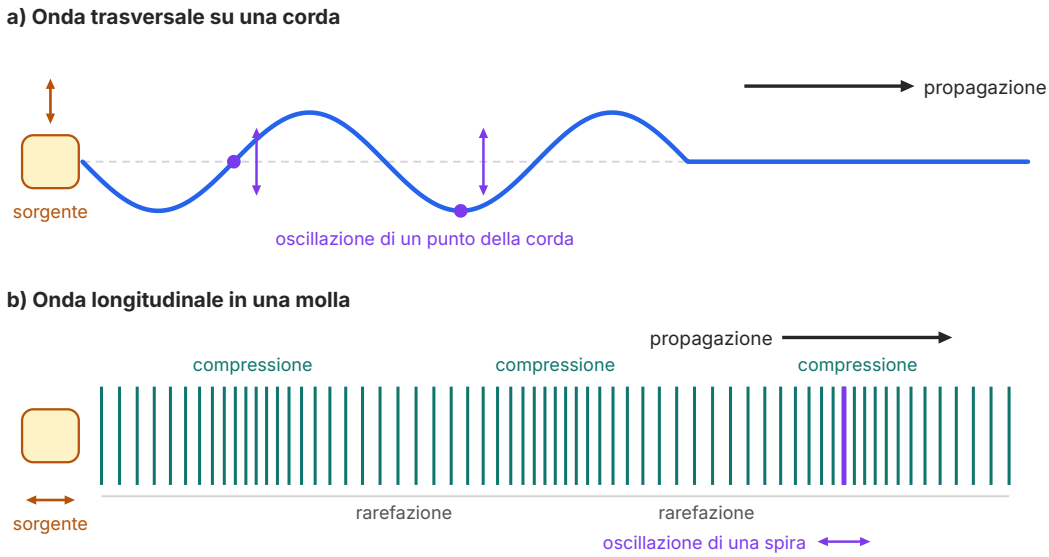


Figura 5.1 Due modi di propagarsi. a) Onda trasversale: ogni punto della corda oscilla perpendicolarmente alla direzione di propagazione. b) Onda longitudinale: ogni spira della molla oscilla lungo la direzione di propagazione; le spire si addensano nelle compressioni e si diradano nelle rarefazioni (posizioni delle spire calcolate per uno spostamento sinusoidale).

In generale un'**onda** è una perturbazione che si propaga nello spazio trasportando energia e quantità di moto, senza trasporto netto di materia. Lo stato di moto passa da un punto al successivo perché ogni parte del sistema è legata alle parti vicine: il tratto di corda che sale tira verso l'alto il tratto accanto, che a sua volta tira il successivo. Il sistema in cui l'onda si propaga si chiama **mezzo**: la corda, l'acqua dello stagno, l'aria, la roccia. Le onde che hanno bisogno di un mezzo materiale sono le **onde meccaniche**, e sono l'argomento di questo capitolo e dei due

seguenti. La luce è un'onda di tipo diverso, che si propaga anche nel vuoto; ne riparleremo alla fine di questa parte.

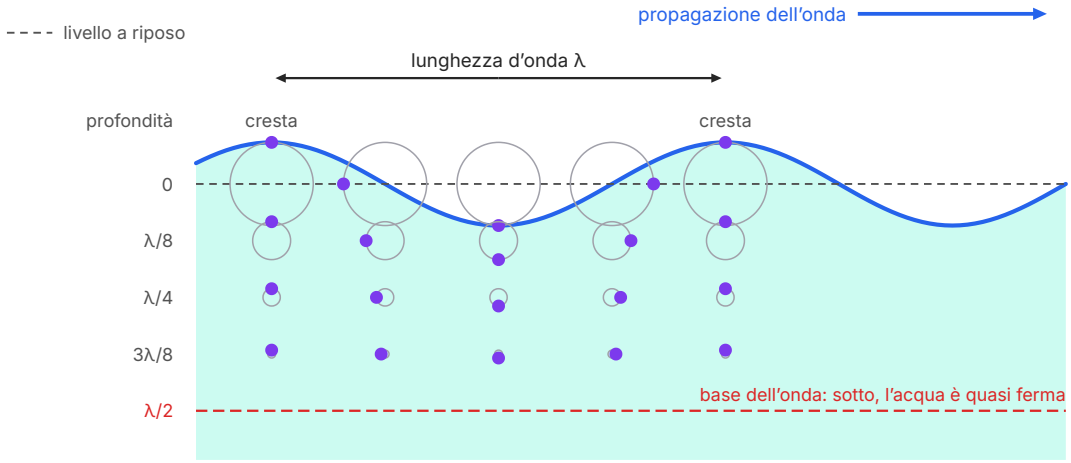
Nella «ola» di uno stadio ogni spettatore si alza e si risiede al suo posto, ma l'onda fa il giro degli spalti. Che l'onda trasporti energia lo sa invece chiunque abbia visto un'onda di mare sollevare una barca.

5.2.2 Onde trasversali e onde longitudinali

Nell'onda sulla corda ogni punto si muove perpendicolarmente alla direzione in cui l'onda avanza. Un'onda di questo tipo si chiama **onda trasversale** (Figura 5.1a). Prendi ora una molla lunga e morbida, tesa sul pavimento, e spingi avanti e indietro l'estremo lungo l'asse della molla: alcune spire si avvicinano, formando una **compressione**, altre si allontanano, formando una **rarefazione**, e compressioni e rarefazioni corrono lungo la molla. Ogni spira oscilla nella stessa direzione in cui l'onda si propaga: è un'**onda longitudinale** (Figura 5.1b).

Il suono nell'aria è un'onda longitudinale. Un'onda trasversale richiede che il mezzo reagisca quando uno strato viene fatto scorrere rispetto a quello accanto, come fanno una corda tesa o un solido; un liquido o un gas non si oppongono a questo scorrimento. All'interno di un fluido si propagano quindi soltanto onde longitudinali, in un solido entrambe.

Le onde sulla superficie dell'acqua non sono né trasversali né longitudinali: sono miste. Al passaggio di un'onda in acqua profonda ogni particella d'acqua descrive un'orbita quasi circolare, in avanti sotto la cresta e all'indietro sotto la valle, e dopo un periodo torna al punto di partenza (Figura 5.2). Le orbite si restringono rapidamente con la profondità: a un quarto di lunghezza d'onda sotto la superficie il loro raggio è circa il 21% di quello in superficie, a mezza lunghezza d'onda appena il 4%. Per questo un sottomarino immerso a un centinaio di metri risente appena delle onde della tempesta che agita la superficie.



Il raggio delle orbite decresce come $e^{-2\pi z/\lambda}$: a $\lambda/4$ è il 21%, a $\lambda/2$ il 4% di quello in superficie.

Sotto la cresta l'acqua si muove nel verso dell'onda, sotto la valle in verso opposto; dopo un periodo torna al punto di partenza.

Figura 5.2 Un'onda in acqua profonda che si propaga verso destra (ampiezza esagerata rispetto alla lunghezza d'onda per leggibilità). I punti viola sono particelle d'acqua, i cerchi grigi le loro orbite, calcolate con il raggio che decresce come $e^{-2\pi z/\lambda}$ con la profondità z.

5.2.3 Onde in una, due e tre dimensioni

L'onda sulla corda si propaga lungo una linea: è un'onda in una dimensione. Le increspature dello stagno si allargano su una superficie, in due dimensioni; il suono di una campana si diffonde nello spazio, in tre. Per descrivere le onde in due e tre dimensioni servono due nuove idee.

Un **fronte d'onda** è l'insieme dei punti del mezzo che, in un certo istante, si trovano nello stesso stato di oscillazione, cioè hanno la stessa fase: per esempio, tutti i punti che sono su una cresta. Nello stagno i fronti d'onda sono le circonferenze delle creste. Un **raggio** è una linea orientata che indica la direzione di propagazione; in un mezzo che ha le stesse proprietà in tutte le direzioni i raggi sono perpendicolari ai fronti d'onda (Figura 5.3). È la stessa parola che usavi in ottica geometrica (*Fisica 2*, capitolo 14), e non per caso: i raggi luminosi sono i raggi di un'onda.

Una sorgente piccola, che si può trattare come un punto, produce nello spazio fronti d'onda sferici: è un'**onda sferica**, i cui raggi escono dalla sorgente in tutte le direzioni. Se i fronti d'onda sono piani paralleli, l'onda è un'**onda piana** e i raggi sono paralleli. Lontano dalla sorgente un'onda sferica, osservata in una regione piccola, è praticamente piana.

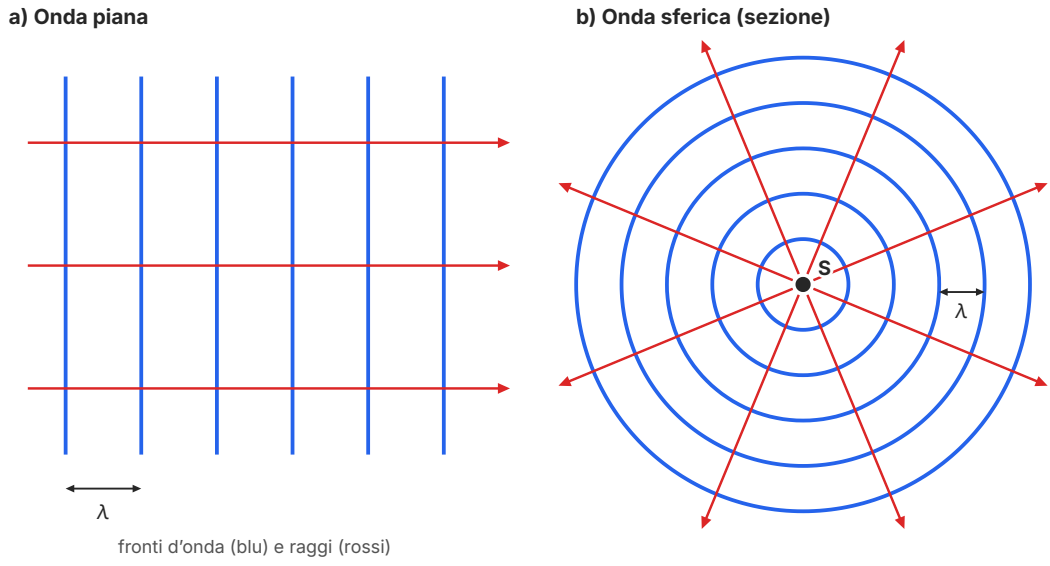


Figura 5.3 Fronti d'onda (in blu, uno per ogni cresta, a distanza di una lunghezza d'onda) e raggi (in rosso). a) Onda piana: fronti piani e paralleli, raggi paralleli. b) Onda sferica prodotta da una sorgente puntiforme S, in sezione: fronti sferici e raggi uscenti dalla sorgente.

5.3 Le grandezze caratteristiche e la velocità di propagazione

5.3.1 Ampiezza, lunghezza d'onda, periodo e frequenza

Considera un'onda armonica su una corda, prodotta da una sorgente che oscilla di moto armonico. Ogni punto della corda ripete lo stesso moto armonico della sorgente, con lo stesso periodo. Una fotografia della corda in un certo istante mostra una sinusoide che si ripete nello spazio. Bastano poche grandezze per descriverla.

- L'**ampiezza** A dell'onda è lo spostamento massimo dei punti del mezzo dalla posizione di equilibrio; i punti più alti sono le **creste**, i più bassi le **valli** (o cavi).
- La **lunghezza d'onda** λ è la distanza minima fra due punti che oscillano in fase, per esempio fra due creste successive; si misura in metri.
- Il periodo T dell'onda è il periodo di oscillazione di ciascun punto del mezzo, cioè il tempo che impiega a compiere un'oscillazione completa; la frequenza $f = 1/T$, in hertz, è il numero di oscillazioni al secondo.

Fra lunghezza d'onda e periodo c'è un legame semplice. Mentre un punto compie un'oscillazione completa, la cresta che si trovava su di lui viene sostituita dalla cresta successiva, che arriva

da una distanza λ: in un periodo l'onda avanza di una lunghezza d'onda. La **velocità di propagazione** v dell'onda, cioè la velocità con cui avanza il profilo dell'onda, è quindi

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

Questa relazione vale per tutte le onde periodiche. Un'onda di frequenza 2,5 Hz e lunghezza d'onda 0,80 m avanza a v = 0,80 m × 2,5 Hz = 2,0 m/s. Le onde del mare al largo, con creste distanti 100 m che passano ogni 8,0 s, avanzano a 100 m/8,0 s = 12,5 m/s, cioè 45 km/h.

Chi decide i valori di f, v e λ? La frequenza è fissata dalla **sorgente**: ogni punto del mezzo oscilla perché il punto prima di lui lo trascina, e tutti, fino all'ultimo, ripetono il ritmo della mano che scuote la corda. La velocità di propagazione dipende invece dal **mezzo**, come vedrai fra poco: in una corda dipende dalla tensione e dalla massa, non da quanto in fretta muovi la mano. La lunghezza d'onda, infine, si adegua: $\lambda = v/f$. Se muovi la mano due volte più in fretta, sulla stessa corda la distanza fra le creste si dimezza, ma le creste corrono con la stessa velocità.

DA RICORDARE

La frequenza è della sorgente, la velocità è del mezzo

In una relazione come $v = \lambda f$ non tutte le grandezze sono «libere». La frequenza è quella della sorgente e non cambia quando l'onda passa da un mezzo a un altro; la velocità è una proprietà del mezzo; la lunghezza d'onda è la conseguenza delle due. Un'onda sonora di 440 Hz (il «la» con cui si accordano gli strumenti) ha nell'aria a 20 °C, dove la velocità è 343 m/s, una lunghezza d'onda di 0,780 m; se la stessa nota entra nell'acqua, dove il suono va a circa 1480 m/s (Tabella A.4 dell'appendice), la frequenza resta 440 Hz e la lunghezza d'onda diventa 3,36 m.

5.3.2 La velocità di un'onda su una corda

Da che cosa dipende la velocità di un impulso su una corda? L'esperienza suggerisce due fattori. Se tendi di più la corda, l'impulso corre più in fretta: una corda tesa reagisce con forza a ogni deformazione e riporta rapidamente ogni tratto alla posizione di equilibrio. Se la corda è più pesante, l'impulso è più lento: ogni tratto ha più inerzia e si mette in moto più a fatica. La tensione si misura con il modulo F_T della forza con cui la corda è tirata; l'inerzia con la **densità lineare** μ, la massa per unità di lunghezza della corda:

$$\mu = \frac{m}{L} \text{ (kg/m)}$$

Per una corda omogenea e flessibile, tesa, e per impulsi di piccola ampiezza, la teoria mostra che

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

Questo risultato si dimostra applicando il secondo principio della dinamica a un piccolo tratto di corda; lo dimostrerai con gli strumenti dell'analisi matematica. Possiamo però controllare che sia ragionevole. Innanzitutto le unità: N/(kg/m) = (kg·m/s^2)·(m/kg) = m^2/s^2, e la radice quadrata dà m/s, come deve essere per una velocità. Poi il comportamento: v cresce con la tensione e diminuisce con la densità lineare, come previsto. Infine, se v dipende soltanto da F_T e da μ, l'unica combinazione con le unità di una velocità è $\sqrt{(F_T/\mu)}$, a meno di un numero puro, che la teoria completa (e l'attività di laboratorio di fine capitolo) dice essere 1.

Nella formula non compaiono né l'ampiezza né la forma dell'impulso: impulsi piccoli e grandi, e onde armoniche di qualsiasi frequenza, viaggiano sulla stessa corda con la stessa velocità.

ESEMPIO SVOLTO

Misurare la tensione di un cavo con un impulso

Problema. Il cavo d'acciaio di una teleferica da cantiere è teso fra due piloni distanti 120 m e ha una densità lineare di 0,40 kg/m. Un tecnico colpisce il cavo vicino a un pilone con una mazza; l'impulso arriva all'altro pilone, si riflette e torna indietro dopo 2,0 s. a) Con quale velocità si propaga l'impulso? b) Qual è la tensione del cavo? c) Di quanto dovrebbe aumentare la tensione perché la velocità aumenti del 10%? d) Confronta la tensione con il peso del cavo.

Soluzione. a) In 2,0 s l'impulso percorre il cavo due volte, cioè 240 m: v = 240 m/2,0 s = 1,2 × 10^2 m/s.

b) Da $v = \sqrt{(F_T/\mu)}$ si ricava $F_T = \mu v^2$ = 0,40 kg/m × (120 m/s)^2 = 5,8 × 10^3 N.

c) La velocità è proporzionale alla radice quadrata della tensione: per moltiplicare v per 1,10 bisogna moltiplicare F_T per 1,10^2 = 1,21, cioè aumentare la tensione del 21%.

d) La massa del cavo è 0,40 kg/m × 120 m = 48 kg, il suo peso 48 kg × 9,8 m/s^2 = 4,7 × 10^2 N, circa un dodicesimo della tensione: il cavo è quasi rettilineo, e trattarlo come una corda tesa orizzontale è un'approssimazione accettabile.

Commento. Basta un cronometro per stimare la tensione di un cavo senza smontarlo; ma un errore del 5% sul tempo dà un errore del 10% sulla tensione, che dipende dal quadrato della velocità.

5.3.3 Onde nei solidi e nei fluidi

La stessa idea vale per ogni onda meccanica: la velocità di propagazione nasce dalla competizione fra una proprietà **elastica** del mezzo, che misura quanto energicamente reagisce a una deformazione (nella corda, la tensione), e una proprietà **inerziale**, che misura quanto è difficile mettere in moto le sue parti (nella corda, la densità lineare). In un solido o in un fluido la pro-

prietà inerziale è la densità, quella elastica la resistenza a una compressione (o, per le onde trasversali nei solidi, a uno scorrimento): la velocità ha sempre la forma √(elasticità/inerzia).

Per questo il suono va più in fretta nell'acqua che nell'aria, circa 1480 m/s contro 343 m/s, e ancora più in fretta nell'acciaio, circa 5900 m/s (Tabella A.4), benché l'acciaio sia migliaia di volte più denso dell'aria: è anche enormemente più rigido, e la rigidità vince.

APPROFONDIMENTO

Le onde sismiche e gli tsunami

Un terremoto è una frattura improvvisa delle rocce in profondità, e l'energia liberata si propaga in tutte le direzioni sotto forma di onde sismiche. Nell'interno della Terra viaggiano due tipi di onde. Le **onde P** (prime) sono longitudinali, compressioni e dilatazioni della roccia, e nella crosta terrestre hanno velocità tipiche di circa 6 km/s. Le **onde S** (seconde) sono trasversali, scorrimenti della roccia perpendicolari alla direzione di propagazione, e nella crosta viaggiano a circa 3,5 km/s. Le onde P arrivano sempre per prime ai sismografi; le onde S, più lente, arrivano dopo.

Il ritardo fra i due arrivi dà la distanza del terremoto. Se una stazione registra le onde S 20 s dopo le onde P, la distanza d soddisfa $d/v_S - d/v_P = 20$ s, da cui $d = 20\text{ s} \times v_P v_S/(v_P - v_S) = 20\text{ s} \times (6{,}0 \times 3{,}5)/(2{,}5)$ km/s $\approx 1{,}7 \times 10^2$ km. Con le distanze misurate da tre stazioni si individua l'epicentro.

Le onde sismiche hanno rivelato anche la struttura interna del pianeta. Le onde S, essendo trasversali, non si propagano nei liquidi; i sismografi registrano che non attraversano il **nucleo esterno** della Terra, e da qui si è dedotto che quella parte del nucleo è liquida.

Quando un terremoto sposta il fondale dell'oceano, l'acqua sopra di esso viene sollevata e si forma uno **tsunami**. Le sue onde hanno lunghezze d'onda di decine o centinaia di chilometri, molto maggiori della profondità del mare; in queste condizioni la velocità dipende solo dalla profondità h: $v \approx \sqrt{(gh)}$. In mare aperto, con $h = 4000$ m, $\sqrt{(9{,}8\text{ m/s}^2 \times 4000\text{ m})} \approx 2{,}0 \times 10^2$ m/s, oltre 700 km/h, quasi la velocità di un aereo di linea; l'ampiezza è piccola e una nave quasi non se ne accorge. Avvicinandosi alla costa l'onda rallenta (a 10 m di profondità, circa 10 m/s), la sua lunghezza d'onda si accorcia e la sua energia si concentra in uno spessore d'acqua sempre minore: l'ampiezza cresce fino a diversi metri.

COLLEGAMENTI

Accordare una chitarra

Le sei corde di una chitarra hanno la stessa lunghezza, ma suonano note diverse. La nota dipende dalla frequenza con cui la corda vibra e, come vedrai nel prossimo capitolo, per una corda di lunghezza data questa frequenza è proporzionale alla velocità delle onde sulla corda, $v = \sqrt{(F_T/\mu)}$. Il costruttore e il musicista hanno quindi due manopole: la densità lineare e la tensione.

Le corde delle note basse sono più spesse, e spesso rivestite da un filo avvolto a spirale: hanno una densità lineare maggiore, quindi onde più lente e note più gravi, senza bisogno di essere tenute molli. Le meccaniche sulla paletta servono invece a regolare la tensione. Poiché la frequenza è proporzionale a $\sqrt{F_T}$, per alzare una nota di un semitono, cioè moltiplicarne la frequenza per circa 1,059, bisogna aumentare la tensione di circa il 12% ($1{,}059^2 \approx 1{,}12$). Per questo una corda che si allenta di poco, magari per il caldo, «cala» in modo ben udibile.

5.4 La funzione d'onda armonica

5.4.1 Una fotografia che si sposta

Un'onda armonica che viaggia lungo una corda si descrive con una funzione di due variabili: lo spostamento y del punto della corda che a riposo si trova nella posizione x, all'istante t. Questa funzione $y(x, t)$ si chiama **funzione d'onda**. Per costruirla partiamo da una fotografia della corda all'istante $t = 0$. Se l'onda è armonica, la fotografia è una sinusoide che si ripete ogni λ:

$$y(x, 0) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

Infatti quando x aumenta di λ l'argomento del seno aumenta di 2π e il seno riprende lo stesso valore. Il coefficiente di x si chiama **numero d'onda**:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ (rad/m)}$$

e ha nello spazio lo stesso ruolo che la pulsazione $\omega = 2\pi/T$ ha nel tempo. Al passare del tempo la fotografia non si deforma: trasla verso destra (verso le x positive, per fissare le idee) con velocità v. Da qui, con un ragionamento che trovi passo per passo nell'esempio svolto, si ricava la funzione d'onda di un'**onda armonica** che si propaga verso le x positive:

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \text{ con } k = \frac{2\pi}{\lambda},\ \omega = 2\pi f,\ v = \frac{\omega}{k}$$

ESEMPIO SVOLTO

Dalla fotografia dell'onda alla funzione d'onda

Obiettivo. Ricavare $y(x, t)$ per un'onda armonica che all'istante $t = 0$ ha la forma $y = A\,\text{sen}(kx)$ e si propaga senza deformarsi verso le x positive con velocità v.

Passo 1: traslare un grafico. In matematica hai imparato che il grafico di $g(x - a)$, con $a > 0$, è il grafico di $g(x)$ traslato verso destra di a: il valore che g aveva nel punto $x = 0$ ora si trova nel punto $x = a$.

Passo 2: di quanto si sposta l'onda. All'istante t il profilo si è spostato verso destra di $a = vt$. Dunque $y(x, t) = y(x - vt, 0) = A\,\text{sen}[k(x - vt)] = A\,\text{sen}(kx - kvt)$.

Passo 3: riconoscere la pulsazione. $kv = (2\pi/\lambda)\cdot(\lambda f) = 2\pi f = \omega$. Quindi $y(x, t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t)$.

Passo 4: controllo nel tempo. Fissa un punto, per esempio $x = 0$: $y(0, t) = A\,\text{sen}(-\omega t) = -A\,\text{sen}(\omega t)$. È un moto armonico di ampiezza A e pulsazione ω: il punto della corda oscilla proprio come la sorgente, come ci aspettavamo.

Passo 5: l'altro verso. Se l'onda va verso le x negative, il profilo trasla di $-vt$ e si ottiene $y = A\,\text{sen}(kx + \omega t)$. Il segno davanti a ωt, a parità di segno davanti a kx, dice il verso di propagazione.

Commento. Per un'onda che si propaga verso destra senza deformarsi la variabile x e la variabile t compaiono solo nella combinazione $x - vt$: è questa combinazione a dire che «il profilo si sposta».

La forma della funzione d'onda dipende dall'istante scelto come origine dei tempi. In generale si scrive $y = A\,\text{sen}(kx - \omega t + \varphi_0)$, oppure con il coseno; la grandezza $kx - \omega t + \varphi_0$ è la **fase dell'onda** nel punto x all'istante t. Due punti distanti Δx lungo la direzione di propagazione hanno, nello stesso istante, una differenza di fase $k\Delta x = 2\pi\Delta x/\lambda$: punti distanti λ (o un multiplo di λ) oscillano in fase, punti distanti $\lambda/2$ in opposizione di fase.

5.4.2 Due modi di guardare la stessa onda

La funzione $y(x, t)$ contiene due grafici diversi, e conviene saperli leggere entrambi (Figura 5.4).

- Fissando l'istante si ottiene la **fotografia** dell'onda, y in funzione di x: una sinusoide che si ripete ogni λ. È ciò che vedresti con un flash che illumina tutta la corda per un istante.
- Fissando il punto si ottiene la **storia** di quel punto, y in funzione di t: una sinusoide che si ripete ogni T. È ciò che registrerebbe un sensore attaccato alla corda in un punto.

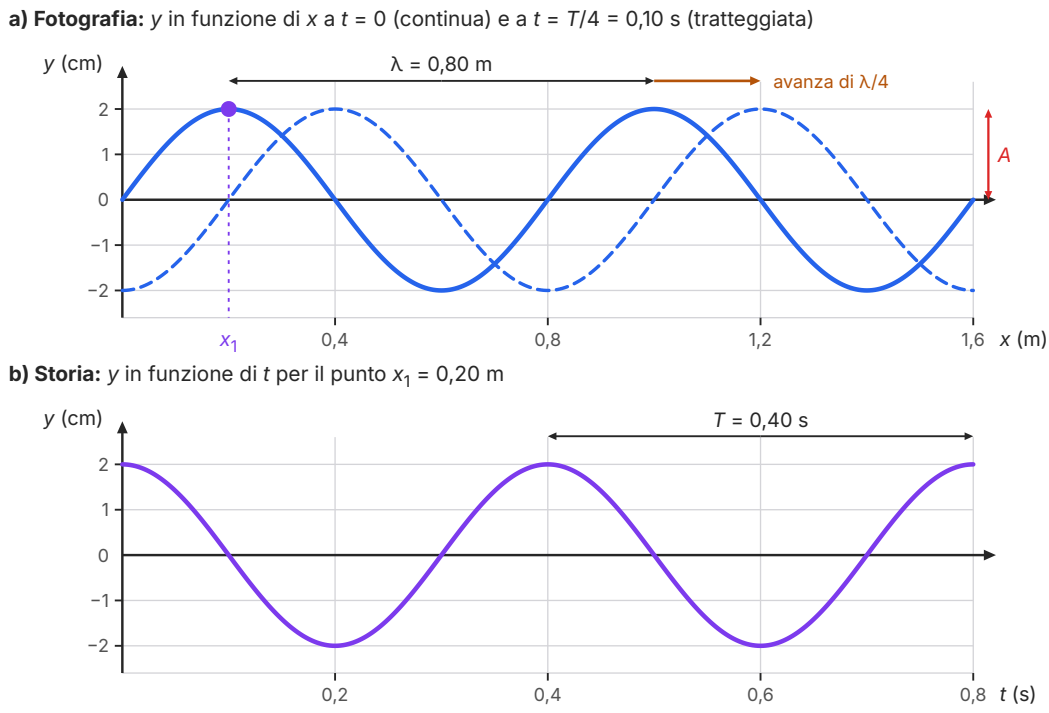


Figura 5.4 Le due rappresentazioni dell'onda $y = A\,\text{sen}(kx - \omega t)$ con $A = 2{,}0$ cm, $\lambda = 0{,}80$ m e $T = 0{,}40$ s (curve calcolate). a) Fotografie della corda a $t = 0$ e a $t = T/4$: il profilo è traslato verso destra di $\lambda/4$. b) Storia del punto $x_1 = 0{,}20$ m, che a $t = 0$ si trova su una cresta.

I due grafici si somigliano, ma nel primo la distanza fra due creste è la lunghezza d'onda, nel secondo la distanza fra due massimi è il periodo: prima di leggere un valore, guarda che cosa c'è sull'asse orizzontale.

5.4.3 La velocità del mezzo non è la velocità dell'onda

Ogni punto della corda compie un moto armonico di ampiezza A e pulsazione ω; come sai dal volume dello scorso anno, la sua velocità vale al massimo ωA, quando il punto passa per la posizione di equilibrio, ed è nulla sulle creste e nelle valli. Chiamiamo **velocità di oscillazione** la velocità con cui un punto del mezzo si muove attorno alla sua posizione di equilibrio. Nell'onda della Figura 5.4 ($A = 2{,}0$ cm, $T = 0{,}40$ s, quindi $\omega = 2\pi/T = 15{,}7$ rad/s) il suo valore massimo è $\omega A = 15{,}7\ \text{rad/s} \times 0{,}020\ \text{m} = 0{,}31$ m/s, mentre il profilo avanza a $\lambda/T = 0{,}80\ \text{m}/0{,}40\ \text{s} = 2{,}0$ m/s.

ERRORE FREQUENTE

Due velocità diverse

«La corda si muove a 2,0 m/s, perché l'onda va a 2,0 m/s.» Sbagliato: sono due grandezze diverse, che dipendono da cose diverse. La velocità di propagazione $v = \sqrt{(F_T/\mu)}$ è fissata dal mezzo, ha sempre lo stesso valore ed è diretta lungo la corda. La velocità di oscillazione di un punto è perpendicolare alla corda (in un'onda trasversale), cambia continuamente da zero al valore massimo ωA, e quel massimo dipende dalla sorgente: raddoppiando l'ampiezza o la frequenza con cui muovi la mano raddoppia ωA, mentre v non cambia.

Nell'onda della Figura 5.4, ωA = 0,31 m/s è circa un sesto di v = 2,0 m/s. Nota infine che sulla cresta il punto è fermo, mentre la cresta corre: la cresta non è un pezzo di corda, è una **configurazione** che passa da un pezzo di corda al successivo.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere i due grafici di un'onda

Problema. La Figura 5.4 mostra un'onda armonica su una corda. Ricava dai grafici ampiezza, lunghezza d'onda, periodo e verso di propagazione; calcola frequenza, velocità, numero d'onda e pulsazione, e scrivi la funzione d'onda.

Lettura. Dal grafico a: le creste distano 0,80 m, quindi λ = 0,80 m; lo spostamento massimo è A = 2,0 cm. Dal grafico b: i massimi della storia di x_1 distano 0,40 s, quindi T = 0,40 s. La fotografia tratteggiata, scattata un quarto di periodo dopo, è spostata verso destra: l'onda si propaga verso le x positive.

Calcoli. $f = 1/T$ = 1/0,40 s = 2,5 Hz; $v = \lambda/T$ = 0,80 m/0,40 s = 2,0 m/s; $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/0{,}80$ m = 7,85 rad/m; $\omega = 2\pi/T = 2\pi/0{,}40$ s = 15,7 rad/s. Controllo: ω/k = (15,7 rad/s)/(7,85 rad/m) = 2,0 m/s, uguale a v.

Funzione d'onda. Nella fotografia a t = 0 la corda passa per lo zero in x = 0 e sale: $y(x, 0) = A\,\text{sen}(kx)$, quindi y = (2,0 cm) sen[(7,85 rad/m)x − (15,7 rad/s)t].

Verifica sulla storia. Per $x = x_1$ = 0,20 m = $\lambda/4$ si ha $kx_1 = \pi/2$, e $y = A\,\text{sen}(\pi/2 - \omega t) = A\cos(\omega t)$: il punto parte da una cresta (y = 2,0 cm a t = 0), esattamente come nel grafico b.

5.5 L'energia trasportata da un'onda

5.5.1 Energia, ampiezza e frequenza

Un'onda mette in moto le parti del mezzo che attraversa: a ciascuna cede energia cinetica e, poiché le deforma, energia potenziale elastica. Quanta energia trasporta un'onda armonica? Un piccolo tratto di corda di massa Δm compie un moto armonico di ampiezza A e pulsazione ω, e la sua energia meccanica, come quella di ogni oscillatore armonico, vale $\frac{1}{2}\Delta m\omega^2A^2$ (è l'espres-

sione $\frac{1}{2}k_{el}A^2$ del volume dello scorso anno, con $k_{el} = \Delta m\omega^2$). L'onda porta questa energia a tutti i tratti di corda che raggiunge. Ne segue la proprietà fondamentale:

l'energia trasportata da un'onda armonica è proporzionale al quadrato dell'ampiezza e al quadrato della frequenza

Raddoppiando l'ampiezza, a parità di frequenza, l'energia diventa quattro volte più grande; raddoppiando la frequenza, a parità di ampiezza, ancora quattro volte. È il motivo per cui le onde del mare in tempesta, alte il triplo di quelle di una giornata tranquilla, hanno un'energia per metro di cresta circa nove volte maggiore, a parità di periodo.

5.5.2 Potenza e intensità

Per un'onda che viaggia conta l'energia che passa in ogni secondo, cioè la potenza P, in watt. Per le onde in due e tre dimensioni conta anche su quale superficie quella potenza si distribuisce: lo stesso altoparlante sembra assordante a un metro e appena udibile in fondo a un prato. Si definisce **intensità** di un'onda la potenza che attraversa una superficie perpendicolare alla direzione di propagazione, divisa per l'area S della superficie:

$$I = \frac{P}{S} \ (\mathrm{W/m^2})$$

Pensa ora a una sorgente puntiforme che emette onde sferiche con potenza P, uguale in tutte le direzioni, in un mezzo che non assorbe energia. Tutta la potenza emessa attraversa ogni sfera centrata nella sorgente, e una sfera di raggio r ha area $4\pi r^2$. Quindi alla distanza r dalla sorgente

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

L'intensità di un'onda sferica diminuisce con il quadrato della distanza: a distanza doppia la stessa potenza si distribuisce su un'area quattro volte maggiore (Figura 5.5). Poiché l'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza, l'ampiezza diminuisce come $1/r$: a distanza doppia è dimezzata. È la stessa geometria della legge di gravitazione (*Fisica 3*, capitolo 13): ogni volta che qualcosa si distribuisce uniformemente su sfere sempre più grandi compare un $1/r^2$. Un'onda piana ideale, invece, non si allarga: la sua intensità resta costante lungo la propagazione, finché il mezzo non ne assorbe una parte.

ESEMPIO SVOLTO

Un altoparlante in un prato

Problema. Un piccolo altoparlante, posto in mezzo a un prato, emette onde sonore con una potenza di 0,50 W; supponi che le emetta in modo uguale in tutte le direzioni e che l'aria non assorba energia. a) Calcola l'intensità a 2,0 m e a 8,0 m. b) Di quale fattore è diminuita l'ampiezza dell'onda fra le due distanze? c) Quanta energia sonora entra in un minuto da una finestra aperta di 1,0 m^2, rivolta verso l'altoparlante, a 8,0 m?

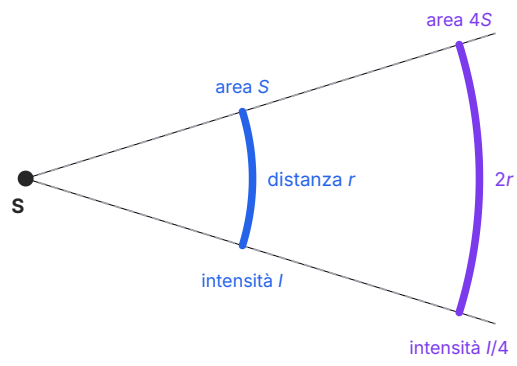
Soluzione. a) $I = P/(4\pi r^2)$: a 2,0 m, $I = 0{,}50\ W/(4\pi \times (2{,}0\ m)^2) = 9{,}9 \times 10^{-3}\ W/m^2$; a 8,0 m, $I = 0{,}50\ W/(4\pi \times (8{,}0\ m)^2) = 6{,}2 \times 10^{-4}\ W/m^2$. La distanza è quadruplicata, l'intensità è diventata 1/16.

b) L'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza, quindi l'ampiezza è proporzionale a $\sqrt{I}$: diventa $\sqrt{(1/16)} = 1/4$ del valore a 2,0 m, come previsto dalla legge $1/r$.

c) La potenza che attraversa la finestra è $IS = 6{,}2 \times 10^{-4}\ W/m^2 \times 1{,}0\ m^2 = 6{,}2 \times 10^{-4}\ W$; in 60 s l'energia è $6{,}2 \times 10^{-4}\ W \times 60\ s = 3{,}7 \times 10^{-2}\ J$.

Commento. Sono energie piccolissime: l'orecchio è un rivelatore straordinariamente sensibile. Il modello trascura il terreno, che riflette parte del suono, e l'assorbimento dell'aria, piccolo a queste distanze. Nel capitolo sul suono imparerai a esprimere le intensità con una scala logaritmica, i decibel.

a) La stessa potenza su superfici sempre più grandi



b) Intensità e ampiezza

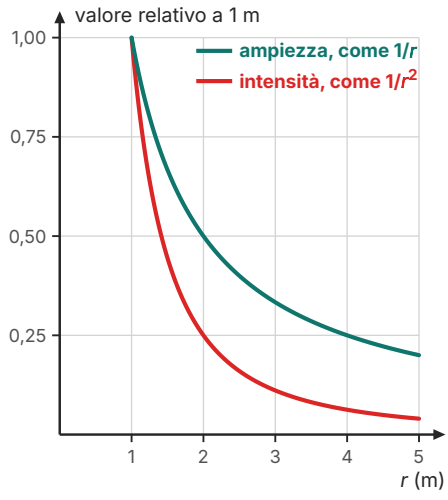


Figura 5.5 a) La potenza che attraversa l'area S alla distanza r dalla sorgente puntiforme S attraversa, alla distanza $2r$, un'area $4S$: l'intensità è un quarto. b) Intensità e ampiezza di un'onda sferica in funzione della distanza, relative ai valori a 1 m (curve calcolate con $1/r^2$ e $1/r$).

5.6 Riflessione e trasmissione di un impulso

5.6.1 L'impulso arriva in fondo alla corda

Che cosa succede quando un impulso arriva all'estremo di una corda? Dipende da come è fatto l'estremo. Se la corda è legata a un muro, il suo ultimo punto non può muoversi: è un **estremo fisso**. L'esperienza mostra che l'impulso torna indietro, è un'**onda riflessa**, ma **capovolto**: una gobba verso l'alto ritorna come un avvallamento (Figura 5.6a).

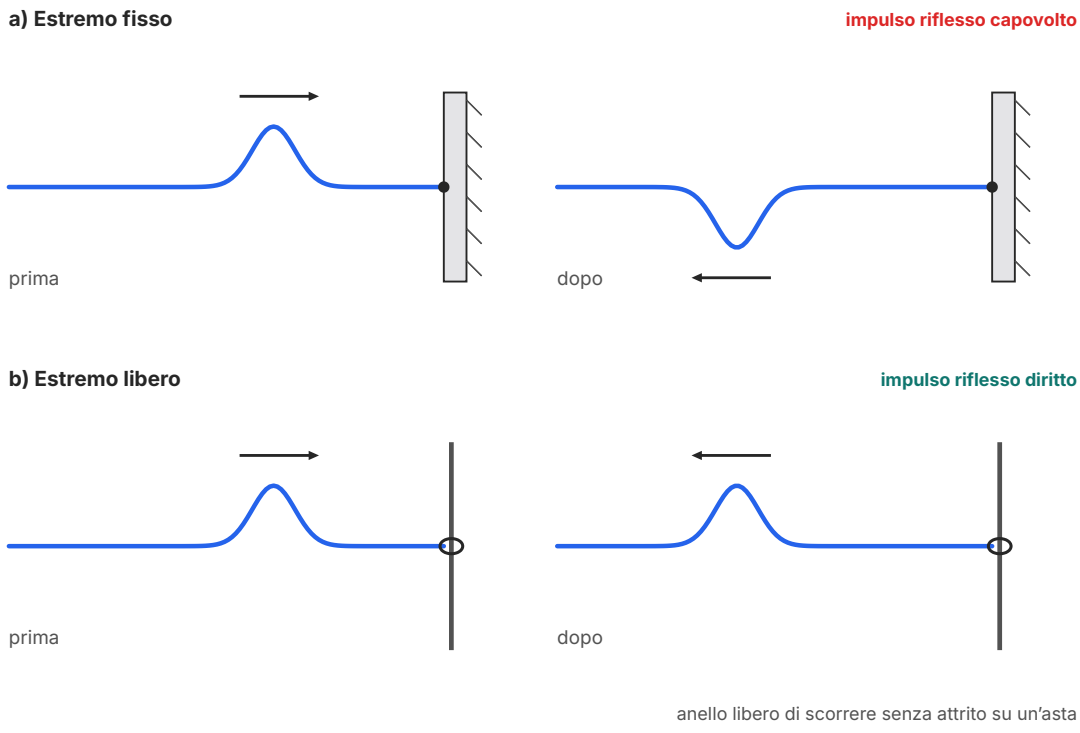


Figura 5.6 Riflessione di un impulso, prima e dopo l'arrivo all'estremo. a) Estremo fisso: l'impulso riflesso è capovolto. b) Estremo libero (anello leggero su un'asta liscia): l'impulso riflesso è diritto. Le frecce indicano il verso di propagazione.

La ragione è il terzo principio della dinamica. Quando la gobba arriva al muro, la corda tira verso l'alto il punto di attacco; il muro, che non si muove, reagisce tirando la corda verso il basso con una forza opposta, e si comporta come una sorgente che lancia all'indietro un impulso uguale e capovolto.

Se invece l'estremo della corda è legato a un anello leggero, libero di scorrere senza attrito lungo un'asta verticale, l'ultimo punto della corda può muoversi liberamente: è un **estremo li-**

bero. Quando arriva la gobba, l'anello sale, supera l'altezza della gobba perché nessuno lo trattiene, e trascina di nuovo in alto la corda mentre ridiscende: l'impulso riflesso è **diritto** (Figura 5.6b). In entrambi i casi l'impulso riflesso ha la stessa velocità e la stessa larghezza di quello incidente, perché viaggia sulla stessa corda; se l'estremo non assorbe energia, ha anche la stessa ampiezza.

5.6.2 Da una corda a un'altra

Una situazione intermedia si ha quando due corde di densità lineare diversa sono unite e tese con la stessa tensione. Un impulso che arriva alla giunzione si divide in due: una parte prosegue nella seconda corda, è l'**onda trasmessa**, e una parte torna indietro, è l'onda riflessa (Figura 5.7).

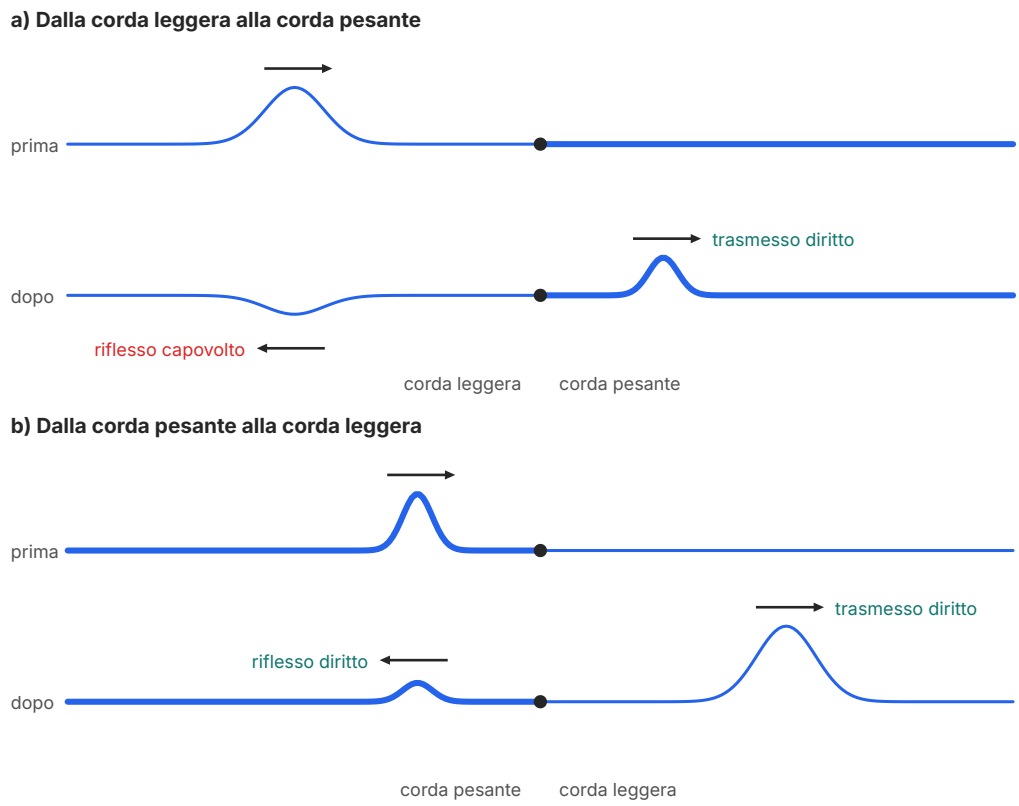


Figura 5.7 Un impulso incontra la giunzione (punto nero) fra due corde con la stessa tensione; la corda più pesante, disegnata più spessa, ha densità lineare quattro volte maggiore, quindi onde due volte più lente. a) Dalla leggera alla pesante: riflesso capovolto. b) Dalla pesante alla leggera: riflesso diritto. Ampiezze e larghezze degli impulsi sono disegnate in scala.

- Dalla corda leggera alla pesante: la corda pesante, con la sua maggiore inerzia, si comporta in parte come un estremo fisso. L'impulso trasmesso è diritto, l'impulso riflesso è **capovolto**.
- Dalla corda pesante alla leggera: la corda leggera si comporta in parte come un estremo libero. L'impulso trasmesso è diritto, e anche l'impulso riflesso è **diritto**.

I due casi limite sono quelli che conosci già: se la seconda corda è infinitamente pesante la giunzione è un estremo fisso e non c'è onda trasmessa; se la seconda corda ha massa trascurabile la giunzione è un estremo libero. L'impulso trasmesso è sempre diritto, perché la giunzione lo trascina nello stesso verso in cui è spostata.

Osserva nella Figura 5.7 anche la **larghezza** degli impulsi. Il tempo che l'impulso impiega a passare per la giunzione è lo stesso da una parte e dall'altra, perché è lo stesso il moto del punto di giunzione; ma nella corda pesante l'impulso viaggia più lentamente, quindi nello stesso tempo occupa un tratto di corda più corto. Per un'onda armonica vale la stessa cosa: passando da una corda all'altra la frequenza non cambia, perché ogni oscillazione della giunzione genera un'oscillazione nella seconda corda, mentre cambiano la velocità e, con essa, la lunghezza d'onda:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1} \text{ (stessa frequenza)}$$

È ciò che accade nella rifrazione, che ritroverai nel prossimo capitolo per le onde sull'acqua.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: la velocità di un impulso su un tubo di gomma

Materiali. Un tubo di gomma morbida lungo 4,80 m e di massa (360 ± 3) g, cioè con densità lineare μ_0 = (0,0750 ± 0,0008) kg/m (misurata prima di tenderlo); un gancio a muro; un dinamometro da 50 N (incertezza ±0,3 N); un metro a nastro; nastro adesivo colorato; uno smartphone che riprende al rallentatore a 240 fotogrammi al secondo, su un treppiede; un righello di legno.

Procedimento. 1) Fissa un estremo del tubo al gancio e collega l'altro al dinamometro; tieni il tubo orizzontale e teso con la forza voluta, che leggi sul dinamometro. 2) Segna sul tubo con il nastro due tacche distanti d = (3,00 ± 0,01) m. 3) Inquadra le due tacche con lo smartphone, avvia la ripresa e colpisci il tubo con il righello vicino al gancio: parte un impulso. 4) Riguardando il video fotogramma per fotogramma, conta i fotogrammi fra il passaggio del picco dell'impulso sulla prima tacca e sulla seconda; il tempo è il numero di fotogrammi diviso per 240. 5) Ripeti cinque volte per ciascuna delle tensioni 10,0 N, 20,0 N, 30,0 N e 40,0 N; prendi come tempo la media e come incertezza la semidispersione, che nelle prove risulta di circa un fotogramma (0,004 s). 6) Ripeti una prova colpendo il tubo più forte: l'impulso è più alto, ma il tempo non cambia entro l'incertezza.

Tabella 5.1 Tempi di volo di un impulso su un tubo di gomma (tratto di 3,00 m) per quattro tensioni (dati tipici; ogni tempo è la media di cinque prove). L'ultima colonna è la previsione $\sqrt{(F_T/\mu_0)}$ con μ_0 = 0,0750 kg/m.

F_T (N)	Δt (s)	v (m/s)	v^2 (m^2/s^2)	v_{prev} (m/s)
10,0	0,258 ± 0,004	11,6 ± 0,2	135 ± 5	11,5 ± 0,2
20,0	0,181 ± 0,004	16,6 ± 0,4	275 ± 14	16,3 ± 0,2
30,0	0,149 ± 0,004	20,1 ± 0,6	405 ± 24	20,0 ± 0,2
40,0	0,128 ± 0,004	23,4 ± 0,8	549 ± 38	23,1 ± 0,2

Che cosa concludere. Le velocità si ricavano da $v = d/\Delta t$, con incertezza relativa pari alla somma di quelle di d e di Δt. Nel grafico di v^2 in funzione di F_T (Figura 5.8) i punti stanno su una retta che passa per l'origine, come previsto da $v^2 = F_T/\mu$. Le rette per l'origine di massima e di minima pendenza che attraversano tutte le barre d'errore hanno pendenze 14,0 m/kg e 13,0 m/kg; la pendenza è quindi (13,5 ± 0,5) m/kg, e la densità lineare che se ne ricava è μ = 1/pendenza = (0,074 ± 0,003) kg/m.

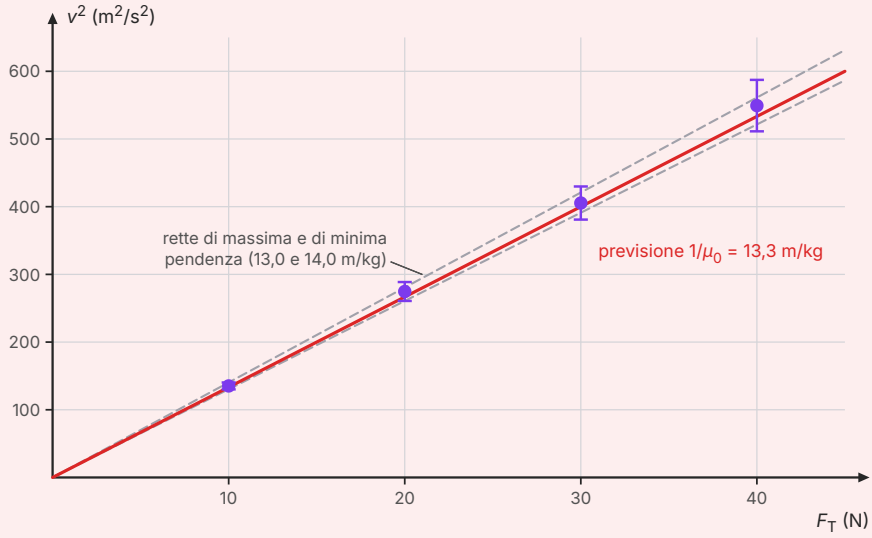


Figura 5.8 I dati della Tabella 5.1: v^2 in funzione della tensione, con le barre d'errore. In rosso la retta prevista $v^2 = F_T/\mu_0$; tratteggiate in grigio le rette per l'origine di massima e di minima pendenza compatibili con tutti i punti.

Confronto teoria–esperimento. Con la tensione di 30,0 N la previsione è $v = \sqrt{(30{,}0\ \text{N}/0{,}0750\ \text{kg/m})} = 20{,}0$ m/s, con incertezza relativa ½(0,3/30,0 + 0,0008/0,0750) ≈ 1,0%, cioè (20,0 ± 0,2) m/s; la misura è (20,1 ± 0,6) m/s. Gli intervalli si sovrappongono: previsione e misura sono compatibili, e lo sono anche alle altre tensioni (Tabella 5.1). Allo stesso modo la pendenza misurata, (13,5 ± 0,5) m/kg, è compatibile con il valore previsto $1/\mu_0$ = (13,3 ± 0,1) m/kg. Tutti e quattro i punti, però, stanno un po' sopra la retta prevista: può essere un effetto sistematico. Tendendosi il tubo di gomma si allunga, e la stessa massa distribuita su una lunghezza maggiore dà una densità lineare un po' minore di quella misurata a riposo, quindi impulsi un po' più veloci.

Sicurezza. Un tubo di gomma teso che sfugge di mano o si stacca dal gancio scatta come un elastico: controlla il fissaggio, non superare la tensione prevista, non stare sulla linea del tubo e indossa gli occhiali protettivi.

Per la relazione. Riporta la tabella con le incertezze e il grafico di v^2 in funzione di F_T con le barre d'errore e le rette di massima e minima pendenza. Discuti la compatibilità a ogni tensione e quella della pendenza. Proponi una prova per verificare l'ipotesi dell'allungamento (per esempio, misurare la distanza fra le tacche a ogni tensione e ricalcolare μ) e spiega perché il risultato non dipende dall'ampiezza dell'impulso.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$v = \lambda/T = \lambda f$ — velocità di propagazione di un'onda periodica (m/s): in un periodo l'onda avanza di una lunghezza d'onda. f è fissata dalla sorgente, v dal mezzo, λ si adegua.

$v = \sqrt{(F_T/\mu)}$, $\mu = m/L$ — velocità di un'onda trasversale su una corda tesa (F_T in N, μ in kg/m); vale per una corda flessibile e omogenea e per piccole ampiezze. Non dipende né dall'ampiezza né dalla frequenza.

$y(x, t) = A\ \text{sen}(kx - \omega t)$ — onda armonica che si propaga verso le x positive; con $kx + \omega t$ si propaga verso le x negative. $k = 2\pi/\lambda$ è il numero d'onda (rad/m), $\omega = 2\pi f$ la pulsazione (rad/s), $v = \omega/k$.

$k\Delta x = 2\pi\Delta x/\lambda$ — differenza di fase fra due punti distanti Δx: in fase a distanza λ, in opposizione a distanza $\lambda/2$.

ωA — valore massimo della velocità di oscillazione di un punto del mezzo: dipende dalla sorgente e non va confuso con v.

Energia $\propto A^2 f^2$ — l'energia trasportata da un'onda armonica cresce con il quadrato dell'ampiezza e della frequenza.

$I = P/S$; $I = P/(4\pi r^2)$ — intensità (W/m^2), e intensità di un'onda sferica emessa da una sorgente puntiforme che irradia ugualmente in tutte le direzioni, in un mezzo che non assorbe; l'ampiezza decresce come $1/r$.

$\lambda_2/\lambda_1 = v_2/v_1$ — passaggio da un mezzo a un altro: la frequenza non cambia. Estremo fisso: riflesso capovolto; estremo libero: riflesso diritto.

SINTESI

- Un'onda è una perturbazione che si propaga trasportando energia e quantità di moto, senza trasporto netto di materia. Le onde meccaniche hanno bisogno di un mezzo materiale.
- In un'onda trasversale i punti del mezzo oscillano perpendicolarmente alla direzione di propagazione, in un'onda longitudinale parallelamente. Nei fluidi si propagano solo onde longitudinali; le onde sulla superficie dell'acqua sono miste, con particelle che descrivono orbite quasi circolari.
- I fronti d'onda sono le superfici dei punti che oscillano in fase; i raggi indicano la direzione di propagazione e sono perpendicolari ai fronti. Una sorgente puntiforme produce onde sferiche, che lontano dalla sorgente sono localmente piane.
- Un'onda periodica è caratterizzata da ampiezza, lunghezza d'onda, periodo e frequenza; in un periodo avanza di una lunghezza d'onda: $v = \lambda f$.
- La frequenza è fissata dalla sorgente, la velocità di propagazione dal mezzo; la lunghezza d'onda è la loro conseguenza.
- Su una corda tesa $v = \sqrt{(F_T/\mu)}$; in ogni mezzo la velocità nasce dal rapporto fra una proprietà elastica e una inerziale.
- Un'onda armonica che si propaga verso le x positive è $y = A\ \text{sen}(kx - \omega t)$, con $k = 2\pi/\lambda$ e $\omega = 2\pi f$; il segno + davanti a ωt indica la propagazione verso le x negative.
- La fotografia $y(x)$ a tempo fissato si ripete ogni λ, la storia $y(t)$ di un punto fissato si ripete ogni T; ogni punto compie un moto armonico.
- La velocità di oscillazione di un punto del mezzo, al massimo ωA, è diversa dalla velocità di propagazione e dipende dalla sorgente.
- L'energia trasportata è proporzionale al quadrato dell'ampiezza e della frequenza. L'intensità è la potenza per unità di area; per un'onda sferica $I = P/(4\pi r^2)$ e l'ampiezza decresce come $1/r$.
- Un impulso si riflette capovolto da un estremo fisso e diritto da un estremo libero. Alla giunzione fra due corde l'impulso trasmesso è sempre diritto, quello riflesso è capovolto se la seconda corda è più pesante; la frequenza non cambia, la lunghezza d'onda sì.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Un'onda meccanica che si propaga in un mezzo trasporta:
   A. materia, ma non energia
   B. energia e quantità di moto, senza trasporto netto di materia
   C. soltanto quantità di moto
   D. materia ed energia nello stesso verso

2. ● In un'onda longitudinale i punti del mezzo oscillano:
   A. perpendicolarmente alla direzione di propagazione
   B. lungo orbite circolari
   C. parallelamente alla direzione di propagazione
   D. solo sulla superficie del mezzo

3. ● Quando un'onda passa da un mezzo a un altro, la grandezza che non cambia è:
   A. la frequenza
   B. la velocità di propagazione
   C. la lunghezza d'onda
   D. il numero d'onda

4. ● Un'onda ha lunghezza d'onda 0,50 m e frequenza 6,0 Hz. La sua velocità di propagazione è:
   A. 0,083 m/s
   B. 12 m/s
   C. 6,5 m/s
   D. 3,0 m/s

5. ●● Se la tensione di una corda viene quadruplicata, la velocità delle onde sulla corda:
   A. quadruplica
   B. raddoppia
   C. si dimezza
   D. non cambia

6. ●● L'onda $y = A\ \text{sen}(kx + \omega t)$ si propaga:
   A. verso le x negative
   B. verso le x positive
   C. in entrambi i versi
   D. in un verso che dipende dal valore di A

7. ●● Due punti di una corda distano mezza lunghezza d'onda lungo la direzione di propagazione. Le loro oscillazioni sono:
   A. in fase
   B. sfasate di un quarto di periodo
   C. indipendenti l'una dall'altra
   D. in opposizione di fase

8. ●● Ci si allontana da una sorgente puntiforme che emette onde sferiche, passando da 5 m a 10 m. L'intensità:
   A. si dimezza
   B. raddoppia
   C. diventa un quarto
   D. diventa un ottavo

Vero o falso

9. ● In un'onda trasversale su una corda ogni tratto di corda viene trascinato dall'onda nel verso di propagazione. V / F

10. ● Quando un'onda passa da una corda leggera a una corda pesante tesa con la stessa tensione, la sua frequenza non cambia. V / F

11. ●● Un impulso riflesso da un estremo fisso torna capovolto. V / F

12. ●● La velocità massima di oscillazione dei punti di una corda è sempre uguale alla velocità di propagazione dell'onda. V / F

13. ●● Raddoppiando l'ampiezza di un'onda armonica, a parità di frequenza, l'energia trasportata raddoppia. V / F

Applicare

14. ● Al largo, le creste delle onde del mare distano 100 m e passano accanto a una boa ogni 8,0 s. Calcola la frequenza e la velocità di propagazione delle onde.

15. ● Un'onda sonora di 440 Hz si propaga nell'aria a 20 °C (v = 343 m/s) e poi nell'acqua (v = 1480 m/s). Calcola la lunghezza d'onda nei due mezzi.

16. ● Una corda con densità lineare 5,0 g/m è tesa con una forza di 50 N. Con quale velocità si propaga un impulso?

17. ●● Un'onda su una corda è descritta da $y = (0{,}030\text{ m})\,\text{sen}[(4{,}0\text{ rad/m})x - (20\text{ rad/s})t]$. Trova ampiezza, lunghezza d'onda, frequenza, periodo, velocità e verso di propagazione.

18. ●● Completa: «La velocità di un'onda su una corda cresce con la _____ e diminuisce con la _____ ; la frequenza dell'onda è fissata dalla _____ , e la lunghezza d'onda è uguale al rapporto fra la _____ e la frequenza.»

19. ●● Osserva la Figura 5.4. a) Che cosa sta facendo il punto x_1 all'istante $t = 0$? b) In quale istante passa per la prima volta per $y = 0$, e in quale verso si sta muovendo? c) Quale punto della corda, fra $x = 0$ e $x = 0{,}80$ m, si trova in quell'istante su una cresta?

20. ● Un altoparlante emette in modo uguale in tutte le direzioni una potenza sonora di 2,0 W. Calcola l'intensità a 5,0 m di distanza, trascurando l'assorbimento.

21. ●● A 3,0 m da una sorgente puntiforme l'ampiezza di un'onda è 6,0 mm. Quanto vale l'ampiezza a 9,0 m? Quanto vale il rapporto fra l'intensità a 9,0 m e quella a 3,0 m?

Problemi

22. ●● La corda più sottile di una chitarra ha densità lineare $4{,}0 \times 10^{-4}$ kg/m ed è tesa con una forza di 72 N. a) Calcola la velocità delle onde sulla corda. b) Quanto impiega un impulso a percorrere i 65 cm della parte vibrante? c) Quale tensione servirebbe perché la velocità fosse 300 m/s?

23. ●● Le onde P di un terremoto viaggiano nella crosta a 6,0 km/s, le onde S a 3,5 km/s. Una stazione sismica registra le onde S 32 s dopo le onde P. a) A quale distanza è avvenuto il terremoto? b) Quanto tempo dopo la scossa sono arrivate le onde P alla stazione?

24. ●●● Un terremoto in mare genera uno tsunami a 900 km da una costa; la profondità media dell'oceano lungo il percorso è 4,0 km. a) Con la relazione $v \approx \sqrt{(gh)}$, valida per onde con lunghezza d'onda molto maggiore della profondità, calcola la velocità in mare aperto e il tempo che lo tsunami impiega ad arrivare. b) Il periodo delle onde è 15 min: calcola la lunghezza d'onda in mare aperto. c) Vicino alla costa, dove la profondità è 20 m, quanto valgono velocità e lunghezza d'onda? Quale grandezza è rimasta la stessa, e perché?

25. ●●● Una massa di 0,50 kg appesa a una molla di costante elastica 200 N/m oscilla verticalmente con ampiezza 4,0 cm; alla massa è fissato l'estremo di una lunga corda orizzontale, con densità lineare 0,020 kg/m e tesa con una forza di 8,0 N. Supponi che la corda non modifichi il moto della massa. a) Calcola pulsazione e frequenza dell'oscillatore (*Fisica 3*, capitolo 4). b) Calcola velocità, lunghezza d'onda e numero d'onda dell'onda sulla corda. c) Confronta la velocità massima di oscillazione di un punto della corda con la velocità di propagazione.

26. ●●● Un vibratore che oscilla a 12 Hz è collegato a una corda orizzontale con densità lineare 0,060 kg/m; l'altro estremo passa su una carrucola e regge una massa appesa, che tiene tesa la corda. a) Quale massa serve perché la lunghezza d'onda sulla corda sia 1,50 m? b) Se si raddoppia la massa appesa, che cosa succede alla velocità e alla lunghezza d'onda? c) E se invece si raddoppia la frequenza del vibratore, lasciando la massa del punto a)?

27. ●●● Una corda leggera (densità lineare 0,010 kg/m) è unita a una corda pesante (0,090 kg/m); entrambe sono tese con una forza di 9,0 N. Una sorgente scuote la corda leggera a 15 Hz. a) Calcola la velocità e la lunghezza d'onda nelle due corde. b) Un impulso della durata di 0,040 s viaggia sulla corda leggera verso la giunzione: quanto è lungo sulla corda leggera e quanto, dopo il passaggio, sulla corda pesante? c) Descrivi (diritto o capovolto) l'impulso riflesso e quello trasmesso.

28. ●●● L'energia meccanica di un tratto di corda di massa Δm che oscilla di moto armonico con ampiezza A e pulsazione ω è $\frac{1}{2}\Delta m\omega^2 A^2$ (*Fisica 3*, capitolo 4). Una corda con densità lineare 0,050 kg/m, tesa con una forza di 80 N, è percorsa da un'onda armonica di frequenza 10 Hz e ampiezza 1,5 cm. a) Quanta energia contiene ogni metro di corda raggiunto dall'onda? b) L'onda avanza portando con sé questa energia: quanta energia trasporta in un secondo, cioè qual è la potenza dell'onda? c) Come cambia la potenza se si raddoppia l'ampiezza? E se si raddoppia la frequenza?

29. ●● Un'onda armonica di ampiezza 5,0 mm e frequenza 50 Hz si propaga su una corda verso le x negative con velocità 25 m/s; all'istante $t = 0$ il punto $x = 0$ si trova nella posizione di equilibrio. a) Calcola k, ω e λ. b) Scrivi una funzione d'onda adatta, nella forma con il seno. c) Calcola la velocità massima di oscillazione di un punto della corda.

Ragionare e argomentare

30. ●● Perché all'interno di un liquido possono propagarsi onde longitudinali ma non onde trasversali? Che cosa hanno potuto concludere i sismologi osservando che le onde S non attraversano il nucleo esterno della Terra?

31. ●● Trova l'errore. «Per raddoppiare la velocità di un'onda su una corda basta raddoppiare la frequenza con cui si scuote l'estremo, perché $v = \lambda f$.»

32. ●●● Progetta un esperimento per misurare la densità lineare di una corda lunga e pesante, fissata a due pali, che non puoi staccare né pesare; puoi misurarne la tensione con un dinamometro. Indica le misure da fare, la formula da usare e le principali fonti di incertezza.

33. ●●● Discuti i limiti del modello $v = \sqrt{(F_T/\mu)}$. In quali situazioni reali ti aspetti che non valga bene (pensa all'ampiezza degli impulsi, alla rigidità di un cavo d'acciaio spesso, all'attrito con l'aria)? Perché, comunque, l'analisi dimensionale dice che la velocità non può dipendere soltanto dalla tensione?

PER APPROFONDIRE

- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: i capitoli sulle onde e sul suono, dove le onde su una corda e nell'aria sono costruite a partire dagli oscillatori armonici.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sulle onde, con molti esempi numerici sulla funzione d'onda, sulla velocità in una corda e sulla potenza trasportata.
- [HEW] P. G. Hewitt, *Conceptual Physics*: il capitolo sulle onde e le vibrazioni, per rivedere senza formule le onde trasversali e longitudinali e la differenza fra velocità dell'onda e moto del mezzo.
- [HUY] C. Huygens, *Traité de la lumière*: nel primo capitolo l'autore descrive la propagazione di un'onda in una fila di sfere elastiche che si urtano, un'immagine meccanica che ritroverai nel prossimo capitolo.
- [TAY] J. R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*: la propagazione delle incertezze nelle potenze e la verifica di una proporzionalità con un grafico, come nell'attività di laboratorio.

Glossario del capitolo

Densità lineare
Massa per unità di lunghezza di una corda o di un filo, $\mu = m/L$, in kg/m.

Estremo fisso
Estremo di una corda che non può muoversi: un impulso vi si riflette capovolto.

Estremo libero
Estremo di una corda libero di muoversi perpendicolarmente alla corda: un impulso vi si riflette diritto.

Fronte d'onda
Insieme dei punti del mezzo che, in un certo istante, hanno la stessa fase.

Funzione d'onda
Funzione $y(x, t)$ che dà lo spostamento del punto del mezzo di posizione x all'istante t.

Impulso
Perturbazione di breve durata che si propaga in un mezzo.

Intensità
Potenza trasportata da un'onda attraverso una superficie perpendicolare alla direzione di propagazione, divisa per l'area: $I = P/S$, in W/m^2.

Lunghezza d'onda
Distanza minima fra due punti di un'onda periodica che oscillano in fase, per esempio fra due creste successive; simbolo λ.

Numero d'onda
Grandezza $k = 2\pi/\lambda$, in rad/m: nello spazio ha il ruolo che la pulsazione ha nel tempo.

Onda
Perturbazione che si propaga nello spazio trasportando energia e quantità di moto, senza trasporto netto di materia.

Onda armonica
Onda descritta da una funzione sinusoidale, $y = A\,\text{sen}(kx \mp \omega t)$; ogni punto del mezzo compie un moto armonico.

Onda longitudinale
Onda in cui i punti del mezzo oscillano parallelamente alla direzione di propagazione, formando compressioni e rarefazioni.

Onda meccanica
Onda che si propaga in un mezzo materiale, come una corda, l'acqua, l'aria o la roccia.

Onda piana
Onda con fronti d'onda piani e paralleli; i raggi sono paralleli.

Onda sferica
Onda con fronti d'onda sferici, prodotta da una sorgente puntiforme; i raggi escono dalla sorgente.

Onda trasmessa
Parte di un'onda che, arrivata alla superficie di separazione fra due mezzi, prosegue nel secondo mezzo.

Onda trasversale
Onda in cui i punti del mezzo oscillano perpendicolarmente alla direzione di propagazione.

Raggio
Linea orientata che indica la direzione di propagazione di un'onda; in un mezzo isotropo è perpendicolare ai fronti d'onda.

Velocità di oscillazione
Velocità di un punto del mezzo attorno alla sua posizione di equilibrio; al massimo vale ωA ed è diversa dalla velocità di propagazione.

Velocità di propagazione
Velocità con cui avanza il profilo di un'onda; dipende dal mezzo; $v = \lambda f$.

Soluzioni

1. B. È la definizione di onda: si propaga lo stato di moto, non il mezzo.

2. C. Per esempio le spire di una molla o gli strati d'aria in un'onda sonora.

3. A. La frequenza è fissata dalla sorgente; velocità, lunghezza d'onda e numero d'onda dipendono dal mezzo.

4. D. $v = \lambda f = 0{,}50\ \text{m} \times 6{,}0\ \text{Hz} = 3{,}0\ \text{m/s}$.

5. B. $v = \sqrt{(F_T/\mu)}$: con $4F_T$, v diventa $\sqrt{4} = 2$ volte maggiore.

6. A. A parità di segno davanti a kx, il segno + davanti a ωt indica la propagazione verso le x negative: la funzione dipende da $x + vt$.

7. D. La differenza di fase è $k\Delta x = (2\pi/\lambda)(\lambda/2) = \pi$.

8. C. $I \propto 1/r^2$: a distanza doppia l'intensità è $(1/2)^2 = 1/4$.

9. F. Ogni tratto oscilla attorno alla sua posizione di equilibrio, perpendicolarmente alla corda; ad avanzare è la configurazione, non la corda.

10. V. La frequenza è quella della sorgente: ogni oscillazione della giunzione genera un'oscillazione nella seconda corda; cambiano velocità e lunghezza d'onda.

11. V. Per il terzo principio il muro tira la corda in verso opposto a quello in cui la corda tira il muro.

12. F. Il massimo della velocità di oscillazione è ωA e dipende dalla sorgente, mentre $v = \sqrt{(F_T/\mu)}$ dipende solo dal mezzo; in generale sono diversi.

13. F. L'energia è proporzionale al quadrato dell'ampiezza: diventa $2^2 = 4$ volte maggiore.

14. $f = 1/T = 1/8{,}0\ \text{s} = 0{,}13\ \text{Hz}$ (0,125 Hz); $v = \lambda/T = 100\ \text{m}/8{,}0\ \text{s} = 12{,}5\ \text{m/s} \approx 13\ \text{m/s}$ (45 km/h). T e f sono quelli della sorgente (il vento che ha formato le onde), la velocità dipende dal mezzo.

15. La frequenza, fissata dalla sorgente, è la stessa nei due mezzi. Aria: $\lambda = v/f = 343\ \text{m/s}/440\ \text{Hz} = 0{,}780\ \text{m}$. Acqua: $\lambda = 1480\ \text{m/s}/440\ \text{Hz} = 3{,}36\ \text{m}$.

16. $\mu = 5{,}0 \times 10^{-3}\ \text{kg/m}$; $v = \sqrt{(F_T/\mu)} = \sqrt{(50\ \text{N}/(5{,}0 \times 10^{-3}\ \text{kg/m}))} = \sqrt{(1{,}0 \times 10^4\ \text{m}^2/\text{s}^2)} = 1{,}0 \times 10^2\ \text{m/s}$.

17. $A = 0{,}030\ \text{m} = 3{,}0\ \text{cm}$; $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/(4{,}0\ \text{rad/m}) = 1{,}6\ \text{m}$ (1,57 m); $f = \omega/2\pi = (20\ \text{rad/s})/2\pi = 3{,}2\ \text{Hz}$ (3,18 Hz); $T = 1/f = 0{,}31\ \text{s}$; $v = \omega/k = (20\ \text{rad/s})/(4{,}0\ \text{rad/m}) = 5{,}0\ \text{m/s}$, verso le x positive (segno − davanti a ωt).

18. tensione; densità lineare (massa per unità di lunghezza); sorgente; velocità di propagazione (o semplicemente velocità).

19. a) Per $x_1 = \lambda/4$, $y = A\cos(\omega t)$: a $t = 0$ il punto è su una cresta ($y = 2{,}0\ \text{cm}$) ed è fermo. b) $y = 0$ per la prima volta quando $\omega t = \pi/2$, cioè a $t = T/4 = 0{,}10\ \text{s}$; in quell'istante il punto scende (y passa da valori positivi a negativi). c) A $t = 0{,}10\ \text{s}$ la fotografia è la curva tratteggiata, con la cresta in $x = 0{,}40\ \text{m}$: la cresta di x_1 si è spostata di $\lambda/4 = 0{,}20\ \text{m}$.

20. $I = P/(4\pi r^2) = 2{,}0\ \text{W}/(4\pi \times (5{,}0\ \text{m})^2) = 6{,}4 \times 10^{-3}\ \text{W/m}^2$.

21. L'ampiezza è proporzionale a $1/r$: a distanza tripla diventa $6{,}0\ \text{mm}/3 = 2{,}0\ \text{mm}$. L'intensità è proporzionale a $1/r^2$: $I_9/I_3 = (3{,}0/9{,}0)^2 = 1/9$.

22. a) $v = \sqrt{(72\ \text{N}/4{,}0 \times 10^{-4}\ \text{kg/m})} = \sqrt{(1{,}8 \times 10^5)}\ \text{m/s} = 4{,}2 \times 10^2\ \text{m/s}$ (424 m/s). b) $t = 0{,}65\ \text{m}/(424\ \text{m/s}) = 1{,}5 \times 10^{-3}\ \text{s}$. c) $F_T = \mu v^2 = 4{,}0 \times 10^{-4}\ \text{kg/m} \times (300\ \text{m/s})^2 = 36\ \text{N}$: la velocità diventa $300/424 = 0{,}71$ volte quella iniziale, la tensione $(0{,}71)^2 = 0{,}50$ volte.

23. a) Il ritardo è $\Delta t = d/v_S - d/v_P$, quindi $d = \Delta t \cdot v_P v_S/(v_P - v_S) = 32\ \text{s} \times (6{,}0\ \text{km/s} \times 3{,}5\ \text{km/s})/(2{,}5\ \text{km/s}) = 2{,}7 \times 10^2\ \text{km}$ (269 km). b) $t_P = d/v_P = 269\ \text{km}/(6{,}0\ \text{km/s}) = 45\ \text{s}$.

24. a) Il mezzo fissa la velocità: $v = \sqrt{(9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 4{,}0 \times 10^3\ \text{m})} = 2{,}0 \times 10^2\ \text{m/s}$ (198 m/s, circa 710 km/h); $t = 9{,}0 \times 10^5\ \text{m}/(198\ \text{m/s}) = 4{,}5 \times 10^3\ \text{s} \approx 76\ \text{min}$. b) Il periodo è fissato dalla sorgente: $\lambda = vT = 198\ \text{m/s} \times 900$

$s = 1{,}8 \times 10^5$ m $= 1{,}8 \times 10^2$ km (molto maggiore di 4 km: la relazione $\sqrt{(gh)}$ è applicabile). c) $v = \sqrt{(9{,}8 \times 20)}$ m/s = 14 m/s; $\lambda = 14$ m/s $\times$ 900 s $= 1{,}3 \times 10^4$ m = 13 km. È rimasto lo stesso il periodo (e la frequenza), fissato dalla sorgente: cambiando la profondità cambia il mezzo, quindi cambiano velocità e lunghezza d'onda.

25. a) Per il moto armonico della massa sulla molla, $\omega = \sqrt{(k_{el}/m)} = \sqrt{(200 \text{ N/m}/0{,}50 \text{ kg})} = 20$ rad/s; $f = \omega/2\pi = 3{,}2$ Hz (3,18 Hz). La massa è la sorgente e fissa la frequenza dell'onda. b) Il mezzo fissa la velocità: $v = \sqrt{(8{,}0 \text{ N}/0{,}020 \text{ kg/m})} = 20$ m/s; $\lambda = v/f = 20 \text{ m/s}/3{,}18 \text{ Hz} = 6{,}3$ m; $k = 2\pi/\lambda = \omega/v = (20 \text{ rad/s})/(20 \text{ m/s}) = 1{,}0$ rad/m. c) Ogni punto della corda oscilla come la sorgente, con ampiezza 0,040 m: velocità massima di oscillazione $\omega A = 20$ rad/s $\times$ 0,040 m = 0,80 m/s, venticinque volte minore della velocità di propagazione, 20 m/s.

26. a) La sorgente fissa $f = 12$ Hz; perché sia $\lambda = 1{,}50$ m serve $v = \lambda f = 18$ m/s. Il mezzo deve quindi avere $F_T = \mu v^2 = 0{,}060 \text{ kg/m} \times (18 \text{ m/s})^2 = 19{,}4$ N. Per l'equilibrio della massa appesa (la carrucola cambia solo la direzione della tensione) $F_T = mg$: $m = 19{,}4 \text{ N}/9{,}8 \text{ m/s}^2 = 2{,}0$ kg (1,98 kg). b) La tensione raddoppia, la velocità è moltiplicata per $\sqrt{2}$: $v = 25$ m/s (25,5 m/s); la frequenza resta 12 Hz, quindi anche λ è moltiplicata per $\sqrt{2}$: 2,1 m (2,12 m). c) La velocità resta 18 m/s, fissata dal mezzo; la lunghezza d'onda si dimezza: $\lambda = 18 \text{ m/s}/24 \text{ Hz} = 0{,}75$ m.

27. a) La tensione è la stessa, le densità diverse: $v_1 = \sqrt{(9{,}0/0{,}010)}$ m/s = 30 m/s, $v_2 = \sqrt{(9{,}0/0{,}090)}$ m/s = 10 m/s. La frequenza, fissata dalla sorgente, è 15 Hz in entrambe: $\lambda_1 = 30 \text{ m/s}/15 \text{ Hz} = 2{,}0$ m, $\lambda_2 = 10 \text{ m/s}/15 \text{ Hz} = 0{,}67$ m. b) Un impulso che dura 0,040 s occupa un tratto lungo $v\Delta t$: 30 m/s $\times$ 0,040 s = 1,2 m sulla corda leggera, 10 m/s $\times$ 0,040 s = 0,40 m su quella pesante. c) Passando dalla corda leggera alla pesante l'impulso riflesso è capovolto (la giunzione si comporta in parte come un estremo fisso), quello trasmesso è diritto.

28. a) Un metro di corda ha massa 0,050 kg; $\omega = 2\pi \times 10$ Hz = 62,8 rad/s. Per il moto armonico di ogni tratto, l'energia di un metro è $\frac{1}{2} \times 0{,}050 \text{ kg} \times (62{,}8 \text{ rad/s})^2 \times (0{,}015 \text{ m})^2 = 2{,}2 \times 10^{-2}$ J. b) Il mezzo fissa la velocità: $v = \sqrt{(80 \text{ N}/0{,}050 \text{ kg/m})} = 40$ m/s; in un secondo l'onda raggiunge 40 m di corda nuova, quindi $P = 2{,}22 \times 10^{-2} \text{ J/m} \times 40 \text{ m/s} = 0{,}89$ W. c) L'energia per metro è proporzionale ad A^2 e a ω^2 (quindi a f^2), mentre v non cambia: raddoppiando l'ampiezza la potenza diventa 4 volte maggiore (3,6 W); raddoppiando la frequenza, ancora 4 volte maggiore.

29. a) $\lambda = v/f = 25 \text{ m/s}/50 \text{ Hz} = 0{,}50$ m; $k = 2\pi/\lambda = 13$ rad/m (12,6 rad/m); $\omega = 2\pi f = 3{,}1 \times 10^2$ rad/s (314 rad/s). b) Verso le x negative e con $y(0, 0) = 0$: $y = (5{,}0 \text{ mm}) \operatorname{sen}[(12{,}6 \text{ rad/m})x + (314 \text{ rad/s})t]$ (anche la forma con −5,0 mm, che parte scendendo invece che salendo, è accettabile, perché il testo non dice il verso del moto iniziale). c) $\omega A = 314 \text{ rad/s} \times 5{,}0 \times 10^{-3}$ m = 1,6 m/s.

30. Traccia di risposta: in un'onda trasversale ogni strato del mezzo si sposta di lato rispetto allo strato vicino, e l'onda si propaga solo se il mezzo reagisce a questo scorrimento con una forza di richiamo. Un liquido scorre senza opporsi (non ha forma propria), mentre reagisce a una compressione: per questo vi si propagano solo onde longitudinali. Le onde S sono trasversali: se non attraversano il nucleo esterno, quel nucleo si comporta come un liquido.

31. L'errore è trattare v come se dipendesse da f. La velocità è fissata dal mezzo, $v = \sqrt{(F_T/\mu)}$; raddoppiando la frequenza della sorgente la velocità resta la stessa e si dimezza la lunghezza d'onda. Per raddoppiare v bisogna quadruplicare la tensione (o usare una corda con un quarto della densità lineare).

32. Traccia di risposta: si misura la tensione F_T con il dinamometro (inserito in un punto della corda o all'attacco) e la distanza d fra due tacche con un metro; si produce un impulso e lo si riprende al rallentatore, ricavando il tempo Δt fra le due tacche (oppure il tempo di andata e ritorno fra i due pali). Allora $v = d/\Delta t$ e $\mu = F_T/v^2 = F_T\Delta t^2/d^2$. L'incertezza relativa su μ è quella su F_T più il doppio di quelle su Δt e su d: conviene usare la distanza più lunga possibile e ripetere le misure. Se la corda è molto pesante e cede al centro, la tensione non è uniforme: è una fonte di errore sistematico.

33. Traccia di risposta: la formula vale per una corda perfettamente flessibile, omogenea, con ten-

sione che non cambia al passaggio dell'impulso. Con impulsi grandi la corda si allunga e la tensione cambia (la velocità può dipendere dall'ampiezza); un cavo d'acciaio spesso resiste anche alla flessione, e questa rigidità aggiunge una forza di richiamo, soprattutto per le lunghezze d'onda corte; l'attrito con l'aria e le perdite interne smorzano l'impulso, che si allarga e si abbassa. Quanto all'analisi dimensionale: la tensione si misura in $\mathrm{N} = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s^2}$, e nessuna sua potenza ha le unità m/s, perché resterebbero i kilogrammi; serve un'altra grandezza che contenga i kilogrammi, la densità lineare, e l'unica combinazione con le unità di una velocità è $\sqrt{(F_T/\mu)}$.